

# **SÜREKLİ ŞANS DEĞİŞKENLERİ**

- **Üstel Dağılım**
- **Normal Dağılım**

# Üstel Dağılım

- Meydana gelen iki olay arasındaki geçen süre veya bir başka ifadeyle ilgilenilen olayın ilk defa ortaya çıkması için geçen sürenin dağılışıdır.

## Örnek:

- Bir bankada veznede yapılan işlemler arasındaki geçen süre,
- Bir taksi durağına gelen müşteriler arasındaki süre,
- Bir hastanenin acil servisine gelen hastaların arasındaki geçen süre,
- Bir kumaşta iki adet dokuma hatası arasındaki uzunluk (metre).

- Belirli bir zaman aralığında mağazaya gelen müşteri sayılarının dağılışı Poisson Dağılımına uygundur.
- Bu müşterilerin mağazaya varış zamanları arasındaki geçen sürenin dağılımı da Üstel Dağılıma uyacaktır.
- Üstel Dağılımın parametresi  $\beta$  olmak üzere Üstel ve Poisson Dağılımlarının parametreleri arasında şu şekilde bir ilişki vardır.

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

# Üstel Dağılımın Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$\beta$  : iki durumun gözlenmesi için gereken ortalama süre yada ölçülebilir uzaklık.

$x$  : iki durum arasında veya ilk durumun ortaya çıkması gereken süre yada uzaklık.

$$S = \{ x / 0 < x < \infty \}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

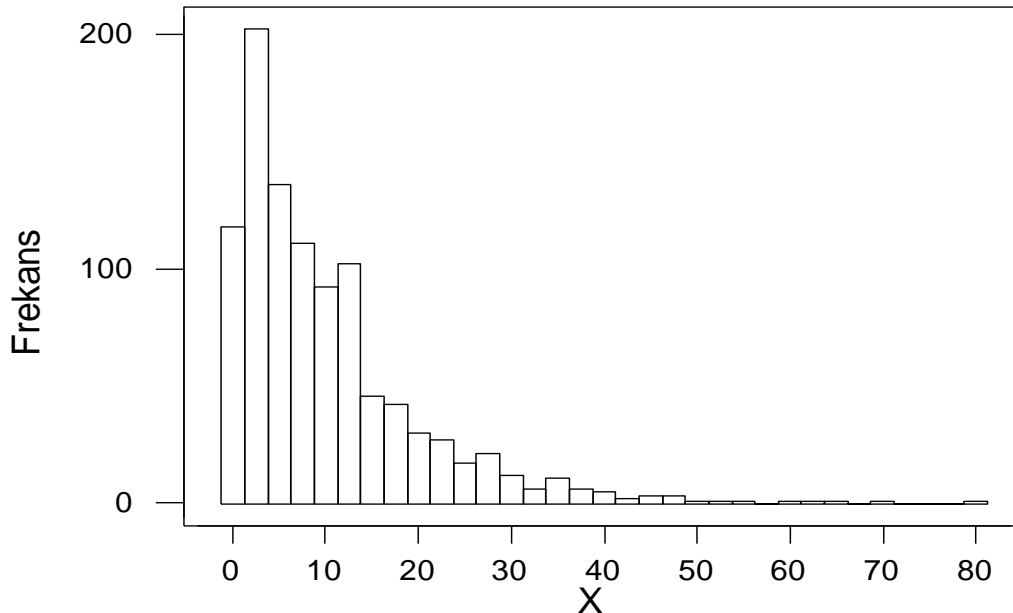
# Üstel Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

**Beklenen Değer**

$$E(x) = \beta$$

**Varyans**

$$Var(x) = \beta^2$$



$\beta = 10$  parametrelili bir populyasyondan alınan  $n = 1000$  hacimlik bir örnek için oluşturulan histogram.

**Örnek:** Bir taksi durağına bir saatlik zaman dilimi içerisinde gelen taksilerin geliş sayısı Poisson Dağılışına uygun bir şekilde gerçekleşmektedir. Durağa saatte ortalama 24 adet taksinin geldiği bilindiğine göre durağa gelen bir yolcunun en çok 5 dakika beklemesi olasılığı nedir?

Saatte ( 60 dakikada ) 24 adet taksi geliyorsa,

1 dakikada 24/60 adet taksi gelir. 1 adet taksi gelmesi için gereken süre  $\beta = 2,5$  dk olur.  $P ( x \leq 5 ) = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2,5} e^{-\frac{x}{2,5}} & , x > 0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

**HESAPLAMA KOLAYLIĞI!!**

$$P(x \geq a) = \int_a^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = e^{-\frac{a}{\beta}}$$

$$P(x \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{2,5} e^{-\frac{1}{2,5}x} dx = 1 - \int_5^{\infty} \frac{1}{2,5} e^{-\frac{1}{2,5}x} dx = 1 - e^{-\frac{5}{2,5}} = 1 - e^{-2}$$

# NORMAL DAĞILIM

- Sürekli ve kesikli şans değişkenlerinin dağılımları birlikte ele alındığında istatistikte en önemli dağılım **Normal dağılımdır.**

- Normal dağılım ilk olarak **1733'te Moivre** tarafından  $p$  başarı olasılığı değişmemek koşulu ile binom dağılımının limit şekli olarak elde edilmiştir. **1774'te Laplace** hipergeometrik dağılımını limit şekli olarak elde ettikten sonra **19. yüzyılın ilk yıllarında Gauss** 'un katkılarıyla da normal dağılım istatistikte yerini almıştır.

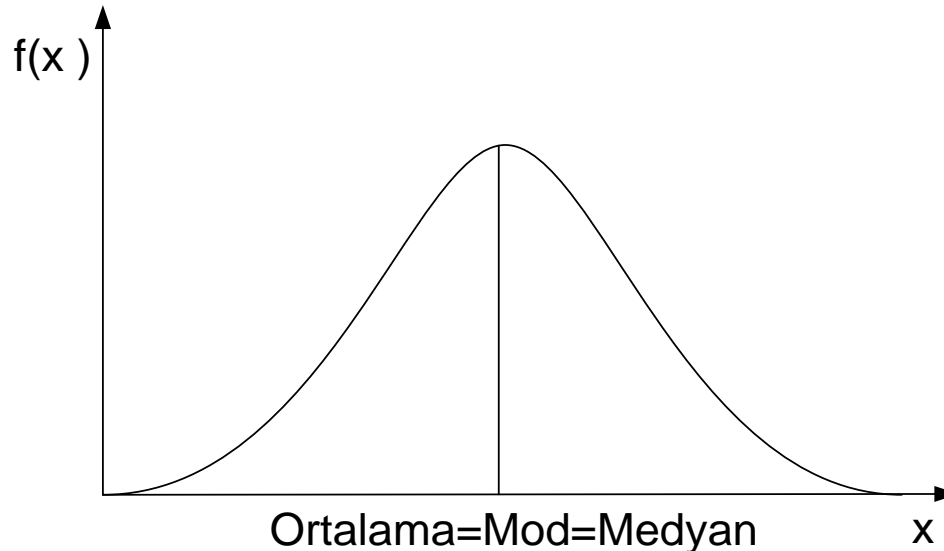


- Normal dağılımın ilk uygulamaları doğada gerçekleşen olaylara karşı başarılı bir biçimde uyum göstermiştir. Dağılımın göstermiş olduğu bu uygunluk adının Normal Dağılım olması sonucunu doğurmuştur.
- İstatistiksel yorumlamanın temelini oluşturan Normal Dağılım, bir çok rassal süreçlerin dağılımı olarak karşımıza çıkmaktadır.
- Normal dağılım kullanımı en önemli nedenlerinden biride bazı varsayımların gerçekleşmesi halinde kesikli ve sürekli bir çok şans değişkeninin dağılımının normal dağılıma yaklaşım göstermesidir.

# Normal Dağılımın Özellikleri

- Çan eğrisi şeklindedir.
- Simetrik bir dağılıştır.
- Normal Dağılımın parametreleri,

$$E(x) = \mu \qquad Var(x) = \sigma^2$$



# Normal Dağılımın Olasılık Yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & , -\infty < x < \infty \\ 0 & , \text{diger yerlerde} \end{cases}$$

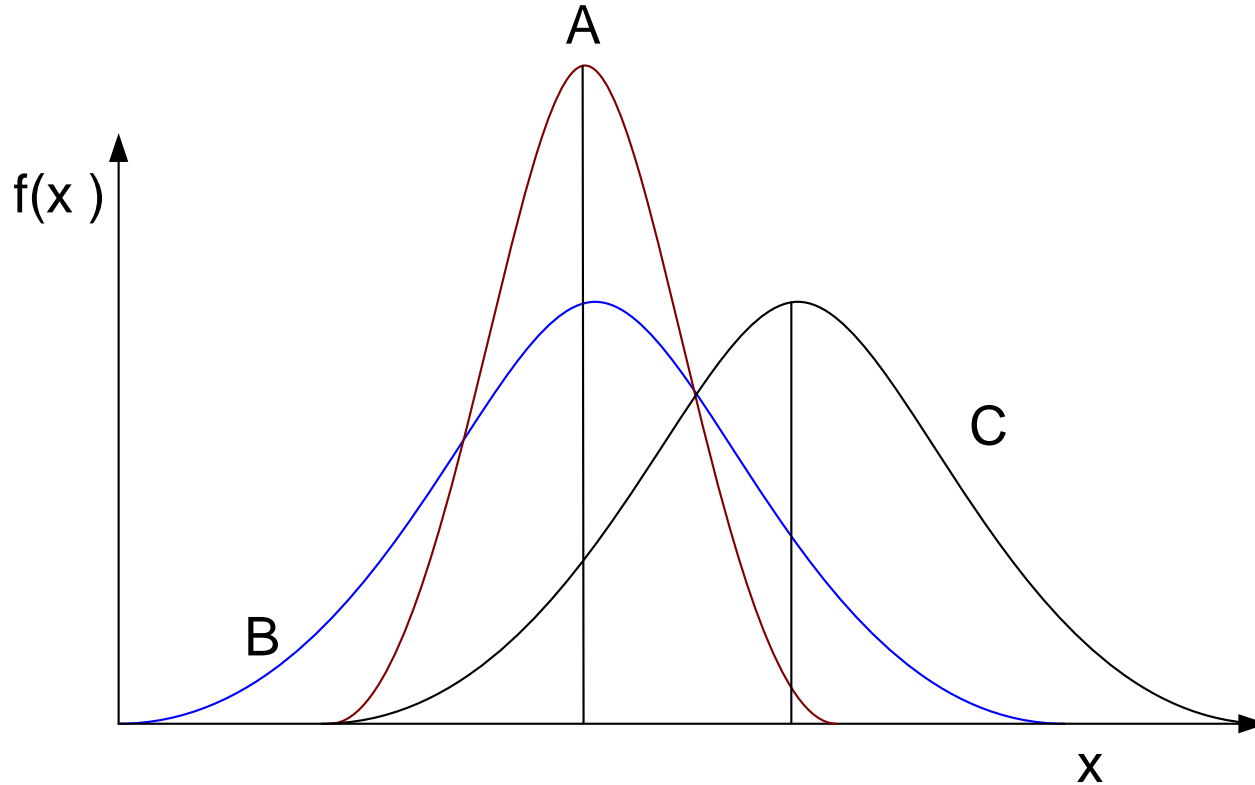
$\pi = 3,14159\dots$

$e = 2,71828$

$\sigma$  = populasyon standart sapması

$\mu$  = populasyon ortalaması

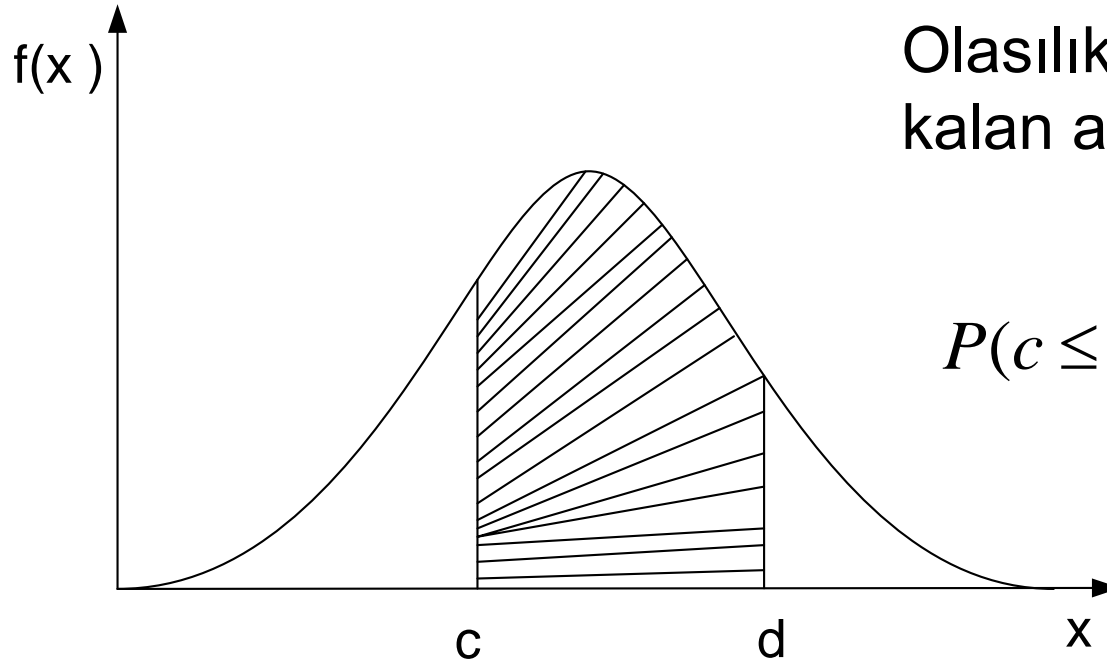
# Parametre Değişikliklerinin Dağılımın Şekli Üzerindeki Etkisi



$$\mu_A = \mu_B < \mu_C$$

$$\sigma_A^2 < \sigma_B^2 = \sigma_C^2$$

# Normal Dağılımda Olasılık Hesabı



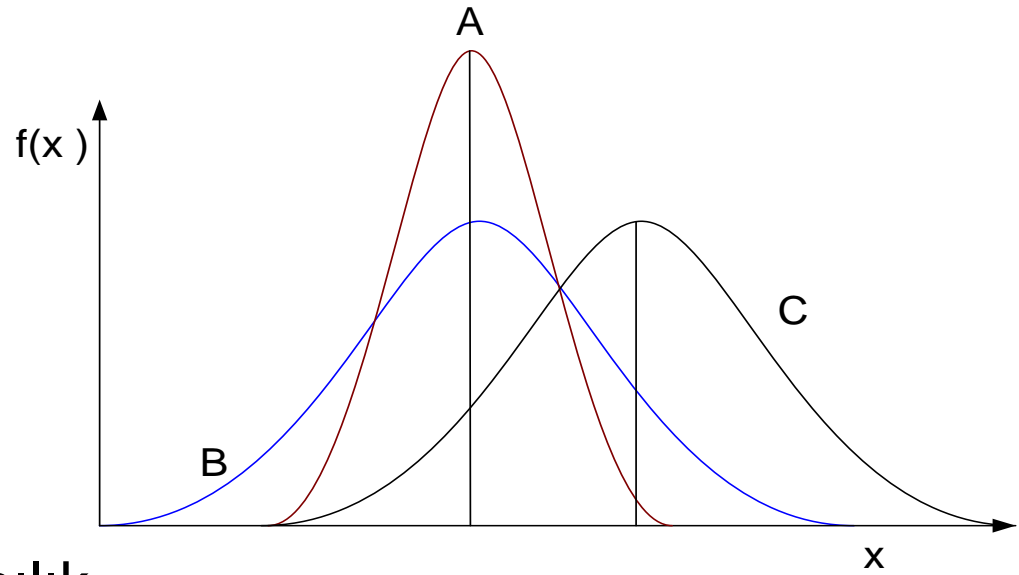
Olasılık eğri altında kalan alana eşittir!!!!

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x) dx = ?$$

**ÖNEMLİ!!!**

$$P(-\infty \leq x \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Normal dağılım ortalama ve standart sapma parametrelerinin değişimi sonucu birbirinden farklı yapılar gösterir.



- Her dağılımın için olasılık yoğunluk fonksiyonunu kullanarak olasılık hesaplama güçlüğü olasılık değerlerini içeren tablolar kullanma zorunluluğunu ortaya çıkarmıştır .

- Birbirinden farklı sonsuz sayıda normal dağılış olabileceği için olasılık hesaplamasında kullanmak üzere sonsuz sayıda tablo gereklidir.



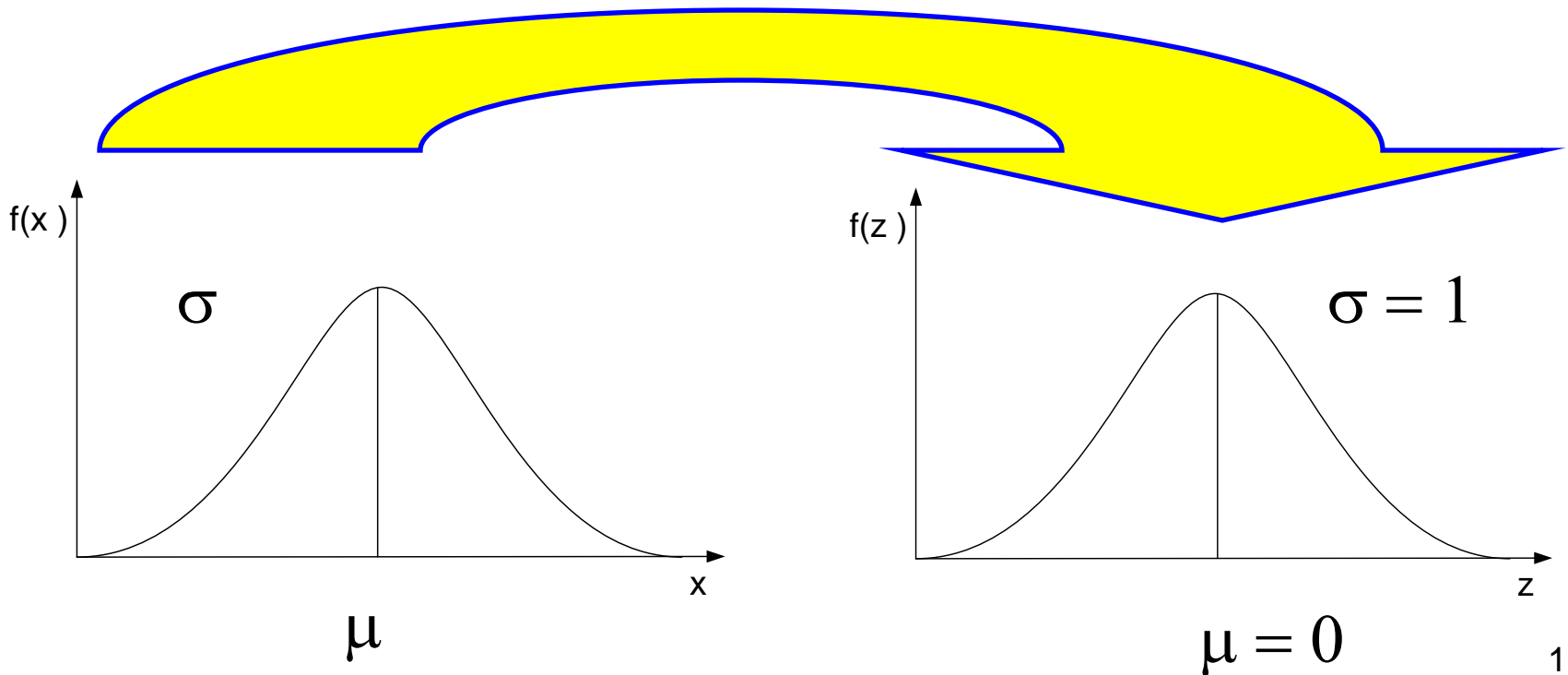
# Standart Normal Dağılım

- Olasılık hesaplamasındaki zorluktan dolayı normal dağılış gösteren şans değişkeni standart normal dönüştürülür.
- Böylece tek bir olasılık tablosu kullanarak normal dağılış ile ilgili olasılık hesaplamaları yapılmış olur.
- Standart normal dağılımda ortalama 0 , varyans ise 1 değerini alır.
- Standart normal değişken  $z$  ile gösterilir.

# Standart Normal Şans Değişkeni

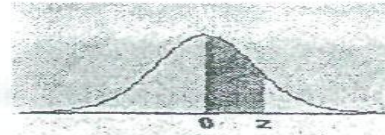
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $Z \sim N(0, 1)$





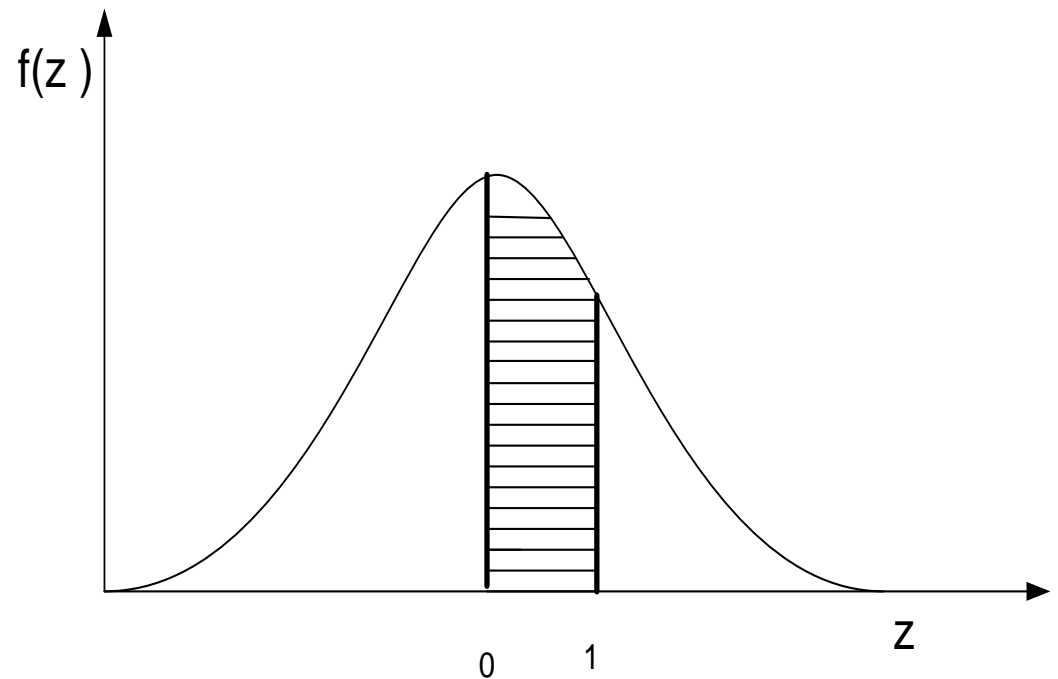
# Standart Normal Dağılım (Z) Tablosu



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

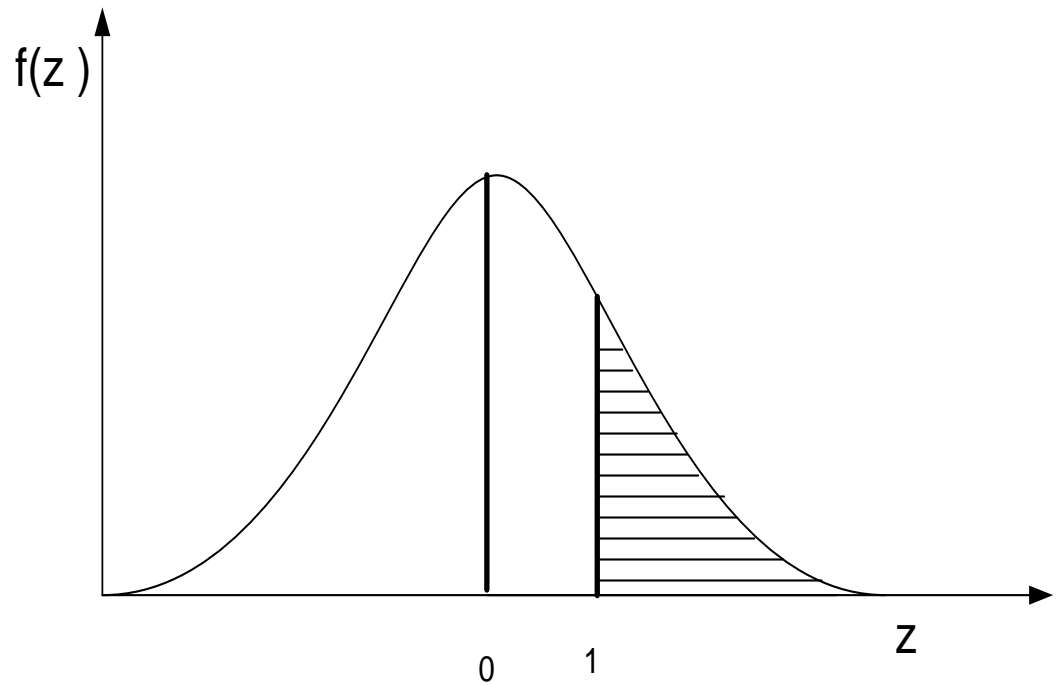
# *Standart Normal Dağılım Tablosunu Kullanarak Olasılık Hesaplama*

$$P(0 < z < 1) = ?$$



$$P(0 < z < 1) = 0,3413$$

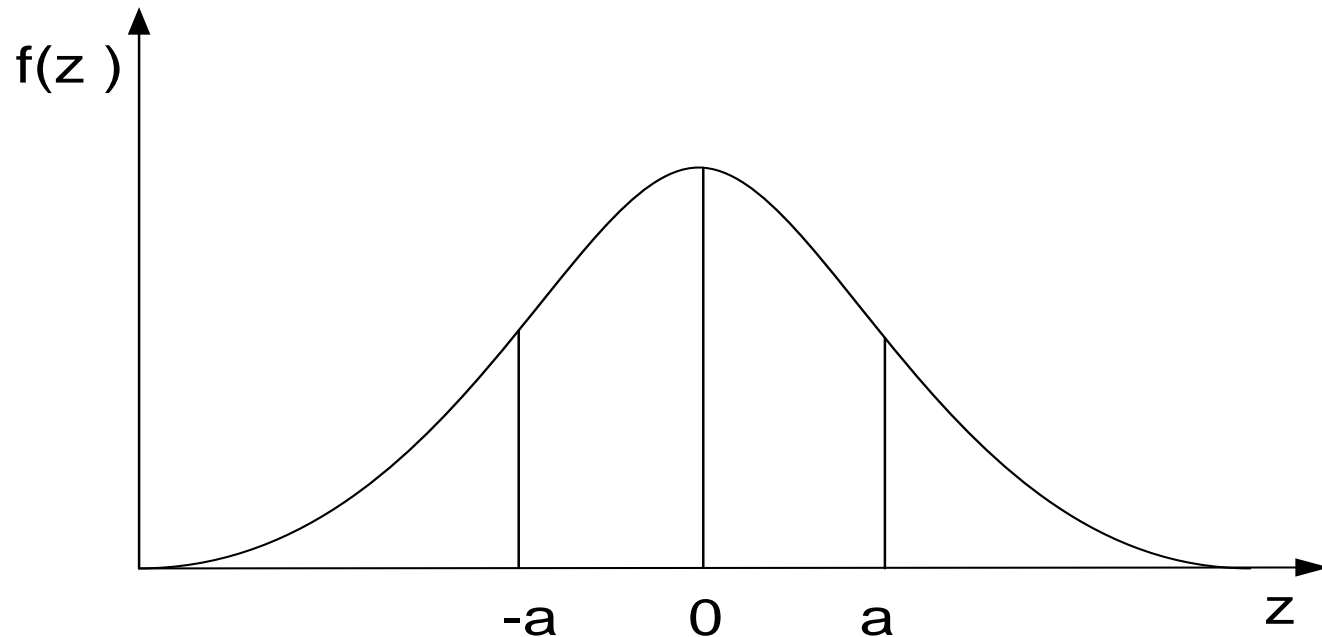
$$P(z > 1) = ?$$



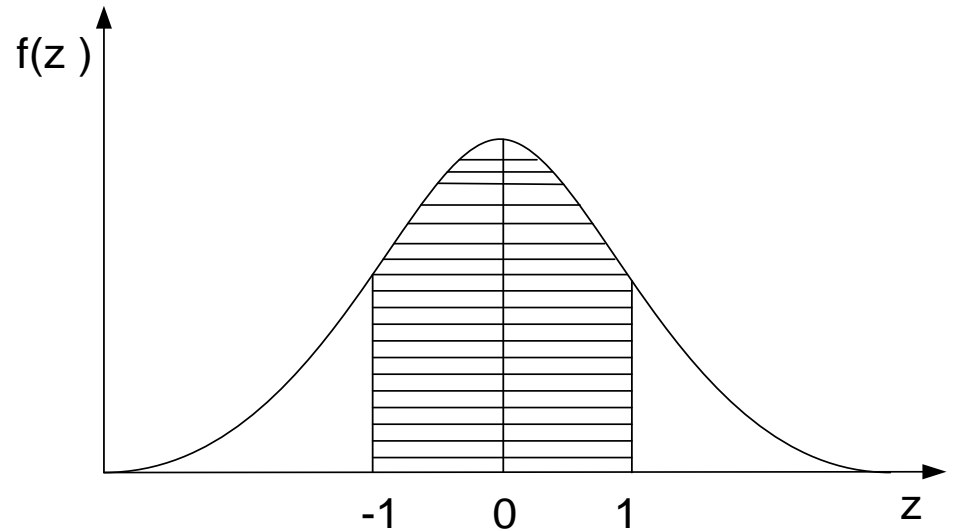
$$0,5 - P(0 < z < 1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

**SİMETRİKLİK ÖZELLİĞİNDEN DOLAYI 0'DAN EŞİT UZAKLIKTAKİ Z DEĞERLERİNİN 0 İLE ARASINDAKİ KALAN ALANLARININ DEĞERLERİ BİRBİRİNE EŞİTTİR.**

$$P(0 < z < a) = P(-a < z < 0)$$

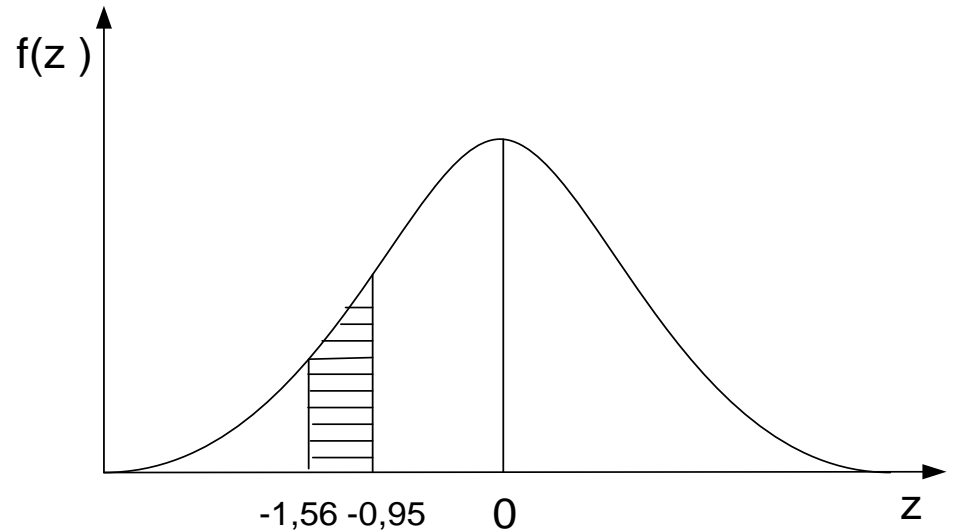


$$P(-1 < z < 1) = ?$$



$$\begin{aligned} P(-1 < z < 1) &= P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1) \\ &= 2 * P(0 < z < 1) = 2(0,3413) = 0,6826 \end{aligned}$$

$$P(-1,56 < z < -0,95) = ?$$

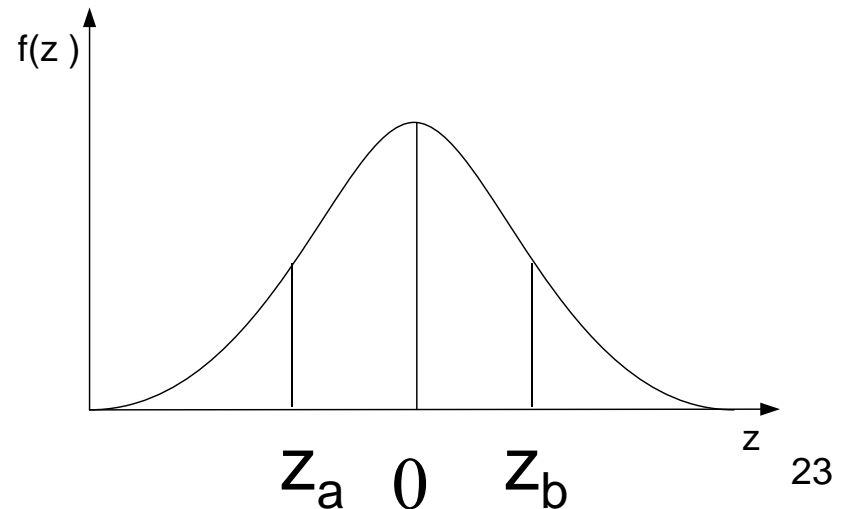
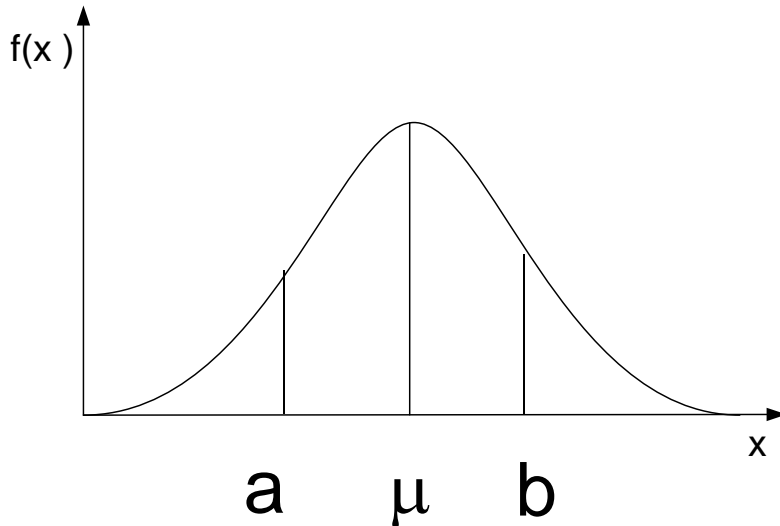


$$\begin{aligned} P(-1,56 < z < -0,95) &= P(-1,56 < z < 0) - P(-0,56 < z < 0) \\ &= 0,4406 - 0,3289 = 0,1117 \end{aligned}$$

# Normal Dağılımın Standart Normal Dağılım Dönüşümü

$$P(a < X < b) = ? \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad Z \sim N(0, 1)$$

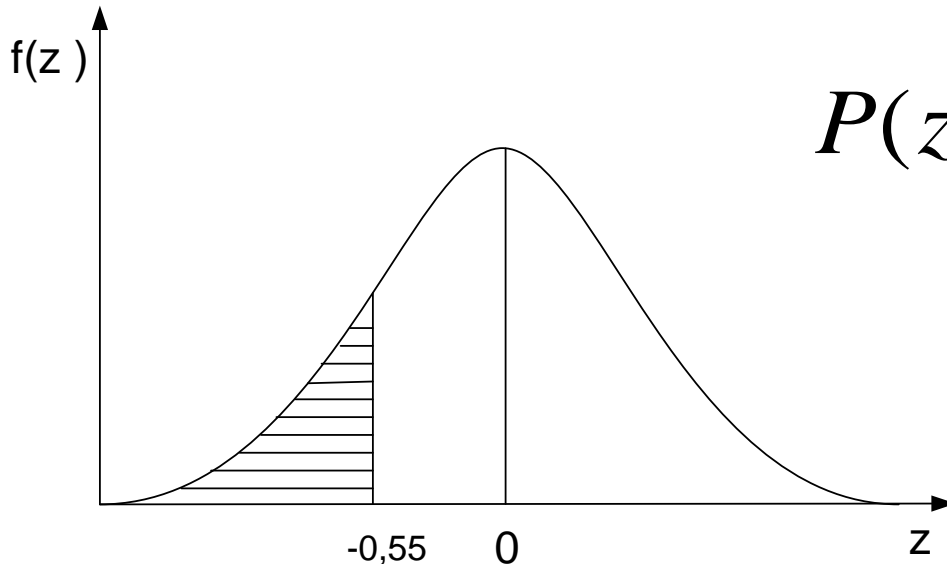
$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(z_a < z < z_b) \end{aligned}$$



• **Örnek:** Bir işletmede üretilen vidaların çaplarının uzunluğunun, ortalaması 10 mm ve standart sapması 2 mm olan normal dağılıma uygun olduğu bilinmektedir. Buna göre rasgele seçilen bir vidanın uzunluğunun 8,9mm 'den az olmasının olasılığını hesaplayınız.

$$P(X < 8,9) = ? \quad X \sim N(10, 4)$$

$$P(X < 8,9) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{8,9 - 10}{2}\right) = P(z < -0,55)$$



$$\begin{aligned} P(z < -0,55) &= 0,5 - 0,2088 \\ &= 0,2912 \end{aligned}$$