

HİPOTEZ TESTLERİ

Hipotez Nedir?

- HİPOTEZ, parametre hakkındaki bir inanıştır.

Parametre hakkındaki inancı test etmek için hipotez testi yapılır.

Hipotez testleri sayesinde örnekten elde edilen istatistikler aracılığıyla anakütle parametreleri hakkında karar verilir. Anakütle parametreleri hakkında karar verirken doğru ya da yanlış olması muhtemel yargılardan hareket edilir.

“Bu sınıfın not ortalamasının 75 olduğuna inanıyorum.”

Bir hipotez testinde iki hipotez yer alır:

H_0 : Boş hipotez, sıfır hipotezi

H_1 ya da H_a : Alternatif hipotez

Daha önce doğru olduğu ispatlanan veya ortak kabul görmüş yargılara sıfır hipotezi(H_0) denir. İnandığımız durum H_0 hipotezinde yer alır.

Aksi ispat edilemedikçe H_0 hipotezi doğru kabul edilir.

İddia edilen durum H_1 hipotezinde ele alınır. Sıfır hipotezinde belirtilen yargının tersi bir yargıyı içinde bulunduran hipoteze alternatif hipotez (H_1) denir.

Kendini kanıtlama zorunluluğu H_1 hipotezine aittir. H_1 hipotezi daima H_0 hipotezinin tersi olarak ifade edilir.

Problemlerdeki hipotezleri belirlemek:

Populasyon ortalamasının 75 olduğunu test ediniz.

Adımlar:

Soruyu istatistiksel olarak belirtin ($H_0: \mu = 75$)

Zıddını istatistiksel olarak belirtin ($H_1: \mu \neq 75$)

Hipotezler birbirinden tamamen ayrıktır.

Hipotezlerin belirlenmesi alıştırmaları:

Aşağıdaki durumlarda hipotezleri oluşturunuz:

1. Populasyonun günde TV seyrettiği sürenin ortalaması 12 midir?

$$\mu = 12 \quad \mu \neq 12 \quad H_0: \mu = 12 \quad H_1: \mu \neq 12$$

2. Populasyonun günde TV seyrettiği sürenin ortalaması 12 den farklı mıdır?

$$\mu \neq 12 \quad \mu = 12 \quad H_0: \mu = 12 \quad H_1: \mu \neq 12$$

3. Bir şapkanın ortalama maliyetinin 2.000TL'den büyük olduğu iddia edilmektedir, araştırınız.

$$H_0: \mu \leq 2\ 000$$

$$H_1: \mu > 2\ 000$$

4. Kitapçada harcanan paranın 25. TL'den küçük olduğu iddia edilmektedir, araştırınız.

$$H_0: \mu > 25$$

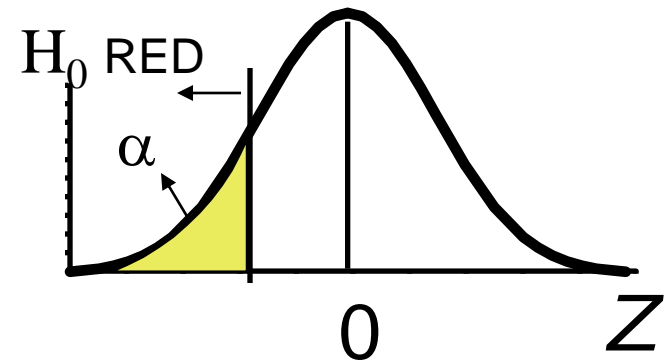
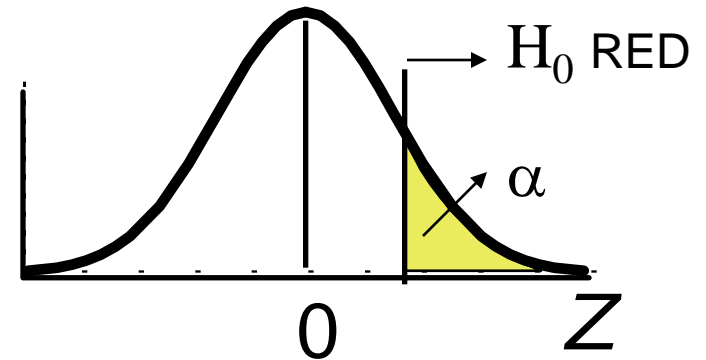
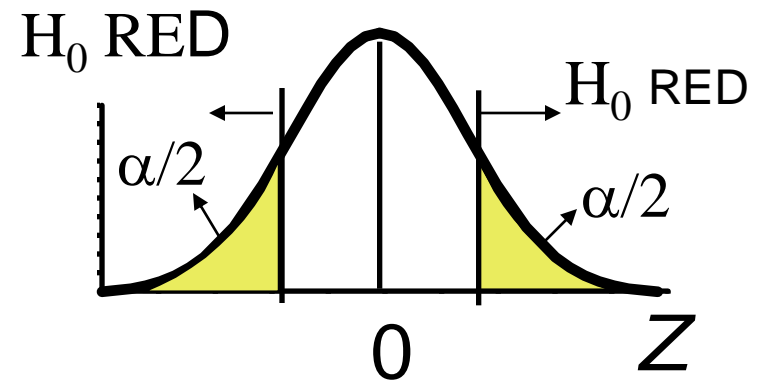
$$H_1: \mu \leq 25$$

Hipotez Çiftleri:

$H_0 : \mu = \mu_0$
 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ } ÇİFT TARAFLI TEST

$H_0 : \mu \leq \mu_0$
 $H_1 : \mu > \mu_0$ } TEK TARAFLI TEST
(Sağ taraf testi)

$H_0 : \mu \geq \mu_0$
 $H_1 : \mu < \mu_0$ } TEK TARAFLI TEST
(Sol taraf testi)



Önem Seviyesi - α

- Örneklem dağılımının RED bölgesinin büyüklüğünü gösterir.
- Tipik değerleri: 0.01, 0.05, 0.10
- Araştırmanın başında araştırmacı tarafından seçilir.

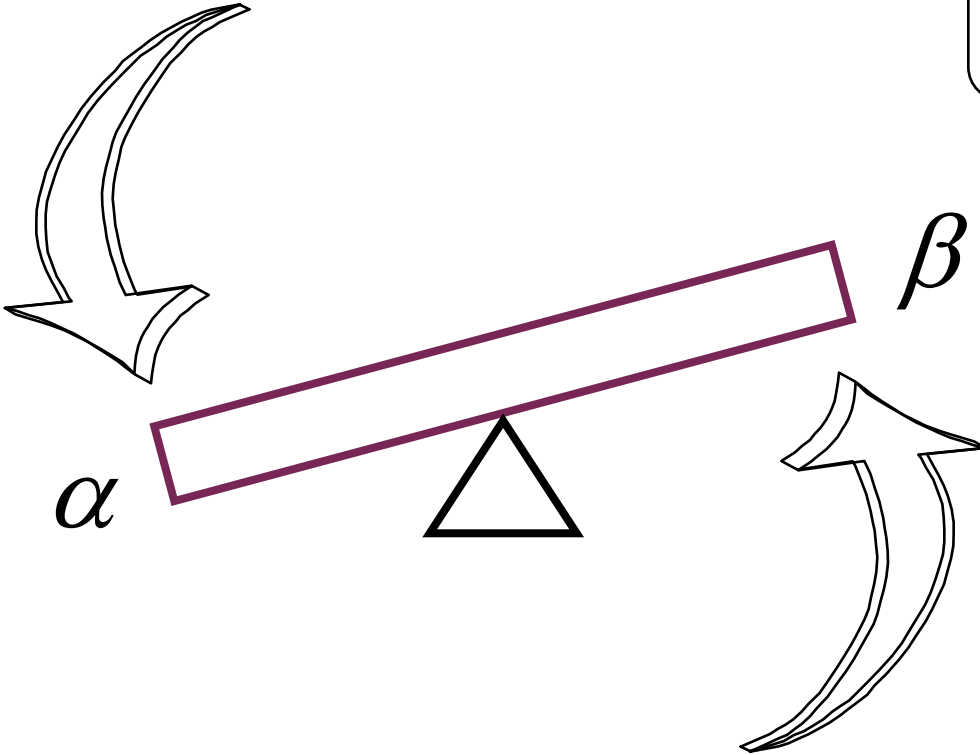
Karar Vermedeki Hatalar

Bir Mahkeme Jürisi			Hipotez Testi		
Gerçek Durum			Gerçek Durum		
Karar	Masum	Suçlu	Karar	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
Masum	Doğru	HATA	H_0 red edilemez	$1 - \alpha$	II. Tip Hata (β)
Suçlu	HATA	Doğru	H_0 red	I. Tip Hata (α)	Testin Gücü ($1 - \beta$)

H_0 : Masumdur

α & β Ters yönlü ilişki içindedir

Her iki hatayı da aynı anda azaltamazsınız!



β 'yı Etkileyen Faktörler:

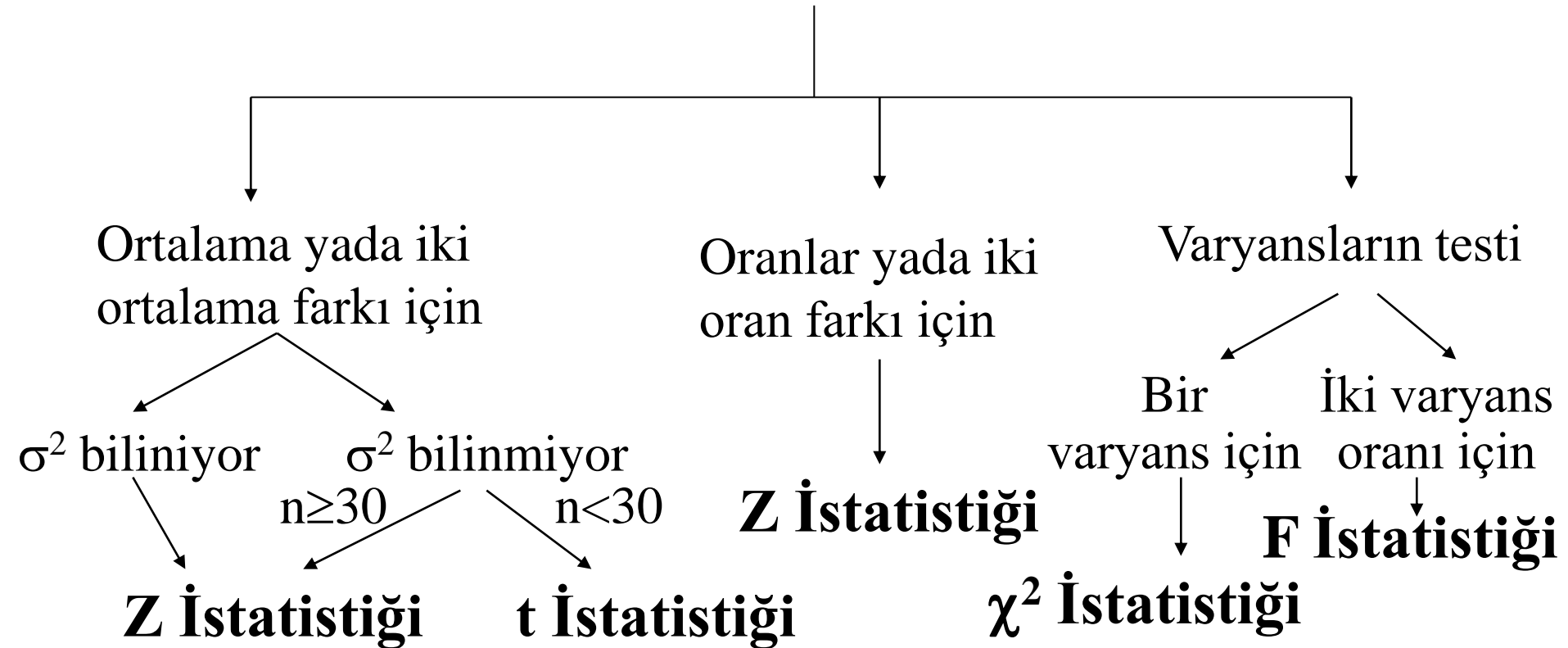
- Populasyon parametresinin gerçek değeri
Hipotezdeki parametre değeri ile parametrenin gerçek değeri arasındaki fark arttıkça β da artar.
- Önem derecesi - α
 α azalırken β artar.
- Populasyon standart sapması - σ
 σ arttıkça β artar.
- Örnek hacmi - n
 n azaldıkça β artar

Hipotez testi adımları:

1. H_0 'ı belirle.
2. H_1 'i belirle.
3. α 'yı seç.
4. n 'i seç.
5. Test istatistiğini seç
6. Kritik değerleri hesapla.
7. Veri topla.
8. Test istatistiğini hesapla.
9. İstatistiksel kararı ver.
10. Kararı açıkla ve yorumla.

Hipotez Testinde

Test İstatistiğinin Belirlenmesi



ORTALAMALARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

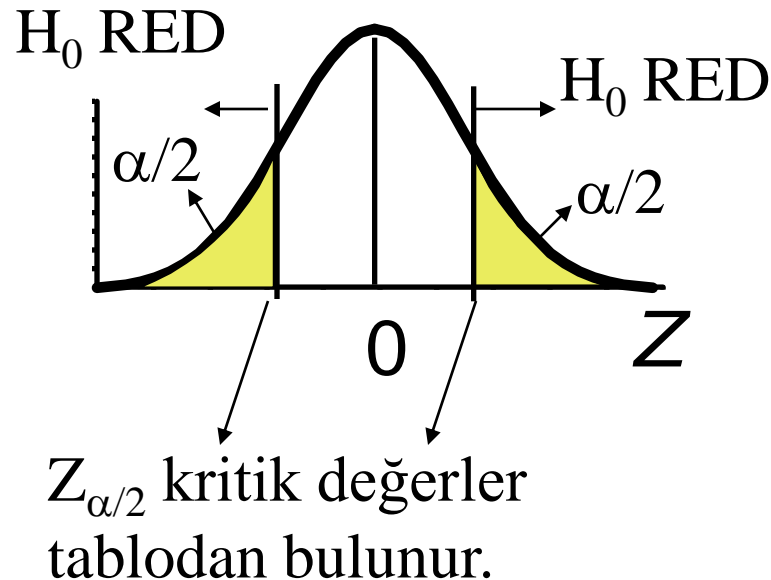
σ Bilindiğinde Z Test İstatistiği

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

σ Bilinmediğinde fakat $n \geq 30$ olduğunda Z Test İstatistiği

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Kabul ve Red Alanları: (Çift Taraflı Test)



$$H_0 : \mu = 45$$

$$H_1 : \mu \neq 45$$

Çift Taraflı Z Testine Örnek:

Bir fabrikada üretilmekte olan vidaların boylarının ortalaması 100 mm, ve standart sapması 2 mm olan normal dağılım gösterdikleri bilinmektedir. Makinalarda olan bir arıza giderildikten sonra üretilen vidalardan alınan 9 Vidalık bir örneğin bot ortalaması 102 mm olarak bulunmuştur.

Makinalardaki arıza giderilirken vidaların boyunun ayarı bozulmuş mudur? $\alpha=0.05$ için test ediniz ve yorumlayınız.

1. Adım: Hipotezlerin belirlenmesi

$$H_0 : \mu = 100mm$$

$$H_1 : \mu \neq 100mm$$

2. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

$$Z_{hesap} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{102 - 100}{2 / \sqrt{9}} = 3$$

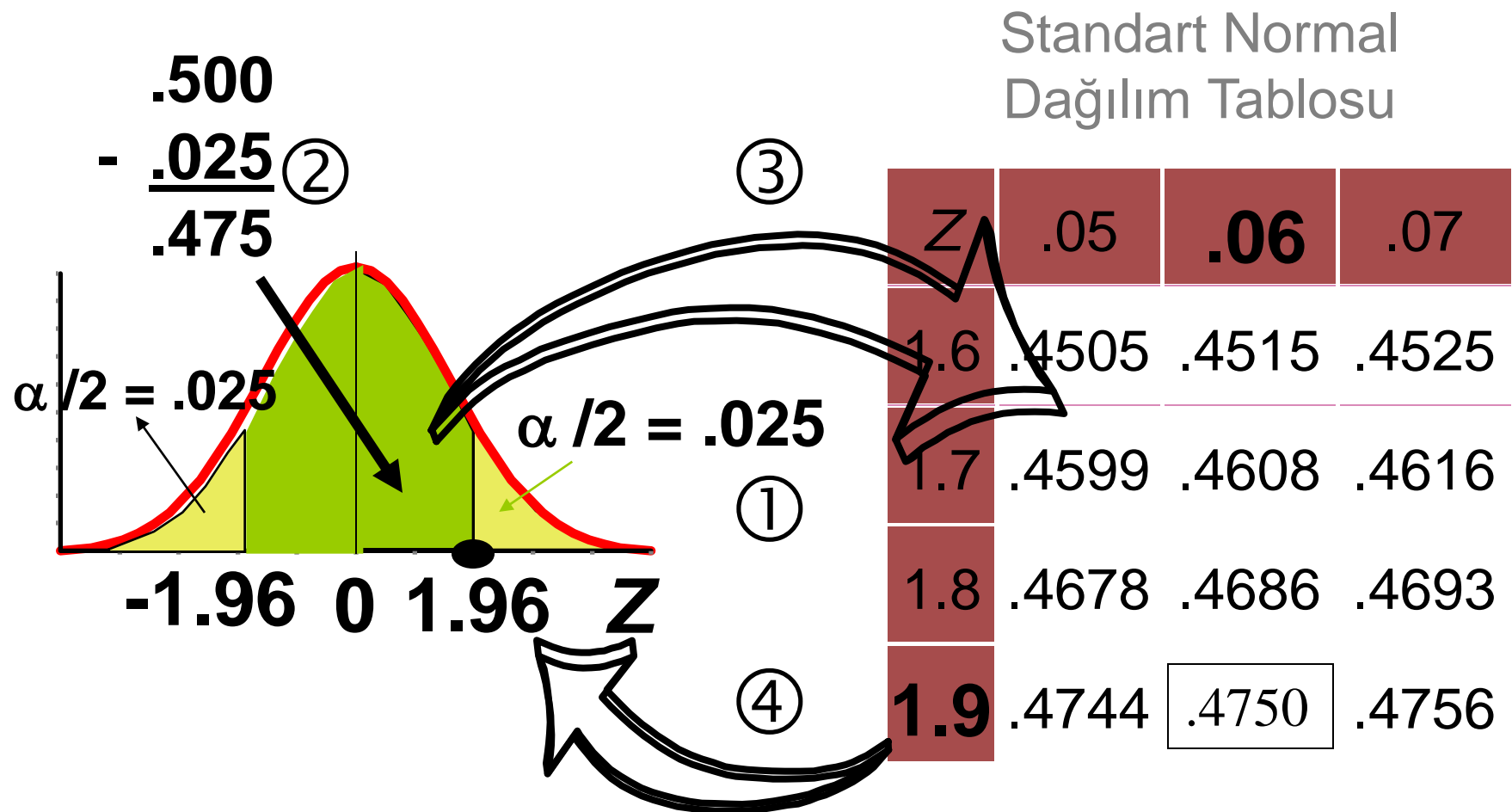
$$\mu = 100mm$$

$$\sigma = 2mm$$

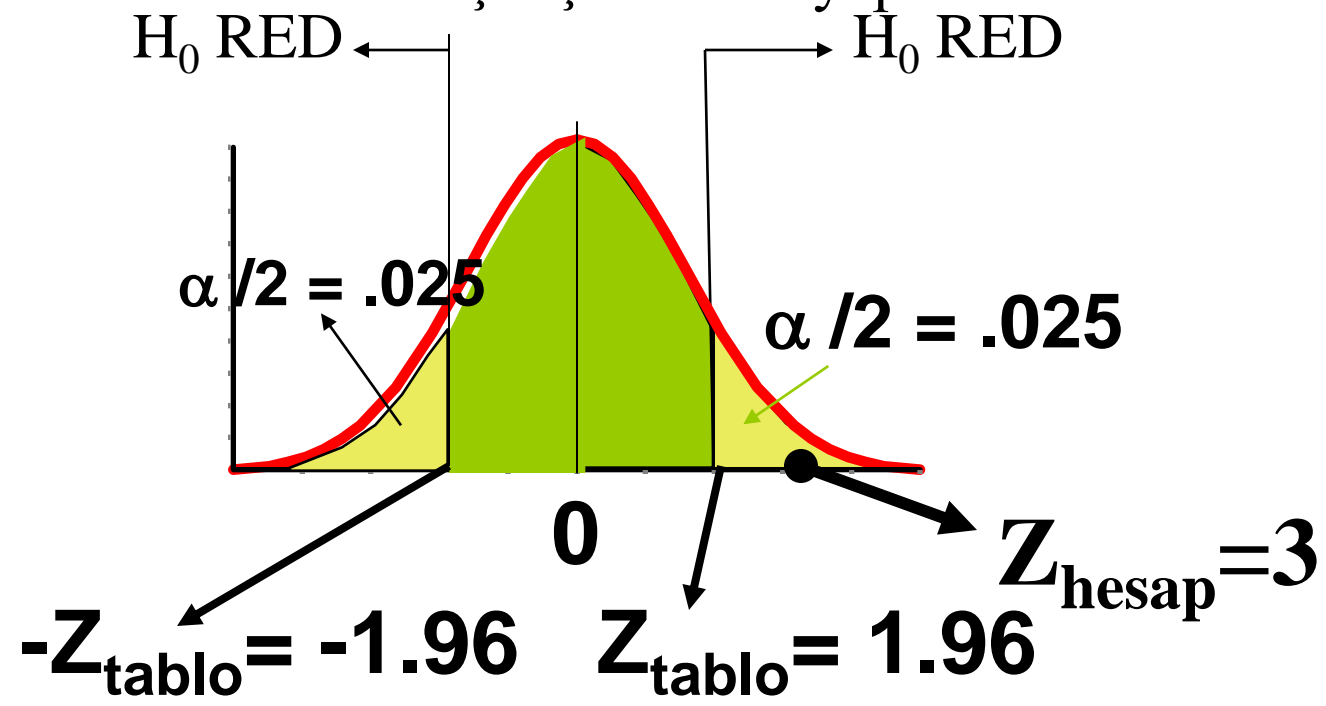
$$n = 9$$

$$\bar{X} = 102mm$$

3. Adım: Kritik değerlerin belirlenmesi:



4. Adım: İstatistiksel karşılaştırmanın yapılması:



5. Adım: Karar verme ve yorumlama:

Z_{hesap} değeri $H_0 \text{ RED}$ bölgesine düştüğü için H_0 hipotezi reddedilir, yani vidaları boy ortalaması 100 mm'den farklıdır, makinanın ayarı bozulmuştur.

Tek Taraflı Z Testi Örneği

- Bir kutu mısır gevreğinin ağırlığının 368 gr'dan fazla olduğu iddia edilmektedir. Ayrıca $\sigma = 15$ gram olduğunu belirtmiştir.

$n = 25$ kutuluk bir örnek alınmış ve $\bar{X} = 372.5$ gr. olarak bulunmuştur. 0.05 seviyesinde test ediniz.

Çözüm

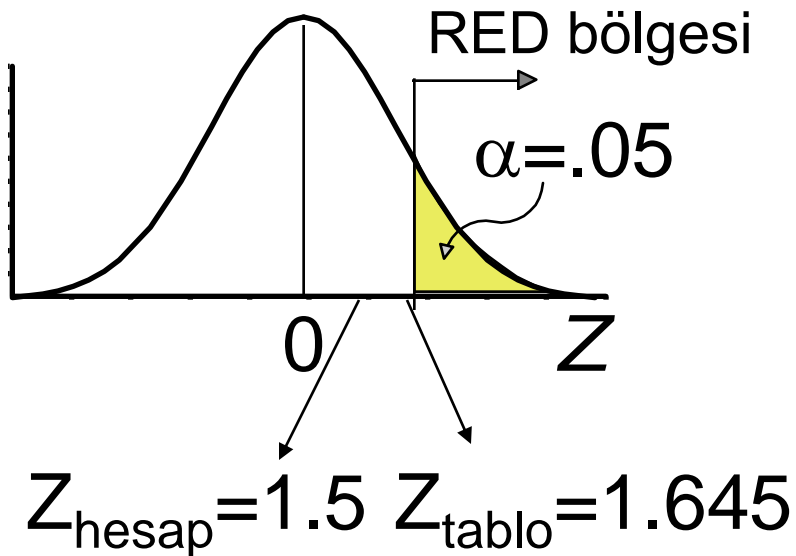
$$H_0: \mu \leq 368$$

$$H_1: \mu > 368$$

$$\alpha = 0.05$$

$$n = 25$$

• Kritik değer:



Test İstatistiği:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372.5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1.50$$

Karar:

$\alpha = .05$ için H_0 hipotezi reddedilemez.

Yorum:

Ortalamanın 368 gr.dan fazla olduğuna dair yeterli kanıt yoktur.

Çift Taraflı Z testi örneği:

Bu sene DEÜ.İİBF İktisat bölümünden mezun olacak öğrencilerin mezuniyet not ortalamalarının 70 olduğu iddia edilmektedir. Bu amaçla mezuniyet sonrası 36 öğrencilik bir örnek alınmış ve mezuniyet ortalamalarının 66, standart sapmasının 12 olduğu bulunmuştur. Bu veriler ışığında iddiayı $\alpha=0.01$ için test ediniz.

$$H_0 : \mu=70$$

$$H_1 : \mu \neq 70 \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{66 - 70}{12 / 6} = \frac{-4}{2} = -2$$

III. $\alpha = 0.01$ için z tablo değeri 2.58 IV. $|z_{\text{hes}}| < |z_{\text{tab}}|$ H_0 red edilemez.

ORANLARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : P = P_0$$

$$H_1 : P \neq P_0$$

Sol Kuyruk
Testi

$$H_0 : P \geq P_0$$

$$H_1 : P < P_0$$

Sağ Kuyruk Testi

$$H_0 : P \leq P_0$$

$$H_1 : P > P_0$$

Örnekten hesaplanan oran p ile gösterilirse oranlarla ilgili test istatistiği;

$$Z = \frac{p - P}{\sigma_p} = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{P(1 - P)}{n}}}$$

ÖRNEK

Bir süpermarketler zinciri sahibi müşterilerinin %95'ten fazlasının süpermarketlerindeki fiyatlardan memnun olduğunu söylemektedir. Tesadüfi olarak seçilen 200 müşteriden 184'ü fiyatlardan memnun olduğunu bildirmektedir. %1 önem düzeyinde, süpermarketteki fiyatlardan memnun olanların oranının %95'e eşit olmadığını söyleyebilir miyiz?

$$H_0 : P = P_0 \quad \alpha = 0.01 \quad p = 184 / 200 = 0.92$$

$$H_1 : P \neq P_0 \quad Z_{tab} = \pm 2.58$$

$$Z = \frac{p - P}{\sigma_p} = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{P(1 - P)}{n}}} = \frac{0.92 - 0.95}{\sqrt{\frac{0.95(1 - 0.95)}{200}}} = -1.95$$

H_0 Kabul

ORTALAMALAR ARASI FARKLARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Sol Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Sağ Kuyruk
Testi

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

İki Ortalama Farkı İçin Test İstatistiği

Ortalamalar arası farklarla ilgili hipotez testlerine ait test istatistiği

σ biliniyor ise:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Anakütle varyansları bilinmediğinde bunların yerine örnek varyansları kullanılır. Sıfır hipotezinin doğru olduğu varsayımı ile hareket edildiğinden $\mu_1 - \mu_2$ farkı sıfır kabul edilir.

σ bilinmiyor fakat

örnek hacimleri ≥ 30 ise:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Sıfır hipotezi örneklerin aynı anakütleden alındığını belirttiği için tersi ispatlanmadığı sürece s_1 ve s_2 değerlerinin birbiriyle homojen olduğunu varsayılır ve ortak varyans hesaplanır.

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$Z_h = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

ÖRNEK

Aynı faaliyet kolunda üretim yapan fabrikaların birincisinden tesadüfi olarak seçilen 80 mamulün ortalama dayanma süresi 135 gün ve standart sapması 15 gün; ikincisinden alınan 95 mamulün ise ortalama dayanma süresi 130 gün ve standart sapması 18 gündür. %1 önem seviyesinde , birinci fabrikada üretilen mamullerin ortalama dayanma süresinin daha fazla olduğunu söyleyebilir miyiz?

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$\alpha = 0.01$$

$$0.5 - 0.01 = 0.4900$$

$$Z_{tab} = 2.33$$

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2} = \frac{80(15)^2 + 95(18)^2}{80 + 90} = 286.94$$

$$Z_h = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{(135 - 130)}{\sqrt{286.94 \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{95} \right)}} = 1.95$$

$$P(Z > 1.95) = 0.5 - 0.4744 = 0.0512$$

%1 önem seviyesinde sıfır hipotezi kabul edilerek birinci fabrikada üretilen mamullerin ortalama dayanma süresinin diğerlerinden daha fazla olmadığına karar verilir.

ORANLAR ARASI FARKLARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : P_1 = P_2$$

$$H_1 : P_1 \neq P_2$$

Sol Kuyruk
Testi

$$H_0 : P_1 \geq P_2$$

$$H_1 : P_1 < P_2$$

Sağ Kuyruk Testi

$$H_0 : P_1 \leq P_2$$

$$H_1 : P_1 > P_2$$

Oranlar arası farklarla ilgili hipotez testlerine ait test istatistiği

$$Z_h = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_2)}{n_2}}}$$

Anakütle oranları bilinmediğinde bunun yerine örnek oranları kullanılabilir. Sıfır hipotezinin doğru olabileceği varsayımıyla hareket edildiğinden test istatistiği formülündeki $P_1 - P_2$ farkı sıfır kabul edilir. Test istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$Z_h = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1 - p_2)}{n_2}}}$$

Sıfır hipotezi örneklerin aynı anakütleden alındığını belirttiği için p_1 ve p_2 değerleri birbiriyle homojendir. Aşağıdaki ortak varyans hesaplanır.

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$Z_h = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Örnek

Bir video kaset kiralayıcısı macera filmi kiralamanın yöredeki erkek ve kadınlar itibarıyla farklılık gösterip göstermediğini merak etmektedir. Söz konusu şahıs belli bir zaman dönemi içerisinde dükkanına gelen 60 erkekten 51'nin ve 40 kadından 20'sinin macera filmi kiraladığını müşahade etmiştir. Bu verilere göre yöredeki erkeklerin kadınlardan daha fazla macera filmi kiraladığını % 5 önem seviyesinde söyleyebilir misiniz?

$$p_1 = 0.85 \quad p_2 = 0.50$$

$$H_0 : P_1 \leq P_2$$

$$H_1 : P_1 > P_2$$

$$Z_{tab} = 1.645$$

$$p = \frac{60(0.85) + 40(0.50)}{60 + 40} = 0.71$$

$$Z_h = \frac{0.85 - 0.50}{\sqrt{0.71(1 - 0.71)\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{40}\right)}} = 3.78$$

H_0 RED

ALIŐTIRMALAR

1. Bir toplumda erkekler arasında akciğer hastalığı oranının %30 olduğu bilinmektedir. Sigara içenlerde akciğer hastalıklarına daha sık rastlanıp rastlanmadığı araştırılmak isteniyor. Bu amaçla sigara içen erkekler arasından rasgele seçilen 200 erkekten 80'inin bir akciğer hastalığı geçirdiği/geçirmekte olduğu saptanıyor. Sigara içenlerde akciğer hastalığına yakalanma oranının daha fazla olduğu söylenebilir mi?
2. Büyük bir alışveriş merkezinin kayıtlarına göre merkeze gelen 1000 erkekten 100'ü ,1000 bayandan ise 250'si oyuncak reyonundan alışveriş yapmıőtır. Bayanların çocuklarına daha çok oyuncak alıp almadıklarını test ediniz.

3. Bir çimento fabrikası ürettiği çimentodan yapılan beton blokların sağlamlığının standart sapmasının 10 kg/m^2 'den fazla olduğunu iddia etmektedir. İddiayı test etmek amacıyla 10 beton blok alınmış ve sağlamlık test yapılmıştır. Test sonucunda alınan örneğin sağlamlık ortalaması 312 kg/m^2 , varyansı $195 \text{ kg}^2/\text{m}^4$ olarak bulunmuştur.

- a) İddiayı %95 güvenle test ediniz.
- b) Aynı veriler için populasyon varyansının 200'ün altında olduğu iddiasını test ediniz.
- c) Aynı veriler için populasyon varyansının 100 olup olmadığını test ediniz.