Denavit-Hartenberg Bedingungen

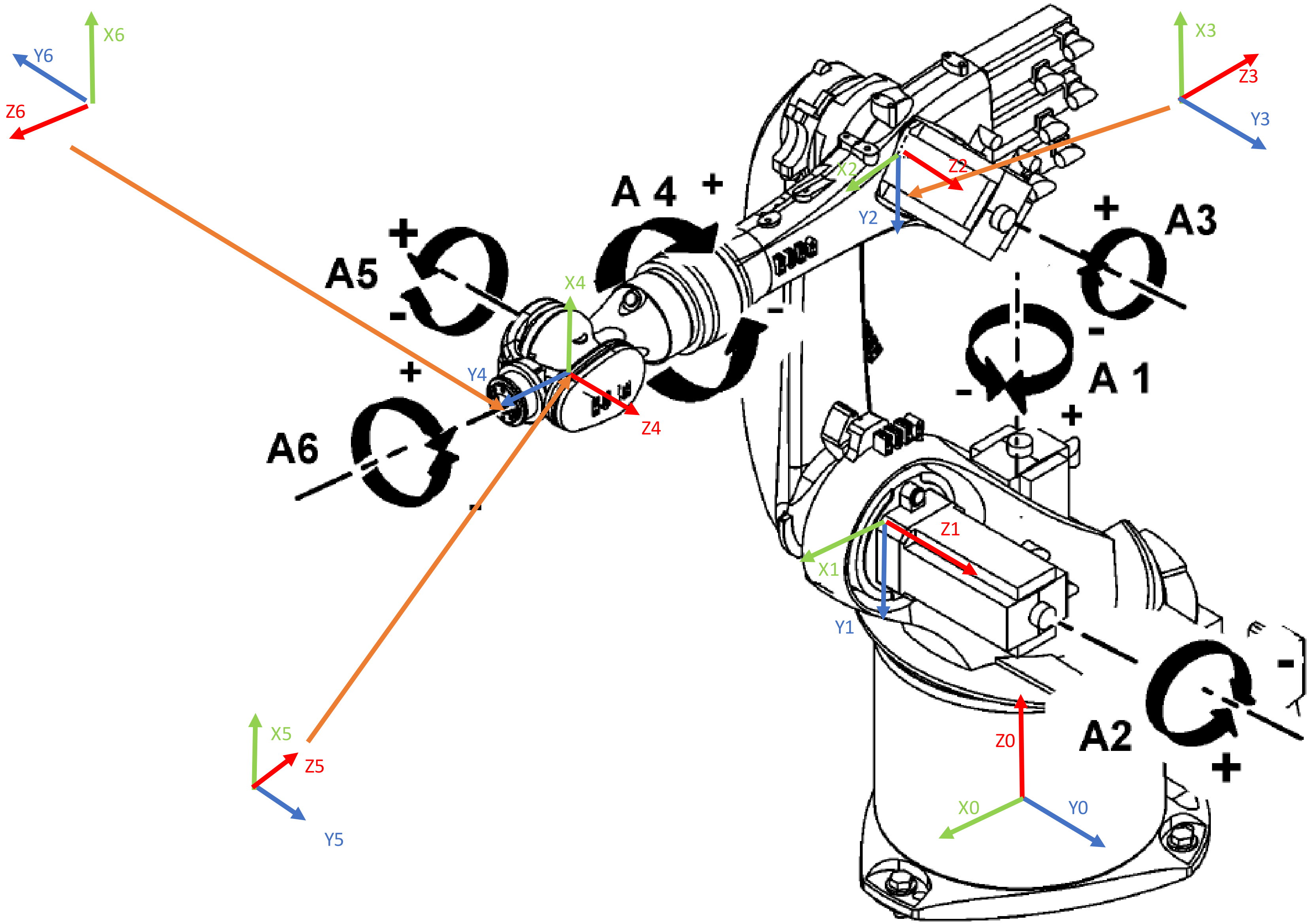
- Zn-1 Achse liegt entlang (auf) der Bewegungsachse des n-ten Gelenks
- Xn-1 Achse ist Kreuzprodukt zwischen Zn-1 und Zn Achsen
- Das Koordinatensystem wird durch die Yn Achse so ergänzt, dass ein rechtshändiges System entsteht
- Für das erste Gelenk wird die x-Achse vom zweiten Gelenk übernommen

Anmerkungen zum Verständnis

- v1 x v2 ergibt ein Rechtssystem mit v1 als x-Achse und v2 als y-Achse
  v2 x v1 ergibt ein Rechstssystem mit v2 als x-Achse und v1 als y-Achse

- Die Rotation um eine Koordinatenachse erfolgt bei positiven Winkeln immer in mathematisch positive Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) und umgekehrt

- Ich nehme dies nur der Volständigkeit halber auf, da dies selbstverständlich jedem Beteiligten bekannt ist :)



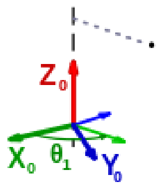
X6
Y6
Z6
A 4
+
A5
-
X4
Y4
Z4
A6
X2
Z2
Y2
X3
Z3
Y3
A3
A 1
Z1
X1
Y1
A2
Z0
X0
Y0
X5
Z5
Y5

Allgemeines Vorgehen

Die eigentliche DH-Transformation vom Objektkoordinatensystem (OKS) T_{n-1} in das OKS T_n besteht in der Hintereinanderausführung folgender Einzeltransformationen:

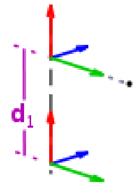
- einer Rotation θ_n (Gelenkwinkel) um die z_{n-1}-Achse, damit die x_{n-1}-Achse parallel zu der x_n-Achse liegt

$$\mathrm{Rot}(z_{n-1},\theta_n) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n & 0 & 0 \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



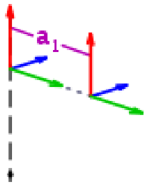
- einer Translation d_n (Gelenkabstand) entlang der z_{n-1}- Achse bis zu dem Punkt, wo sich z_{n-1} und x_n schneiden

$$\mathrm{Trans}(z_{n-1}, d_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



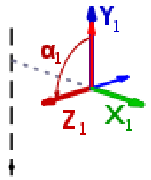
- einer Translation a_n (Armelementlänge) entlang der x_n-Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen

$$\mathrm{Trans}(x_n, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- einer Rotation α_n (Verwindung) um die x_n-Achse, um die z_{n-1}-Achse in die z_n-Achse zu überführen

$$\mathrm{Rot}(x_n, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

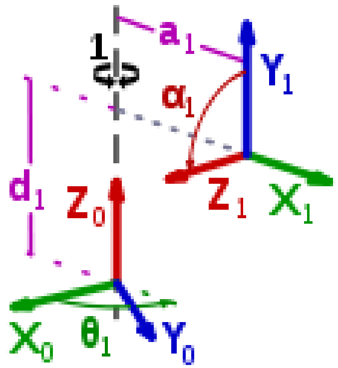


Matrix einer Transformation

In Matrixschreibweise lautet die Gesamttransformation dann (von links nach rechts zu interpretieren):

$$
{}^{n-1}T_n = \mathrm{Rot}(z_{n-1}, \theta_n) \cdot \mathrm{Trans}(z_{n-1}, d_n) \cdot \mathrm{Trans}(x_n, a_n) \cdot \mathrm{Rot}(x_n, \alpha_n)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \cos\alpha_n & \sin\theta_n \sin\alpha_n & a_n \cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \cos\alpha_n & -\cos\theta_n \sin\alpha_n & a_n \sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$



Denavit-Hartenberg-Parameter des Roboters

Transformation (n)	Theta (Drehgelenkswinkel °)	d (Länge Drehgelenk mm)	a (Länge Gelenkarm mm)	Alpha (Rotationswinkel Zn-1 -> Zn °)
1	-1 * Theta0	675	260	270 (-90)
2	Theta1	0	680	0
3	Theta2 - 90	0	-35	90
4	Theta3	-670	0	270 (-90)
5	Theta4	0	0	90
6	Theta5	-115 (-158 bei KR 16-2)	0	180

Die Parameter der Transformation n dienen der Transformation von KS Tn-1 zu KS Tn

Die Notwendigkeit das Vorzeichen von Theta zu ändern resultiert aus der unterschiedlichen Definition der Drehrichtung beim Roboter und im DH Model

Insgesamt

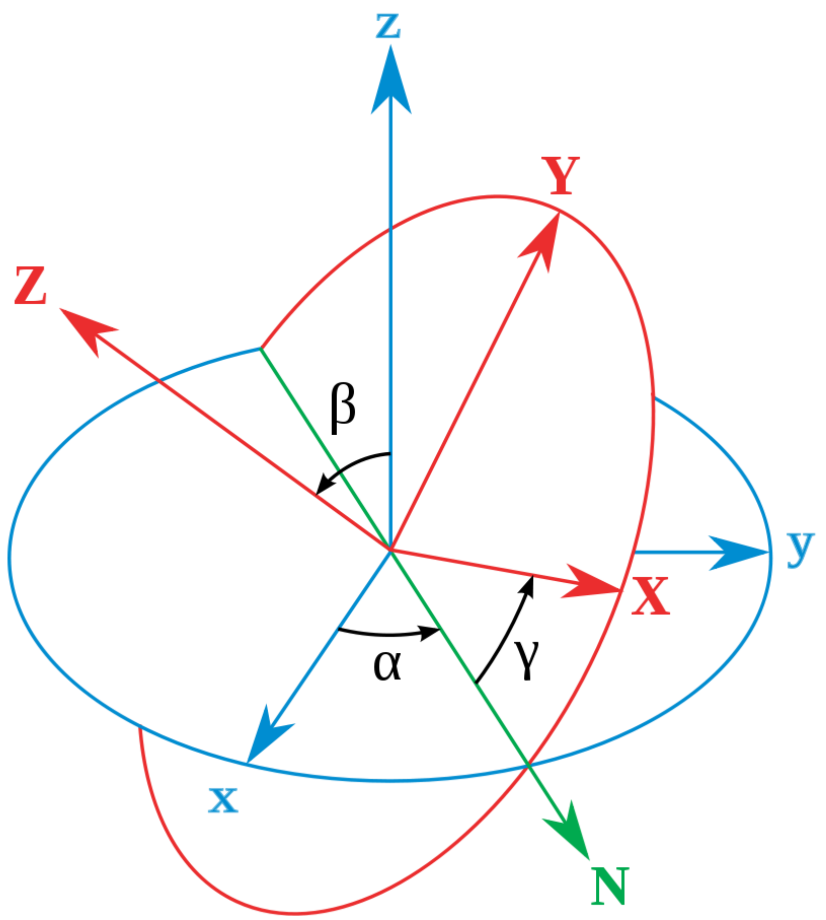
- Transformationsmatritzen für alle Transformationen n-1 -> n mit Hilfe ihrer Denavit-Hartenberg-Koeffizienten aufstellen

- Die Transformationsmatritzen multiplizieren um Transformationen zu verketten

- Richtung beachten: n -> n-1 mit

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n & 0 & -a_n \\ -\sin\theta_n \cos\alpha_n & \cos\theta_n \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & -d_n \sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n \sin\theta_n & -\cos\theta_n \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & -d_n \cos\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

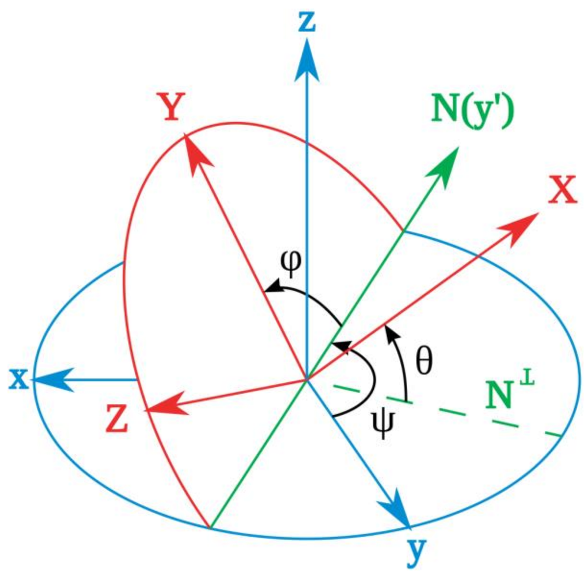
Euler Winkel



- Euler Winkel, auch Roll-Nick-Gier Winkel dienen der Überführung eines erdfesten - in ein körperfestes System unter Verwendung der Schnittgeraden der xy- und XY-Ebenen
- Die Schnittgerade N entspricht z x Z
- α (auch φ) ist der Winkel zwischen x und N, gemessen in Richtung der y-Achse
- β (auch θ) ist der Winkel zwischen z- und Z-Achse
- γ (auch ψ) ist der Winkel zwischen N und der X-Achse

Roll-Nick-Gier-Winkel

$\alpha\varphi$



- Synonym für die Eulerwinkel werden die Namen Roll Nick und Gier Winkel verwendet

- Im erdfesten System wird der Gierwinkel ψ gemessen. Durch eine Rotation um die z-Achse um diesen Winkel wird die y-Achse zur Knotenachse N(y'). $(-\pi < \psi <= \pi)$

- Der in der xy-Ebene gemessene Nickwinkel θ wird um die Knotenachse N(y') gedreht. Somit entsteht die körperfeste X-Achse. $(-\pi/2 < \theta <= \pi/2)$

- Der Rollwinkel φ beschreibt die Drehung um die körperfeste X-Achse. So entstehen die körperfesten Y- und Z-Achsen. $(-\pi < \varphi <= \pi)$

- Alle Drehungen erfolgen im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn)

Berechnung der Winkel aus einer Rotationsmatrix

Ist eine Rotationsmatrix gegeben:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Dann können die Winkel in der XYZ-Konvention folgendermaßen berechnet werden

$$\beta = \operatorname{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha = \operatorname{atan2}(r_{21} / \cos(\beta), r_{11} / \cos(\beta))$$

$$\gamma = \operatorname{atan2}(r_{32} / \cos(\beta), r_{33} / \cos(\beta))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin(\gamma-\alpha) & \cos(\gamma-\alpha) \\ 0 & \cos(\gamma-\alpha) & -\sin(\gamma-\alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Falle von $\beta = \pi/2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\gamma+\alpha) & -\cos(\gamma+\alpha) \\ 0 & \cos(\gamma+\alpha) & -\sin(\gamma+\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Falle von $\beta = -\pi/2$

Im allgemeinen Fall ist die gegebene Berechnung gültig. Es gibt jedoch Sonderfälle, die eine Fallunterscheidung notwendig machen.
Bei $\beta = +/- \pi/2$ treten sogenannte Singularitäten auf, was dazu führt, dass es für α und γ unendlich viele Lösungen gibt.

Ist $\beta = +\pi/2$, setzt man zweckmäßigerweise

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \operatorname{atan2}(r_{12}, r_{22})$$

Ist stattdessen $\beta = -\pi/2$, setzt man analog zweckmäßigerweise

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = -\operatorname{atan2}(r_{12}, r_{22})$$