KESİKLİ ŞANS DEĞİŞKENLERİNİN OLASILIK DAĞILIMLARI

- **Bernoulli Dağılımı**
- **Binom Dağılımı**
- **Poisson Dağılımı**

Bernoulli Dağılımı

- Bir şans değişkeninin bernoulli dağılımı göstermesi için ilgilenilen süreçte **bernoulli deneyinin varsayımlarının** sağlanması gereklidir.

Bernoulli Deneyinin Varsayımları:

1. Deneyler aynı koşullarda tekrarlanabilirlik özelliğine sahip olmalıdır.
2. Deneylerin yalnız iki mümkün sonucu olması gereklidir.
3. Başarı olasılığı (p), deneyden deneye değişmemelidir. (Başarısızlık olasılığı q = 1-p ile gösterilir)
4. Denemeler birbirinden bağımsız olmalıdır.

Örnekler:

- Bir fabrikada üretilen bir ürünün hatalı veya sağlam olması,
- Bir madeni para atıldığında üst yüze yazı veya tura gelmesi,
- Hilesiz bir zar atıldığında zarın tek veya çift gelmesi,

- Bernoulli deneyinde ortaya çıkan sonuçlardan bir tanesi başarı durumu diğeri ise başarısızlık olarak ifade edilir. Bernoulli şans değişkeninin dağılımı ifade edilirken deneyin sadece 1 kez tekrarlanması gereklidir.

Bernoulli dağılışında x şans değişkeni başarı durumu için 1, başarısızlık durumu için ise 0 değerini alır.

- S = { x / 0,1 }

Bernoulli Dağılımının Olasılık Fonksiyonu;

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

$\mu = E(x) = p$ $\sigma^2 = Var(x) = p(1-p) = pq$

Örnek: Bir deste iskambilden çekilen bir kağıdın as olup olmaması ile ilgileniyor. As gelmesi başarı olarak ifade edildiği durum için olasılık fonksiyonunu oluşturunuz.

x = 0 (as gelmemesi) x = 1 (as gelmesi)

S = { x / 0,1 }

P(X = 0) = 48 / 52 P(X = 1) = 4 / 52

$$P(X = x) = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{52}\right)^{x} \left(\dfrac{48}{52}\right)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & d.d \end{cases}$$

Binom Dağılımı

- Birbirinden bağımsız n adet **bernoulli deneyinin** bir araya gelmesi sonucunda **binom deneyi** gerçekleşir.
- Binom deneyinin gerçekleşmesi için bernoulli deneyinin bütün varsayımlarının sağlanması gereklidir.
- Binom şans değişkeni x, n adet denemedeki başarı sayısını ifade etmektedir.
- n denemede en az 0, en fazla n adet başarı gözlenebileceğinden

S = { x / 0,1,2,……,n }

olur.

Binom Olasılık Fonksiyonunun Elde Edilmesi

Gerçekleştirilen her bir Bernoulli deneyi birbirinden bağımsızdır ve olasılık fonksiyonu

$$P(x) = p^x . q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

olarak ifde edilmiş idi. Bernoulli deneyi *n* defa tekrarlandığı durumda toplam *x* adet başarı olmasının olasılığı, *x* adet başarı olasılığı (*p*) ile *n* - *x* adet başarısızlık olasılığının (*q=1-p*) çarpımını içermelidir.

Başarı ve başarısızlıkların oluşum sırası yani sıralama önemsiz ise $\binom{n}{x} = {}_nC_x$ faklı şekilde ortaya çıktığı için ;

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} . p^x . (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,....,n \\ 0 & d.d \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Örnekler:

- Bir fabrikanın deposundan seçilen 10 üründen 2'sinin hatalı olması ,

- Bir madeni para 5 kez atıldığında hiç tura gelmemesi üst yüze yazı veya tura gelmesi,

- Hilesiz bir zar 4 kez atıldığında zarın en çok 1 kez çift gelmesi,

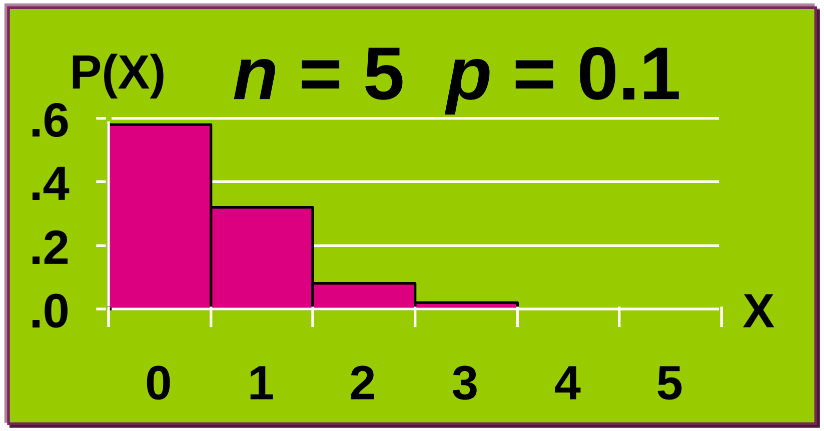
Binom Dağılımının Karakteristikleri

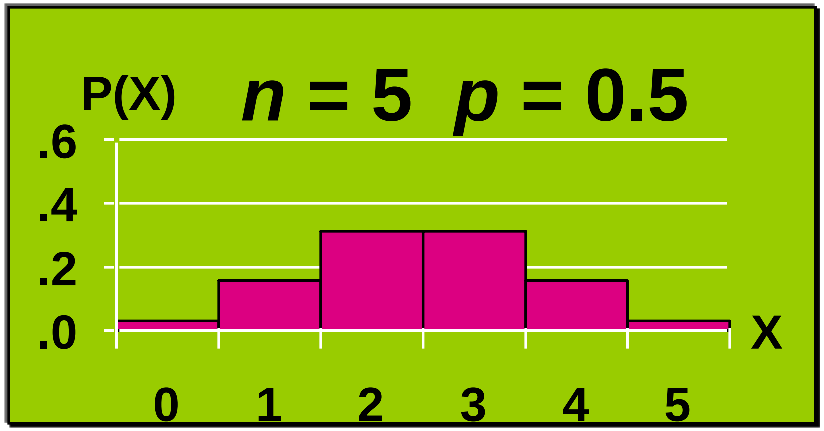
Aritmetik Ortalama

$$\mu \quad = E(X) = np$$

Varyans

$$\sigma^2 \; = \; np(1-p) = npq$$





Örnek: Bir işletmede üretilen ürünlerin % 6 ‘sının hatalı olduğu bilinmektedir. Rasgele ve iadeli olarak seçilen 5 üründen,

a)1 tanesinin hatalı olmasının olasılığını,

b) En az 4 tanesinin hatalı olmasının olasılığını hesaplayınız.

p = 0,06   1- p = 0,94   n = 5

a)P (X = 1) = ?

$$P(X=1)=\binom{5}{1}.(0{,}06)^{1}.(0{,}94)^{4}\approx 0{,}23$$

b)P (X ≥ 4) = ?

P (X ≥ 4) = P (X = 4) + P (X = 5)

$$=\binom{5}{4}.(0{,}06)^{4}.(0{,}94)^{1}+\binom{5}{5}.(0{,}06)^{5}.(0{,}94)^{0}$$

Poisson Dağılımı

- Kesikli Şans değişkenlerinin olasılık dağılımlarından en önemlilerinden biri Poisson Dağılımıdır.
- Günlük hayatta ve uygulamada çok sayıda kullanım alanı bulunmaktadır.
- Ünlü Fransız matematikçisi Poisson tarafından bulunmuştur.
- Belirli bir alan içerisinde rasgele dağılan veya zaman içerisinde rasgele gözlenen olayların olasılıklarının hesaplanabilmesi için çok kullanışlı bir modeldir.

Poisson Sürecinin Varsayımları

1. Belirlenen periyotta meydana gelen ortalama olay sayısı sabittir.

2. Herhangi bir zaman diliminde bir olayın meydana gelmesi bir önceki zaman diliminde meydana gelen olay sayısından bağımsızdır.(periyotların kesişimi olmadığı varsayımı ile)

3. Mümkün olabilecek en küçük zaman aralığında en fazla bir olay gerçekleşebilir.

4. Ortaya çıkan olay sayısı ile periyodun uzunluğu doğru orantılıdır.

Örnekler

- Bir şehirde bir aylık süre içerisinde meydana gelen hırsızlık olayların sayısı,
- Bir telefon santraline 1 dk. içerisinde gelen telefon çağrılarının sayısı,
- Bir kitap içindeki baskı hatalarının sayısı,
- İstanbul'da 100 m^2'ye düşen kişi sayısı,
- Ege Bölgesinde 3 aylık sürede 4,0 şiddetinden büyük olarak gerçekleşen deprem sayısı.

Poisson Dağılımının Olasılık Fonksiyonu

λ : belirlenen periyotta ortaya çıkan olay sayısı

x : ortaya çıkma olasılığı araştırılan olay sayısı

S = { x / 0,1, 2, 3, ….., }

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & diger \quad durumlarda \end{cases}$$

Poisson Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

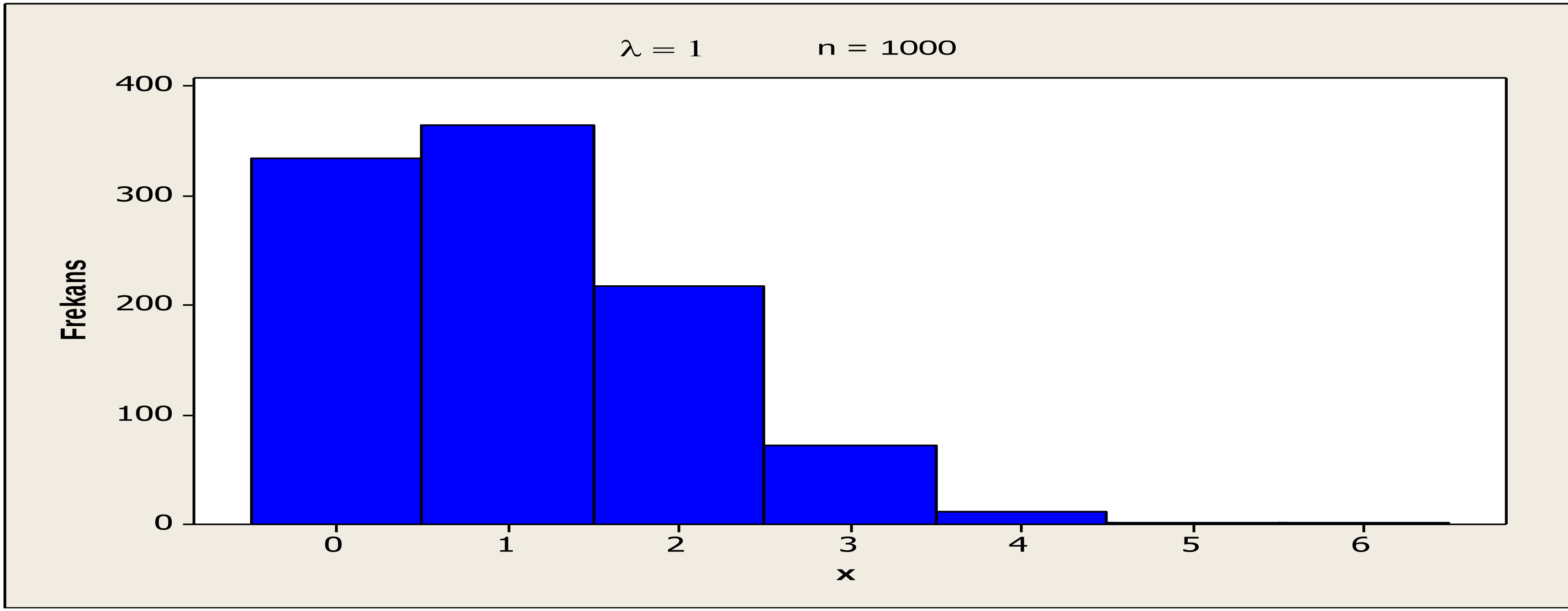
Beklenen Değer

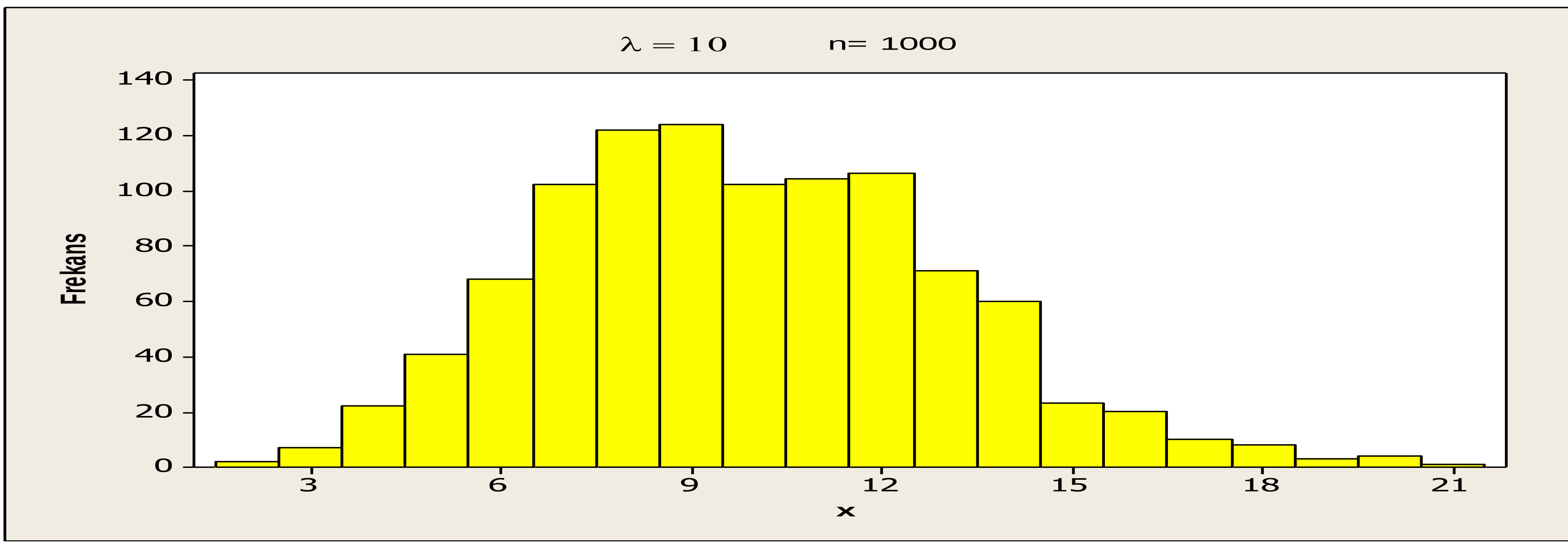
$$E(x) = \mu = \lambda$$

Varyans

$$Var(x) = \lambda$$

- ***Beklenen değeri ve varyansı birbirine eşit olan tek dağılıştır.***


λ = 1 n = 1000
Frekans
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
x


λ = 10 n= 1000
Frekans
140
120
100
80
60
40
20
0
3
6
9
12
15
18
21
x

Örnek: Bir mağazaya Cumartesi günleri 5 dakikada ortalama olarak 4 müşteri gelmektedir. Bir Cumartesi günü bu mağazaya,

a) 5 dakika içinde 1 müşteri gelmesi olasılığını,

b)Yarım saate 2'den fazla müşteri gelmesi olasılığını,

a) $\lambda = 4$ P (x = 1) = ? $$P(X=1) = \frac{e^{-4}4^{1}}{1!} = 4e^{-4}$$

b) 5 dk'da 4 müşteri gelirse, 30 dk'da 24 müşteri gelir.

$\lambda = 24$ P (x > 2) = ?

P(x > 2) = 1 – [P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)]

$$1-\left(\frac{e^{-24}24^{0}}{0!}+\frac{e^{-24}24^{1}}{1!}+\frac{e^{-24}24^{2}}{2!}\right)=1-313e^{-24}$$

ÖDEV: 1 saatte en çok 1 müşteri gelmesinin olasılığını hesaplayınız.