|  |  |
| --- | --- |
| Изображение выглядит как текст, керамические изделия, фарфор  Автоматически созданное описание | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Техническая физика»

**Домашняя работа №2**

по курсу «Вычислительная физика»

**Вариант 6**

Выполнила: Коберник Т. Н.

Группа: ФН4-81Б

Преподаватели: Хасаншин Р.Х., Ивлиев П.А.

Москва, 2023 г.

**Содержание**

[1.Постановка задачи 3](#_Toc129717896)

[2. Результаты 6](#_Toc129717897)

[3. Вывод 9](#_Toc129717898)

[4. Приложение 10](#_Toc129717899)

1. **Постановка задачи**

Решить явным и неявным методом краевые задачи для уравнений параболического типа. При решении задач с использованием явной схемы получите решение, соблюдая условие устойчивости и нарушив его. Постройте трехмерные графики распределения температур.

Проверьте согласованность начальных и краевых условий, а при необходимости согласуйте их.

,  ,  

,

, .

# **Теоретическая часть**

Рассмотрим различные варианты разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения теплопроводности:

- некоторые константы.

Введем в области равномерную сетку с шагом h по координате и шагом по времени:

Рассматриваемое уравнение теплопроводности содержит как производные по пространственной переменной x, так и по времени t, поэтому для построения его разностной аппроксимации придется использовать узлы сетки, соответствующие как минимум двум различным j. Свойства разностных схем зависят от того, на каком слое j по времени аппроксимируется выражение. Рассмотрим возможные варианты.

Явная схема

Для аппроксимации оператора используем шаблон, приведенный на рисунке 1.

Соответствующий разностный операторимеет вид:

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

*Рис.1. Шаблон явной схемы для уравнения теплопроводности*

Найдем погрешность аппроксимации разностным оператором исходного дифференциального оператора L в точке (x, t). В случае достаточно гладкой функции u(x, t) при достаточно малых шагах h и τ имеем:

Следовательно, разностный оператор аппроксимирует дифференциальный оператор L с погрешностью + в точке (x, t):

Разностная аппроксимация уравнения теплопроводности в соответствии с выбранным шаблоном будет иметь наименьшую погрешность, если правую часть f(x, t) уравнения аппроксимировать в узлах , так как при оценке погрешности аппроксимации все выражения раскладываются по формуле Тейлора с центром в этой точке. Итак, в явной схеме для уравнения теплопроводности разностная аппроксимация уравнения имеет вид:

Данное разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное на достаточно гладком решении u(x, t) с первым порядком погрешности по τ и вторым по h.

Исследуем схему на устойчивость по начальным данным с помощью метода гармоник. Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение

Для проверки устойчивости разностной схемы используем стандартное возмущение:

*Подставив его в разностную схему, получим характеристическое уравнение для определения (оценки значения) модуля перехода из одного временного слоя в другой:*

*Так как*

*То*

При изменении (когда число w пробегает все значения от минус до плюс бесконечности) число пробегает весь спектр оператора перехода со слоя на слой. В данном случае спектр расположен на отрезке .

Необходимое условие устойчивости явной схемы выполнено, если

Можно показать, что это же условие является и достаточным для устойчивости схемы. Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют указанному неравенству.

Неявная схема

Для решения уравнения теплопроводности может быть использована и неявная разностная схема, которая строиться путём аппроксимации дифференциального оператора второго порядка разностным на n+1 временном слое:

Изображение выглядит как часы

Автоматически созданное описание

*Рис.2. Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности*

Исследуем эту схему на устойчивость. Снова используем стандартное возмущение:

Следовательно, неявная схема абсолютно устойчива, поэтому шаг сетки можно выбирать произвольным образом.

Перепишем уравнение для неявного вида следующим образом ():

Получили СЛАУ:

Преобразуем уравнение:

Пускай , тогда

Учтем, что , тогда

Первое уравнение системы:

1. **Результаты**

Согласованность начальных условий отсутствует, поэтому преобразуем функцию таким образом, чтобы выполнялись условия . Примем . Рассмотрим результаты моделирования с данными условиями.

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

*Рис.1. Решение уравнения теплопроводности с использованием явной схемы (устойчивость соблюдена)*

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

*Рис.2. Решение уравнения теплопроводности с использованием явной схемы (устойчивость не соблюдена)*

Изображение выглядит как диаграмма

Автоматически созданное описание

*Рис.3. Решение уравнения теплопроводности с использованием неявной схемы*

1. **Вывод**

Таким образом, в ходе выполнения работы было решено уравнение теплопроводности с помощью явного и неявного метода. При выполнении условия устойчивости решение, полученное явным методом, совпало с решением, полученным методом прогонки, с хорошей точностью. При невыполнении условия устойчивости первый метод давал некорректные результаты. А второй, в свою очередь, позволял верно решить уравнение при любых соотношениях шага сетки по x и по t. Что соответствует теоретическому анализу приведенных выше методов.

Полученные графики распределения теплоты иллюстрируют физический смысл, заложенный в уравнение теплопроводности. Мы наблюдаем, как температура изменяется с течением времени в соответствии с законом косинуса, отвечающего внешнему источнику тепла.

**4. Приложение**

Код использованной программы:

1. **import** math
2. **import** numpy as np
3. **import** plotly.graph\_objects as go
5. **def** u\_start(x):
6. res **=** [1**-**math.cos(3**\***i**/**4) **for** i **in** x]
7. **return** res
9. **def** graphic(x,t,u):
10. fig **=** go.Figure(go.Surface(
11. x**=**x,
12. y**=**t,
13. z**=**u))
14. fig.show()
16. **def** check(tau,h,a):
17. **if** tau < (2 **\*** ((h **/** a) **\*\*** 2)):
18. **return** True
19. **else**:
20. **return** False
22. **def** eq\_heat\_explicit(tau, h, a, l\_max, t\_max):
23. **if** check(tau, h, a):
24. t **=** np.linspace(0, t\_max, round(t\_max **/** tau))
25. x **=** np.linspace(0, l\_max, round(l\_max **/** h))
26. u **=** [[0 **for** i **in** range(len(x))] **for** j **in** range(len(t))]
27. u[0] **=** u\_start(x)
28. **for** i **in** range(0, len(t)**-**1):
29. **for** j **in** range(1, len(x)**-**1):
30. u[i**+**1][j] **=** u[i][j] **+** tau **\*** (a **\*\*** 2) **\*** (u[i][j**+**1] **-** 2**\***u[i][j] **+** u[i][j**-**1]) **/** (h **\*\*** 2) **+** math.cos(x[j]) **\*** tau
31. u[i **+** 1][0] **=** 0
32. u[i **+** 1][len(x)**-**1] **=** u[i **+** 1][len(x)**-**2]
33. graphic(x, t, u)
34. **else**:
35. print("Чето плохо идет")
37. **def** eq\_heat\_not\_explicit(tau, h, a, l\_max, t\_max):
38. **if** check(tau, h, a):
39. t **=** np.linspace(0, t\_max, round(t\_max **/** tau))
40. x **=** np.linspace(0, l\_max, round(l\_max **/** h))
41. u **=** [[0 **for** i **in** range(len(x))] **for** j **in** range(len(t))]
42. u[0] **=** u\_start(x)
43. alpha **=** 1
44. beta **=** **-** 2 **-** (h **\*\*** 2) **/** ((a **\*\*** 2) **\*** tau)
45. gamma **=** 1
46. A, B **=** [0], [0]
47. **for** i **in** range(1, len(t)):
48. **for** j **in** range(1, len(x) **-** 1):
49. delta **=** **-** u[i **-** 1][j] **\*** (h **\*\*** 2) **/** ((a **\*\*** 2) **\*** tau) **-** (h **\*\*** 2) **\*** math.cos(x[j]) **/** (a **\*\*** 2)
50. B.append((delta **-** gamma **\*** B[**-**1]) **/** (beta **+** gamma **\*** A[**-**1]))
51. A.append(**-** alpha **/** (beta **+** gamma **\*** A[**-**1]))
52. u[i][**-**1] **=** B[**-**1] **/** (1 **-** A[**-**1])
53. **for** k **in** range(1, len(x) **-** 1):
54. u[i][**-**k **-** 1] **=** u[i][**-**k] **\*** A[**-**k] **+** B[**-**k]
55. u[i][0] **=** 0
56. u[i][**-**2] **=** u[i][**-**1]
57. graphic(x, t, u)
58. **else**:
59. print("Чето плохо идет")

62. status **=** 'устойчивые'
63. tau **=** 0.01
64. h **=** 0.1
65. a **=** 0.3
66. l\_max **=** 2**\***math.pi
67. t\_max **=** 1
68. eq\_heat\_explicit(tau, h, a, l\_max, t\_max)
69. eq\_heat\_not\_explicit(tau, h, a, l\_max, t\_max)