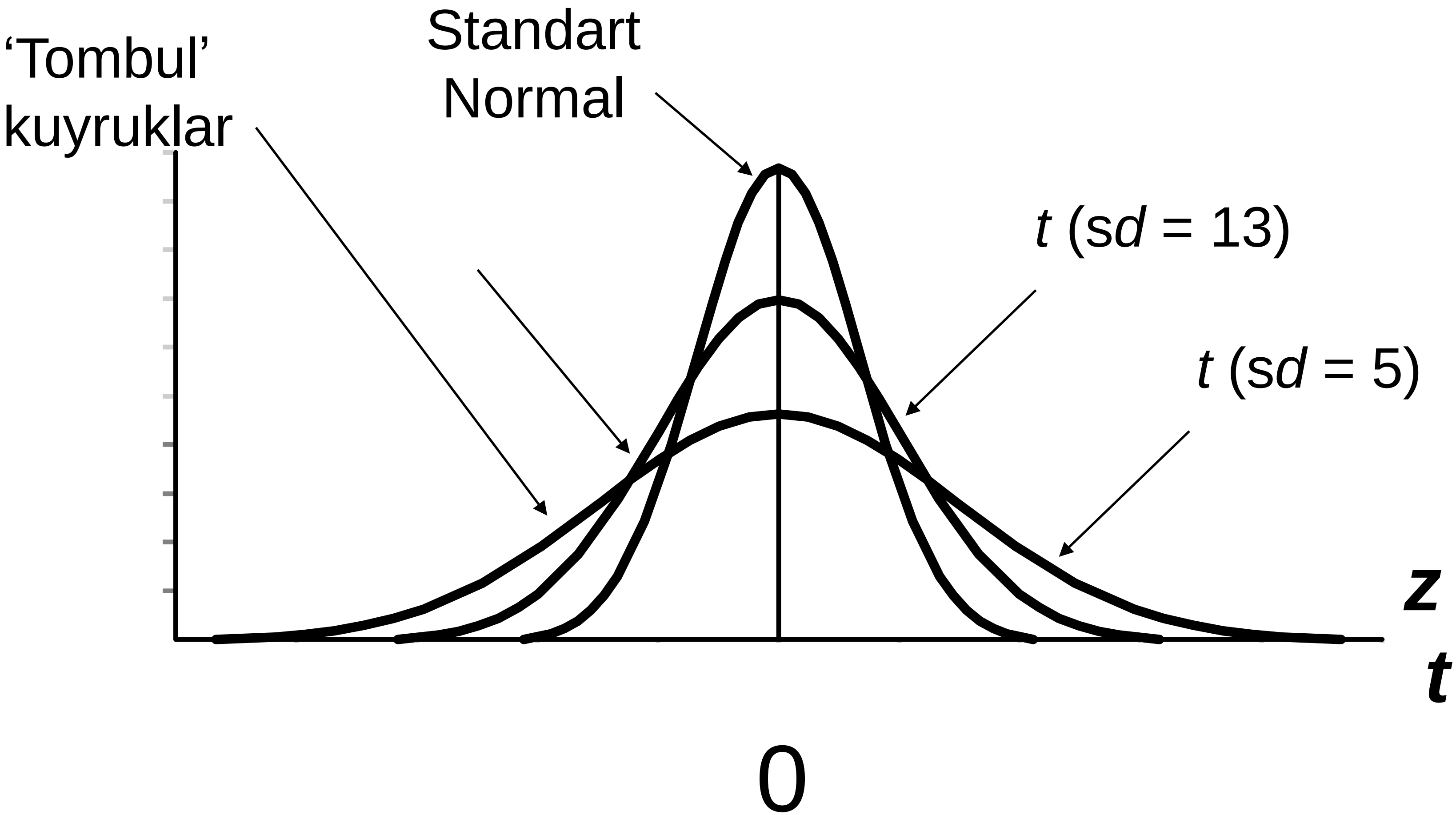
t Dağılımı ve t testi

Student *t* Dağılımı

- Küçük örneklerden (n<30) elde edilen istatistiklerin dağılımı Student t dağılımına uyar.
- Küçük örnek istatistiklerinin gösterdiği dağılım normal eğri gibi simetriktir.Normal eğriye göre daha basık ve yaygın bir şekil alır. Böylece eğrinin kuyruklarında daha büyük bir alan oluşur.
- Küçük örnekler için z cetveli yerine,çeşitli örnek büyüklükleri ve ihtimal seviyeleri için ayrı ayrı hesaplanmış t cetvelleri kullanılır.

Çan şekilli simetrik,



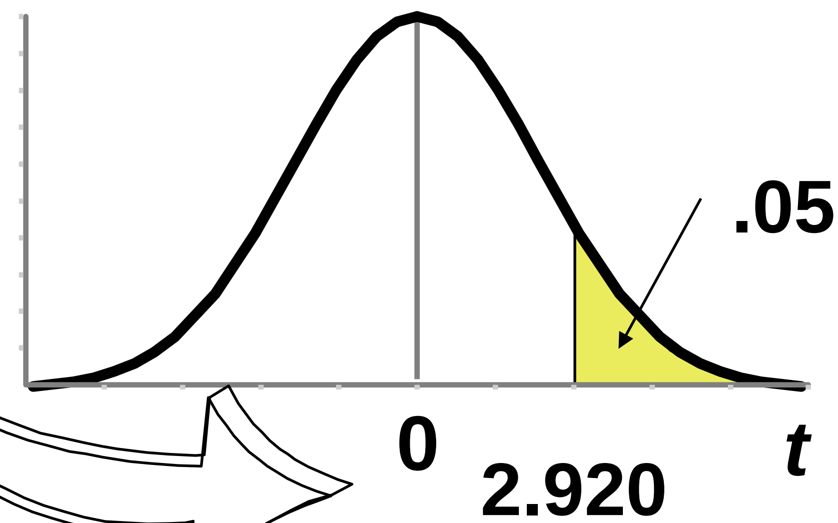
Student'ın *t* Tablosu

	Üst kuyruk alanı		
sd	.25	.10	**.05**
1	1.000	3.078	6.314
2	0.817	1.886	**2.920**
3	0.765	1.638	2.353

t değerleri

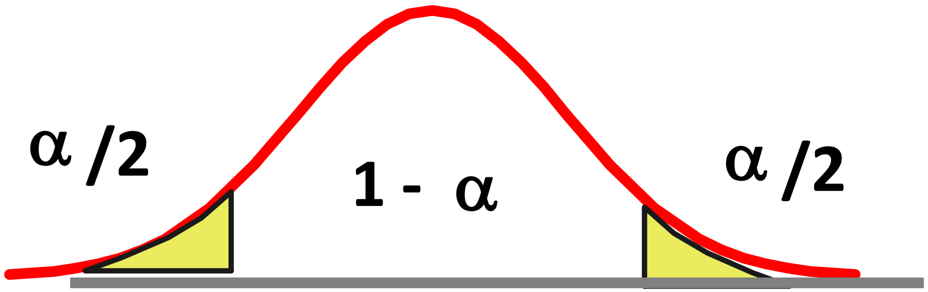
$n = 3$
sd $= n - 1 = 2$
$\alpha = .10$
$\alpha/2 = .05$

Olsun:



ORTALAMA İÇİN GÜVEN ARALIĞI

Populasyonun standart sapması σ_X bilinmediğinde ve populasyonun normal dağıldığı varsayımı altında güven aralığı tahmini:



$$-t_{\alpha/2} \qquad t_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}} \qquad \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

s

$$\bar{X} - t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}}$$

ÖRNEK

- Bir fabrikada rasgele üretilen 25 mamulün ortalama ağırlığı 1040 gr standart sapması 25 gr bulunmuştur. %95 güvenle bu imalat prosesinde üretilen mamullerin ortalama ağırlığı hangi aralıkta yer alır?

$$\bar{X} - t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{v;\alpha/2} \times \frac{s_x}{\sqrt{n-1}}$$

$$1040 - 2.064 \frac{25}{\sqrt{25-1}} \leq \mu \leq 1040 + 2.064 \frac{25}{\sqrt{25-1}}$$

$$1029.47 \leq \mu \leq 1050.53$$

ORTALAMALAR ARASI FARKLAR İÇİN GÜVEN ARALIĞI

İki anakütleden tesadüfi olarak seçilen n_1 ve n_2 hacimlerindeki iki küçük örnekten hareketle anakütle ortalamaları arasındaki farkın güven sınırları:

$$\Pr\left(\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\times\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1-1}+\frac{s_2^2}{n_2-1}}\le\mu_1-\mu_2\le\left(\overline{X}_1-\overline{X}_2\right)+t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\times\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1-1}+\frac{s_2^2}{n_2-1}}\right)=1-\alpha$$

Anakütle ortalamaları arasındaki farkın güven aralığı tespit edilirken $v=n_1+n_2-2$ serbestlik derecesine ve $\alpha/2$ hata payına göre tablo değerleri bulunur.

ÖRNEK

13 deneme sonrasında bir benzin pompası ortalama 125 ml fazla benzin ölçümü yaparken standart sapma 17 ml olmuştur.Bir başka benzin pompası ise 10 deneme sonrasında deneme başına ortalama 110 ml fazla benzin ölçümü yapılmış ve standart sapması 19 ml bulunmuştur. Anakütle ortalamaları arasındaki farkın %99 güven sınırlarını bulunuz.

$$v = 13 + 10 - 2 = 21 \qquad t_{tab} = \pm 2.831$$

$$\Pr\left(\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}} \right) = 1 - \alpha$$

$$(125 - 110) - 2.831\sqrt{\frac{17^2}{13-1} + \frac{19^2}{10-1}} = -7.68 \le \mu_1 - \mu_2 \le 37.68$$

Pompaların fazla ölçümleri arasındaki fark %99 güvenle -7.68 ml ile 37.68 ml arasındadır.

ORTALAMALARLA İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Sol Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Sağ Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Ortalamalarla ilgili hipotez testlerine ait test istatistiği:

$$t_h = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

ÖRNEK

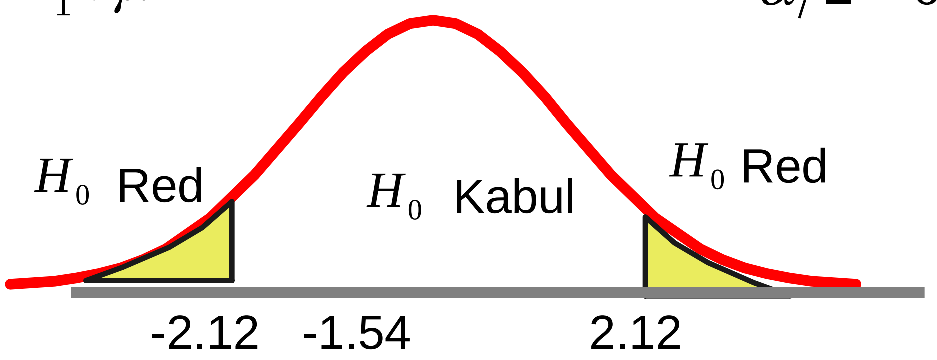
Bir konserve fabrikasının imal ettiği konservelerin üzerinde brüt 455 gr yazmaktadır. Bu konservelerin brüt ağırlıkları ile ilgili bir karar vermek üzere rasgele seçilen 17 kutunun ortalama ağırlığı 450 gr ve standart sapması 13 gr bulunmuştur. Brüt ağırlığın 455 gr olmadığını 0.05 önem seviyesinde söyleyebilir misiniz?

$$H_0: \mu = 455$$

$$H_1: \mu \neq 455$$

$$v = n - 1 = 16$$

$$\alpha/2 = 0.025 \longrightarrow t_{tab} = \pm 2.12$$



$$t_h = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{450 - 455}{\dfrac{13}{\sqrt{17-1}}} \cong 1.54$$

İKİ ANAKÜTLE ORTAMASINA İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ

Bağımsız ve İlişkili Populasyonlar

Bağımsız

- 1. Farklı veri kaynakları
  - İlişkisiz
  - Bağımsız
- 2. İki örnek ortalaması arasındaki farkın kullanılması

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

İlişkili

- 1. Aynı veri kaynağı
  - Eşleştirilmiş
  - Tekrarlı ölçümler
- 2. Her gözlem çifti arasındaki farkın kullanılması
  - $D_n = X_{1n} - X_{2n}$

1- ÖRNEKLERİN BAĞIMSIZ OLMASI HALİ

Çift Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Sol Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Sağ Kuyruk Testi

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{s^2 \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Ortalamalar arası farklarla ilgili hipotez testlerine ait test istatistiği: (σ bilinmiyor)

Örnek

•Pınar Et için çalışan bir finansal analistsiniz. İki ayrı kesimhanenin üretim kayıtlarıyla ilgili aşağıdaki verileri topladınız:

	fab1	**fab2**
n	**21**	**25**
Ortalama	**3.27**	**2.53**
Std Sapma	**1.30**	**1.16**

Eşit varyans varsayımı altında,ortalama üretimde bir fark var mıdır? (α **= 0.05**)?

Test İstatistiğinin Hesaplanması

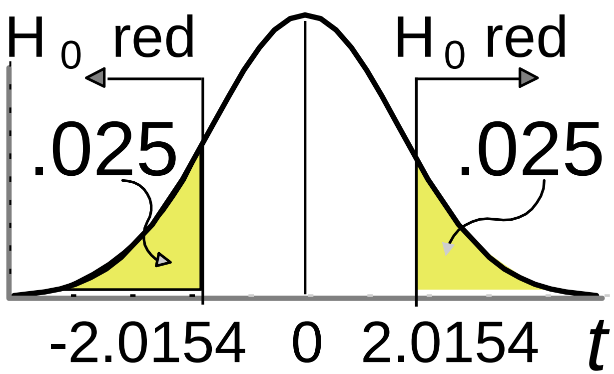
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{(3.27 - 2.53) - (0)}{\sqrt{1.510 \cdot \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{25} \right)}} = +2.03$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(21-1) \cdot 130^2 + (25-1) \cdot 116^2}{21-1 + 25-1} = 1510$$

Çözüm

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ $(\mu_1 = \mu_2)$
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ $(\mu_1 \neq \mu_2)$
- $\alpha = 0.05$
- **sd** $= 21 + 25 - 2 = 44$
- **Kritik Değerler:**



Test İstatistiği:

$$t = \frac{3.27 - 2.53}{\sqrt{1.510 \cdot \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{25}\right)}} = +2.03$$

Karar:

$\alpha = 0.05$ seviyesinde reddedilir.

Sonuç:

Ortalamalarda bir fark olabilir.

2-Eşleştirilmiş Örnek t Testi

1. İki ilişkili populasyonun ortalamasını test eder.
   - Çift ya da eşleştirilmiş
   - Tekrarlı gözlemler (önce/sonra)
2. Nesneler arasındaki varyasyonu ortadan kaldırır.
3. Varsayımları
   - İki populasyon da normal dağılımlıdır.
   - Eğer normal değilse normale yaklaşmaktadır. ($n_1 \geq 30$ & $n_2 \geq 30$)

Eşleştirilmiş Örnek t Testi

İki komisyoncunun aynı evlere farklı fiyatlar verdiği iddia edilmektedir. İddiayı test etmek için 12 ev seçiliyor ve komisyonculardan bu evlere 1000$ bazında fiyat vermeleri isteniyor. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.İki komisyoncunun aynı evlere farklı fiyatlar verip vermediğini test ediniz.

Komisyoncular				
Evler	**A**	**B**	**D**	**D^2**
1	181.0	182.0	-1.0	1.00
2	179.9	180.0	-0.1	0.01
3	163.0	161.5	1.5	2.25
4	218.0	215.0	3.0	9.00
5	213.0	216.5	-3.5	12.25
6	175.0	175.0	0.0	0.00
7	217.9	219.5	-1.6	2.56
8	151.0	150.0	1.0	1.00
9	164.9	165.5	-0.6	0.36
10	192.5	195.0	-2.5	6.25
11	225.0	222.7	2.3	5.29
12	177.5	178.0	-0.5	0.25
Toplam			**-2.0**	**40.22**

Eşleştirilmiş Örnek t Testi

1.Adım: $H_0: \mu_D = 0$

$H_1: \mu_D \neq 0$

2.Adım: $\bar{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{-2}{12} = -0.167 \quad s_D = \sqrt{\frac{\sum D^2 - \frac{\left(\sum D\right)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{40.22 - \frac{(-2)^2}{12}}{12-1}} = 1.904$

$$t_{hes} = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{-0.167}{1.904 / \sqrt{12}} = -0.30 \qquad v = n - 1 = 12 - 1 = 11 s.d.$$

3.Adım: $t_{tab} : t_{11,0.05} = \pm 2.201$

4.Adım: $\left|t_{hes}\right| < \left|t_{tab}\right|$

H_0 reddedilemez. %5 önem düzeyinde fiyatlandırma yönünden komisyoncuların birbirinden farklı olmadığına karar verebiliriz.

Eşleştirilmiş Örnek için Güven Aralığı

$$\overline{D} - t_{\alpha/2, n-1} s_D \le \mu_D \le \overline{D} + t_{\alpha/2, n-1} s_D$$

Aynı örnek için güven aralığını hesapladığımızda;

$$-0.167 - 2.201(1.904) \le \mu_D \le -0.167 + 2.201(1.904)$$

$$-4.357 \le \mu_D \le -4.023$$

Sorular

1. Belli bir mesafeyi erkek yüzücülerin kız yüzücülerden daha kısa zamanda yüzdüğü iddia edilmektedir. Rassal olarak seçilen 200 erkek yüzücünün ortalama derecesi 60 ve standart sapması 10 dakika, 150 kız yüzücünün ortalama derecesi 70 ve standart sapması 15 dakika olarak bulunmuştur. %1 anlamlılık düzeyinde karar veriniz.

2. A ve B marka ampullerin ömürlerinin farklı olduğu iddia edilmektedir. Rassal olarak seçilen A marka 10 ampulün ortalama ömrü 850 ve standart sapması 100 saat, B marka 1 ampulün ortalama ömrü 650 ve standart sapması 150 saat olarak bulunmuştur. %1 anlamlılık seviyesine göre karar veriniz.