

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ.Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ И ИННОВАЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС  
"НОВЫЕ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И НАНОТЕХ-  
НОЛОГИИ"

**Фаддеев М.А.**

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ  
ЭКСПЕРИМЕНТА**

**(Учебное пособие)**

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий,  
укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебные дисциплины: «Методы обработки экспериментальных  
данных», «Статистические методы обработки результатов измерений»

Специальности, направления: «Физика», «Нанотехнология»,  
«Нанотехнология в электронике», «Микроэлектроника и  
полупроводниковые приборы», «Электроника и наноэлектроника»,  
«Информационные системы и технологии»

ННГУ, 2010

*Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок.*

Томас Гексли, естествоиспытатель.

## В В Е Д Е Н И Е

Работа физика-экспериментатора обязательно содержит этап математической обработки результатов проведенных измерений. Современная научно-исследовательская аппаратура имеет встроенные процессоры и сопряжение с персональными компьютерами, что позволяет автоматизировать определенные этапы математической обработки получаемой информации. Этот процесс облегчает технику вычислений, но требует от исследователя принципиального знания используемых методов, их достоинств, недостатков и границ их применимости.

Несмотря на имеющуюся обширную библиотеку специальной литературы по математической обработке результатов экспериментов, студенты, приступающие к изучению университетского курса физики, находятся в сложном положении. С первых дней обучения они вынуждены серьезно заниматься экспериментальной физикой в учебных лабораториях. В то же время современная средняя школа не дает специальных знаний по прикладной математике, достаточных для грамотной обработки результатов измерений. Серьезные учебные пособия требуют предварительной подготовки по разделам высшей математики в пределах нескольких семестров университетского курса. Строгое математическое обоснование методов обработки результатов измерений базируется на теоремах математического анализа, на теории вероятностей и других разделах высшей математики, которые студенты изучают не только на первом, но и на втором и третьем курсах. В последние годы стали широко доступными специализированные программные пакеты для обработки экспериментальных результатов. Однако эти программные средства также предполагают определенный уровень начальной математической подготовки пользователя.

С другой стороны, существует множество «методичек», которые наполнены огромным количеством формул, без объяснений и выводов. Подобная литература предполагает бессмысленное зазубривание, в ре-

зультате читатели часто используют формулы в тех условиях, когда они неприменимы.

Сложившаяся ситуация привела к необходимости создания определенной концепции обучения студентов первого курса методике элементарной обработки экспериментальных результатов. Многие положения должны излагаться без доказательств, но в таких формулировках, чтобы впоследствии не возникали противоречия с выводами разделов высшей математики, изучаемых в следующих семестрах.

Результатом сформулированной концепции явилось издание в 2002 году учебного пособия «Элементарная обработка результатов эксперимента» (автор М.А.Фаддеев). Это издание очень быстро разошлось среди заинтересованных читателей и в настоящее время стало библиографической редкостью. Интерес к пособию проявили не только студенты первого курса физического факультета, но и старшекурсники, аспиранты, преподаватели других естественно-научных факультетов университета, а также других высших учебных заведений. Кроме того, возникла потребность в изложении некоторых дополнительных вопросов.

Как следствие, было подготовлено данное учебное, ориентированное прежде всего на студентов-первокурсников естественно-научных и технических высших учебных заведений. Основная его цель — дать возможность студентам с первой недели лабораторного практикума проводить корректную математическую обработку результатов измерений физических величин. Учебное пособие содержит описание методик расчета погрешностей измеряемых величин, метода наименьших квадратов, анализа корреляции переменных величин. Отсутствие доказательств используемых теорем автор пытался (хотя бы частично) скомпенсировать строгой последовательностью изложения материала. Кроме того, в приложениях приведены элементарные сведения, необходимые для понимания описанных методов, и таблицы значений специальных функций, часто применяемых при обработке экспериментальных результатов.

Опыт, накопленный при апробации первого издания этого учебного пособия, подвинул автора на расширение дополнительных приложений. В частности, приложение 2 о значащих цифрах является, фактически, повторением материала, излагаемого в средней школе, а приложение 3 о распределении Стьюдента в полном объеме предназначено для студентов второго и более старших курсов. В результате предлагаемое учебное пособие, по мнению автора и его коллег, станет полезным даже студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам любых естественно-

научных специальностей при проведении экспериментальных исследований.

В последние годы в нашем городе активизировалась работа секции «Физика» Научного общества учащихся, которая организована при физическом факультете Нижегородского государственного университета им.Н.И.Лобачевского. Школьникам, начинающим проводить самостоятельные экспериментальные исследования, требуется элементарная методика вычисления погрешностей результатов, с которой они могут ознакомиться по данному учебному пособию.

Автор искренне благодарит всех сотрудников физического факультета Нижегородского госуниверситета, кто своими советами и рекомендациями способствовал появлению этого издания. Особую признательность автор выражает профессору Е.В.Чупрунову, доцентам Ю.А.Горбунову, Д.Е.Бурланкову, А.В.Ершову, ассистенту М.О.Марычеву, ведущему электронику И.А.Карабановой, студентам Е.Конькову и А.Белову.

# ГЛАВА 1

## ИЗМЕРЕНИЕ И ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА

Физика представляет собой важнейшую часть естествознания и по своей сути является наукой экспериментальной. Это значит, что физика основную информацию получает путем **измерений**.

Процесс измерения всегда представляет собой сравнение измеряемой величины с эталоном. **Эталоном** является некоторая другая величина (такой же размерности), принимаемая за единицу измерения. Сравнение редко осуществляется непосредственным наложением эталона на исследуемый объект, чаще используется какой-либо прибор.

**Пример 1.** Необходимо измерить массу груза, который используется в лабораторной работе «Машина Атвуда». Измерительным прибором являются рычажные весы. Масса груза сравнивается с эталонами массы, которые называются гирями.

**Пример 2.** В лабораторной работе «Изучение упругих свойств твердых тел» необходимо измерить диаметр проволоки. В качестве измерительного прибора используется штангенциркуль. Диаметр проволоки сравнивается с миллиметровой шкалой, снабженной нониусом. Этalonами в этом случае являются деления шкалы, т.е. расстояния между рисками.

Обратим внимание на то, что измеряемая величина в принципе не выражается точно целым количеством эталонных значений. Рассмотрим более тщательно измерение длины металлического стержня, используемого в лабораторной работе «Физический маятник». Еще до проведения измерений мы знаем, что длина стержня есть физическая величина, имеющая определенное положительное скалярное значение  $L_0$ , но оно нам неизвестно.

В качестве эталона можно взять мерную ленту с делениями, равными 1 см. Если в длине стержня уложилось 51 сантиметровое эталонное значение, то мы говорим, что результат измерения равен  $L_1 = 51$  см. Можно ли утверждать, что значение длины стержня  $L_0$  равно точно 51 см?

При более внимательном рассмотрении оказывается, что длина стержня не совсем точно совпадает с отрезком длиной 51 см. Значит  $L_0 \neq L_1$ , хотя  $L_1 \approx L_0$ . Мы получили приближенный результат.

Для уточнения результата необходимо взять другой измерительный прибор, например рулетку с миллиметровыми делениями. Пусть измерение длины стержня рулеткой дает результат  $L_2 = 513$  мм. Похоже, что мы получили более точное значение измеряемой величины.

Но вновь возникает вопрос: действительно ли значение 513 мм является истинной длиной стержня? Если мы возьмем еще один прибор — какой-нибудь лазерный интерферометр — и получим значение длины стержня в микронах, то новый результат будет ближе к истинному значению  $L_0$ ? *Кажется, что да.* Будет ли полученный результат измерения абсолютно точно совпадать с истинным значением измеряемой величины? *Возможно, нет.*

Таким образом, мы пришли к проблеме точности измерения или, более корректно говоря, к проблеме определения погрешности результата проведенного измерения.

Сначала зададим два важных вопроса:

1. Можно ли абсолютно точно измерить исследуемую физическую величину?
2. И нужно ли нам это?

На первый вопрос ответим отрицательно. Так как любой эталон всегда имеет конечный размер, то нет основания полагать, что в измеряемой величине всегда точно укладывается целое число эталонов.

Можно сформулировать следующее общее утверждение:

Измерение физической величины не может быть выполнено абсолютно точно. Любое измерение дает приближенный результат, иначе говоря, содержит погрешность измерения.

**Погрешностью измерения** называется разность между истинным значением измеряемой величины  $A$  и результатом измерения  $a_i$

$$A - a_i. \quad (1.1)$$

На второй вопрос ответим также отрицательно. Абсолютная точность — понятие идеальное, а в экспериментальной физике — бесполезное.

Нет смысла в лабораторной работе «Машина Атвуда» проводить измерение массы перегрузка с точностью до одного микрограмма. Измерять диаметр проволоки в лабораторной работе «Изучение упругих свойств твердых тел» достаточно с точностью до сотой доли миллиметра.

Экспериментальная физика удовлетворяется приближенными результатами измерения. Но при этом *необходимо знать величину погрешности результата измерения*.

Обратим внимание, что выражение (1.1) нельзя использовать для расчета погрешности, т.к. сама измеряемая величина  $A$  нам неизвестна.

Прежде всего заметим, что погрешность результата зависит от используемого измерительного прибора. Многие приборы имеют шкалу с делениями. Разность значений, выражаемых соседними делениями, называется **ценой наименьшего деления** (ЦНД). У землемерной ленты ЦНД = 1 см, у плотницкой рулетки ЦНД = 1мм, у микрометра ЦНД = = 0,01 мм и т.д.

Цена наименьшего деления не обязательно является длиной. Электроизмерительные приборы имеют ЦНД, выраженную в единицах силы тока, электрического напряжения и т.д. Например, ЦНД может быть равна 0,1 А; 1 мА; 5 мКА; 0,05 В и т.п. Если прибор не стрелочный, а имеет цифровое табло, то ценой наименьшего деления является единица младшего разряда табло (т.е. минимальная разность отображаемых значений).

Следует помнить, что *измерять величину, меньшую, чем цена наименьшего деления прибора, данным прибором некорректно!* С помощью линейки с ЦНД = 1 см нельзя определить количество миллиметров, содержащихся в измеряемом отрезке. Для этого необходимо взять вторую линейку с ЦНД = 1 мм.

Из вышеприведенного описания процесса измерения можно сделать вывод, что разность ( $A - a_i$ ) не может превышать ЦНД. Значит, чем меньше ЦНД, тем точнее прибор и тем меньше погрешность результата.

Может быть, в качестве погрешности взять ЦНД? Тогда мы получим верхнюю границу возможной погрешности. Кажется, что для уменьшения погрешности результата достаточно взять более точный прибор, т.е. прибор с меньшей ЦНД.

К сожалению, проблема является более сложной.

Оказывается (вы в этом убедились при выполнении лабораторных работ), что если один и тот же человек повторит измерения одной и той же величины одним и тем же прибором в одинаковых условиях, то могут получиться разные результаты.

Так, например, в лабораторной работе «Машина Ативуда» время падения груза измеряется с помощью электронного секундометра, ЦНД которого 0,02 с. При выполнении работы 5 раз измерялось в одинаковых

условиях время падения одного и того же груза с одной и той же высоты. Были получены следующие результаты: 5,08; 5,04; 5,06; 5,06; 5,04 с. Некоторые числа из этой серии измерений отличаются друг от друга на величину большую, чем 0,02 с, поэтому их расхождение нельзя объяснить погрешностью прибора.

Дело в том, что «неизменность (идентичность) условий эксперимента» — понятие идеализированное и, строго говоря, нереальное. Мы живем в мире, наполненном огромным множеством взаимодействий между объектами. Причем интенсивность этих взаимодействий почти всегда изменяется со временем.

В приведенном выше примере на время падения груза влияют движение воздуха (дуновения ветра), флуктуации плотности воздуха, пыль, вибрация установки, вызванная движением окружающих тел и т.д.

Кроме этого, на результат измерения влияют процессы внутри прибора. Даже если прибор — простая деревянная линейка, расстояния между делениями несколько изменяются с повышением температуры окружающего воздуха вследствие теплового расширения или из-за изменения влажности. Если прибор электронный, то его показания зависят от наводок и скачков напряжения в сети питания, несмотря на встроенный блок стабилизации.

Наиболее важными являются два обстоятельства:

1. Причин, искажающих результат измерения, очень много. Хотя каждая причина мало влияет на результат, их совокупное действие может привести к сильному отличию величин  $A$  и  $a_i$ , т.е. к большой погрешности.
2. Самое печальное, что подобные погрешности невозможно устранить и величины этих погрешностей невозможно заранее вычислить. Поэтому такие погрешности называют **случайными**.

Случайная погрешность всегда присутствует в результате измерения, поэтому можно сделать важный вывод:

**Результат измерения является случайной величиной.**

На практике это утверждение означает, что при повторении в идентичных условиях измерений исследуемой физической величины  $A$ , вообще говоря, получаются неодинаковые числовые значения  $a_1, a_2, \dots, a_i$ .

Одной из важнейших задач данного учебного пособия является количественный учет случайных погрешностей.

Прежде чем приступить к изложению конкретных методик, следует подразделить всевозможные измерения на **прямые** и **косвенные**. При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно с помощью измерительного прибора, который имеет шкалу, проградуированную в соответствующих единицах измерения. Значение физической величины считывается по шкале прибора.

Примерами прямых измерений являются: измерение длины линейкой, времени секундомером и т.п. При определении массы с помощью рычажных весов подсчитывается сумма масс всех разновесов.

При косвенных измерениях определяемая величина вычисляется по результатам прямых измерений других величин, с которыми она связана функциональной зависимостью.

Примеры:

1) Измерение периода колебаний  $T$  математического маятника. Для измерения  $T$  необходимо измерить время  $t$ , в течение которого совершается  $n$  колебаний. Затем следует вычислить период по формуле  $T = t / n$ .

2) Измерение объёма цилиндра  $V$ . Для определения объёма цилиндра необходимо выполнить прямые измерения диаметра цилиндра  $d$  и высоты  $h$ , а затем вычислить объём по формуле  $V = \pi d^2 h / 4$ .

3) Измерение массы электрона. Очевидно, что на чашку рычажных весов электрон положить не удастся. Неизвестно, что брать в качестве гирь — соответствующих эталонов массы. Ясно, что прямые методы при решении данной проблемы в принципе невозможны. Некоторые косвенные методы определения массы электрона базируются на измерениях отклонения пучков ускоренных электронов в электрических и магнитных полях.

Следует подчеркнуть, что в косвенных измерениях определяемая величина вычисляется по результатам измерений других величин с помощью формул или других алгоритмов, полученных теоретическим путем. Именно методы теоретической физики делают возможными исследования очень малых и очень больших объектов природы (атомов, звезд и т.д.).

Современная наука занимается в основном косвенными измерениями. Физиков интересуют, например, массы элементарных частиц и раз-

меры галактик, измерить которые посредством прямого сравнения с эталоном невозможно, как невозможно и изготовление подходящих эталонов.

## ГЛАВА 2

### ПРЯМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Погрешности прямых измерений целесообразно разделить на систематические, случайные и промахи.

#### § 2.1. Систематические погрешности или поправки

Систематические погрешности вызываются факторами, действующими либо одинаковым образом при повторных измерениях, либо изменяющимися по определённому закону.

Систематические погрешности возникают из-за неправильного выбора метода измерения, неправильной установки прибора (например, «сбит» ноль, прибор установлен в горизонтальное положение вместо вертикального) и т.п. Систематическими являются ошибки при округлении математических и физических констант (например, таких, как число  $\pi$ , гравитационная постоянная, элементарный заряд и т.п.). Как правило, источники систематических погрешностей тщательно анализируются, выявляются причины этих ошибок, затем, по возможности, они устраняются.

Иногда возможно изменить методику эксперимента так, что некоторая систематическая погрешность исчезает. Например, в лабораторной работе «Математический маятник» при определении ускорения свободного падения требуется измерить длину математического маятника. Для устранения систематической погрешности измерения длины часто используется разностный метод. Периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  вычисляются для двух разных значений длины  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. Записав формулу периода математического маятника для двух длин, нетрудно получить следующее выражение для вычисления ускорения свободного падения:

$$g = 4\pi^2 \frac{L_1 - L_2}{T_1^2 - T_2^2}, \quad (L_1 \neq L_2).$$

В этой формуле систематические погрешности измерения длины маятника уничтожаются вычитанием.

Заметим, что предложенный прием исключения систематической погрешности требует значительного отличия величин  $L_1$  и  $L_2$  и, следовательно, величин  $T_1$  и  $T_2$ . Как будет показано в главе 3, при близких значениях  $L_1$  и  $L_2$  (а значит,  $T_1$  и  $T_2$ ) резко возрастает случайная погрешность результата, в данном случае искомой величины  $g$ .

В других случаях систематические погрешности учитываются в виде поправок. Например, при измерении длины может быть рассчитана поправка на удлинение, вызванное изменением температуры. Можно вычислить поправку на выталкивающую силу воздуха при определении массы тела взвешиванием и т.п.

Отличительная черта систематических погрешностей — возможность их предварительного расчета или полного устранения совершенствованием экспериментальной методики.

*Примечание.* Иногда погрешности по своему характеру относятся к систематическим, но их очень трудно учитывать. Например, в работе по измерению моментов инерции тел с помощью трифильярного подвеса нам необходимо определить диаметр металлической полусферы. Тщательные измерения показывают, что данное тело не является идеальной полусферой. Диаметры, измеренные в различных направлениях, несколько отличаются. В подобных случаях скрупулезное исследование сложной формы тела является практически нецелесообразным. Полагается, что тело имеет идеальную форму, а систематическая погрешность заменяется случайной. В данном случае поперечный размер измеряется несколько раз в различных направлениях, а искомый диаметр вычисляется как среднее значение. Расчет погрешности, которую полагают случайной, проводят методом, изложенным в следующем разделе.

## § 2.2. Случайные погрешности прямых измерений

Проведем измерения какой-либо физической величины  $A$  несколько раз. Как уже указывалось в главе 1, мы получим, вообще говоря, несовпадающие результаты:  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ , где  $n$  — число измерений. Различие между числами  $a_i$  может быть достаточно заметным, хотя измерения проводятся в одинаковых условиях, тем же самым методом и одним и тем же исследователем.

Из-за случайного характера погрешности искомая величина остаётся, вообще говоря, неизвестной.

Расчёт случайных погрешностей основан на теории вероятностей и математической статистике.

Прежде всего, в математической статистике доказывается, что при отсутствии систематических погрешностей (или после их устранения) наилучшим приближением измеряемой величины  $A$  является так называемое **среднее статистическое** результатов измерений

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i . \quad (2.1)$$

Если число  $n$  достаточно велико, то у многих полученных результатов измерения  $a_i$  могут совпадать все значащие цифры. Тогда среднее статистическое удобнее подсчитывать по следующей формуле:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_k n_k a_k , \quad (2.2)$$

где  $n_k$  — количество повторений значения  $a_k$  в серии из  $n$  измерений. Суммирование происходит по всем различающимся наблюдаемым значениям  $a_k$ . Очевидно, что

$$n = \sum_k n_k . \quad (2.3)$$

Например, в эксперименте 3 раза было получено значение измеряемой величины 2,1; 5 раз — значение 2,3 и 2 раза — значение 2,2. Тогда среднее статистическое можно вычислить так

$$\bar{a} = (3 \cdot 2,1 + 5 \cdot 2,3 + 2 \cdot 2,2) / (3 + 5 + 2) = 2,22.$$

При любом конечном числе измерений  $n$  невозможно гарантировать, что вычисленное по формулам (2.1) или (2.2) значение  $\bar{a}$  в точности равно искомой величине  $A$ . Дело в том, что, хотя в каждой конкретной серии измерений мы получаем  $n$  определенных чисел  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), сами результаты измерений по своему смыслу являются случайными. В этом мы можем убедиться, повторив серию из  $n$  измерений. Мы полу-

чим уже другие числа  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Среднее статистическое  $\bar{a}$ , вычисляемое по формулам (2.1) или (2.2), зависит от всех  $a_i$ . В этой ситуации и среднее статистическое  $\bar{a}$  также является случайной величиной. Это утверждение можно проиллюстрировать, повторив серии из  $n$  измерений несколько раз. Подсчитывая каждый раз средние статистические  $\bar{a}$  по вышеприведенным формулам, мы получим, вообще говоря, несовпадающие числовые значения для различных серий измерений, хотя эти числа  $\bar{a}$  будут группироваться в окрестности неизвестной величины  $A$ . Следовательно, погрешность полученного результата — разность  $(A - \bar{a})$  — также является **случайной величиной**.

Одна из важных теорем математической статистики утверждает, что при неограниченном увеличении числа измерений  $n$  среднее статистическое  $\bar{a}$  неограниченно приближается к искомой величине  $A$ .

Из этого следует, что повысить точность результата  $A \approx \bar{a}$  можно путём увеличения числа измерений  $n$ . Но с другой стороны, невозможно проделать бесконечное количество измерений и достичь равенства  $A = \bar{a}$ . Поэтому необходимо получить количественное значение погрешности  $(A - \bar{a})$ .

Математическая статистика предлагает в качестве **среднего** значения случайной погрешности использовать следующую величину:

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}. \quad (2.4)$$

Эту величину иногда называют **среднеквадратичным отклонением среднего значения**. Число  $S_0$  характеризует точность определения искомой величины  $A$  путём вычисления среднего статистического  $\bar{a}$ . Точнее говоря,  $S_0$  является *средней мерой* отклонения среднего статистического  $\bar{a}$  от истинного значения  $A$ . Однако запись результата измерений в виде

$$A = \bar{a} \pm S_0 \quad (2.5)$$

приводит к серьёзным недоразумениям. Дело в том, что повторяя серии из  $n$  измерений и вычисляя каждый раз новые значения среднего статистического  $\bar{a}$ , мы будем получать числа, как попадающие внутрь интервала ( $\bar{a} - S_0; \bar{a} + S_0$ ), так и лежащие вне его (причем под  $\bar{a}$  здесь понимается среднее статистическое, полученное в первой серии измерений). Более подробное исследование показывает, что выпадают из указанного интервала *около трети* полученных значений среднего статистического в проведенных сериях измерений. Это естественно, так как величина  $S_0$  является оценкой *средней*, а не *максимальной* погрешности. Величину  $S_0$  часто называют среднеквадратичной погрешностью приближенного равенства  $A \approx \bar{a}$ .

Вообще говоря, теория допускает неограниченно большую величину максимальной погрешности. В то же время следует принять во внимание, что очень большие погрешности практически невероятны, т.е. не встречаются в измерениях.

Согласно математической статистике, для корректного представления результата измерений следует изначально задаться его **надёжностью** или, иначе говоря, **доверительной вероятностью**  $\alpha$ .

Корректное понятие о вероятности излагается в специальной литературе (см. список в конце данного учебного пособия). В этом разделе поясняется лишь процедура вычисления случайной погрешности, соответствующей выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ .

Величина  $\alpha$  берется такой, чтобы дополнительная вероятность  $(1 - \alpha)$  была столь мала, что событие с вероятностью  $(1 - \alpha)$  практически не происходило бы при однократном испытании. На практике величина доверительной вероятности  $\alpha$  выбирается близкой к единице, например: 0,9; 0,95; 0,99.

Случайные погрешности принято представлять в виде **доверительного интервала**, длина которого определяется величиной доверительной вероятности. В качестве центра доверительного интервала для измеряемой величины  $A$  берется ее среднее статистическое  $\bar{a}$ , вычисленное по результатам серии измерений  $A$ . Границы этого доверительного интервала выражаются произведением среднеквадратичного отклонения (2.4) и безразмерного **коэффициента Стьюдента**  $t_{\alpha, v}$ .

Величина коэффициента Стьюдента зависит от ранее выбранной доверительной вероятности  $\alpha$  и целочисленного параметра  $V$ , называемого **числом степеней свободы**. При построении доверительного интервала для измеряемой величины  $A$  число степеней свободы  $V$  берется на единицу меньше количества измерений  $n$ , проведенных в одинаковых условиях. Численные значения коэффициентов Стьюдента для нескольких различных доверительных вероятностей  $\alpha$  приведены в приложении 3 настоящего учебного пособия и в рекомендуемой литературе.

Результат измерения физической величины  $A$  представляется в виде:

$$A = \bar{a} \pm t_{\alpha, n-1} S_0. \quad (2.6)$$

Смысл записи (2.6) таков: измеряемая величина  $A$  с вероятностью  $\alpha$  находится внутри интервала  $(\bar{a} - t_{\alpha, n-1} S_0; \bar{a} + t_{\alpha, n-1} S_0)$ . Иначе говоря, построенный интервал накрывает значение неизвестной величины  $A$  с вероятностью  $\alpha$ .

Таким образом, повторение серии  $n$  измерений даст значение среднего статистического  $\bar{a}$ , которое практически достоверно попадает в ранее построенный доверительный интервал. Практическая достоверность обеспечивается большой величиной доверительной вероятности  $\alpha$ . Вероятность противоположного исхода равна  $(1 - \alpha)$ , т.е. этот исход полагается практически невозможным.

Произведение

$$\Delta A_{\text{нр}} = t_{\alpha, n-1} S_0 \quad (2.7)$$

следует рассматривать как случайную погрешность определения искомой величины  $A$ , но не максимальную, а соответствующую надежности  $\alpha$ . Если  $\alpha$  близка к единице, то погрешность  $\Delta A_{\text{нр}}$  практически не отличается от максимально возможной, которая может реально встретиться в экспериментах.

Можно сказать, что в формуле (2.7) коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, n-1}$  показывает, во сколько раз вероятная случайная погрешность (которая соответствует выбранной доверительной вероятности) больше среднеквадратичного отклонения  $S_0$ .

### § 2.3. Учет приборной погрешности

При проведении экспериментов иногда наблюдается, что все измеренные значения  $a_i$  совпадают между собой. В этом случае оценка погрешности  $\Delta A_{cl}$  согласно формуле (2.7) равна нулю. Но было бы неправильно считать, что получено точное значение измеряемой величины  $A$ . Помимо случайной погрешности  $\Delta A_{cl}$ , на результат измерения влияет погрешность, вносимая прибором. Эту погрешность, называемую приборной, обозначим буквой  $\delta$ . Чем меньше величина  $\delta$ , тем более точным является прибор.

Выше мы говорили о том, что точность прибора определяется ЦНД. Но если измерительный прибор сложнее портновского метра, то следует принимать во внимание, что это объект, состоящий из многих частей и функционирующий на основе некоторого физического явления. К примеру, существуют электроизмерительные приборы магнитоэлектрической, электромагнитной, электродинамической и других систем. На взаимодействие отдельных частей прибора влияет множество случайных факторов. Его точность зависит от допусков на изготовление отдельных частей. Таким образом, и сам прибор вносит дополнительную погрешность в результат измерения.

Для многих электроизмерительных приборов погрешность прибора выражается классом точности. Класс точности  $K$  — это приборная погрешность, выраженная в процентах от максимально допустимых показаний прибора по выбранной шкале измерения, т.е.

$$K = \frac{\delta}{A_m} 100\%, \quad (2.8)$$

где  $A_m$  — максимально возможное значение измеряемой величины по выбранной шкале.

Из (2.8) получаем:

$$\delta = \frac{A_m}{100 \%} K (\%) . \quad (2.9)$$

Класс точности приводится или в паспорте прибора, или на самом приборе. Величину  $K$  на приборе помещают обычно в кружок, например, (0,5) или (1,0). Существуют следующие классы точности электроизмерительных приборов: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Первые четыре класса являются прецизионными (высокоточными), остальные — техническими.

Пример: Максимальное напряжение, которое можно измерить вольтметром по выбранной шкале, равно 500 В, класс точности  $K = 0.5$ . Для определения приборной погрешности следует вычислить

$$\delta = \frac{0,5\% \cdot 500 \text{ A}}{100\%} = 2,5 \text{ A} .$$

Полагается, что величина  $\delta$  постоянна по всей той шкале прибора, для которой она вычислена.

Для некоторых измерительных приборов в его паспорте или непосредственно на приборе указывают сразу приборную погрешность. Если же неизвестен класс точности прибора и нет других сведений о приборной погрешности, то  $\delta$  считают равной цене наименьшего деления шкалы.

По сути дела, величина  $\delta$  обусловлена разнообразными случайными процессами, происходящими внутри прибора, и также представляет собой оценку случайной погрешности. Величина же  $\Delta A_{cl}$  рассматривается как оценка погрешностей, вызываемых случайными процессами, протекающими вне измерительного прибора. Таким образом, в некотором смысле условно, всевозможные случайные ошибки подразделяются на два типа — одни вычисляются по формуле (2.7), другие характеризуются величиной  $\delta$ .

Поэтому число  $\delta$  можно интерпретировать как оценку средней погрешности с высоким уровнем доверия (близким к единице), полученную по результатам большого числа измерений в ходе испытаний прибора.

По сделанному выше предположению величины  $S_0$  и  $\delta$  независимы. В математической статистике выводится, что общую погрешность результата можно представить как квадратный корень из суммы квадратов отдельных погрешностей:

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A_{\text{не}})^2 + (\Delta A_{dd})^2}, \quad (2.10)$$

где  $\Delta A_{dd} = t_{\alpha,\infty} \frac{\delta}{3}$  является приборной погрешностью, соответствующей выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ . Множитель  $t_{\alpha,\infty}$  — коэффициент Стьюдента для заданной доверительной вероятности  $\alpha$  и для бесконечного числа степеней свободы, т.е. для числа измерений  $n \rightarrow \infty$ . Величины  $t_{\alpha,\infty}$  для разных  $\alpha$  включены в таблицы коэффициентов Стьюдента.

Следовательно, результат измерения величины  $A$  может быть представлен в виде:

$$A = \bar{a} \pm \sqrt{(t_{\alpha,n-1} S_0)^2 + \left(t_{\alpha,\infty} \frac{\delta}{3}\right)^2} \quad (2.11)$$

или, более кратко,  $A = \bar{a} \pm \Delta A$ , где  $\Delta A$  определяется формулой (2.10).

Таким образом, истинное значение измеряемой величины  $A$  с вероятностью  $\alpha$  находится внутри доверительного интервала следующего вида:

$$(\bar{a} - \Delta A; \bar{a} + \Delta A). \quad (2.12)$$

*Примечание.* В практических задачах составные части абсолютной погрешности  $\Delta A_{\text{не}}$  и  $\Delta A_{dd}$  могут значительно отличаться друг от друга (на порядок и более). В этих случаях для предварительных оценок можно пренебречь меньшей из них. При окончательных расчетах погрешности следует использовать общую формулу (2.10).

## § 2.4. Абсолютная и относительная погрешности

Величину, представленную формулой (2.10), можно называть **абсолютной погрешностью** измеряемой величины  $A$ . Заметим, что абсолютная погрешность выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина  $A$ .

Часто при обработке результатов целесообразно, кроме абсолютной, использовать относительную погрешность измеряемой величины. **Относительной погрешностью**  $\varepsilon_A$  измеряемой величины  $A$  называют отношение абсолютной погрешности  $\Delta A$  к истинному значению  $A$ . В качестве наилучшей оценки относительной погрешности  $\varepsilon_A$  используется отношение  $\Delta A$  к среднестатистическому значению  $\bar{a}$

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta \dot{R}}{\bar{a}} . \quad (2.13)$$

Относительная погрешность всегда является безразмерной величиной, ее часто выражают в процентах.

**Пример.** Диаметр цилиндра измерялся пять раз ( $n = 5$ ) микрометром с приборной погрешностью  $\delta = 0,01$  мм. При этом были получены следующие числовые значения: 15,33; 15,31; 15,28; 15,31; 15,32 мм. Требуется определить абсолютную и относительную погрешности измерения диаметра  $d$ , а также границы доверительного интервала для заданной доверительной вероятности  $\alpha$ .

В данном случае разброс значений, в сущности, определяется отклонением формы цилиндра от идеальной. Формально, полученные погрешности следует отнести к систематическим. Но можно принять во внимание, что отклонение формы цилиндра от идеальной возникло из-за влияния случайных факторов в процессе изготовления цилиндра и его эксплуатации. Поэтому данную погрешность целесообразно перевести в разряд случайных (см. примечание к § 2.1) и вычислять по вышеприведенному алгоритму. Для корректности этой процедуры необходимо измерять диаметр несколько раз в различных направлениях.

Сначала рассчитываем среднее статистическое по формуле (2.1) и получаем  $\bar{d} = 15,31$  мм. Но прежде чем вычислять  $\Delta A_{cl}$ , следует провести предварительный анализ данных.

Если все разности  $(d_i - \bar{d})$  по абсолютной величине не превышают  $\delta$ , то случайная погрешность  $\Delta A_{cl}$  значительно меньше приборной  $\Delta A_{dd}$  и величиной  $\Delta A_{cl}$  в выражении (2.10) можно пренебречь. Если же хотя бы для одного значения  $d_i$  абсолютная величина разности  $|d_i - \bar{d}|$  превышает  $\delta$ , необходимо учитывать случайную погрешность при расчете доверительного интервала (2.12).

В нашем примере разброс измеренных значений превышает 0,01 мм, поэтому необходимо вычислять случайную погрешность. По формуле (2.4) получаем  $S_0 = 0,0084$  мм. Выбираем доверительную вероятность (надежность)  $\alpha = 0,95$ . Так как серия измерений содержит 5 значений, то коэффициент Стьюдента следует брать для числа степеней свободы равного 4. Из таблицы коэффициентов Стьюдента извлекаем значение  $t_{\alpha, 4} = 2,776$ . Для той же доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$  и для бесконечного числа степеней свободы значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, \infty} = 1,96$ . Далее последовательно рассчитываем  $\Delta d_{cl} = 0,0232$  мм,  $\Delta d_{np} = 0,0065$  мм и абсолютную погрешность  $\Delta d = 0,03$  мм (при расчете погрешности округление проводится в сторону завышения). Окончательный результат можно записать в виде:

$$d = (15,31 \pm 0,03) \text{ мм}.$$

Эта запись означает, что истинное значение диаметра цилиндра с вероятностью 0,95 находится внутри доверительного интервала с границами (15,28 мм; 15,34 мм).

*Примечание.* Если задать большее значение доверительной вероятности, например,  $\alpha = 0,99$ , то соответствующие коэффициенты Стьюдента будут равны:  $t_{\alpha, 4} = 4,604$  и  $t_{\alpha, \infty} = 2,576$ . Как следствие, абсолютная погрешность  $\Delta d$  увеличится и границы доверительного интервала раздвинутся:

$$15,27 \text{ мм} \leq d \leq 15,35 \text{ мм}.$$

Таким образом, увеличение надежности результата влечет рост допустимой погрешности. Поэтому на практике бессмысленно неограниченno увеличивать доверительную вероятность, так как это приведет к возрастанию доверительного интервала до бесконечных размеров. При обработке результатов лабораторных работ чаще всего пользуются оптимальным значением  $\alpha = 0,95$ .

## § 2.5. Анализ промахов

Имеет смысл в отдельный тип погрешностей выделить так называемые промахи (или грубые ошибки). Имеются в виду результаты с аномальными числовыми значениями. Например, речь идёт о величине, отличающейся от остальных примерно на порядок.

Причиной промаха может быть сбой аппаратуры. Если экспериментатор записывает показания прибора в протокол измерений, то он может поставить ложную цифру из-за усталости или невнимательности. Промах необходимо исключить из полученной серии результатов измерений.

Однако и отбрасывать некоторый результат измерения как аномальный, руководствуясь только эмоциями, некорректно. Выше было сказано, что случайные погрешности могут в принципе принимать весьма большие значения. Поэтому требуется определенная математическая процедура, которая позволит отличить промах от результата с допустимой (хотя и большой по величине) случайной погрешностью.

Предлагаемый ниже метод поиска промахов основан на том предположении, что случайные погрешности подчиняются распределению вероятностей Гаусса (нормальному распределению).

Согласно теории вероятностей, случайные погрешности подчиняются нормальному распределению при выполнении трех условий:

1. Количество случайных факторов, влияющих на величину результата измерения, очень велико (практически неограниченno).
2. Каждый случайный фактор можно полагать независимым от остальных.
3. Из случайных факторов ни один не является превалирующим.

Будем полагать, что эти условия выполнены. Более подробно смысл вышеперечисленных условий разъясняется в пункте 4 приложения 1.

Пользуясь нормальным распределением, можно вычислить вероятность отклонения измеренного значения от измеряемой величины. Если эта вероятность  $\varepsilon$  мала, то с надежностью  $\alpha = 1 - \varepsilon$  можно такой результат считать промахом и выбросить его из данной серии измерений.

Доказательство справедливости нижеизложенной процедуры поиска промахов приводится в курсах теории вероятностей и математической статистики. В данном параграфе излагается лишь последовательность необходимых вычислений.

Процедуру анализа аномальных результатов можно разделить на следующие этапы.

1. Прежде всего задаёмся определённой доверительной вероятностью (надёжностью)  $\alpha$ .

2. Затем из совокупности измерений  $a_1, \dots, a_n$  временно исключаем «подозрительный» результат, который заметно отличается от всех остальных, например  $a_k$ .

3. Вычисляем среднее статистическое значение остальных результатов  $a_i$  ( $i \neq k$ ), используя формулу (2.1):

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq k}^n a_i. \quad (2.14)$$

4. Из таблицы коэффициентов Стьюдента извлекаем значение  $t_{\alpha, n-2}$ , соответствующее надёжности  $\alpha$  и числу измерений  $n-1$  (т.е. числу степеней свободы  $V = n-2$ ).

5. Вычисляем величину

$$\Delta a_m = t_{\alpha, n-2} \sqrt{\frac{n D_1}{(n-1)(n-2)}},$$

где параметр  $D_1$  определяется следующей суммой:

$$D_1 = \sum_{i=1, i \neq k}^n (a_i - \bar{a}_1)^2.$$

Заметим, что в последней сумме отсутствует слагаемое с «подозрительным» результатом измерения  $a_k$ .

Величина  $\Delta a_m$  имеет смысл максимально допустимого отклонения при доверительной вероятности  $\alpha$ .

6. Наконец, проверяем условие

$$|\bar{a}_1 - a_k| \geq \Delta a_m. \quad (2.15)$$

В случае выполнения условия (2.15) «подозрительное» значение  $a_k$  считается промахом и исключается из совокупности результатов измерений.

При невыполнении условия (2.15) отклонение числа  $a_k$  от остальных значений  $a_i$  серии считается допустимым. Число  $a_k$  не исключается из набора результатов.

Справедливость предлагаемой процедуры основана на свойствах распределения вероятности измеряемых значений  $a_i$ . В курсе математической статистики доказывается, что вероятность отклонения отдельного измерения  $a_k$  от среднего значения  $\bar{a}_1$ , большего, чем  $\Delta a_m$ , равна  $1 - \alpha$ , т.е. мала. Это значит, что отклонение  $|\bar{a}_1 - a_k|$  большее, чем величина  $\Delta a_m$  в конкретной серии измерений практически невозможно. Поэтому большое значение отклонения следует объяснить тем, что исследуемое значение  $a_k$  является «посторонним» для данной серии измерений и должно быть исключено.

*Примечание.* При использовании вышеописанной процедуры, возможно допустить ошибку 1-го рода — отбросить результат измерения, который следует учесть. Вероятность этой ошибки равна  $1 - \alpha$ . Увеличивая надёжность  $\alpha$ , мы уменьшаем вероятность ошибки 1-го рода. Но при этом увеличивается величина коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, n-2}$  и, следовательно, растёт вероятность ошибки 2-го рода — принять ложное значение за истинное, иначе говоря, включить промах в набор результатов. Поэтому следует оптимально выбирать величину  $\alpha$  (как и при построении доверительных интервалов) равной 0,9; 0,95; 0,99 — в зависимости от важности задачи.

*Пример.* При измерении диаметра диска  $d$  штангенциркулем получено 6 различных значений: 153,4 мм; 154,6 мм; 154,7 мм; 155,0 мм; 164,3 мм; 154,3 мм. Проверим, является ли пятое измерение промахом.

1. Выберем доверительную вероятность  $\alpha = 0,95$ .
2. Исключим из набора значение  $a_5 = 164,3$ .
3. Вычислим среднее статистическое остальных пяти значений  $\bar{a}_1 = 154,4$ .
4. Для  $\alpha = 0,95$  и числа степеней свободы  $6 - 2 = 4$  извлечём из таблицы значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha/2, 4} = 2,776$ .
5. Величина  $D_1$  равна 1,50, а предельное допустимое отклонение  $\Delta a_m = 1,862$ .

В данном примере отклонение проверяемого измерения  $a_5$  от среднего значения  $\bar{a}_1$  остальных результатов значительно превышает  $\Delta a_m$ , поэтому величину  $a_5$  следует признать промахом и исключить из набора результатов.

После отбрасывания  $a_5$  остальные результаты обрабатываются согласно процедуре, описанной в предыдущем разделе. Для диаметра диска окончательно получаем:

$$\bar{d} = 154,4; \quad 153,6 \leq d \leq 155,2.$$

Если же промах  $a_5$  оставить среди результатов измерений и провести ту же процедуру обработки, то мы получим, во-первых, завышенное значение измеряемой величины

$$\bar{d} = 156,1;$$

во-вторых, неоправданно большую ширину доверительного интервала

$$151,8 \leq d \leq 160,3.$$

*Примечание.* По своей природе промахи являются случайными событиями. Их выявление и отбрасывание производится не из-за их случайной природы, а потому что аномальные значения получаются уже не в условиях, которые были названы идентичными в смысле, описанным в главе 1.

## ГЛАВА 3

### КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

В современной физике редко проводятся прямые измерения исследуемой величины. Невозможно путём непосредственного сравнения с эталоном (см. главу 2) измерить массу протона, расстояние до звезды, постоянную Планка, время жизни активного атомного ядра и многое другое.

Пусть необходимо измерить численное значение физической величины  $Z$ , что невозможно выполнить прямыми методами. Теоретическая физика функционально связывает величину  $Z$  с несколькими другими физическими величинами  $A, B, C, \dots$ , значения которых уже известны или могут быть измерены непосредственно прямыми методами. Иначе говоря, исследуемая величина  $Z$  представляется в виде однозначной зависимости от величин  $A, B, C, \dots$ :

$$Z = f(A, B, C, \dots), \quad (3.1)$$

причем явный вид функции  $f$  известен экспериментатору.

В ходе эксперимента численные значения величин  $A, B, C, \dots$  многократно измеряются в идентичных условиях. Затем, согласно методике, изложенной в главе 2, для каждой из них вычисляются средние статистические  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$  по формулам (2.1) или (2.2), а затем подставляются в функцию (3.1) вместо соответствующих величин  $A, B, C, \dots$ . Вычисленное значение

$$\bar{Z} = f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots), \quad (3.2)$$

полагается искомым значением измеряемой величины  $Z$ . При этом, согласно математической статистике, достигается наилучшее приближение к истинному значению неизвестной  $Z$ .

### § 3.1. Расчет абсолютной погрешности косвенных измерений

После вычисления приближенного значения искомой величины  $\bar{Z} \approx Z$  необходимо провести оценку погрешности полученного приближения, разумеется, при выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ .

В курсе математической статистики доказывается, что если измерения  $A, B, C, \dots$  проводятся независимо, то абсолютная погрешность  $\Delta Z$  величины  $Z$ , заданной при помощи функции (3.1), может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{A=\bar{A}, \dots}^2 (\Delta A)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)_{A=\bar{A}, \dots}^2 (\Delta B)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)_{A=\bar{A}, \dots}^2 (\Delta C)^2 + \dots} \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) величины  $\frac{\partial f}{\partial A}, \frac{\partial f}{\partial B}, \frac{\partial f}{\partial C}, \dots$  представляют собой ча-

стные производные функции (3.1) по переменным  $A, B, C, \dots$  соответственно. Выражения для производных получаются аналитическим дифференцированием заданной функции (3.1). Нижние индексы у производных  $A = \bar{A}, \dots$  означают, что численные значения производных рассчитываются после замены аргументов  $A, B, C, \dots$  на ранее полученные средние статистические:

$$A = \bar{A}, B = \bar{B}, C = \bar{C} \dots \quad (3.4)$$

Величины  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$  в формуле (3.3) — абсолютные погрешности величин  $A, B, C, \dots$  соответственно, каждая из которых рассчитывается по методике, изложенной в предыдущей главе. Сначала вычисляются среднеквадратичные погрешности  $S_A, S_B, S_C, \dots$  для каждой из этих величин по общей формуле (2.4). Кроме того, учитываются приборные погрешности  $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \dots$ .

При расчете абсолютных погрешностей, согласно (2.7), (2.10) и (2.11), необходимо заранее задать доверительную вероятность  $\alpha$ . По

условиям эксперимента количества измерений  $n_A, n_B, n_C, \dots$  в идентичных условиях для разных величин  $A, B, C, \dots$ , вообще говоря, могут быть неодинаковыми. Поэтому при построении доверительного интервала для искомой величины  $Z$ , следует коэффициенты Стьюдента брать для одной и той же доверительной вероятности  $\alpha$ , но для степеней свободы, соответствующих числу измерений каждой из величин  $A, B, C, \dots$ .

Например, абсолютная погрешность величины  $A$  определяется так:

$$\Delta A = \sqrt{(t_{\alpha, n_A - 1} S_A)^2 + (t_{\alpha, \infty} \delta_A / 3)^2}, \quad (3.5)$$

где  $n_A$  — количество измерений величины  $A$  в одинаковых условиях,  $t_{\alpha, n_A - 1}$  и  $t_{\alpha, \infty}$  — коэффициенты Стьюдента для числа степеней свободы ( $n_A - 1$ ) и для бесконечного числа степеней свободы соответственно при доверительной вероятности  $\alpha$ . Величина  $S_A$  представляет собой среднеквадратичную погрешность величины  $A$ :

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_A} (A_i - \bar{A})^2}{n_A(n_A - 1)}}, \quad (3.6)$$

где  $A_i$  — отдельные измерения величины  $A$ , проведенные в одинаковых условиях.

Абсолютные погрешности  $\Delta B, \Delta C, \dots$  для остальных измеряемых величин  $B, C, \dots$  определяются аналогично.

При необходимости в ходе вычисления средних величин  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$  и погрешностей  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots$  проводится анализ и исключение промахов из серий проведенных измерений.

Абсолютная погрешность  $\Delta Z$ , полученная по формуле (3.3), представляет собой полуширину доверительного интервала для искомой величины  $Z$  при установленной доверительной вероятности  $\alpha$ . Окончательный результат для косвенно измеряемой величины  $Z$  можно записать в виде:

$$Z = \bar{Z} \pm \Delta Z, \quad (3.7)$$

где  $\bar{Z}$  дается выражением (3.2), а  $\Delta Z$  вычисляется согласно (3.3). Доверительный интервал для величины  $Z$  имеет вид:  $(\bar{Z} - \Delta Z, \bar{Z} + \Delta Z)$ .

### § 3.2. Использование относительных погрешностей

Относительной погрешностью  $\varepsilon_Z$  косвенно измеряемой величины  $Z$ , в соответствии с (2.13), является отношение абсолютной погрешности  $\Delta Z$  к среднестатистическому значению  $\bar{Z}$ :

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{\bar{Z}}. \quad (3.8)$$

Удобство использования относительных погрешностей для расчета абсолютной погрешности  $\Delta Z$  косвенно измеряемой величины  $Z$  целесообразно продемонстрировать на конкретных, часто встречающихся в практике зависимостях (3.1). Далее будем полагать, что все рассчитанные абсолютные погрешности соответствуют определенной, заранее выбранной доверительной вероятности.

1. Пусть косвенно измеряемая величина  $Z$  является суммой или разностью непосредственно измеряемых величин  $A$  и  $B$ , т.е.

$$Z = A \pm B. \quad (3.9)$$

Тогда  $\bar{Z} = \bar{A} \pm \bar{B}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial A} = 1$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial B} = \pm 1$ .

Абсолютная погрешность  $\Delta Z$ , согласно (3.3) в данном случае представится простым выражением:

$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}. \quad (3.10)$$

Относительная погрешность  $\varepsilon_Z$  в соответствии с (3.8) выразится отношением:

$$\varepsilon_Z = \frac{\sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}}{\bar{A} \pm \bar{B}} . \quad (3.11)$$

2. Теперь пусть величина  $Z$  есть произведение величин  $A$  и  $B$ .

$$Z = A \cdot B. \quad (3.12)$$

Следовательно, в этом случае:  $\bar{Z} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial A} = B$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial B} = A$ .

Выразим абсолютную и относительную погрешности величины  $Z$ , причем последнюю преобразуем:

$$\Delta Z = \sqrt{\bar{B}^2 (\Delta A)^2 + \bar{A}^2 (\Delta B)^2} , \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z &= \frac{\sqrt{\bar{B}^2 (\Delta A)^2 + \bar{A}^2 (\Delta B)^2}}{\bar{A} \cdot \bar{B}} = \sqrt{\frac{\bar{B}^2 (\Delta A)^2 + \bar{A}^2 (\Delta B)^2}{\bar{A}^2 \cdot \bar{B}^2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\bar{A}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2} = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

3. Рассмотрим случай, когда величина  $Z$  равна отношению величин  $A$  и  $B$ :

$$Z = A/B . \quad (3.15)$$

Определим для этой функциональной зависимости частные производные  $\frac{\partial Z}{\partial A} = \frac{1}{B}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial B} = -\frac{A}{B^2}$ , среднее значение  $\bar{Z} = \bar{A} / \bar{B}$ , абсолютную и относительную погрешности:

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\bar{B}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{A} \cdot \Delta B}{\bar{B}^2}\right)^2} , \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_Z = \sqrt{\frac{\bar{B}^2}{\bar{A}^2} \left( \frac{(\Delta A)^2}{\bar{B}^2} + \frac{\bar{A}^2 (\Delta B)^2}{\bar{B}^4} \right)} = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2} . \quad (3.17)$$

Из приведенных примеров можно сделать вывод о том, что если функциональная зависимость (3.1) представляет собой сумму или разность, то легче вначале вычислить абсолютную погрешность  $\Delta Z$ , а затем относительную  $\varepsilon_Z$ . Если же функция (3.1) в правой части содержит произведение или отношение аргументов, то проще вначале подсчитать относительные погрешности аргументов, по ним вычислить относительную погрешность  $\varepsilon_Z$  величины  $Z$ , и затем — абсолютную погрешность  $\Delta Z$ , используя связь (3.8):

$$\Delta Z = \varepsilon_Z \cdot \bar{Z} . \quad (3.18)$$

Эти выводы справедливы для любого количества аргументов функции (3.1).

4. Рассмотрим более сложную функциональную зависимость между функцией  $Z$  и аргументами  $A, B, C$ :

$$Z = k \frac{A^P \cdot B^Q}{C^R} , \quad (3.19)$$

где  $k, P, Q, R$  — постоянные.

Ясно, что среднее значение представится следующим выражением:

$$\bar{Z} = k \frac{\bar{A}^P \cdot \bar{B}^Q}{\bar{C}^R} .$$

Теперь найдем выражения для частных производных

$$\frac{\partial Z}{\partial A} = k \frac{B^Q}{C^R} P A^{P-1}, \quad \frac{\partial Z}{\partial B} = k Q \frac{B^{Q-1}}{C^R} A^P, \quad \frac{\partial Z}{\partial C} = -k R \frac{B^Q}{C^{R+1}} A^P$$

и абсолютной погрешности определяемой величины

$$\Delta Z = \sqrt{\left(kP \frac{\bar{B}^Q}{\bar{C}^R} \bar{A}^{P-1}\right)^2 (\Delta A)^2 + \left(kQ \frac{\bar{A}^P}{\bar{C}^R} \bar{B}^{Q-1}\right)^2 (\Delta B)^2 + \left(kR \frac{\bar{A}^P}{\bar{C}^{R+1}} \bar{B}^Q\right)^2 (\Delta C)^2}.$$

Относительную погрешность целесообразно записать в виде, аналогичном (3.14) и (3.17):

$$\begin{aligned}\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} &= \sqrt{P^2 \left(\frac{\Delta A}{\bar{A}}\right)^2 + Q^2 \left(\frac{\Delta B}{\bar{B}}\right)^2 + R^2 \left(\frac{\Delta C}{\bar{C}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{P^2 \varepsilon_A^2 + Q^2 \varepsilon_B^2 + R^2 \varepsilon_C^2}.\end{aligned}$$

Очевидно, что и в данном примере, имея уже вычисленные средние значения  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  и абсолютные погрешности аргументов  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ,  $\Delta C$ , гораздо легче вычислить сначала относительную погрешность  $\varepsilon_Z$ , а затем, используя (3.18) — абсолютную погрешность  $\Delta Z$ . Следует обратить внимание на то, что показатель степени входит в выражение для относительной погрешности в качестве сомножителя, причем во второй степени, что существенно увеличивает вклад погрешности соответствующей величины в суммарную погрешность. Для увеличения точности результатов необходимо измерять аргументы, которые входят в функцию (3.1) в виде степени с показателем больше единицы, используя наиболее точные методы.

Для иллюстрации работы с функцией типа (3.19) рассмотрим вычисление объема прямого кругового конуса  $V$  на основе прямых измерений его диаметра основания  $d$  и высоты  $h$ :

$$V = \frac{\pi d^2}{12} h. \quad (3.20)$$

После проведения прямых измерений были вычислены средние значения  $\bar{d}$  и  $\bar{h}$  диаметра и высоты соответственно, а также абсолютные погрешности  $\Delta d$  и  $\Delta h$  этих же величин для установленной доверительной вероятности  $\alpha$ . Численное значение объема конуса  $\bar{V}$  вычисляется по формуле (3.20) с помощью уже полученных величин  $\bar{d}$  и  $\bar{h}$ .

Принимая во внимание характер зависимости (3.20) и рассмотренные выше примеры, сначала выразим относительную погрешность измерения объема конуса

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{\bar{V}} = \sqrt{4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2 + \varepsilon_\pi^2}, \quad (3.21)$$

где среднее значение объема конуса определяется следующим соотношением:

$$\bar{V} = \frac{\pi_0 \bar{d}^2}{12} \bar{h}. \quad (3.22)$$

Символом  $\pi_0$  здесь обозначено округленное значение числа  $\pi$ . Дело в том, что число  $\pi$  иррационально и при использовании в расчетах всегда округляется до необходимого количества значащих цифр. Отбрасываемая часть определяет относительную погрешность  $\varepsilon_\pi$ , которая входит в выражение погрешности определения объема конуса. По своему смыслу погрешность  $|\pi - \pi_0|$  является систематической, но ее оценку целесообразно проделать нижеизложенным способом, рассматривая выражение (3.20) как функцию трех независимых аргументов.

Обычно количество значащих цифр в  $\pi_0$  берется таким, чтобы погрешность  $\varepsilon_\pi$  мало влияла на погрешность результата  $\varepsilon_V$ , т.е. должно выполняться неравенство:

$$\varepsilon_\pi^2 << 4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2. \quad (3.23)$$

Тогда в выражении (3.21) слагаемым  $\varepsilon_\pi^2$  можно пренебречь.

Определим необходимое количество значащих цифр в  $\pi_0$  для конкретного примера. Пусть у нашего конуса получены значения  $\bar{d} = 20$  мм и  $\bar{h} = 40$  мм. При выбранной доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$  вычислены  $\Delta d = 0,05$  мм и  $\Delta h = 0,5$  мм. Обратите внимание, что при измерении диаметра  $d$  использовалась более точная методика, чем при измерении высоты  $h$ . Затем были рассчитаны относительные погрешности  $\varepsilon_d = 0,0025$  и  $\varepsilon_h = 0,0125$ . Вычисление правой части (3.23) дает

$4\epsilon_d^2 + \epsilon_h^2 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ . Следовательно, величина  $\epsilon_\pi^2$  должна быть много меньше  $2 \cdot 10^{-4}$ . Положим  $\epsilon_\pi^2 \leq 2 \cdot 10^{-6}$ . Тогда  $\epsilon_\pi \leq \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \approx 0,15\%$  (округление с завышением), и соответствующая абсолютная погрешность  $\Delta\pi = \epsilon_\pi\pi \leq 0,004$ . Отсюда следует, что значение числа  $\pi$ , округленное до тысячных долей 3,142, даст пренебрежимо малый вклад в погрешность результата  $\epsilon_V$ .

Теперь, подставляя в (3.22) численные значения  $\bar{d}$  и  $\bar{h}$ , вычисляем среднее значение объема конуса  $\bar{V} = 4189 \text{ mm}^3$ . В выражении относительной погрешности (3.21) отбросим пренебрежимо малую величину  $\epsilon_\pi$ . Тогда  $\epsilon_V = \sqrt{4\epsilon_d^2 + \epsilon_h^2} \approx 0,014$ . Затем вычисляем абсолютную погрешность  $\Delta V = \epsilon_V \cdot \bar{V} = 56 \text{ mm}^3$ .

Окончательный результат можно записать в виде:  $V = (4189 \pm 56) \text{ mm}^3$  при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

В заключение данного параграфа заметим, что совершенствование экспериментальной методики должно проводиться в направлении уменьшения погрешности измеряемой величины. Для этого иногда приходится выполнять некоторые предварительные измерения. Рассмотрим в качестве примера ситуацию, с которой студенты сталкиваются в лабораторной работе «Определение моментов инерции с помощью трифиллярного подвеса».

Трифиллярный подвес представляет собой две круглые горизонтальные платформы: верхнюю, имеющую радиус  $r$  и нижнюю с радиусом  $R$ . Обе платформы соединены тремя нитями одинаковой длины  $L$ . Нижняя платформа совершает гармонические крутильные колебания с периодом  $T$  относительно вертикальной оси, проходящей через центры обеих платформ. Момент инерции  $J$  тела, помещенного на нижнюю платформу, может быть вычислен по следующей формуле, которая выводится студентами перед выполнением эксперимента:

$$J = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 L}, \quad (3.24)$$

где  $m$  — суммарная масса нижней платформы и лежащего на ней тела.

Перед началом опытов предлагается оценить число колебаний  $n_T$ , необходимое для измерения момента инерции  $J$  с максимальной точностью.

Измерение периода  $T$  является косвенным, т.к. в опыте измеряется время  $t$ , за которое нижняя платформа совершил  $n_T$  колебаний. Значение периода определяется отношением:  $T = t / \Delta n_T$ . Считая величину  $n_T$  целым числом, которое определяется точно ( $\Delta n_T = 0$ ), выразим абсолютную и относительную погрешности вычисления периода

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{n_T}, \quad \varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{T \cdot n_T}, \quad (3.25)$$

где  $\Delta t$  — абсолютная погрешность измерения времени колебаний.

Аналогично вышеприведенным примерам, выразим относительную погрешность момента инерции  $\varepsilon_J$  через относительные погрешности величин, входящих в правую часть (3.24):

$$\varepsilon_J = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_L^2 + 4\varepsilon_T^2 + \varepsilon_g^2 + 4\varepsilon_\pi^2}.$$

Как и в предыдущем примере, оставим в числе  $\pi$  количество знаков, достаточное для пренебрежения последним слагаемым под корнем по сравнению с остальными слагаемыми.

Погрешности величин  $R$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $m$  и  $g$  определяются методами их прямых измерений. Следовательно, для увеличения точности определения момента инерции нам остается максимально уменьшить погрешность определения периода крутильных колебаний. Из (3.25) видно, что для этого необходимо увеличивать число колебаний  $n_T$ .

На практике число  $n_T$  определяют из условия

$$4 \varepsilon_T^2 \ll \varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_L^2 + \varepsilon_g^2. \quad (3.26)$$

Обозначим  $E^2$  правую часть неравенства (3.26) и будем понимать под словами «много меньше» отличие на два порядка. Тогда неравенство (3.26) преобразуется к виду

$$4 \varepsilon_T^2 \leq E^2 / 100 \quad \text{или} \quad \varepsilon_T^2 \leq E^2 / 400. \quad (3.27)$$

Из (3.27) и (3.25) получим неравенство для определения требуемого числа колебаний:

$$n_T \geq 20 \frac{\Delta t}{E \cdot T}. \quad (3.28)$$

Последнее неравенство дает возможность приближенно вычислить количество колебаний, необходимое для достижения минимальной погрешности искомого момента инерции  $J$ . Однако, как легко заметить из (3.28), для оценки числа  $n_T$  необходимо уже знать период колебаний  $T$ . Данное противоречие разрешается следующим образом. Сначала по небольшому числу колебаний ( $5 - 10$ ) находится приближенное значение периода  $T$ . С помощью неравенства (3.28) рассчитывается число  $n_T$ , которое соответствует минимальному значению относительной погрешности  $\varepsilon_J$ . Затем с использованием полученного числа  $n_T$  экспериментально определяется новое (более точное) значение периода  $T$ . После измерения величин  $R, r, L, m$  и  $g$  все необходимые численные значения подставляются в формулу (3.24) для вычисления момента инерции  $J$  исследуемого тела. Погрешности (абсолютные  $\Delta R, \Delta r, \Delta L, \Delta m, \Delta g$  и относительные  $\varepsilon_R, \varepsilon_r, \varepsilon_L, \varepsilon_m, \varepsilon_g$ ) рассчитываются вышеописанными методами (см. главу 2).

## ГЛАВА 4

### НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

До сих пор предполагалось, что измерения физической величины  $A$  выполняются в идентичных условиях, т.е. одним и тем же методом, одним и тем же экспериментатором, использующим одни и те же приборы. В этих случаях часто говорят, что все проведенные измерения выполнялись с одинаковой точностью, и поэтому называют их **равноточными**.

С точки зрения математической статистики технический термин «равноточность» означает, что распределения вероятностей всех результатов измерения  $a_i$  характеризуются одним и тем же среднеквадратичным отклонением.

Однако часто в физике возникает ситуация, когда условия эксперимента не позволяют провести все измерения в идентичных условиях. Подобные измерения получили название неравноточных.

В подобных случаях все измерения можно разбить на группы, в каждой из которых результаты являются равноточными. Определенные условия эксперимента, при которых измерения являются равноточными, будем для краткости называть *методом*.

Пусть исследуемая величина  $A$  измерялась  $m$  различными методами. Каждым методом было проведено  $n_k$  измерений, где  $k = 1, 2, \dots, m$ , и получено  $m$  групп результатов из  $n_k$  значений соответственно. Для каждой группы результатов можно вычислить средние статистические значения  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  и абсолютные погрешности  $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_m$  при доверительной вероятности  $\alpha$  по методике, изложенной в главах 2 и 3.

Результаты измерений могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{array}{llll} k=1, & a_1, a_2, \dots, a_{n1} & \bar{a}_1 & \Delta a_1 \\ k=2, & a_{1+n1}, a_{2+n1}, \dots, a_{n2+n1} & \bar{a}_2 & \Delta a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k=m, & \dots, a_n & \bar{a}_m & \Delta a_m \end{array}$$

где каждая строка относится к определенному методу.

Очевидно, что сумма всех чисел  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) равна количеству всех проведенных измерений  $n$ .

Для получения окончательного результата и погрешности было бы неразумно вычислять средние арифметические от величин  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  и  $\Delta\bar{a}_1, \Delta\bar{a}_2, \dots, \Delta\bar{a}_m$ . Во-первых, при подобном усреднении в полученное приближенное значение искомой величины  $A$  одинаковый вклад дадут и более грубые, и более точные методы. Во-вторых, в оценку результатирующей погрешности  $\Delta A$  основной вклад дадут наиболее грубые методы, которые характеризуются большими значениями собственных погрешностей  $\Delta a_k$ .

Более корректным способом является использование так называемого статистического веса. Для каждого метода (т.е. для каждой строки результатов измерений вышеприведенной таблицы) задается некоторый параметр  $w_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Расчет общего среднего (окончательного результата) с помощью статистических весов  $w_k$  проводится по следующей формуле:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k \bar{a}_k}{\sum_{k=1}^m w_k}. \quad (4.1)$$

Обычно величина статистического веса  $w_k$  принимается обратно пропорциональной квадрату абсолютной погрешности данного метода:

$$w_k = \frac{1}{(\Delta a_k)^2} \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.2)$$

Определение (4.2) в математической статистике обосновывается тем, что квадрат случайной погрешности приближенно обратно пропорционален количеству проведенных измерений  $n_k$ . Следовательно, статистический вес  $k$ -ой группы полученных результатов прямо пропорционален количеству опытов, проведенных  $k$ -ым методом в идентичных условиях:

$$w_k \sim n_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Абсолютная погрешность и, следовательно, статистический вес, определенный согласно (4.2), являются величинами размерными. Знаменатель формулы (4.1), т.н. «нормировочный делитель», обеспечивает совпадение размерностей величин  $\bar{a}$  и  $\bar{a}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Сопоставление формул (4.1) и (4.2) позволяет выразить приближенное значение исследуемой величины  $A$  через результаты обработки отдельных групп измерений, т.е. через числа  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  и  $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_m$ :

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\Delta a_k} \right)^2 \bar{a}_k}{\sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\Delta a_k} \right)^2}. \quad (4.3)$$

Вычисление квадрата общей абсолютной погрешности  $(\Delta A)^2$  проводится как усреднение со статистическими весами (4.2) квадратов абсолютных погрешностей для отдельных групп измерений  $\Delta a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Подставив в (4.1) вместо  $\bar{a}_k$  величины  $(\Delta a_k)^2$ , используя определение (4.2), получим после извлечения квадратного корня, что усредненная абсолютная погрешность представима в виде:

$$\Delta A = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\Delta a_k} \right)^2}}. \quad (4.4)$$

Чтобы построить для искомой величины  $A$  доверительный интервал, соответствующий выбранной доверительной вероятности  $\alpha$ , необходимо вычислять все абсолютные погрешности  $\Delta a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) для одной и той же вероятности  $\alpha$ . Тогда абсолютная погрешность  $\Delta A$ , рассчитанная по формуле (4.4), будет являться полушириной доверительного интервала для величины  $A$  при заданной надежности  $\alpha$ .

**Пример.** В лабораторной работе «Изучение вязкости жидкости» определяется вязкость водного раствора глицерина по результатам измерения установившейся скорости движения трех шариков с различными радиусами. Полученные значения для шариков разного радиуса нельзя считать равноточными. Можно сказать, что в данном примере мы получаем результаты тремя различными методами. После обычной обработки трех групп значений (для каждого шарика) было получены следующие значения средних статистических и абсолютных погрешностей для доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ :

$$\bar{\eta}_1 = 0,557 \text{ Па}\cdot\text{с} ; \quad \bar{\eta}_2 = 0,508 \text{ Па}\cdot\text{с} ; \quad \bar{\eta}_3 = 0,513 \text{ Па}\cdot\text{с}$$

$$\Delta\eta_1 = 0,039 \text{ Па}\cdot\text{с} ; \quad \Delta\eta_2 = 0,055 \text{ Па}\cdot\text{с} ; \quad \Delta\eta_3 = 0,021 \text{ Па}\cdot\text{с}$$

В рассматриваемом примере  $m = 3$ . Используя формулы (4.3) и (4.4), вычисляем  $\bar{\eta} = 0,521 \text{ Па}\cdot\text{с}$  и  $\Delta\eta = 0,0304 \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

Таким образом, окончательный ответ можно записать в виде:

$$\eta = (0,521 \pm 0,030) \text{ Па}\cdot\text{с} \text{ при доверительной вероятности } \alpha = 0,95.$$

Заметим, что величина  $\bar{\eta}$ , вычисленная по формуле (4.3), отличается от среднего арифметического значений  $\bar{\eta}_1$ ,  $\bar{\eta}_2$ ,  $\bar{\eta}_3$  из-за различия статистических весов групп проведенных измерений. Кроме того, величина  $\Delta\eta$  заметно меньше среднего арифметического погрешностей  $\Delta\eta_1$ ,  $\Delta\eta_2$ ,  $\Delta\eta_3$ . Это значит, что использование статистических весов позволяет избежать получения неоправданного широкого доверительного интервала для искомой величины вязкости  $\eta$ .

## ГЛАВА 5

### МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

#### § 5.1. Принцип метода

В задачи экспериментальной физики входит не только измерение постоянных величин, но и исследование зависимостей между различными физическими характеристиками.

Большинство законов физики, в том числе фундаментальных, формулируется в виде уравнений, связывающих между собой различные физические величины.

Для исследования взаимосвязи физических величин используются как экспериментальные, так и теоретические методы. Перед проведением любых экспериментов обязательно должен проводиться теоретический анализ поставленной проблемы.

В данной главе рассматриваются ситуации, когда, согласно теории, две физические величины  $X$  и  $Y$  связаны некоторой функциональной зависимостью. Для определенности положим, что величина  $Y$  является некоторой функцией  $F$  другой величины  $X$ :

$$Y = F(X) . \quad (5.1)$$

Физическая теория позволяет сделать определенные утверждения о характере зависимости величин  $X$  и  $Y$ . Однако для того, чтобы получить конкретный вид функции  $F(X)$ , как правило, необходимо провести измерения значений зависимой переменной  $Y$  при различных значениях аргумента  $X$ .

Напомним, что результаты опыта всегда содержат случайные погрешности (см. главу 2). Для каждого определенного значения аргумента  $x_k$  эксперимент дает в качестве значения функции величину  $y_k = F(x_k) + \Delta_k$ , где  $\Delta_k$  — погрешность измерения  $y_k$ .

В качестве примера на рис. 1 показано возможное отклонение результата эксперимента от теоретического значения для того же аргумента.

та. Заметим, что величины  $\Delta_k$  могут быть, вообще говоря, как положительными, так и отрицательными.

Из главы 2 следует, что многократное повторение измерения значения функции при фиксированном значении аргумента  $x_k$  с последующим усреднением результатов не позволяет уменьшить погрешность величины  $F(x_k)$  до нуля. Среднеквадратичная погрешность, согласно формуле (2.4), станет нулем только при бесконечном числе повторений опыта в неизменных условиях.

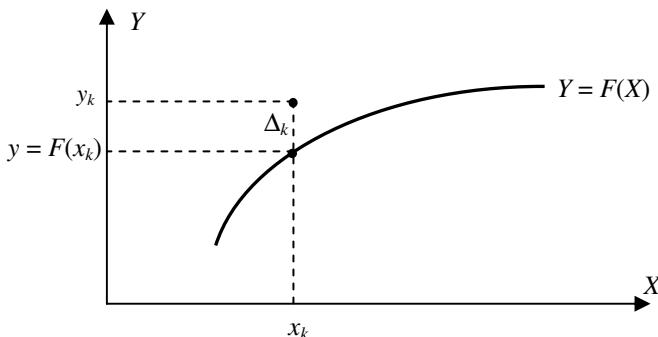


Рис. 1. Пример отклонения  $\Delta_k$  экспериментального результата  $y_k$  от значения, рассчитанного по теоретической зависимости  $F(x_k)$

Следует помнить, что если полностью отсутствует теоретическая информация о функциональной зависимости (5.1), то экспериментальных исследований недостаточно для получения удовлетворительного приближения вида функции  $F(X)$ . Поэтому перед проведением эксперимента исследуемая зависимость величин  $X$  и  $Y$  на основе теоретических соображений описывается некоторой определенной функцией

$$Y = F(X, A, B, C, \dots). \quad (5.2)$$

Вид этой функции задан, но она содержит один или несколько постоянных параметров  $A, B, C, \dots$ , значения которых неизвестны до проведения экспериментов.

Сначала рассмотрим случаи, когда все измерения значений функции  $Y$  проводятся при различных значениях аргумента  $X$ . Если измерения проводились  $N$  раз, то результатом эксперимента являются  $N$  пар чисел — значений изучаемых величин:

$$x_k, y_k \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

На графике зависимости величины  $Y$  от  $X$  координаты точек (5.3) располагаются весьма нерегулярно из-за влияния случайных погрешностей, возникших в ходе измерений. Практически никогда не удается подобрать численные значения параметров  $A, B, C, \dots$  так, чтобы функция заданного вида (5.2) удовлетворяла всем экспериментальным результатам (5.3). Иначе говоря, никаким набором параметров  $A, B, C, \dots$  нельзя добиться того, чтобы график функции (5.2) проходил через все экспериментальные точки (5.3). Поэтому неизбежным этапом работы физика-исследователя является поиск неких определенных значений параметров  $A, B, C, \dots$ , при которых достигается наилучшее согласие между экспериментальными результатами (5.3) и теоретической зависимостью (5.2). Эта математическая процедура называется **аппроксимацией** результатов эксперимента функцией определенного типа. Найденная функция наилучшего приближения из заданного класса (5.2) называется **аппроксимирующей**.

Принципиальная трудность заключается в выборе критерия качества полученного приближения функции (5.2). Возможны различные мнения по поводу того, какое приближение полагать «наилучшим». Одним из элементарных способов расчета неизвестных параметров функции на основе результатов опытов является **метод наименьших квадратов**.

Метод заключается в том, что в качестве значений искомых параметров  $A, B, C, \dots$  выбираются величины, минимизирующие сумму квадратов разностей измеренных на опыте  $y_k$  и соответствующих вычисленных значений  $F(x_k, A, B, C, \dots)$ :

$$Q = \sum_{k=1}^N [F(x_k, A, B, C, \dots) - y_k]^2. \quad (5.4)$$

Величина  $Q$  представляет собой определенную меру отклонения экспериментальных результатов от рассчитанных теоретически. В пра-

вой части (5.4) суммирование происходит по всем  $k = 1, \dots, N$ . Так как в (5.4) подставляются определенные числа  $x_k$ ,  $y_k$ , полученные в проведенной серии измерений, величину  $Q$  можно рассматривать как функцию аргументов  $A, B, C$  и т.д.

Далее задача сводится к нахождению численных значений параметров  $A, B, C, \dots$ , при которых функция  $Q(A, B, C, \dots)$  достигает своего минимума. Из математического анализа известно, что необходимым условием экстремума функции в определенной точке является равенство нулю в этой точке первых частных производных по всем аргументам. Приравнивая полученные выражения частных производных нулю:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial C} = 0, \dots \quad (5.5)$$

мы получим систему уравнений для неизвестных значений параметров  $A, B, C$  и т.д. Количество уравнений равно количеству неизвестных. Единственность и простота решения системы существенно зависят от вида функции (5.2). Однако для всех применяемых на практике аппроксимирующих функций существует решение, соответствующее именно минимуму суммы (5.4). То, что значения параметров  $A, B, C, \dots$ , найденные решением системы уравнений (5.5), обеспечивают именно минимум величины  $Q$ , будет показано ниже для конкретного вида аппроксимирующих функций.

Решением системы (5.5) являются определенные числовые значения параметров, которые мы обозначим  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  и т.д. Подстановка этих чисел в формулу (5.2) дает нам определенный вид аппроксимирующей функции

$$\tilde{Y} = F(X, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots). \quad (5.6)$$

Теперь, когда неизвестные параметры  $A, B, C, \dots$  функции (5.2) заменены на известные числа  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ , можно для любого значения аргумента  $X$  вычислить значение функции  $F$  по формуле (5.6).

Строго говоря, аппроксимирующая функция (5.6) является некоторым приближением теоретической зависимости (5.2). Значения функции (5.6) зависят от параметров  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \dots$ , которые, в свою очередь, вычислялись с помощью чисел  $x_k$ ,  $y_k$ , содержащих случайные погрешно-

сти, и поэтому также неизбежно содержат некоторую погрешность. Следовательно, физик-экспериментатор должен рассчитывать погрешность результатов, полученных с помощью аппроксимирующей функции (5.6).

В следующих параграфах данной главы рассматривается использование метода наименьших квадратов на примерах наиболее распространенных видов аппроксимирующих функций.

## § 5.2. Линейная аппроксимация

Чаще всего метод наименьших квадратов применяется для приближения исследуемой зависимости линейной функцией или функцией, сводящейся к линейной с помощью элементарных преобразований. Замена истинной функции ее линейным приближением называется **линейной аппроксимацией**. Широкое применение линейной аппроксимации в качестве первого приближения исследуемой зависимости основано на том, что любую гладкую функцию при необходимости можно разложить в ряд Тейлора до линейного члена, причем это разложение имеет хорошую точность в некотором интервале значений аргумента.

Пусть из теоретических соображений следует, что зависимость между величинами  $X$  и  $Y$  можно полагать линейной (хотя бы на определенном интервале значений величины  $X$ ). Тогда функция  $Y(X)$  записывается в следующем виде

$$Y = \beta X + \gamma, \quad (5.7)$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  — некоторые постоянные коэффициенты.

Нас интересует случай, когда теоретически невозможно вычислить значения  $\beta$  и  $\gamma$  с приемлемой погрешностью. Тогда следует находить  $\beta$  и  $\gamma$ , пользуясь экспериментальными результатами типа (5.3), применяя вышеупомянутый метод наименьших квадратов.

Для этого сначала в функции (5.7) заменим неизвестные постоянные  $\beta$  и  $\gamma$  переменными  $b$  и  $g$  соответственно.

Сумма квадратов (5.4) для линейной функции (5.7) приобретет вид:

$$Q = \sum_{k=1}^N (bx_k + g - y_k)^2. \quad (5.8)$$

В данном случае сумма (5.8) есть функция двух аргументов  $b$  и  $g$ , т.к. в проведенной серии из  $N$  измерений все  $x_k$  и  $y_k$  представляют собой определенные (известные экспериментатору) числа. Теперь следует варьировать переменные  $b$  и  $g$  до тех пор, пока величина (5.8) не достигнет своего минимума. Тогда в качестве постоянных коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  линейной зависимости (5.7) мы возьмем найденные значения переменных  $b$  и  $g$ , которые минимизируют сумму (5.8) при заданных числах  $x_k$  и  $y_k$ .

Отыскание минимума функции двух переменных  $Q(b,g)$  является типичной задачей математического анализа. В точке экстремума первые частные производные от  $Q$ , взятые по  $b$  и  $g$ , обращаются в нуль. Это условие дает нам систему двух уравнений для определения двух неизвестных  $b$  и  $g$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial g} = 0. \quad (5.9)$$

Дифференцирование правой части (5.8) и алгебраические преобразования приводят систему (5.9) к стандартной форме:

$$\begin{aligned} b \sum_{k=1}^N x_k^2 + g \sum_{k=1}^N x_k &= \sum_{k=1}^N x_k y_k , \\ b \sum_{k=1}^N x_k + g N &= \sum_{k=1}^N y_k . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Это обычная система двух линейных алгебраических уравнений для двух неизвестных  $b$  и  $g$ . Ее единственное решение можно записать в следующем виде:

$$b = \frac{N \sum_{k=1}^N x_k y_k - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N y_k \right)}{N \sum_{k=1}^N x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right)^2},$$

$$g = \frac{\left( \sum_{k=1}^N x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^N y_k \right) - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N x_k y_k \right)}{N \sum_{k=1}^N x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right)^2}. \quad (5.11)$$

Из рис. 1 очевидно, что при удалении аппроксимирующей функции от экспериментальных точек сумма (5.4) или (5.8) будет неограниченно возрастать. Следовательно, найденный экстремум функции  $Q(b,g)$  является именно минимумом. Для строгого математического доказательства этого утверждения требуется вычислить знак квадратичной формы

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial g^2} - \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial b \partial g} \right)^2.$$

Нетрудно убедиться, что для функции  $Q(b,g)$  вида (5.8) данная квадратичная форма всегда положительна, что является достаточным условием минимума этой функции при значениях параметров, определяемых формулами (5.11).

Таким образом, для получения наилучшей (в смысле метода наименьших квадратов) приближенной линейной функции (5.7) следует базироваться на результатах экспериментов  $x_k, y_k$  в проведенной серии из  $N$  измерений. По формулам (5.11) необходимо вычислить значения величин  $b$  и  $g$ , затем подставить их в функцию (5.7) вместо постоянных неизвестных параметров  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Коэффициенты, вычисляемые по формулам (5.11), полагаются наилучшими приближенными значениями (оценками) параметров  $\beta$  и  $\gamma$  линейной функции (5.7).

Полученная приближенная функция

$$\tilde{Y}(X) = bX + g \quad (5.12)$$

может использоваться для вычислений значений  $Y(X)$  при произвольном значении аргумента  $X$ .

В некоторых физических задачах теоретически доказывается, что свободный член линейной функции (5.7) по своему смыслу должен рав-

няться нулю  $\gamma = 0$ . Это значит, что мы имеем частный случай линейной зависимости, которую иногда называют прямо пропорциональной:

$$Y = \beta_0 X. \quad (5.13)$$

Функция (5.13) содержит лишь один неизвестный параметр  $\beta_0$  — угловой коэффициент. Численное значение параметра  $\beta_0$  теория не дает, и он должен быть вычислен с помощью экспериментальных результатов.

Если в таком случае результаты измерений  $x_k, y_k$  формально подставить в формулы (5.11), то величина  $g$  практически всегда будет отличаться от нуля из-за присутствия неустойчивых случайных погрешностей. Однако полученное значение  $g \neq 0$  не будет иметь физического смысла.

Для вычисления углового коэффициента  $\beta_0$  функции (5.13) следует вновь применить метод наименьших квадратов. Неизвестная постоянная  $\beta_0$  в функции (5.13) заменяется переменной  $b_0$ . Для линейной зависимости вида (5.13) сумма  $Q$  является функцией единственного аргумента  $b_0$ :

$$Q = \sum_{k=1}^N (b_0 x_k - y_k)^2. \quad (5.14)$$

Производную функции  $Q(b_0)$  по параметру  $b_0$  приравниваем нулю.

$$2 \sum_{k=1}^N [b_0 x_k - y_k] x_k = 0.$$

Из полученного единственного уравнения выражим величину  $b_0$  через результаты эксперимента  $x_k, y_k$ :

$$b_0 = \frac{\sum_{k=1}^N x_k y_k}{\sum_{k=1}^N x_k^2}. \quad (5.15)$$

Легко видеть, что вторая производная функции  $Q(b_0)$  по  $b_0$  всегда положительна, поэтому найденная величина (5.15) определяет минимум функции  $Q(b_0)$ .

Формула (5.15) дает способ вычисления наилучшего приближения углового коэффициента  $\beta_0$  прямо пропорциональной зависимости (5.13) на основе проведенных измерений  $x_k, y_k (k = 1, \dots, N)$ .

### § 5.3. Доверительные интервалы для линейной аппроксимации

Первой задачей метода наименьших квадратов для функций вида (5.7) является вычисление параметров функции — углового коэффициента и свободного члена. При использовании формул (5.11) следует помнить, что для каждой конкретной серии проведенных измерений все величины  $x_k$  и  $y_k (k = 1, \dots, N)$  — определенные числа. Следовательно, величины  $b$  и  $g$ , вычисленные по формулам (5.11), также являются определенными числами. Но, вообще говоря, результаты измерений представляют собой случайные величины, что уже обсуждалось в главе 2. Повторение серии измерений (5.3) даст нам уже другие числа  $x_k, y_k$  и, естественно, несколько отличающиеся значения  $b$  и  $g$ . Это значит, что величины  $b$  и  $g$ , которые представлены как функции результатов измерений, также являются, вообще говоря, случайными величинами. Вычисление по формулам (5.11) с помощью единственной серии измерений  $x_k, y_k (k = 1, \dots, N)$  дает лишь конкретные реализации случайных величин  $b$  и  $g$ . В предыдущем параграфе уже утверждалось, что применение метода наименьших квадратов дает не истинные параметры линейной зависимости  $\beta$  и  $\gamma$ , а их приближенные значения:

$$\beta \approx b, \quad \gamma \approx g.$$

Следовательно, кроме вычисления приближенных значений параметров линейной аппроксимирующей функции, требуется построить доверительные интервалы для искомых параметров  $\beta$  и  $\gamma$ .

В математической статистике доказывается, что теоретические средние значения (математические ожидания) случайных величин  $b$  и  $g$  сов-

падают с параметрами  $\beta$  и  $\gamma$ . В этом смысле величины (5.11) выше были названы «наилучшими» приближениями искомых параметров линейной аппроксимирующей функции. Поэтому числа  $b$  и  $g$ , полученные по результатам измерений, разумно использовать как центры соответствующих доверительных интервалов.

Математическая статистика дает следующее выражение для среднеквадратичного отклонения случайной величины  $b$  от истинного углового коэффициента  $\beta$ :

$$S_b = \sqrt{\frac{Q}{(N-2)\sum_{k=1}^N(x_k - \bar{x})^2}}, \quad (5.16)$$

где  $Q$  — сумма квадратов отклонений (5.8), в которой использованы численные значения  $b$  и  $g$ , а они, в свою очередь, вычислены по формулам (5.11) с подстановкой в них результатов измерений  $x_k, y_k$ .

Величина  $\bar{x}$  представляет собой среднее измеренных значений  $x_k$  и вычисляется по общей формуле среднего статистического (2.1):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k. \quad (5.17)$$

Среднеквадратичное отклонение случайной величины  $g$  от свободного члена  $\gamma$  линейной функции вида (5.7) может быть представлено в следующей форме

$$S_g = \sqrt{\frac{Q}{N(N-2)} + \bar{x}^2 S_b^2} = \sqrt{\frac{Q}{(N-2)} \left[ \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right]}. \quad (5.18)$$

Характеристики (5.16) и (5.18) описывают статистический разброс значений случайных величин  $b$  и  $g$  относительно параметров  $\beta$  и  $\gamma$ .

Видно, что величины  $S_b$  и  $S_g$  убывают с ростом количества измерений  $N$ .

Полуширина доверительного интервала для каждого параметра  $\beta$  и  $\gamma$  представляется как произведение соответствующего среднеквадратичного отклонения на коэффициент Стьюдента.

Задаемся определенной доверительной вероятностью  $\alpha$ . Из таблицы приложения 3 извлекаем коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, N-2}$  для этой доверительной вероятности и числа степеней свободы, равного  $(N - 2)$ , где  $N$  — число проведенных измерений пар значений  $x_k$  и  $y_k$ .

Тогда доверительный интервал для углового коэффициента  $\beta$  можно записать в виде:

$$b - t_{\alpha, N-2} S_b \leq \beta \leq b + t_{\alpha, N-2} S_b. \quad (5.19)$$

Доверительный интервал для свободного члена  $\gamma$  представится аналогично:

$$g - t_{\alpha, N-2} S_g \leq \gamma \leq g + t_{\alpha, N-2} S_g. \quad (5.20)$$

Подстановка в выражения (5.19) и (5.20) величин  $b$ ,  $g$ ,  $S_b$  и  $S_g$ , которые вычисляются по формулам (5.11), (5.16) и (5.18) с использованием результатов проведенной серии измерений  $x_k$ ,  $y_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), дает нам числовые значения границ доверительных интервалов искомых параметров линейной аппроксимирующей функции.

Как указывалось в главе 2, полуширина доверительного интервала представляет собой абсолютную погрешность вычисляемой величины для выбранной доверительной вероятности. Поэтому выражения для абсолютных погрешностей полученных приближенных значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$  можно кратко записать в следующем виде:

$$\Delta\beta = t_{\alpha, N-2} S_b, \quad \Delta\gamma = t_{\alpha, N-2} S_g. \quad (5.21)$$

В том случае, когда экспериментальные результаты аппроксимируются линейной функцией без свободного члена, необходимо рассчитать границы доверительного интервала для единственного неизвестного параметра  $\beta_0$  — углового коэффициента прямо пропорциональной зави-

симости (5.13). В этом случае в качестве центра интервала возьмем найденное по формуле (5.15) значение  $b_0$ . Заметим, что величина  $b_0$ , вычисляемая по результатам измерений  $x_k$ ,  $y_k$ , вообще говоря, является случайной величиной. Вновь обращаясь к курсу математической статистики, найдем формулу для расчета среднеквадратичного отклонения случайной величины  $b_0$  от истинного углового коэффициента  $\beta_0$ :

$$S_{b0} = \sqrt{\frac{Q}{(N-1)\sum_{k=1}^N x_k^2}}. \quad (5.22)$$

Полуширина доверительного интервала для углового коэффициента  $\beta_0$  равна среднеквадратичному отклонению  $S_{b0}$ , умноженному на коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, N-1}$  для установленной доверительной вероятности  $\alpha$  и числа степеней свободы, равного  $(N - 1)$ . Доверительный интервал для углового коэффициента  $\beta_0$  прямо пропорциональной зависимости (5.13) запишется в виде:

$$b_0 - t_{\alpha, N-1} S_{b0} \leq \beta_0 \leq b_0 + t_{\alpha, N-1} S_{b0}. \quad (5.23)$$

Абсолютная погрешность углового коэффициента  $\beta_0$  равна:

$$\Delta\beta_0 = t_{\alpha, N-1} S_{b0}. \quad (5.24)$$

В заключение данного параграфа рассмотрим еще одну практическую задачу. Иногда в ходе физического исследования требуется вычислять значения зависимой переменной  $Y$  для значений переменной  $x$ , которые не присутствуют среди измеренных  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). В этих случаях естественно использовать найденную аппроксимирующую функцию.

Рассмотрим случай, когда в качестве приближенной зависимости  $Y = F(X)$  применяется линейная функция (5.12), параметры  $b$  и  $g$  которой должны вычисляться по формулам (5.11). Обозначим  $x_p$  значение аргумента, для которого требуется найти значение функции  $F(x_p)$ . Тогда искомым приближенным значением является число

$$\tilde{y}_p = bx_p + g . \quad (5.25)$$

Теперь необходимо вспомнить, что оба значения  $b$  и  $g$  являются приближенными. Погрешность  $\Delta\gamma$  может быть интерпретирована как сдвиг графика аппроксимирующей функции (5.12) вверх-вниз, а погрешность  $\Delta\beta$  — как небольшие повороты относительно некоторой средней точки. Оба фактора обуславливают случайный характер величины  $\tilde{y}_p$ , определяемой выражением (5.25). Очевидно, что величина, заданная функцией случайных величин  $b$  и  $g$ , также является случайной. Отсюда следует вывод, что после вычисления значения функции  $F(x_p) \approx \tilde{y}_p$  требуется построить для него доверительный интервал.

Если величина  $\tilde{y}_p$ , вообще говоря, случайная, то она должна характеризоваться определенной среднеквадратичной погрешностью. Согласно математической статистике эта погрешность выражается следующей формулой:

$$S_y = \sqrt{\frac{Q}{(N-2)} \left( \frac{1}{N} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right)} . \quad (5.26)$$

Задаемся определенной доверительной вероятностью  $\alpha$ . Из таблицы приложения 3 извлекаем значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, N-2}$  для этой доверительной вероятности  $\alpha$  и числа степеней свободы равного  $(N-2)$ . Тогда абсолютная погрешность для вычисленного измеряемого значения  $\tilde{y}_p$  представится в форме:

$$\Delta\tilde{y}_p = t_{\alpha, N-2} S_y . \quad (5.27)$$

Важный вывод из последнего выражения состоит в том, что погрешность вычисляемой величины быстро растет с удалением аргумента  $x_p$

от среднего значения измеренных значений  $x_k$ , т.е. от числа  $\bar{x}$ , определенного формулой (5.17).

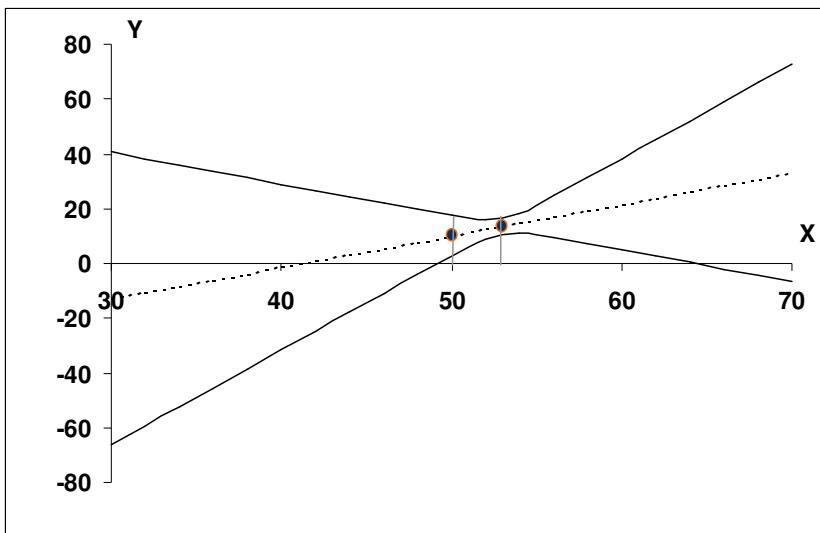
Доверительный интервал для значения функции  $F(x_p)$  можно записать в виде:

$$\tilde{y}_p - t_{\alpha, N-2} S_y \leq F(x_p) \leq \tilde{y}_p + t_{\alpha, N-2} S_y. \quad (5.28)$$

На рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий зависимость ширины доверительного интервала от величины аргумента  $x$ .

Из (5.26) прямо следует, что ширина доверительного интервала (5.28) минимальна для  $x_p = \bar{x}$ . Поэтому приближенную зависимость (5.12) целесообразно использовать для вычисления значений функции от аргументов  $x_p$ , которые располагаются вблизи среднего значения  $\bar{x}$ . При удалении величины  $x_p$  в любую сторону от среднего значения  $\bar{x}$  ширина доверительного интервала быстро возрастает. На рис. 2 хорошо видно, что для аргументов больших, чем  $x_{\max}$ , и меньших, чем  $x_{\min}$ , доверительный интервал, рассчитанный по формуле (5.28), становится столь широким, что теряет практический смысл.

Следовательно, приближенную зависимость, полученную методом наименьших квадратов, опасно применять для задач экстраполяции.



**Рис. 2.** Пример зависимости ширины доверительного интервала для значения функции  $Y = F(x)$  от аргумента  $x$

Штриховая линия — график линейной аппроксимирующей функции, сплошные линии — границы доверительного интервала для значения функции  $F(x)$ . Вертикальными отрезками выделен интервал значений аргумента  $[x_{\min}, x_{\max}]$ . Жирными точками обозначены экспериментальные значения функции для  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ .

#### § 5.4. Линейная аппроксимация при повторных измерениях

Довольно часто в экспериментальных исследованиях взаимосвязи физических величин  $X$  и  $Y$  при каждом фиксированном значении аргумента  $x$  значения исследуемой функции  $Y$  измеряются несколько раз. Обычно это приходится делать в случаях, когда случайная погрешность измерения физической величины  $Y$  довольно велика, т.е. значительно превышает приборную погрешность.

Введем следующие обозначения:

$y_{ks}$  — значения функции, полученные в повторных измерениях при фиксированном значении аргумента  $x_k$ , ( $s = 1, \dots, m_k$ );

$m_k$  — количество повторных измерений при  $x = x_k$ .

Тогда полное количество полученных значений функции  $y_{ks}$  выражается суммой

$$N_0 = \sum_{k=1}^N m_k, \quad (5.29)$$

где  $N$  — количество различных значений аргумента  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Для каждого значения аргумента  $x_k$  вычисляется среднее статистическое значение функции согласно (2.1)

$$\bar{y}_k = \frac{\sum_{s=1}^{m_k} y_{ks}}{m_k}, \quad (5.30)$$

и среднеквадратичный разброс по формуле (2.4)

$$S_{0k} = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - \bar{y}_k)^2}{m_k(m_k - 1)}}. \quad (5.31)$$

Выбрав определенную доверительную вероятность  $\alpha$ , можно построить доверительные интервалы для каждого значения функции  $Y(x_k)$  методом, описанным в главе 2:

$$\bar{y}_k - t_{\alpha, v_k} S_{0k} \leq Y(x_k) \leq \bar{y}_k + t_{\alpha, v_k} S_{0k}. \quad (5.32)$$

Коэффициенты Стьюдента  $t_{\alpha, v_k}$ ,  $v_k$  берутся для числа степеней свободы  $v_k = m_k - 1$ .

Вновь рассмотрим простой, но распространенный случай, когда теоретические изыскания позволяют утверждать, что исследуемая зависимость  $Y(X)$  является линейной, т.е. описывается функцией вида (5.7).

Тогда результаты измерений  $y_{ks}$  можно представить в виде

$$y_{ks} = \beta x_k + \gamma + \varepsilon_{ks}, \quad (5.33)$$

где  $\varepsilon_{ks}$  — значения некоторой случайной величины  $\varepsilon$ , характеризующей все случайные факторы, влияющие на результат измерения.

Как и ранее, теоретическую линейную функцию (5.7) заменим приближенной (5.12), коэффициенты которой  $b$  и  $g$  являются приближенными значениями параметров  $\beta$  и  $\gamma$  функции (5.7) соответственно. Для нахождения наилучшего приближения числовых значений  $b$  и  $g$  в данном случае нельзя формально применять формулы (5.11). Теперь необходимо выразить приближенные значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  через результаты измерений  $x_k$  и  $y_{ks}$ .

Для нахождения наилучших приближений  $b \approx \beta$  и  $g \approx \gamma$  вновь применим метод наименьших квадратов. Составим сумму квадратов отклонений измеренных значений функции  $y_{ks}$  от рассчитываемых по приближенной функции (5.12) для соответствующих значений аргументов  $x_k$ :

$$Q_0 = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - \tilde{Y}(x_k))^2 = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - bx_k - g)^2. \quad (5.34)$$

Величина  $Q_0$  в данном случае представляется двойной суммой. Во внутренней сумме сложение проводится по различным значениям функции  $y_{ks}$  при фиксированном значении аргумента  $x_k$ , а во внешней — по различным значениям аргумента  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

Возведем в квадрат каждое слагаемое суммы (5.34)

$$(y_{ks} - bx_k - g)^2 = y_{ks}^2 + b^2 x_k^2 + g^2 - 2bx_k y_{ks} - 2gy_{ks} + 2bgx_k \quad (5.35)$$

и проведем отдельно вычисления шести внутренних сумм.

Для более удобного представления результатов дополнительно введем величину  $q_k^2$  — сумму квадратов отклонений измеренных значений функции  $y_{ks}$  от своих средних значений  $\bar{y}_k$  — и преобразуем ее:

$$q_k^2 = \sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - \bar{y}_k)^2 = \sum_{s=1}^{m_k} y_{ks}^2 - m_k \bar{y}_k^2 . \quad (5.36)$$

Тогда первая внутренняя сумма в (5.34) выразится так:

$$\sum_{s=1}^{m_k} y_{ks}^2 = m_k \bar{y}_k^2 + q_k^2 .$$

Теперь величина  $Q_0$  может быть представлена суммированием только по индексам различных аргументов:

$$\begin{aligned} Q_0 = & \sum_{k=1}^N m_k \bar{y}_k^2 + \sum_{k=1}^N q_k^2 + b^2 \sum_{k=1}^N m_k x_k^2 + N_0 g^2 - \\ & - 2b \sum_{k=1}^N m_k x_k \bar{y}_k - 2g \sum_{k=1}^N m_k \bar{y}_k + 2bg \sum_{k=1}^N m_k x_k . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Согласно методу наименьших квадратов, рассмотрим сумму (5.37) как функцию параметров  $b$  и  $g$ , которые будем варьировать до достижения минимума функции  $Q_0(b, g)$ . Как и в § 5.2, вычислим частные производные от  $Q_0$  по параметрам  $b$  и  $g$  и приравняем производные нулю. Получим линейную систему двух уравнений относительно неизвестных  $b$  и  $g$ :

$$\begin{aligned} b \sum_{k=1}^N m_k x_k^2 + g \sum_{k=1}^N m_k x_k &= \sum_{k=1}^N m_k x_k \bar{y}_k , \\ b \sum_{k=1}^N m_k x_k + N_0 g &= \sum_{k=1}^N m_k \bar{y}_k . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Решение этой системы можно записать в виде:

$$b = \frac{N_0 \sum_{k=1}^N m_k x_k \bar{y}_k - \left( \sum_{k=1}^N m_k x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N m_k \bar{y}_k \right)}{N_0 \sum_{k=1}^N m_k x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N m_k x_k \right)^2}, \quad (5.39)$$

$$g = \frac{\left( \sum_{k=1}^N m_k x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^N m_k \bar{y}_k \right) - \left( \sum_{k=1}^N m_k x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N m_k x_k \bar{y}_k \right)}{N_0 \sum_{k=1}^N m_k x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N m_k x_k \right)^2}.$$

Легко заметить, что если все числа  $m_k$  одинаковы, то формулы (5.39) отличаются от формул (5.11) только заменой величин  $y_k$  на средние значения  $\bar{y}_k$ . При этом в знаменателях величина  $N_0$  заменится на  $N$ .

Таким образом, мы получили приближенные значения параметров линейной аппроксимирующей функции для случая повторных измерений. Для вычислений значений искомой функции от любого аргумента  $x$  вновь следует использовать приближенную функцию (5.12), но с параметрами, подсчитанными по формулам (5.39).

## § 5.5. Доверительные интервалы в случае повторных измерений

Доверительные интервалы для параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в случае повторных измерений будем строить, как и ранее, пользуясь полученными приближенными значениями  $b$  и  $g$ . При расчете следует учесть, что на ширину доверительных интервалов существенно влияет разброс измеренных значений  $y_{ks}$  относительно средних величин  $\bar{y}_k$ .

Обозначим  $\tilde{y}_k$  значения функции  $F(x_k)$ , вычисленные с помощью приближения (5.12), при параметрах  $b$  и  $g$ , определяемых формулами (5.39).

$$\tilde{y}_k = \tilde{Y}(x_k) = bx_k + g . \quad (5.40)$$

Подставим значения  $\tilde{y}_k$  в двойную сумму (5.34)

$$Q_0 = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - \tilde{y}_k)^2 , \quad (5.41)$$

а затем преобразуем внутреннюю сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m_k} (y_{ks} - \tilde{y}_k)^2 &= \sum_{s=1}^{m_k} y_{ks}^2 - 2\tilde{y}_k \sum_{s=1}^{m_k} y_{ks} + m_k \tilde{y}_k^2 = \\ &= \sum_{s=1}^{m_k} y_{ks}^2 - 2m_k \tilde{y}_k \bar{y}_k + m_k \tilde{y}_k^2 = m_k \bar{y}_k^2 + q_k^2 - 2m_k \tilde{y}_k \bar{y}_k + m_k \tilde{y}_k^2 = \\ &= m_k (\tilde{y}_k - \bar{y}_k)^2 + q_k^2 . \end{aligned}$$

Следовательно, величина  $Q_0$  может быть представлена в виде двух сумм:

$$Q_0 = \sum_{k=1}^N m_k (\bar{y}_k - \tilde{y}_k)^2 + \sum_{k=1}^N q_k^2 . \quad (5.42)$$

Первая сумма характеризует отклонения средних экспериментальных значений от рассчитанных по аппроксимирующей функции (5.12). Вторая определяется разбросом экспериментальных значений  $y_{ks}$  относительно соответствующих средних  $\bar{y}_k$ .

Предположим, что случайная величина  $\varepsilon$ , которая характеризует совокупность всех случайных факторов, искажающих результат измерения, подчиняется нормальному (гауссовому) закону распределения. Тогда математическая статистика дает следующую простую процедуру построения доверительных интервалов для параметров  $\beta$  и  $\gamma$  аппроксимирующей линейной функции (5.12).

Пользуясь результатами измерений, вычислим квадрат среднеквадратичного отклонения

$$S_{Nb}^2 = \frac{Q_0}{(N_0 - 2) \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}, \quad (5.43)$$

где величина  $Q_0$  задана суммой (5.42), а  $\bar{x}$  представляет собой среднее значение всех значений аргумента  $x_k$  в проведенной серии измерений, которое вычисляется по формуле (5.17).

Зададимся определенной доверительной вероятностью  $\alpha$ . Найдем коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha,v}$  для выбранной вероятности  $\alpha$  и числа степеней свободы  $v = N_0 - 2$ , где  $N_0$  — полное число пар измерений чисел  $(x_k, y_{ks})$ .

Полуширина доверительного интервала для углового коэффициента  $\beta$  равна произведению квадратного корня из величины (5.43) и коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha,v}$ . В качестве центра доверительного интервала, как и ранее, выбираем величину  $b$ , вычисляемую по первой формуле из (5.39). Доверительный интервал для углового коэффициента  $\beta$  может быть записан в виде:

$$b - t_{\alpha,v} S_{Nb} \leq \beta \leq b + t_{\alpha,v} S_{Nb}. \quad (5.44)$$

Полуширина доверительного интервала для свободного члена  $\gamma$  линейной функции зависит от положения среднего  $\bar{x}$  относительно начала координат и может быть представлена произведением того же коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha,v}$  и квадратного корня из величины

$$S_{Ng}^2 = \frac{Q_0}{(N_0 - 2)} \left[ \frac{1}{N_0} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right]. \quad (5.45)$$

Доверительный интервал для свободного члена  $\gamma$  выражается следующими неравенствами:

$$g - t_{\alpha,v} S_{Ng} \leq \gamma \leq g + t_{\alpha,v} S_{Ng}, \quad (5.46)$$

где число степеней свободы  $V = N_0 - 2$ , а величина  $g$  вычисляется по второй формуле из (5.39).

Теперь построим доверительный интервал для значения функции  $Y(x)$  от произвольного значения аргумента  $x$ . Этот интервал может быть представлен двумя неравенствами, использующими тот же коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha, V}$ :

$$\tilde{Y}(x) - t_{\alpha, V} S_{NX} \leq Y(x) \leq \tilde{Y}(x) + t_{\alpha, V} S_{NX}, \quad (5.47)$$

где  $S_{NX}$  есть квадратный корень из величины

$$S_{NX}^2 = \frac{Q_0}{(N_0 - 2)} \left[ \frac{1}{N_0} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right]. \quad (5.48)$$

Значение функции  $\tilde{Y}(x)$  вычисляется по аппроксимирующей функции (5.12) с использованием формул (5.39).

Очевидно, что величина  $S_{NX}$  быстро возрастает при удалении аргумента  $x$  от среднего значения  $\bar{x}$ . Следовательно, как уже было изложено в конце § 5.3, аппроксимирующую функцию целесообразно использовать для аргументов, лежащих в интервале  $(x_{\min}, x_{\max})$ , где  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  соответственно минимальное и максимальное значения из множества  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Для аргументов  $x > x_{\max}$  и  $x < x_{\min}$  доверительный интервал (5.47) становится таким огромным, что лишается физического смысла.

Дополнительно рассмотрим частный случай повторных измерений. Весьма часто в экспериментальных исследованиях количество повторов измерения значений функции  $y_{ks}$  для каждого аргумента  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) берется одинаковым. Это значит, что все числа  $m_k$  равны между собой ( $m_k = m$ ). Для таких случаев все выводы данного и предыдущего параграфов остаются в силе, но ряд вышеприведенных формул упрощается. Выражения (5.29), (5.39), (5.42) превращаются в (5.49), (5.50), (5.51) соответственно:

$$N_0 = Nm, \quad (5.49)$$

$$b = \frac{N \sum_{k=1}^N x_k \bar{y}_k - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)}{N \sum_{k=1}^N x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right)^2}, \quad (5.50)$$

$$g = \frac{\left( \sum_{k=1}^N x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right) - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) \left( \sum_{k=1}^N x_k \bar{y}_k \right)}{N \sum_{k=1}^N x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^N x_k \right)^2},$$

$$Q_0 = m \sum_{k=1}^N (\bar{y}_k - \tilde{y}_k)^2 + \sum_{k=1}^N q_k^2. \quad (5.51)$$

Видно, что формулы (5.50) отличаются от выражений (5.11) § 5.2 только заменой измеренных значений функции  $y_k$  на усредненные  $\bar{y}_k$ . Сумма квадратов отклонений расчетных значений от экспериментальных (5.51) не сводится к формуле (5.8) заменой значений  $\bar{y}_k$  на  $y_k$ , а содержит дополнительную сумму квадратов разброса результатов измерений относительно средних значений  $\bar{y}_k$ .

Для краткости введем новые обозначения

$$Q_1 = \sum_{k=1}^N (\bar{y}_k - \tilde{y}_k)^2, \quad Q_2 = \sum_{k=1}^N q_k^2. \quad (5.52)$$

Тогда сумма квадратов (5.51) может быть представлена в краткой форме:

$$Q_0 = mQ_1 + Q_2. \quad (5.53)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая  $m_k = m = \text{const}$  выражения для доверительных интервалов (5.44), (5.46), (5.47) можно оставить в том же виде, но формулы (5.43), (5.45), (5.48) соответственно заменить на следующие:

$$S_{Nb}^2 = \frac{mQ_1 + Q_2}{(Nm - 2) \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}, \quad (5.54)$$

$$S_{Ng}^2 = \frac{mQ_1 + Q_2}{(Nm - 2)} \left[ \frac{1}{Nm} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right], \quad (5.55)$$

$$S_{Nx}^2 = \frac{mQ_1 + Q_2}{(Nm - 2)} \left[ \frac{1}{Nm} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \right]. \quad (5.56)$$

## § 5.6. Приведение зависимостей к линейному виду

Часто (гораздо чаще, чем хотелось бы) теоретическая физика утверждает, что зависимость исследуемых физических величин  $X$  и  $Y$  является нелинейной.

Положение физика-экспериментатора облегчается тем, что многие функциональные зависимости, встречающиеся в физике, легко приводятся к линейной использованием алгебраических преобразований. После такой «линеаризации» функции можно использовать метод наименьших квадратов в вышеизложенной форме. Полученные оценки коэффициентов линейной зависимости затем пересчитываются в параметры исходной функции обратным алгебраическим преобразованием.

Рассмотрим в качестве типичного примера экспоненциальную зависимость, которая часто описывает разнообразные физические процессы. В частности, наличие диссипативных сил в системе порождает экспоненциальное убывание механической энергии и некоторых других физических величин с течением времени.

Пусть две физические величины  $X$  и  $Y$  связаны зависимостью вида:

$$Y = A_0 \exp(-B_0 X). \quad (5.57)$$

Функция содержит два параметра  $A_0$  и  $B_0$ , которые постоянны и положительны, но их численные значения неизвестны экспериментатору.

В ходе эксперимента проводятся измерения величины  $Y$  для разных значений величины  $X$  и получаются  $N$  пар чисел  $x_k, y_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Для краткости изложения в этом параграфе положим, что все значения аргумента  $x_k$  различны.

Будем искать числовые значения параметров  $A_0$  и  $B_0$ , которые соответствуют наилучшему приближению функции (5.57) к опытным результатам, используя вышеизложенный метод наименьших квадратов.

Введем новую переменную  $Z$ , которую определим как натуральный логарифм величины  $Y$ :

$$Z = \ln(Y). \quad (5.58)$$

Преобразование (5.58) превращает экспоненциальную зависимость (5.57) в линейную функцию:

$$Z = \beta^* X + \gamma^*. \quad (5.59)$$

Постоянные величины  $\beta^*$  и  $\gamma^*$  однозначно выражаются через параметры исходной функции (5.57)

$$\beta^* = -B_0, \quad \gamma^* = \ln(A_0). \quad (5.60)$$

Для каждого измеренного значения  $y_k$  вычислим его натуральный логарифм  $z_k = \ln(y_k)$ , в соответствии с выбранным преобразованием (5.58). Операция является допустимой, потому что все значения функции (5.57) положительны. В результате мы получим  $N$  пар следующих чисел:

$$x_k, z_k (k = 1, \dots, N) . \quad (5.61)$$

Теперь можно для пар значений (5.61) и аппроксимирующей функции (5.59) применить метод наименьших квадратов согласно методике, описанной в предыдущих параграфах. В рассматриваемом случае наилучшим приближением параметров  $\beta^*$  и  $\gamma^*$  функции (5.59) являются величины  $b^*$  и  $g^*$ , вычисляемые по формулам (5.11), в правых частях которых все значения  $y_k$  заменены на соответствующие натуральные логарифмы  $z_k = \ln(y_k)$ . Затем выразим искомые параметры  $A_0$  и  $B_0$  через найденные числа  $b^*$  и  $g^*$  преобразованием, обратным исходному (5.58). При этом мы получим приближенные значения параметров  $A_0$  и  $B_0$  экспоненциальной функции (5.57):

$$\tilde{A}_0 = \exp(g^*), \quad \tilde{B}_0 = -b^*. \quad (5.62)$$

Равенства  $A_0 \approx \tilde{A}_0$  и  $B_0 \approx \tilde{B}_0$  являются приближенными, так как величины  $b^*$  и  $g^*$  рассчитаны по результатам измерений  $x_k, y_k$ , которые содержат случайные погрешности.

Следовательно, кроме приближенных значений (5.62) параметров функции (5.57), необходимо вычислить погрешности их определения. Расчет должен базироваться на том, что величины  $b^*$  и  $g^*$ , а также  $\tilde{A}_0$  и  $\tilde{B}_0$ , вообще говоря, являются случайными.

Для параметра  $B_0$  проблема решается просто. Согласно второму равенству из (5.62), этот параметр совпадает по абсолютной величине с угловым коэффициентом линейной функции (5.59). Это значит, что полуширина доверительного интервала для параметра  $B_0$  может быть вычислена по первой формуле из (5.21) § 5.3, где среднеквадратичное отклонение  $S_b$  определяется выражением (5.16). Естественно, что предварительно мы задаем определенную доверительную вероятность  $\alpha$  и извлекаем из таблиц соответствующее значение коэффициента Стьюдента. Число степеней свободы в этом случае берется равным  $N - 2$ . Иначе говоря, доверительный интервал для параметра  $B_0$  строится идентично интервалу (5.19). Заметим, что параметр  $B_0$  в зависимости (5.57) часто имеет важный физический смысл.

Построение доверительного интервала для параметра  $A_0$  представляет собой более сложную задачу. Трудность обусловлена тем, что преобразование  $\tilde{A}_0 = \exp(g^*)$  является нелинейным, что затрудняет вычисление среднеквадратичного отклонения случайной величины  $\tilde{A}_0$ .

Во всех предшествующих главах и параграфах рассматривалось построение доверительных интервалов, симметричных относительно числа  $A^*$ , которое выбрано в качестве наилучшего приближения искомой физической величины  $A$ . Границы таких интервалов равноудалены от оценки  $A^*$ . Это удобно для расчетов, но не является обязательным требованием к доверительному интервалу. Необходимым свойством доверительного интервала является то, что он накрывает неизвестную величину  $A$  с заданной доверительной вероятностью  $\alpha$ .

Воспользуемся этим свойством для построения доверительного интервала для параметра  $A_0$  экспоненциальной функции (5.57). Сначала вычислим границы доверительного интервала для параметра  $\gamma^*$ , согласно общему выражению (5.20) для свободного члена линейной функции:

$$g^* - t_{\alpha, N-2} S_g \leq \gamma^* \leq g^* + t_{\alpha, N-2} S_g. \quad (5.63)$$

Теперь это двойное неравенство подвергнем экспоненциальному преобразованию. Полученные значения

$$\exp(g^* - t_{\alpha, N-2} S_g); \exp(g^* + t_{\alpha, N-2} S_g) \quad (5.64)$$

задают границы некоторого интервала. Если интервал (5.63) накрывает параметр  $\gamma^*$  с вероятностью  $\alpha$ , то интервал (5.64) накрывает параметр  $A_0 = \exp(\gamma^*)$  с той же вероятностью. Поэтому интервал (5.64) можно использовать как доверительный для искомого параметра  $A_0$  при заданной доверительной вероятности  $\alpha$ . Таким образом, мы вычислили границы доверительного интервала, не используя среднеквадратичного отклонения случайной величины  $\tilde{A}_0$ . Особенностью построенного доверительного интервала (5.64) является то, что его границы несимметричны относительно приближенного значения  $\tilde{A}_0$  искомого параметра  $A_0$ .

Выше был рассмотрен случай экспоненциальной связи между исследуемыми величинами. Многие другие нелинейные зависимости также

могут быть преобразованы к линейному виду. Вычисления приближенных значений параметров функций и построение доверительных интервалов проводятся аналогично вышеизложенному в данном параграфе.

## § 5.7. Примеры использования метода наименьших квадратов

Для иллюстрации применения методики, изложенной в предыдущих параграфах данной главы, приведем несколько практических примеров.

*Пример 1.* В лабораторной работе первого курса «Определение момента инерции тел относительно нецентральных осей» используется установка, в конструкцию которой входит подвешенная на проволоке платформа с тремя центрирующими грузами. Тело, момент инерции  $J$  которого предстоит измерить, помещается на платформу. Поворот платформы на некоторый угол порождает крутильные колебания. Изменение периода крутильных колебаний  $T$  позволяет вычислить момент инерции  $J$  исследуемого тела.

Теоретический анализ колебательного процесса показывает, что момент инерции тела  $J$  связан с периодом колебаний платформы  $T$  следующим образом:

$$J = C \cdot T^2 - J_0, \quad (5.65)$$

где  $J_0$  — момент инерции платформы с тремя грузами и  $C$  — некоторый постоянный коэффициент.

Следовательно, на начальном этапе работы студентам необходимо определить две постоянные экспериментальной установки: величины  $C$  и  $J_0$ .

Для определения этих неизвестных проводятся измерения периода крутильных колебаний с использованием в качестве тел дисков, которые коаксиально помещаются на платформу. Момент инерции однородного диска относительно собственной оси симметрии определяется его массой и радиусом. Измерение периода крутильных колебаний было описано в примере для трифилярного подвеса в главе 3.

Пусть в процессе измерений были получены результаты, приведенные в первых двух строках таблицы 1.

Таблица 1

Число опытов  $N = 4$ 

Номер опыта ( $k$ )	1	2	3	4	Суммы
$T_k$ (с)	1,41	1,525	1,63	1,725	
$J_k$ ( $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ )	$4,75 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$	$4,965 \cdot 10^{-2}$
$T_k^2$ ( $\text{с}^2$ )	1,988	2,326	2,657	2,976	9,946
$T_k^4$ ( $\text{с}^4$ )	3,953	5,409	7,059	8,854	25,275
$J_k T_k^2$ ( $\text{кг}\cdot\text{м}^2 \cdot \text{с}^2$ )	$9,443 \cdot 10^{-3}$	$2,302 \cdot 10^{-2}$	$3,985 \cdot 10^{-2}$	$5,951 \cdot 10^{-2}$	0,1318

Согласно (5.65), зависимость между квадратом периода колебаний платформы  $T^2$  и моментом инерции тела  $J$  является линейной и формально совпадает с функцией вида (5.7). При этом коэффициент  $C$  имеет смысл углового коэффициента  $\beta$ , а момент инерции платформы  $J_0$  — смысл свободного члена  $\gamma$  линейной функции (5.7), взятого с обратным знаком. Естественно, для нахождения неизвестных постоянных  $C$  и  $J_0$  следует применить вышеизложенный метод наименьших квадратов.

Квадратичная функция (5.65) превращается в линейную, если аргументом полагать квадрат периода колебаний. Поэтому, чтобы применить метод расчета, изложенный в § 5.2 и § 5.3, следует в качестве величин  $x_k$  использовать квадраты измеренных значений периода. Вычисленные значения  $x_k = T_k^2$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) записаны в третьей строке табл. 1.

В остальных строках таблицы указаны произведения, необходимые для расчета четырех сумм, входящих в формулы (5.11). Последний столбец таблицы содержит эти четыре суммы, приведенные здесь для контроля результатов промежуточных вычислений.

По данным таблицы 1 проводятся вычисления величин  $b$  и  $g$  с помощью формул (5.11):

$$b = 0,0154, \quad g = -0,026.$$

Это значит, что искомые параметры имеют следующие значения

$$C \approx 0,0154 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2\text{)}, \quad J_0 \approx 0,026 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}. \quad (5.66)$$

Равенства (5.66) приближенные, так как результаты измерений  $T_k$  и  $J_k$  содержат экспериментальные погрешности. Для расчета погрешностей искомых параметров  $C$  и  $J_0$  необходимо сначала вычислить среднеквадратичные отклонения  $S_b$  и  $S_g$  для коэффициентов линейной зависимости по формулам (5.16) и (5.18) соответственно. Расчеты по данным табл. 1 дают такие результаты:

$$S_b = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ (кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2\text{)} , S_g = 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)} . \quad (5.67)$$

Теперь следует задать доверительную вероятность  $\alpha$ . Выберем величину  $\alpha$  равной 0,95. Так как было проведено только четыре пары измерений значений  $T_k$  и  $J_k$  ( $N = 4$ ), то коэффициент Стьюдента следует брать для числа степеней свободы  $(N - 2) = 2$ . По таблице приложения 3 находим его значение  $t_{0.95, 2} = 4,303$ . Умножим найденный коэффициент Стьюдента на среднеквадратичные отклонения (5.67) и получим соответственно абсолютные погрешности найденных параметров  $C$  и  $J_0$  функции (5.65):

$$\Delta C = t_{0.95, 2} \cdot S_b = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ (кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2\text{)};$$

$$\Delta J_0 = t_{0.95, 2} \cdot S_g = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}.$$

Вычисленные абсолютные погрешности  $\Delta C$  и  $\Delta J_0$  равны полуширинам доверительных интервалов для искомых постоянных  $C$  и  $J_0$  платформы, используемой в данной лабораторной работе.

Полученные результаты можно записать в интервальнойной форме:

$$0,0151 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2\text{)} \leq C \leq 0,0157 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2\text{)} ,$$

$$0,0252 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)} \leq J_0 \leq 0,0267 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}$$

при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

Можно дополнительно вычислить относительные погрешности величин  $C$  и  $J_0$ , разделив абсолютные погрешности  $\Delta C$  и  $\Delta J_0$  на соответствующие числовые значения (5.66):

$$\varepsilon_{\tilde{N}} = \Delta \tilde{N} / \tilde{N} = 0,019 , \varepsilon_{J_0} \Delta J_0 / J_0 = 0,028 . \quad (5.68)$$

Проделанные расчеты проиллюстрируем графиком зависимости (5.65) для значений параметров (5.66). На том же графике нанесем экспериментальные данные (см. рис. 3).

Черными кружками обозначены экспериментальные результаты. Сплошной линией изображена линейная аппроксимирующая функция, полученная методом наименьших квадратов.

Из рис. 3 видно, что результаты измерений очень мало отклоняются от графика линейной зависимости, полученной методом наименьших квадратов. Кроме того, параметры линейной зависимости (5.66) определены с малой относительной погрешностью (5.68). Это свидетельствует о грамотной методике проведения эксперимента и тщательности измерений.

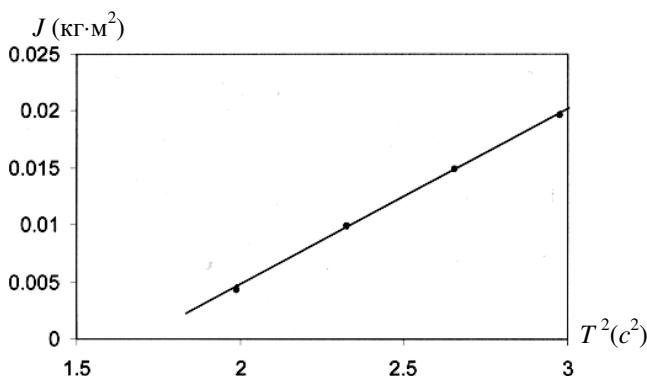


Рис. 3. Зависимость момента инерции набора дисков  $J$  от квадрата периода колебаний платформы  $T^2$

**Пример 2.** В ходе выполнения лабораторной работы «Математический маятник» студенты исследуют процесс затухания колебаний. Согласно теории, амплитуда колебаний  $\Phi$  с течением времени  $t$  описывается монотонно убывающей экспоненциальной функцией

$$\Phi = \Phi_0 \exp(-\delta t), \quad (5.69)$$

где параметр  $\delta$  называется коэффициентом затухания, а величина  $\Phi_0$  представляет собой амплитуду в начальный момент времени.

Целью эксперимента является определение коэффициента затухания  $\delta$ . Маятник отклоняют на некоторый начальный угол и отпускают с нулевой начальной скоростью, одновременно включая секундомер. В процессе затухания колебаний несколько раз одновременно измеряются амплитуда колебаний (угол отклонения от положения равновесия) и время, прошедшее с момента начала колебаний.

Результаты одного из подобных экспериментов сведены в табл. 2.

Таблица 2

Время $t$ (с)	Амплитуда $\Phi$ (угловые градусы)	$\ln(\phi)$
4	55	4,007
11	50	3,912
20	45	3,807
36	40	3,689
49	35	3,555
66	30	3,401
83	25	3,219
111	20	2,996
148	15	2,708
199	10	2,303
280	5	1,609

Результаты прямых измерений приведены в первых двух столбцах. В третьем столбце указаны соответствующие значения натуральных логарифмов. Положим числа первого столбца значениями  $x_k$ , а третьего — значениями  $z_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), где  $N = 11$  — количество выполненных пар измерений. Следуя методике, изложенной в предыдущем параграфе, вычислим величину  $b^* = -8,57 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , а затем по второй формуле из (5.62) получим приближенное значение коэффициента затухания экспоненциальной функции (5.69):

$$\delta \approx -b^* = 8,57 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Чтобы построить доверительный интервал для искомого коэффициента затухания, сначала подсчитаем для случайной величины  $g$  средне-

квадратичное отклонение (5.16)  $S_b = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Выберем доверительную вероятность  $\alpha = 0,95$ . Из таблиц извлечем значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, 9} = 2,262$  для  $\alpha = 0,95$  и числа степеней свободы  $N - 2 = 9$ . Полуширина доверительного интервала для коэффициента затухания равна  $S_b t_{\alpha, 9} = 2,73 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, получим окончательный результат в виде

$$8,29 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1} \leq \delta \leq 8,84 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$$

при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

**Пример 3.** Одной из задач лабораторной работы «Изучение законов движения с помощью машины Атвуда» является экспериментальное изучение характера движения тела под действием постоянной силы. После установки перегрузка определенной массы  $m$  измеряется величина  $t$  — время опускания груза с заданной высоты  $h$ . По условиям эксперимента груз начинает двигаться с нулевой начальной скоростью. Высота отсчитывается от положения, в котором скорость равна нулю.

Согласно физической теории зависимость высоты  $h$  от квадрата времени  $t$  является линейной, причем угловой коэффициент равен  $0,5 \cdot a$ , где  $a$  — ускорение тела:

$$h = at^2/2. \quad (5.70)$$

На величину времени опускания груза в машине Атвуда влияют различные факторы, которые можно полагать случайными (см. § 2.2), что приводит к разбросу измеряемых значений  $t$  при неизменных величинах  $m$  и  $h$ . Следует отметить, что этот разброс значительно превышает приборную погрешность используемого электронного секундометра.

По этим причинам в эксперименте при фиксированной массе перегрузка  $m$  для каждого значения высоты  $h_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) время опускания  $t_{is}$  измеряется несколько раз ( $s = 1, \dots, K$ ), где  $N$  — количество различных высот, а  $K$  — число измерений времени для определенной высоты.

Пусть для перегрузка массой 12 г были получены результаты, приведенные в табл. 3.

В четырех левых столбцах записаны результаты прямых измерений высоты и времени. Видно, что в данной серии опытов  $N = 7$  и  $K = 3$ .

Для вычисления величины ускорения используется вариант метода наименьших квадратов, изложенный в конце § 5.5. Аргументом является высота, функцией — квадрат времени опускания груза. Значения аргумента  $h_i$  составляют первый столбец табл. 3. Измеренные времена опускания  $t_{is}$  возводятся в квадрат и усредняются для каждой высоты  $h_i$  согласно формуле (5.30). Полученные средние  $\bar{t}_i^2$  записаны в пятый столбец табл. 3.

Таблица 3

Высота $h_i$ (м)	Время опускания груза $t_{is}$ (с)			$\bar{t}_i^2$ (с <sup>2</sup> )	$q_i^2$ (с <sup>4</sup> )
0,3	1,2	1,0	1,2	1,293	0,129
0,6	2,0	2,0	2,2	4,28	0,47
0,9	2,8	3,0	2,4	7,533	5,39
1,2	3,2	3,4	3,0	10,267	3,278
1,5	3,8	4,0	3,8	14,96	1,622
1,8	3,8	4,0	4,0	15,48	1,622
2,1	4,0	4,0	4,2	16,547	1,793

Расчет приближенного значения углового коэффициента линейной зависимости квадрата времени опускания от высоты

$$\bar{t}^2 = \beta \cdot h \quad (5.71)$$

проводится по первой формуле из (5.50). При этом в качестве величин  $x_k$  и  $\bar{y}_k$  берутся значения первого и пятого столбцов соответственно табл. 3. Приближенный угловой коэффициент  $b$  получается равным 9,00 (с<sup>2</sup>/м).

Связь ускорения  $a$  падающего груза с угловым коэффициентом  $\beta$  дается сравнением функций (5.70) и (5.71):

$$a = 2/\beta. \quad (5.72)$$

Пользуясь полученным числом  $b = 9,00$  (с<sup>2</sup>/м), вычисляем приближенное значение ускорения падающего груза:

$$a \approx 0,22 \text{ (м/с}^2\text{).} \quad (5.73)$$

Для построения соответствующего доверительного интервала необходимо вычислить суммы (5.52) и (5.53). В качестве промежуточных результатов в последнем столбце таблицы 3 приведем характеристики разброса квадрата времени опускания относительно средних значений  $\bar{t}_i^2$ , т.е. величины  $q_i^2$ , которые вычисляются по формулам (5.36). Расчеты дают следующие значения

$$Q_1 = 8,104 \text{ (c}^4\text{)}, \quad Q_2 = 14,305 \text{ (c}^4\text{)}, \quad Q_0 = 38,618 \text{ (c}^4\text{)}.$$

Среднее значение аргументов, приведенных в табл. 3, вычисляется легко:  $\bar{h} = 1,2$  (м). Среднеквадратичное отклонение  $S_{Nb}$  высчитывается по формуле (5.54)

$$S_{Nb} = 0,90 \text{ (c}^2/\text{м)}.$$

Теперь возьмем доверительную вероятность  $\alpha = 0,95$  и для числа степеней свободы  $(N \cdot K - 2) = 19$  извлечем из таблицы коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha/2, 19} = 2,093$ . Согласно формуле (5.44) получаем доверительный интервал для углового коэффициента  $\beta$  линейной зависимости  $t^2 = \beta \cdot h$ :

$$7,12 \text{ (c}^2/\text{м)} \leq \beta \leq 10,88 \text{ (c}^2/\text{м)}. \quad (5.74)$$

Пользуясь соотношением (5.72), пересчитаем границы доверительного интервала (5.74) в границы доверительного интервала для ускорения. Окончательно получаем

$$0,18 \text{ (m/c}^2\text{)} \leq a \leq 0,28 \text{ (m/c}^2\text{)} \quad (5.75)$$

при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

Значительная ширина доверительного интервала для ускорения, иначе говоря, большая абсолютная погрешность рассчитанного значения ускорения обусловлена разбросом измеренных значений времени опускания груза (см. табл. 3), что, в свою очередь, вызвано влиянием различных случайных факторов на исследуемое движение тела.

*Примечание.* Если построить доверительный интервал для свободного члена зависимости квадрата времени опускания от высоты, пользуясь формулами (5.50), (5.46), (5.55), то мы получим граничные значения:  $(-3,09; 1,60)$ . Полученный результат не противоречит утверждению о

том, что свободный член исследуемой зависимости квадрата времени опускания от высоты имеет нулевое значение.

**Пример 4.** Этот пример предназначен для студентов старших курсов, специализирующихся по физике твердого тела. В лабораторном практикуме по ФТТ под редакцией профессора А.Ф.Хохлова одна из работ посвящена изучению температурной зависимости электропроводности аморфных полупроводников в различных температурных диапазонах. При комнатной и несколько более высокой температуре удельная проводимость аморфных полупроводников, согласно теории, удовлетворительно описывается следующей экспоненциальной зависимостью:

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right), \quad (5.76)$$

где  $T$  – абсолютная температура,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\Delta E$  – энергия активации проводимости. Величина  $\sigma_0$  имеет смысл предельной проводимости для высоких температур.

Методика исследования температурной зависимости электропроводности подробно описана в руководстве к указанной лабораторной работе. Результаты измерений для одного из образцов приведены в двух первых столбцах таблицы 4.

Экспоненциальная зависимость (5.76) может быть преобразована в линейную операцией логарифмирования, как это было описано в § 5.6 и продемонстрировано в примере 2 данного параграфа :

$$\ln(\sigma) = \ln(\sigma_0) - \frac{\Delta E}{k_B} \frac{1}{T}. \quad (5.77)$$

Очевидно, что (5.77) представляет собой линейную зависимость натурального логарифма удельной проводимости от обратной температуры.

Таблица 4

Температура $T_i$ , °K	Удельная проводимость $\sigma_i$ , $10^{-3} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$	$1/T_i$	$\ln(\sigma_i)$
289,1	3,459	0,003459	-17,28
291,5	3,431	0,003431	-17,10
293,9	3,403	0,003403	-16,95
295,7	3,382	0,003382	-16,81
298	3,356	0,003356	-16,69
299	3,344	0,003344	-16,59
302	3,311	0,003311	-16,45
304	3,289	0,003289	-16,33
305,9	3,269	0,003269	-16,22
307,4	3,253	0,003253	-16,12
309,5	3,231	0,003231	-16,00
311,4	3,211	0,003211	-15,89
313,4	3,178	0,003191	-15,77
314,7	3,178	0,003178	-15,67
316,7	3,158	0,003158	-15,58
318,1	3,147	0,003144	-15,49
320,9	3,116	0,003116	-15,33
323,5	3,091	0,003091	-15,20
325,2	3,075	0,003075	-15,08

Числовые значения величин  $1/T$  и  $\ln(\sigma)$ , полученные из результатов эксперимента, приведены в третьем и четвертом столбцах таблицы 4. Полагая числа третьего столбца значениями аргумента  $x_i$ , а числа четвертого – значениями функции  $y_i$ , применим формулы (5.11) метода наименьших квадратов и получим

$$B = -5632, \quad G = 2,213. \quad (5.78)$$

Величина  $b$  из (5.78) в соответствии с § 5.6 представляет собой отношение энергии активации к постоянной Больцмана с обратным знаком. Умножив число  $b$  на  $-k_B$ , получим энергию активации и выразим ее в электронвольтах:

$$\Delta E = 0,485 \text{ эВ.}$$

Для вычисления погрешности полученной величины  $\Delta E$  рассчитаем ее среднеквадратичную погрешность  $S_b$  по формуле (5.16). Таблица 4 содержит результаты измерений для 19 значений аргументов, поэтому коэффициент Стьюдента должен извлекаться из таблицы приложения 3 для числа степеней свободы, равного 17. Зададимся доверительной вероятностью, равной  $\alpha = 0,9$ , и получим коэффициент Стьюдента  $t = 1,74$ . Умножение коэффициента Стьюдента на среднеквадратичную погрешность  $S_b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  дает полуширину доверительного интервала для энергии активации. Таким образом, результат определения энергии активации записывается в следующем виде

$$\Delta E = 0,485 \pm 5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ} \quad \text{при доверительной вероятности } \alpha = 0,9.$$

Полученное значение энергии активации является характерным для аморфного кремния.

Величина  $\sigma_0$  вычисляется по параметру  $g$  (5.78):

$$\sigma_0 = \exp(g) = 9,143 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$$

Расчет доверительного интервала для параметра  $\sigma_0$  требует предварительного вычисления среднеквадратичной погрешности  $S_g$  по формуле (5.18), что дает  $S_g = 0,11$ . Границы доверительного интервала в этом случае вычисляются по методу, изложенному в § 5.6. Нижняя граница равна:

$$\exp(g - t S_g) = 7,553 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1},$$

верхняя:  $\exp(g + t S_g) = 11,073 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}.$

Следовательно, при доверительной вероятности  $\alpha = 0,9$  величина параметра  $\sigma_0$  лежит в следующем интервале:

$$7,553 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} < \sigma_0 < 11,073 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$$

Значительное отличие величины  $\sigma_0$  от значений второго столбца таблицы 4 объясняется тем, что в эксперименте измерения электропроводности проводились в узком интервале невысоких температур.

# ГЛАВА 6

## ЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

### § 6.1. Функциональные и стохастические зависимости

Многие физические величины связаны определенными функциональными зависимостями. Например, закон Ома выражает линейную зависимость тока в участке цепи от падения напряжения на этом участке. Закон всемирного тяготения утверждает, что сила гравитации пропорциональна произведению масс взаимодействующих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Эти зависимости являются обобщением опытных данных либо получаются методами теоретической физики. Физики всегда стремятся описать явления и процессы функциональными зависимостями.

Однако часто на начальном этапе решения какой-либо физической проблемы вид функциональной связи между определенными физическими величинами является неизвестным. Более того, иногда существуют сомнения в наличии такой связи. Некоторые физические величины могут быть независимыми.

Исследование причинно-следственной связи между двумя величинами  $X$  и  $Y$  проводится путем измерений значений величины  $Y$  при различных значениях величины  $X$ . По полученным результатам делается вывод о связи или независимости физических величин  $X$  и  $Y$ . Следует иметь в виду, что любой метод измерения вносит в результат некоторую случайную погрешность, а это, в свою очередь, затрудняет однозначный вывод о наличии функциональной зависимости между данными физическими величинами.

При изучении реальных процессов выясняется, что существуют физические величины, которые, с одной стороны, не связаны явной взаимно однозначной функциональной зависимостью, но, с другой стороны, они не являются и абсолютно независимыми. Это значит, что при одном и том же значении переменной  $X$  в экспериментах получаются различные значения переменной  $Y$ , причем их разброс значительно превышает погрешность измерения  $\Delta Y$ . В то же время средние значения  $\bar{Y}$  регулярно увеличиваются или уменьшаются с ростом  $X$ . Подобные вели-

чины называются **коррелированными**, или говорят, что рассматриваемая пара величин  $X$  и  $Y$  связана между собой **стохастической зависимостью**.

Стохастическими зависимостями связаны случайные величины, которые встречаются почти во всех областях физики: термодинамике, квантовой физике, механике многих тел, теории нелинейных колебаний. Стохастическими зависимостями описываются многие биофизические процессы, что обусловлено сложностью исследуемых объектов.

Примеры различных видов взаимосвязи переменных величин  $X$  и  $Y$  приведены в виде графиков на рис. 4.

На практике зачастую трудно по результатам проведенных измерений отличить «на глаз» строгую функциональную зависимость от стохастической из-за большой величины случайных погрешностей. Вот почему необходим математический метод анализа взаимосвязи переменных  $X$  и  $Y$ , который и излагается в данной главе.

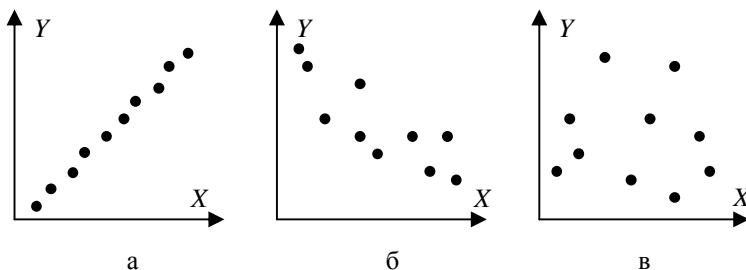


Рис. 4. Графическое представление результатов измерений для разных типичных случаев взаимосвязи величин  $X$  и  $Y$ :

- а – функционально связанные величины  $X$  и  $Y$ ,
- б – стохастически связанные величины  $X$  и  $Y$ ,
- в – независимые величины  $X$  и  $Y$ .

С точки зрения теории вероятностей коррелированные величины являются случайными. Разброс значений одной величины при постоянстве значения другой может быть описан с помощью распределений вероятностей.

## § 6.2. Расчет коэффициента корреляции

Простейшей, но информативной характеристикой связи двух случайных величин  $X$  и  $Y$  является **коэффициент корреляции**. Эта величина определяется в теории вероятностей с помощью других вероятностных числовых характеристик. В данном параграфе мы ограничимся перечислением основных свойств коэффициента корреляции и способов расчета, базирующихся на экспериментальных результатах. Любознательным читателям рекомендуется обратиться к специальным курсам теории вероятностей (см. список рекомендованной литературы).

Приведем три важнейших свойства коэффициента корреляции, которые доказаны в теории вероятностей.

1. Всегда  $|\rho_{XY}| \leq 1$ , т.е. абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы.
2. Для независимых величин  $\rho_{XY} = 0$ .
3. Если величины  $X$  и  $Y$  связаны функциональной линейной зависимостью то  $|\rho_{XY}| = 1$ . Иначе говоря, если  $|\rho_{XY}| = 1$ , то

$$Y = K \cdot X + B , \quad (6.1)$$

где  $K$  и  $B$  — некоторые постоянные.

Коэффициент корреляции является удобной характеристикой взаимосвязи двух переменных величин  $X$  и  $Y$ . Чем ближе к нулю величина  $\rho_{XY}$ , тем больше нерегулярный разброс значений величины  $Y$  при любом фиксированном значении  $X$ . Напротив, если коэффициент  $\rho_{XY}$  близок к единице, то зависимость  $Y(X)$  можно приближенно считать линейной.

Кроме того, знак коэффициента корреляции однозначно определяет характер зависимости  $Y(X)$ . Если  $\rho_{XY} > 0$ , то величины  $X$  и  $Y$  одновременно возрастают или убывают (с точностью до случайных погрешностей). Если  $\rho_{XY} < 0$ , то с ростом  $X$  величина  $Y$  убывает или с уменьшением  $X$  величина  $Y$  растет.

Таким образом, численное значение коэффициента корреляции характеризует, насколько взаимосвязь между исследуемыми величинами

$X$  и  $Y$  близка к линейной зависимости. Абсолютная величина  $|\rho_{XY}|$  будет уменьшаться при отклонении зависимости  $Y(X)$  от линейной, даже если переменные связаны не стохастически, а строго функционально. Следовательно, использование коэффициента корреляции эффективно для исследования таких зависимостей, чья близость к линейной заранее обоснована теоретически.

Целесообразность применения коэффициента корреляции связана также с тем, что в первом приближении многие сложные зависимости полагаются линейными.

Теоретико-вероятностное определение коэффициента корреляции не пригодно для практических вычислений. Экспериментатор не имеет в своем распоряжении теоретическую информацию о распределении вероятностей исследуемых величин и случайных погрешностей. Поэтому вместо точного значения коэффициента корреляции  $\rho_{XY}$  приходится вычислять его приближенное значение (оценку), пользуясь результатами измерений величин  $X$  и  $Y$ .

Пусть в эксперименте было проведено  $N$  измерений каждой из изучаемых величин  $X$  и  $Y$  и получены  $N$  пар числовых значений:

$$x_i, y_i ; i = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Наилучшим приближенным значением коэффициента корреляции, которое можно вычислить с помощью результатов измерений, является величина  $R$ , выражаемая следующей формулой:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (6.3)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — средние статистические результатов измерений  $x_i$  и  $y_i$  соответственно:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i. \quad (6.4)$$

Для демонстрации работы с оценкой коэффициента корреляции (6.3) рассмотрим сначала простой пример.

В лабораторной работе «Математический маятник» для определения ускорения свободного падения  $g$  используется зависимость между периодом колебания маятника  $T$  и длиной нити  $L$ . Теория дает следующий вид этой зависимости:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (6.5)$$

Таким образом, согласно теории между величинами  $L$  и  $T^2$  должна существовать линейная зависимость. Проверим это утверждение, используя результаты эксперимента, с помощью расчета величины  $R$  по формуле (6.3).

Пусть в опытах измерения периода колебаний проводились для пяти различных длин нити. Результаты сведены в таблицу 5. Естественно, для каждой длины период измерялся несколько раз и в табл. 5 занесены уже усредненные значения квадрата периода.

Таблица 5

Номер опыта	1	2	3	4	5
Длина нити $L$ (см)	10	17	24	31	38
Квадрат периода $T^2$ (с <sup>2</sup> )	0,4132	0,6954	0,9801	1,2618	1,546

Используя данные табл. 5, необходимо вычислить оценку коэффициента корреляции  $R$ . Сначала вычисляем средние значения длины и квадрата периода:

$$\bar{L} = 24 \text{ (см)}, \bar{T^2} = 0,9793 \text{ (с}^2\text{)}.$$

Затем подсчитаем три суммы, необходимые для применения формулы (6.3):

$$\sum_{i=1}^5 (L_i - \bar{L})(T^2_i - \bar{T^2}) = 19,824 \text{ (см} \cdot \text{с}^2\text{)}.$$

$$\sum_{i=1}^5 (L_i - \bar{L})^2 = 490 \text{ (см}^2\text{)}, \quad \sum_{i=1}^5 (T^2_i - \bar{T}^2)^2 = 0,802 \text{ (с}^4\text{)}.$$

Теперь, подставляя вычисленные суммы в (6.3), получим численное значение приближенного коэффициента корреляции:

$$R = 0,999999.$$

Оценка коэффициента корреляции, столь близкая к единице, является убедительным доказательством наличия линейной зависимости между величинами  $L$  и  $T^2$  и экспериментальным подтверждением теоретической формулы (6.5). Небольшое отличие полученной величины  $R$  от единицы обусловлено погрешностями измерения длины нити и периода колебаний.

Приведенный пример является тривиальным, а полученный результат — ожидаемым.

Рассмотрим менее очевидную зависимость между двумя физическими величинами.

В эксперименте исследуется столкновение двух стальных шаров, подвешенных на нитях одинаковой длины. Первый шар отклоняется так, что его нить составляет угол  $\Phi$  с вертикалью, и отпускается с нулевой начальной скоростью (см. рис. 5).

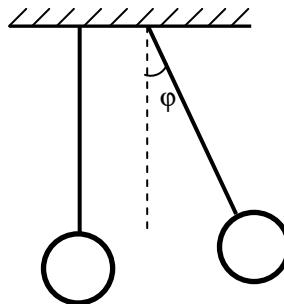


Рис. 5. Схема столкновения упругих шаров

Попытаемся ответить на вопрос: зависит ли время столкновения от начального угла отклонения? Под временем столкновения понимается интервал времени, в течение которого шары, упруго деформируясь, пребывают в контакте. Лабораторная установка позволяет измерять этот интервал времени с точностью до микросекунды.

Пусть в эксперименте было измерено время столкновения  $T$  для интервала начальных углов  $\Phi$  от 5 до 15 градусов. Для каждого угла  $\Phi$  время столкновения  $T$  измерялось 6 раз и результат усреднялся по формуле (2.1). Полученные числовые значения сведены в таблицу 6.

Таблица 6

Начальный угол отклонения $\phi$ (град)	Время столкновения $T$ (мкс)
15	133,2
14	134
13	143,7
12	135,8
11	134,2
10	135,4
9	139,3
8	125
7	110,7
6	130,7
5	100

На первый взгляд, с уменьшением угла  $\Phi$  время соударения изменяется весьма хаотично. Для выяснения наличия или отсутствия взаимосвязи величин  $\Phi$  и  $T$  следует прежде всего рассчитать коэффициент корреляции.

Сначала по данным табл. 6 вычисляются средние значения угла начального отклонения и времени столкновения:

$$\bar{\Phi} = 10 \text{ (град)}, \bar{T} = 129,3 \text{ (мкс)},$$

затем — три суммы, необходимые для применения формулы (6.3):

$$\sum_{i=1}^{11} (\varphi_i - \bar{\varphi})(T_i - \bar{T}) = 294,7 \text{ (град. мкс)}$$

$$\sum_{i=1}^{11} (\varphi_i - \bar{\varphi})^2 = 110 \text{ (град}^2\text{)} , \quad \sum_{i=1}^{11} (T_i - \bar{T})^2 = 1673 \text{ (мкс}^2\text{)} .$$

Подставляя вычисленные суммы в формулу (6.3), получим приближенный коэффициент корреляции:

$$R = 0,687 .$$

Полученное значение существенно отличается от нуля. Следовательно, мы приходим к выводу, что взаимосвязь исследуемых величин существует, но она, возможно, далека от линейной. Для установления конкретного закона взаимосвязи начального угла отклонения и времени столкновения необходимо провести более подробные экспериментальные и теоретические исследования данной проблемы.

### **§ 6.3. Доверительный интервал для коэффициента корреляции**

Следует помнить, что и сами результаты измерений, и получаемые из них средние статистические представляют собой случайные величины. Величина  $R$ , определяемая формулой (6.3), как функция случайных величин, сама является случайной величиной. При повторении серии измерений мы будем получать, вообще говоря, другие опытные результаты (6.2) и средние значения (6.4). Следовательно, мы получим другое значение оценки  $R$ .

Для получения надежной информации о взаимосвязи исследуемых величин  $X$  и  $Y$  требуется построить доверительный интервал для неизвестного значения коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ .

Для расчета границ доверительного интервала необходимо знать распределение вероятностей случайной величины  $R$ . В математической статистике установлено, что это распределение в общем случае зависит от истинного значения коэффициента корреляции  $\rho_{xy}$ , которое неизвестно экспериментатору. Поэтому построение доверительного интер-

вала представляет собой достаточно сложную математическую проблему.

Ниже излагается алгоритм, который дает надежные результаты даже для небольшого количества измеренных пар значений исследуемых величин  $X$  и  $Y$ .

Зададимся (как всегда при построении доверительного интервала) определенной доверительной вероятностью  $\alpha$ .

На первом шаге требуется определить число  $\varepsilon$ , которое является корнем следующего нелинейного уравнения

$$\alpha = 2 \cdot \Phi(\varepsilon), \quad (6.6)$$

где  $\Phi(x)$  — функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (6.7)$$

На практике уравнение (6.6) решается с помощью таблицы значений функции Лапласа (см. приложение 4). По заданному значению функции Лапласа  $\alpha/2$  из таблицы извлекается соответствующая величина аргумента  $\varepsilon$ . (При отсутствии в таблице числового значения  $\alpha/2$  следует применить линейную интерполяцию.)

Доверительный интервал для коэффициента корреляции  $\rho_{XY}$  представим в виде:

$$th\left(U - \varepsilon/\sqrt{(N-3)}\right) \leq \rho_{XY} \leq th\left(U + \varepsilon/\sqrt{(N-3)}\right), \quad (6.8)$$

где  $U$  — величина, которая связана с приближенным значением коэффициента корреляции  $R$  следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right). \quad (6.9)$$

Функция  $th(z)$  — гиперболический тангенс, который можно выразить через экспоненциальную функцию удвоенного аргумента:

$$th(z) = \frac{\exp(2z)-1}{\exp(2z)+1}. \quad (6.10)$$

Заметим, что уже вычисление границ доверительного интервала (6.8) требует более трех пар измерений.

Современная компьютерная техника и программное обеспечение позволяют легко проводить вычисления, необходимые для построения границ доверительного интервала (6.8). Не возбраняется использовать собственноручно составленные программы после их тестирования.

Предложенный способ построения доверительного интервала для коэффициента корреляции дает надежные результаты при любом значении величины  $\rho_{xy}$ , если число пар  $N$  измеренных значений  $x_i, y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) не менее десятка.

Если число измерений велико (несколько сотен) или известно, что разброс значений обеих исследуемых величин  $X$  и  $Y$  подчиняется нормальному закону распределения вероятностей, то границы доверительного интервала для  $\rho_{xy}$  выражаются более простой формулой:

$$R - \varepsilon(1-R)/\sqrt{N} \leq \rho_{xy} \leq R + \varepsilon(1-R)/\sqrt{N}, \quad (6.11)$$

где параметр  $\varepsilon$  по-прежнему определяется из уравнения (6.6).

Формул (6.8) и (6.11) достаточно, чтобы вычислять границы доверительного интервала для коэффициента корреляции в общем случае.

Однако имеет смысл рассмотреть важный для практики частный случай, когда физическая теория приходит к выводу о том, что исследуемые физические величины  $X$  и  $Y$  могут считаться независимыми. Это значит, что коэффициент корреляции  $\rho_{xy}$  должен равняться нулю. Проверка сделанного теоретического вывода заключается в получении экспериментальных результатов (6.2) и вычислении оценки коэффициента корреляции  $R$  по формуле (6.3). При этом получается приближенное значение коэффициента корреляции, которое может значительно отличаться от нуля из-за случайных погрешностей результатов измерений  $x_i, y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Доказано, что при условии  $\rho_{xy} = 0$  случайная величина

$$T_R = R \sqrt{\frac{N-2}{1-R^2}} \quad (6.12)$$

имеет распределение вероятностей Стьюдента, которое хорошо изучено в математической статистике (см.приложение 3). Эта теорема дает нам практический метод проверки независимости двух величин.

По заданной доверительной вероятности  $\alpha$  и количеству проведенных пар измерений  $N$  находим из таблиц значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, N-2}$ , соответствующее вероятности  $\alpha$  и числу степеней свободы  $(N-2)$ . Пользуясь полученными результатами измерений (6.2), вычисляем значение величины  $T_R$  по формуле (6.12). Теперь сравним два полученных числа:  $t_{\alpha, N-2}$  и  $T_R$ . Возможны два взаимоисключающих варианта.

При  $T_R \leq t_{\alpha, N-2}$  отличие приближенного значения коэффициента корреляции  $R$  от нуля объясняем наличием случайных погрешностей. Полагаем, что исследуемые величины  $X$  и  $Y$  являются независимыми.

В противоположном случае, при  $T_R > t_{\alpha, N-2}$  ненулевое значение величины  $R$  уже невозможно объяснить только наличием случайных погрешностей экспериментальной методики. Для этого число  $T_R$ , приблизительно пропорциональное величине  $R$ , слишком велико. Маловероятно, что столь значительное отличие оценки  $R$  от нуля можно списать на большие случайные погрешности измеряемых величин (6.2). Более вероятно, что предположение о независимости исследуемых величин  $X$  и  $Y$  несправедливо и коэффициент корреляции не равен нулю.

Следовательно, если  $T_R > t_{\alpha, N-2}$ , мы утверждаем, что между изучаемыми величинами существует некоторая зависимость, для установления которой необходимо проводить дополнительные экспериментальные исследования. Заметим, что это утверждение не является абсолютно точным, а сделано с вероятностью  $\alpha$ . Как уже упоминалось, в математической статистике все выводы имеют вероятностный характер.

Чтобы проиллюстрировать высказанное, проведем практические расчеты для примера столкновения шаров из предыдущего параграфа.

Численное значение приближенного значения коэффициента корреляции  $R = 0,687$  весьма далеко от нуля. Но все-таки проверим гипотезу

о равенстве нулю коэффициента корреляции  $\rho_{XY}$ . Для этого вычислим по данным табл. 5 численное значение величины  $T_R$  по формуле (6.12):

$$T_R = 2,836.$$

Зададимся доверительной вероятностью  $\alpha = 0,95$ . Табл. 6 содержит 11 пар значений исследуемых величин. Следовательно, число степеней свободы равно 9. По таблице приложения 3 найдем соответствующее значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha,9} = 2,262$ . Так как в данном случае  $T_R > t_{\alpha,9}$ , то исследуемые величины — начальный угол отклонения и время столкновения — не являются независимыми.

Построим доверительный интервал для коэффициента корреляции при выбранной доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ .

Сначала вычислим величину  $U$  по формуле (6.9), используя ранее вычисленное значение  $R = 0,687$ :

$$U = 0,842 .$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа (см. приложение 4) найдем решение уравнения (6.6):

$$\varepsilon = 1,96.$$

Теперь можно вычислить границы доверительного интервала (6.8):

$$0,148 \leq \rho_{XY} \leq 0,911.$$

Значительная ширина полученного интервала свидетельствует о недостаточном объеме исходной информации, необходимой для окончательного вывода о характере связи исследуемых физических величин. Согласно (6.8) ширина интервала резко возрастает с уменьшением числа пар измерений. Возможно, основной вклад в ширину построенного интервала дала погрешность экспериментальной методики измерения времени столкновения. Кроме того, вероятно, что взаимосвязь исследуемых величин является нелинейной.

В заключение данной главы заметим, что если, согласно предварительным теоретическим изысканиям, связь между исследуемыми величинами  $X$  и  $Y$  в принципе нелинейна, то используемый выше коэффициент корреляции  $\rho_{XY}$  не является корректной характеристикой связи величин  $X$  и  $Y$ . В подобных случаях анализ нелинейной связи следует

проводить с помощью так называемых **корреляционных отношений**. Расчет корреляционных отношений и методика работы с ними изложены, в частности, в курсе [2] прилагаемого списка рекомендуемой литературы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

#### 1. Вероятность случайного события

В житейском смысле термин «вероятность» используется в недостаточно определенных ситуациях, когда недостаточно информации для точного решения поставленной проблемы.

Приведем пару типичных «вероятностных» высказываний граждан. «Вероятно, сегодня пойдет дождь», «Вероятно, я сегодня вечером снова встречу эту интересную блондинку с бультьером». Однако в этих и подобных случаях автор заявления испытывает трудности с количественной оценкой вероятности.

Раздел математики, называемый «теория вероятностей», определяет вероятность количественно как числовую функцию случайного события. Именно понятие случайного события является наиболее сложным. Подробное изложение основных понятий излагается в систематических курсах теории вероятностей, поэтому здесь мы ограничимся краткими формулировками и примерами.

Обозначим всю совокупность условий какого-то эксперимента буквой  $U$ . Пусть в результате этого эксперимента может произойти или не произойти некоторое событие  $E$ .

**Пример 1.** Эксперимент: подбрасывание монеты. Событие: монета падает на стол гербом вверх.

**Пример 2.** Эксперимент: выстрел из пистолета. Событие: попадание в мишень.

О том, что в эксперименте  $U$  событие  $E$  может произойти или не произойти, мы убеждаемся на опыте, повторяя эксперимент  $U$  несколько раз в одинаковых условиях. Пусть опыт  $U$  повторен  $N$  раз. При этом событие  $E$  произошло  $N(E)$  раз. Тогда отношение

$$v(E) = N(E) / N . \quad (1)$$

называется **частотой** события  $E$  в данной серии измерений.

Интересно, что при повторении серии из  $N$  опытов получится, вообще говоря, другое число  $N(E)$  и значение частоты  $v(E)$  изменится.

Будем неограниченно увеличивать количество опытов. Оказывается, для многих событий  $E$  наблюдается характерная особенность: с ростом числа опытов  $N$  частота  $v(E)$  постепенно приближается к некоторой постоянной величине  $P(E)$ . Можно предположить, что при стремлении числа опытов  $N$  к бесконечности частота  $v(E)$  станет равной числу  $P(E)$ . Это явление в математике называется **статистической устойчивостью частот**.

Понятно, что число  $P(E)$  зависит от события  $E$ . В примере 1 число  $P(E)$  равно  $1/2$ , если монета изготовлена из однородного материала. Во втором примере число  $P(E)$  зависит от мастерства стрелка и его морально-волевого состояния во время стрельбы.

События  $E$ , для которых свойственна статистическая устойчивость частот, называются **случайными**, а соответствующее число  $P(E)$  — **вероятностью** события  $E$ .

Таким образом, понятие вероятности было введено, как теоретическое обобщение частоты случайного события. Однако в теории вероятность определяется аксиоматически, что оказывается более целесообразным для разработки математического аппарата расчетов вероятностей и их функций.

Для формулировки аксиом необходимо рассмотреть некоторые свойства случайных событий.

Пусть некоторое событие  $E$  всегда происходит в результате реализации определенного комплекса начальных условий  $U$ . Например, эксперимент  $U$  представляет собой нагревание чистой воды до температуры  $100^{\circ}\text{C}$  при нормальном атмосферном давлении. Событием  $E$  является закипание воды. Подобные события называются **достоверными**, будем обозначать их символом  $\Omega$ .

В результате эксперимента  $U$  могут происходить, вообще говоря, различные события. В примере со стрельбой возможно попадание в различные части мишени. Среди множества случайных событий, которые являются результатом данного эксперимента  $U$ , имеются как **совместные**, так и **несовместные**.

Рассмотрим эксперимент  $U$ , который заключается в извлечении одной карты из предварительно тщательно перетасованной колоды. Определим следующие случайные события:  $A$  — извлечение туза,  $B$  — извлечение карты бубновой масти,  $C$  — извлечение короля. Очевидно, что события  $A$  и  $B$  являются совместными, а события  $A$  и  $C$  — несовместными. Вытаскивание бубнового туза будет одновременной реализацией события  $A$  и события  $B$ . Но невозможно, чтобы извлеченная карта была одновременно и тузом и королем. Иначе говоря, реализация одного несовместного события приводит к невозможности реализации другого. Несовместными событиями являются, например, попадание и промах при единственном выстреле охотника в дичь.

В физике и других областях естествознания часто фигурирует понятие независимости явлений и событий. В математике события  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если реализация одного из них не изменяет вероятности другого.

**Суммой** или **объединением** событий  $A$  и  $B$  называют событие, которое заключается в том, что реализуется событие  $A$  или событие  $B$  (или оба совместно). В предыдущем примере с колодой карт сумма событий  $A + B$  представляет собой извлечение любого туза или любой карты бубновой масти (в т.ч. и бубнового туза).

**Произведением** или **пересечением** событий  $A$  и  $B$  называют событие, которое заключается в совместной реализации обоих событий. В том же примере произведение событий  $A \cdot B$  представляет собой вытаскивание только бубнового туза. Произведение событий  $A \cdot C$  является **невозможным** событием, т.е. событием, которое в принципе не может произойти.

Понятия суммы и произведения распространяются на любое, в том числе и счетное количество событий.

Теперь можно перейти к краткому аксиоматическому определению вероятности.

Обозначим  $\mathcal{E}$  множество всевозможных событий, которые могут произойти в результате данного эксперимента  $U$ . В примере с колодой это множество  $\mathcal{E}$  состоит из отдельных карт колоды, в примере со стрельбой — из всех точек мишени, в которые может попасть пуля.

Вероятностью любого события  $E \in \mathcal{A}$  называется число, которое подчиняется следующим аксиомам:

1. Вероятность всегда неотрицательна  $P(E) \geq 0$ .
2. Вероятность достоверного события полагается равной единице  $P(\Omega) = 1$ .
3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Последняя аксиома распространяется не только на конечные, но и на бесконечные счетные суммы событий.

Прежде всего обращает на себя внимание, что аксиомы не указывают способов вычисления вероятностей. С методами расчета вероятностей следует ознакомиться в соответствующей литературе, например [2, 5, 8]. Здесь ограничимся несколькими замечаниями.

Вероятность является чисто теоретической характеристикой события и не зависит от числа опытов. Более того, в идеале теория должна позволять вычислять вероятность события априорно, т.е. без проведения опытов. Например, нетрудно рассчитать, что вероятность вытаскивания из хорошо перетасованной колоды карты пиковой масти равна 1/4.

При экспериментальном исследовании случайного события следует помнить, что по результатам опытов вычисляется лишь частота этого события, которая может приближенно равняться вероятности, если число опытов достаточно велико. Один известный математик воспроизвел опыт подбрасывания монеты 24000 раз. Частота выпадения герба получилась равной 0,5005.

## 2. Случайные величины

Первое знакомство с экспериментальной физикой убеждает в том, что результат измерения является случайной величиной.

Более того, несколько веков развития естествознания показали, что многие физические величины по своей природе случайны. Например, длина пробега ускоренной частицы в твердом теле, количество альфа-частиц, испускаемых в секунду радиоактивным препаратом, число молекул в единице объема газа и т.д.

Для работы со случайными величинами служит математический аппарат теории вероятностей.

Начинающему физику-экспериментатору целесообразно случайные величины подразделить на два типа: дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины характеризуются конечным или счетным набором своих возможных значений. Общедоступным примером дискретной случайной величины является количество попаданий в цель при фиксированном числе выстрелов. Если число выстрелов равно  $N$ , то количество попаданий может равняться любому целому числу в интервале от нуля до  $N$  включительно. Следовательно, эта дискретная случайная величина может принимать  $N+1$  различных значений. Значения любой дискретной случайной величины удобно обозначать  $x_i$ , где индекс  $i$  пробегает конечный или бесконечный ряд натуральных чисел.

Обозначим для краткости произвольную случайную величину буквой  $\xi$ . Явление, заключающееся в том, что дискретная случайная величина примет определенное значение  $x_i$ , является случайным событием (в том смысле, который обсуждался в предыдущем параграфе). Поэтому каждому значению  $x_i$  соответствует определенная вероятность  $p_i$ , равная вероятности события  $\xi = x_i$ , т.е.

$$p_i = P(\xi = x_i) . \quad (2)$$

Таким образом, чтобы определить некоторую дискретную случайную величину, необходимо задать полный набор ее значений  $x_i$  и соответствующие вероятности  $p_i$ . Множество чисел  $x_i$  и  $p_i$  называется распределением вероятностей дискретной случайной величины.

События, отвечающие реализациям различных значений  $x_i$ , являются очевидно, несовместными. Также ясно, что реализация произвольного значения данной дискретной случайной величины является событием достоверным. Следовательно, сумма вероятностей  $p_i$ , соответствующих всевозможным значениям дискретной случайной величины, равна единице:

$$\sum_i p_i = 1 . \quad (3)$$

Непрерывные случайные величины могут принимать любые действительные значения из заданного интервала числовой оси. Интервал может быть конечным, полубесконечным и бесконечным, но в любом варианте множество значений непрерывной случайной величины несчетно и имеет мощность континума.

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$  задается с помощью функции  $f_\xi$ , называемой плотностью вероятности.

Определенный интеграл от плотности вероятности по интервалу  $[a, b]$  равен вероятности случайного события, которое заключается в том, что значение  $x$  случайной величины  $\xi$  принадлежит этому интервалу:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_\xi(x) dx . \quad (4)$$

Последнее выражение является, во-первых, определением плотности вероятности и, во-вторых, формулой для вычисления вероятности и непрерывной случайной величины  $\xi$  по ее заданной плотности вероятности  $f_\xi(x)$ .

Из определения (4) следует, что интеграл от плотности вероятности по всему диапазону значений непрерывной случайной величины  $\xi$  равен единице. Кроме того, ясно, что функция плотности вероятности в любой точке неотрицательна  $f_\xi(x) \geq 0$ .

Так как вероятность — величина безразмерная, плотность вероятности  $f_\xi$  имеет размерность, обратную размерности данной случайной величины  $\xi$ . Например, плотность вероятности такой случайной величины, как длина свободного пробега частицы в твердом теле, имеет размерность обратной длины.

Чтобы полностью задать распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $\xi$ , необходимо указать диапазон значений этой случайной величины и функцию ее плотности вероятности  $f_\xi(x)$ .

Понятие независимости случайных событий естественно перенести на случайные величины. Случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  называются независимыми, если реализация любого значения одной случайной величины ( $\xi_1 = x$ ) не изменяет распределения вероятностей другой случайной величины  $\xi_2$ . Понятие независимости обобщается на конечное и даже счетное количество случайных величин.

Приведем несколько примеров дискретных и непрерывных случайных величин, которые часто встречаются в физике.

1. Биномиальная случайная величина  $\xi_B$ .

Принимает  $N + 1$  целых значений:  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — конечное натуральное число. Вероятности значений задаются формулой Бернулли:

$$P(\xi_B = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}. \quad (5)$$

Символом  $C_N^k$  обозначено число сочетаний из  $N$  по  $k$ . Параметр  $p$  является константой, которая имеет смысл вероятности некоторого случайного события, поэтому  $0 < p < 1$ . Подробнее о биномиальном распределении вероятностей см. в [2, 5, 8] прилагаемого списка литературы.

2. Пуассоновская случайная величина  $\xi_P$ .

Принимает счетное количество натуральных значений:  $k = 0, 1, 2, \dots$ , вероятности которых определяются следующей формулой:

$$P(\xi_P = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (6)$$

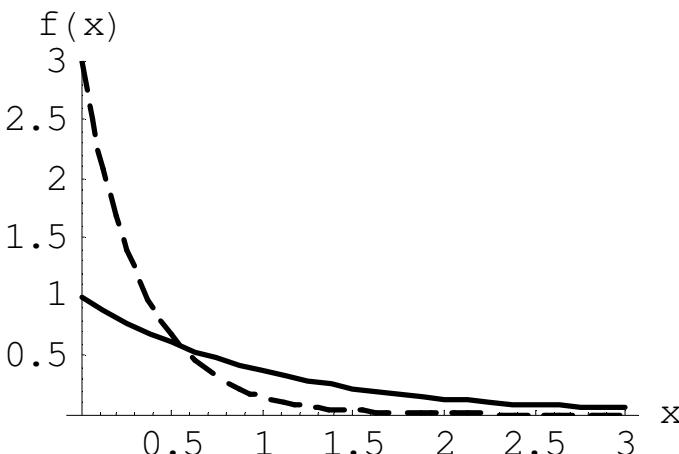
где параметр  $\lambda$  является действительной положительной константой, т.е.  $\lambda > 0$ .

3. Экспоненциальная случайная величина  $\xi_E$ .

Принимает любые неотрицательные действительные значения:  $x \geq 0$ . Плотность вероятности имеет вид:

$$f_E(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x), \quad (7)$$

где параметр  $\lambda > 0$  является действительной положительной константой.



**Рис.6.** Плотность вероятности экспоненциальной случайной величины.

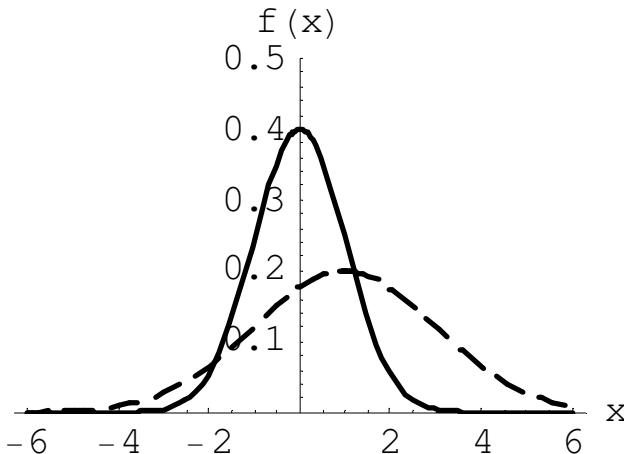
Сплошная линия:  $\lambda=1$ , штриховая линия:  $\lambda=3$ .

#### 4. Гауссова или нормальная случайная величина $\xi_G$ .

Принимает любые действительные значения в бесконечном интервале:  $-\infty < x < \infty$ . Плотность вероятности определяется знаменитой функцией Гаусса:

$$f_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

График функции представляет собой хорошо известный симметричный «колокол» с единственным максимумом. По обе стороны от максимума функция (8) монотонно и быстро убывает.



**Рис.7.** Плотность вероятности нормальной случайной величины.

Сплошная линия:  $\mu = 0, \sigma = 1$ , штриховая линия:  $\mu = 1, \sigma = 2$ .

Нормальное распределение характеризуется двумя постоянными параметрами:  $\mu$  и  $\sigma$ . Их смысл довольно нагляден. Очевидно, что параметр  $\mu$  определяет точку максимума. Легко вычислить, что полуширина «колокола» на его полувысоте равна  $\sigma\sqrt{2\ln(2)} \approx 1,177\sigma$ . Это значит, что параметр  $\sigma$  однозначно характеризует ширину «колокола» функции Гаусса (8). В точке  $x = \mu$  функция Гаусса достигает максимума, равного  $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ . Ясно, что с ростом величины  $\sigma$  ширина «колокола» увеличивается, а высота — уменьшается. При этом площадь под кривой  $f_G(x)$  остается неизменной, так как функция Гаусса  $f_G(x)$  является плотностью вероятности и интеграл от нее по всей числовой оси равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_G(x) dx = 1. \quad (9)$$

### 3. Основные характеристики случайных величин

Для задач анализа экспериментальных результатов чрезвычайно важными являются такие числовые характеристики случайных величин, как математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание  $M(\xi)$  по своей сущности представляет собой среднее значение случайной величины  $\xi$ , которое определяется ее распределением вероятностей.

Выражения для расчета математических ожиданий проще всего записать отдельно для дискретных и непрерывных случайных величин:

$$M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i , \quad (10)$$

$$M(\xi) = \int_{x \in X} x \cdot f_\xi(x) dx . \quad (11)$$

В выражении (10) для дискретных случайных величин суммируются произведения значений  $x_i$  данной случайной величины и соответствующих вероятностей  $p_i$ . Суммирование проводится по всевозможным значениям  $x_i$  данной случайной величины.

Выражение (11) для непрерывных случайных величин представляет собой определенный интеграл от произведения значения  $x$  случайной величины на ее плотность вероятности. Интегрирование проводится по всему множеству значений  $x$  данной случайной величины  $\xi$ .

Заметим, что математическое ожидание является теоретической величиной и для его вычисления не требуется проведения экспериментов.

При вычислении математических ожиданий весьма полезно использование следующих общих теорем, которые приводятся здесь без доказательств.

1. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n). \quad (12)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. Для любого числа  $C$  справедливо:

$$M(C\xi) = C \cdot M(\xi) . \quad (13)$$

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих случайных величин

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n) = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2) \cdot \dots \cdot M(\xi_n). \quad (14)$$

Если случайные величины являются зависимыми, то соотношение (14) не выполняется.

Приведем результаты вычислений математических ожиданий для вышеприведенных случайных величин:

$$M(\xi_B) = Np, \quad M(\xi_P) = \lambda, \quad M(\xi_E) = 1/\lambda, \quad M(\xi_G) = \mu. \quad (15)$$

Дисперсия  $D(\xi)$  является наиболее распространенной характеристикой разброса значений случайной величины  $\xi$  относительно ее математического ожидания  $M(\xi)$  и определяется следующим общим выражением:

$$D(\xi) = M(x - M(\xi))^2. \quad (16)$$

Таким образом, дисперсия  $D(\xi)$  случайной величины  $\xi$  представляет собой математическое ожидание квадрата отклонения значений  $x$  случайной величины  $\xi$  от ее математического ожидания  $M(\xi)$ .

Дисперсия — величина всегда положительная и, вообще говоря, размерная. Ее размерность равна квадрату размерности данной случайной величины.

Квадратный корень из дисперсии называется среднеквадратичным или стандартным отклонением значений случайной величины от собственного математического ожидания:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)}. \quad (17)$$

Понятно, что абсолютная величина отклонения  $|x - M(\xi)|$  может быть как больше, так и меньше стандартного отклонения  $\sigma_\xi$ .

Величина  $\sigma_\xi$  также является характеристикой разброса значений случайной величины. Ее удобство заключается в том, что она имеет размерность этой величины.

Пользуясь общим определением (16), можно получить формулы для расчета дисперсий дискретных и непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i, \quad (18)$$

$$D(\xi) = \int_{\xi \in X} (x - M(\xi))^2 \cdot f_\xi(x) dx . \quad (19)$$

Ясно, что для расчета дисперсии необходимо предварительно вычислить математическое ожидание данной случайной величины.

Вычисление дисперсий случайных величин значительно облегчается при использовании теорем об основных свойствах дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат. Иначе говоря, для любого числа  $C$  справедливо:

$$D(C\xi) = C^2 \cdot D(\xi) . \quad (20)$$

3. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой случайной величины без квадрата математического ожидания:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 . \quad (21)$$

4. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин. Для зависимых случайных величин это утверждение несправедливо.

Для зависимых случайных величин определяются количественные характеристики степени взаимосвязи, величина которых определяется с помощью распределений вероятностей этих случайных величин. Простейшей характеристикой связи двух случайных величин является коэффициент линейной корреляции, который определяется следующим образом:

$$\rho_{XY} = \frac{M[(X - M(X))(Y - M(Y))]}{\sqrt{D(X) D(Y)}} . \quad (22)$$

Символами  $M$  и  $D$  обозначены математическое ожидание и дисперсия случайных величин, указанных в скобках.

Легко показать, пользуясь выше приведенными теоремами, что для независимых случайных величин коэффициент линейной корреляции (22) равен нулю.

Решение практических задач часто требует использования квантилей. Q-квантилем называется такое значение случайной величины  $X_Q$ , что выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^{x_Q} f(x) \, dx = Q. \quad (23)$$

## 4. Центральная предельная теорема и эмпирические распределения

Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой важный раздел теории вероятностей, который содержит большое количество теорем для различных начальных условий. В данном разделе пособия приходится ограничиться разъяснением основной идеи ЦПТ в приближенной формулировке. Строгое и последовательное изложение ЦПТ приводится в учебниках по теории вероятностей.

Рассмотрим сумму случайных величин  $\xi_i$  с произвольными распределениями вероятностей:

$$\xi_S = \sum_{i=1}^N \xi_i , \quad (24)$$

где  $N$  — количество случайных величин в сумме.

Ясно, что величина  $\xi_S$  тоже является случайной.

Пусть количество слагаемых в сумме (23) неограниченно увеличивается ( $N \rightarrow \infty$ ). Тогда оказывается, что при весьма общих условиях случайная величина  $\xi_S$  имеет нормальное распределение вероятностей (распределение Гаусса), плотность которого выражается функцией вида (8). Это замечательное свойство сумм случайных величин и составляет смысл ЦПТ.

Различные варианты вышеупомянутых условий, при которых сумма (24) имеет нормальное распределение, обуславливают справедливость множества теорем, составляющих большой раздел теории вероятностей, посвященный ЦПТ.

В качестве простого варианта ЦПТ приведем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Случайные величины  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) независимы и имеют одинаковые распределения вероятностей с конечными математическими ожиданиями  $m$  и дисперсиями  $d$ . Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^N ((\xi_i - m) / \sqrt{d})$$

при  $N \rightarrow \infty$  приобретает нормальное распределение вероятностей с плотностью вида

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (25)$$

Заметим, что функция (25) получится из (8), если положить  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$ . Распределение, плотность которого описывается функцией (25), называется нормированным распределением Гаусса.

Практическое применение теоремы 1 ограничивается требованием идентичности распределений вероятностей слагаемых случайных величин.

Однако ЦПТ справедлива и для случайных величин с различными распределениями вероятностей. Как уже упоминалось выше, достаточные условия могут быть сформулированы в различных модификациях. Отвлекаясь от математической строгости, можно сказать, что от случайных величин  $\xi_i$  требуется «одинаковая малость». Иначе говоря, если случайные величины  $\xi_i$  независимы и среди них нет сильно превалирующих над другими, то их сумма вида (24) при неограниченном росте количества слагаемых ( $N \rightarrow \infty$ ) имеет нормальное распределение вероятностей.

В этой формулировке ЦПТ является одной из основных теорем, на которых базируется математическая статистика и методика вычисления погрешностей экспериментальных результатов.

*Замечание.* ЦПТ выполняется даже для сумм зависимых случайных величин при некоторых особенностях распределения вероятностей слагаемых. Достаточные условия излагаются в учебниках по теории вероятностей.

Убедительной иллюстрацией справедливости ЦПТ могут служить гистограммы результатов многократных измерений определенной величины  $A$  в идентичных условиях. Пусть все  $n$  измерений являются независимыми. Полагаем исключенными систематические ошибки и промахи. Тогда результаты измерений  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) будут отличаться только из-за случайных погрешностей. Разобьем числовую ось на интервалы равной ширины. Будем для каждого результата измерения определять интервал, в который попадает число  $a_i$ . После проведения  $n$  измерений подсчитаем количества попаданий  $n_k$  во все интервалы ( $k$  — номер интервала). Очевидно, что сумма всех  $n_k$  равна числу всех проведенных измерений  $n$ . При построении гистограммы на горизонтальной оси отметим вышеуказанные интервалы, а на вертикальной будем откладывать значения  $n_k / n$ , соответствующие каждому интервалу.

Примеры для нескольких различных значений величины  $n$  приведены на рис.8.

Из рис.8 видно, что при малых значениях  $n$  гистограмма имеет весьма нерегулярный характер. С ростом числа  $n$  на гистограмме наблюдается явно выраженный максимум в центре, хотя ему сопутствуют многочисленные выбросы и провалы. При дальнейшем увеличении количества измерений гистограмма все более приближается к кривой функции Гаусса. Отклонения величин  $n_k / n$  от графика функции Гаусса уменьшаются с ростом числа  $n$ .

Если (как было уже определено выше) отсутствуют систематические ошибки и промахи, то положение максимума «горба» совпадает с искомой величиной  $A$ .

Объяснение подобной трансформации гистограмм результатов измерений базируется на ЦПТ. Как уже было рассмотрено в главе 1, результат любого измерения  $a_i$  может быть представлен в виде

$$a_i = A + \Delta_i,$$

где  $\Delta_i$  — погрешность, которая обусловлена множеством случайных факторов. Можно считать (при сделанных выше допущениях, т.е. во многих практических ситуациях), что величина  $\Delta_i$ , вообще говоря, является суммой огромного количества независимых случайных величин.

Это значит, что для случайной величины  $\Delta_i$  (а следовательно, и для случайной величины  $a_i$ ) приближенно выполняются условия ЦПТ.

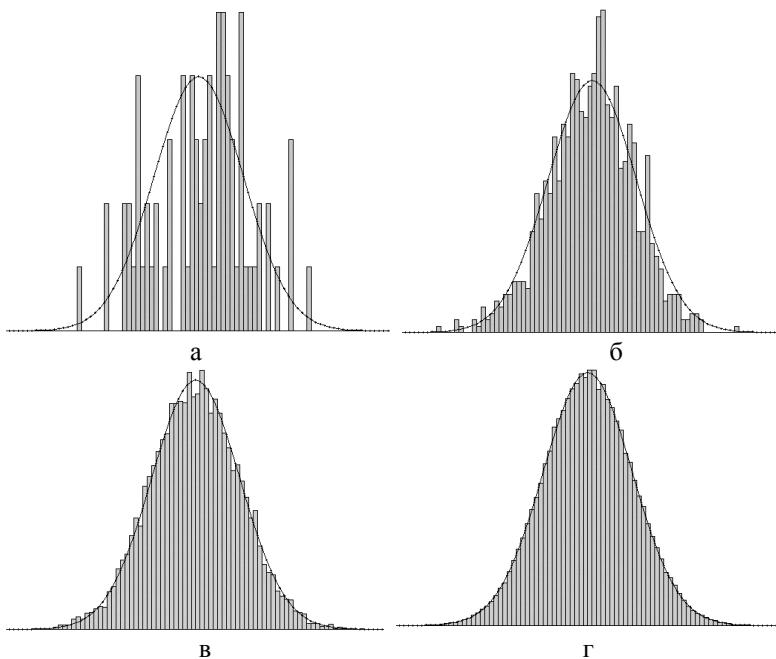


Рис. 8. Гистограммы эмпирических распределений для различного количества измерений в идентичных условиях:

а)  $n = 100$ , б)  $n = 1000$ , в)  $n = 10000$ , г)  $n = 100000$ .

По вертикали отложены значения  $n_k/n$ , т.е. относительное количество попаданий в соответствующий интервал

Полученные гистограммы являются графическим представлением эмпирического распределения вероятностей случайной величины, в данном случае — результата измерения.

## 5. Основные характеристики эмпирических распределений

Для получения распределения вероятностей некоторой случайной величины опытным путем необходимо провести десятки и сотни тысяч измерений в идентичных условиях. В частности, это убедительно доказывают гистограммы на рис. 6. Подобные экспериментальные исследования крайне трудоемки, а зачастую невозможны. Оказывается, что для решения большинства практических задач не требуется знать распределение вероятностей погрешностей измерения.

С одной стороны, распределение вероятностей результатов измерений содержит полную информацию о случайных погрешностях. В частности, при отсутствии систематических погрешностей и промахов математическое ожидание случайной величины  $a_i$  равно искомой измеряемой величине  $A$ . С другой стороны, физику-экспериментатору неизвестно распределение вероятностей случайных погрешностей. Он имеет в своем распоряжении лишь конечный набор значений случайной величины  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Поэтому экспериментатор может отыскать только приближенное значение математического ожидания случайной величины  $a_i$ , т.е. приближенное значение искомой величины  $A$ . В главе 2 уже утверждалось, что, согласно математической статистике, наилучшее приближение дается **средним статистическим**  $\bar{a}$ .

Среднее статистическое является важнейшей характеристикой эмпирического распределения вероятностей.

Формула вычисления среднего статистического (2.1) внешне похожа на математическое ожидание дискретной случайной величины (10). Однако между величинами (2.1) и (10) имеется принципиальное различие. Математическое ожидание представляет собой константу, а среднее статистическое, определенное как линейная функция случайных величин  $a_i$ , является тоже случайной величиной.

Гистограммы эмпирического распределения (рис.6) иллюстрируют тот факт, что значения случайной величины всегда имеют разброс вокруг ее математического ожидания. Характеристикой разброса является дисперсия, которая, как и математическое ожидание, тоже неизвестна экспериментатору. Задачей экспериментатора является вычисление некоторой величины, которая пусть приближенно равна дисперсии, но зато может рассчитываться с помощью только результатов измерений.

Такой величиной является вторая основная характеристика эмпирического распределения вероятностей, которая называется **эмпирической дисперсией** и определяется следующей формулой:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 . \quad (26)$$

Эмпирическая дисперсия как функция случайных величин  $a_i$  и  $\bar{a}$  является тоже случайной величиной. В математической статистике доказывается, что математическое ожидание эмпирической дисперсии равняется дисперсии случайной величины  $a_i$

$$M(S^2) = D(a_i) . \quad (27)$$

Поэтому вычисление значения эмпирической дисперсии дает приближенную величину истинной дисперсии отдельного результата измерения.

Квадратный корень из эмпирической дисперсии (26) называется эмпирическим стандартным отклонением. Эта величина является наилучшим приближением стандартного отклонения случайной величины  $a_i$ , которое можно вычислить, пользуясь только результатами проведенных измерений. Величина  $S = \sqrt{S^2}$  характеризует полуширину гистограммы эмпирического распределения вероятностей.

Две характеристики эмпирического распределения: среднее статистическое  $\bar{a}$  и эмпирическое стандартное отклонение  $S$ , значения которых всегда могут быть вычислены на основе проведенной серии измерений, позволяют решать разные задачи расчета погрешностей.

Например, вернемся к задаче измерения неизвестной постоянной величины  $A$  (см.главу 2). Выше уже упоминалось, что наилучшим приближением искомой величины  $A$  является среднее статистическое  $\bar{a}$ . Кстати, рис. 6а наглядно демонстрирует, что однократное измерение  $a_1$  может дать значение далекое от центра гистограммы, т.е. от измеряемого числа  $A$ . Средняя погрешность приближения  $A \approx \bar{a}$  равна среднеквадратичному отклонению среднего статистического.

Среднее статистическое определяется суммой  $n$  независимых случайных величин  $a_i$ , согласно (2.1). Вычислим дисперсию случайной величины  $\bar{a}$  с помощью теорем о свойствах дисперсии 2 и 4 (см. раздел 3

данного приложения). Мы легко получим, что эта дисперсия в  $n$  раз меньше дисперсии случайной величины  $a_i$ . Именно поэтому многократные измерения с последующим усреднением дают меньшую погрешность, по сравнению с однократным измерением.

Переходя к характеристикам эмпирического распределения, получим, что эмпирическое стандартное отклонение среднего статистического  $S_0$  в  $\sqrt{n}$  раз меньше эмпирического стандартного отклонения  $S$ . Таким образом мы пришли к выражению (2.4), которое в § 2.2 было дано без доказательства. Связь  $S_0 = S / \sqrt{n}$  означает, что гистограмма эмпирического распределения случайной величины  $\bar{a}$  является в  $\sqrt{n}$  раз более узкой по сравнению с гистограммой эмпирического распределения случайной величины  $a_i$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ

При современном распространении вычислительной техники молодежь начинает выполнять вычисления на микрокалькуляторах и персональных компьютерах, иногда начиная еще с дошкольного возраста. При этом большое количество цифр в полученном результате часто воспринимается как достигнутая высокая точность. Понятие значащих цифр и работа с ними рассматриваются в рамках школьной программы, но автор считал полезным напомнить читателям несколько основных положений по данному вопросу.

Пусть среди данных решаемой задачи имеется число, записанное в десятичной форме. По определению **значащими цифрами** числа называются все его цифры, начиная с первой ненулевой слева. В следующем примере значащие цифры приведенных чисел подчеркнуты.

$$\underline{25} ; \; 0,\underline{0187} ; \; \underline{41},\underline{300} ; \; 0,\underline{0004}\underline{60} .$$

В физических исследованиях используются только **верные** значения цифры. Это значит, погрешность числа не превышает единицы последнего (младшего) разряда среди значащих цифр. То есть в приведенном примере погрешность третьего числа меньше одной тысячной, а погрешность четвертого числа – не превышает одну миллионную.

То, что нули, стоящие в числе слева от значащих цифр, не считаются значащими, проще всего пояснить на размерных величинах. Пусть число 25 в выше приведенном примере представляет собой диаметр цилиндра, выраженный в миллиметрах. Перевод диаметра в метры не изменит абсолютной величины погрешности  $\Delta d < 1$  мм, хотя слева от значащих цифр появятся нули:

$$\underline{25} \text{ мм} = 0,\underline{025} \text{ м}$$

Если же величину диаметра перевести в микрометры (микрометры)

$$\underline{25} \text{ мм} = \underline{25000} \text{ мкм}$$

Здесь и далее подчеркиваются только верные значащие цифры.

то возникшие нули справа *не будут верными значащими цифрами*, так как по условию погрешность может приближаться к тысяче микрон. Три нуля справа в последнем примере не являются достоверными цифрами, вместо них могут стоять любые другие цифры.

В научной литературе иногда численные значения величин записываются с указанием в скобках погрешности младшего (или младших) разрядов. Например, запись 0,743(2) означает, что данный результат получен с погрешностью 0,002. Это значит, что в приведенном примере только 2 цифры являются верными значащими 0,743(2). Методы работы с величинами, содержащими погрешности, изложены в основной части данного пособия. В этом приложении рассматриваются действия с числами, погрешность которых не превышает единицы младшего разряда среди значащих цифр.

Важным практическим вопросом является оценка количества верных значащих цифр в результате действий, проведенных с исходными данными, каждое из которых имеет заданное число верных значащих цифр.

Согласно определению, число верных значащих цифр позволяет получить абсолютную погрешность данной величины (точнее оценку сверху этой абсолютной погрешности). Методика расчета погрешностей косвенных измерений (см.гл.3) убедительно демонстрирует, что относительная погрешность результата всегда больше относительных погрешностей исходных данных. Следовательно, количество верных значащих цифр в результате не может стать больше, чем максимальное количество значащих цифр в исходных данных. Напротив, расчеты погрешностей показывают, что число верных значащих цифр в результате может стать равным минимальному числу значащих цифр в исходных данных.

В качестве примера рассмотрим сложение следующих двух чисел 1,36 и 0,354. Имеется ввиду, что оба слагаемых заданы приближенными значениями, для первого слагаемого неизвестно значение тысячных долей, а для второго – десятитысячных. Формальное суммирование дает 1,714. Результат содержит 4 цифры, но последняя из них не является надежной. Так как в первом слагаемом отсутствует информация о тысячных долях, то в результате нет оснований записывать определенную цифру в разряде тысячных. Это значит, что результат суммирования содержит 3 верные значащие цифры и должен быть записан в виде: 1,36 + 0,354 ≈ 1,71.

В другом примере рассмотрим умножение чисел 2,8 и 12,3. Первый сомножитель задан с двумя верными значащими цифрами, второй – с тремя. Перемножение дает результат 34,44. Однако, непосредственно

можно убедиться, что изменение третей значащей цифры (младшего разряда), например, во втором сомножителе даже на единицу приводит к изменению двух младших разрядов в результате. Следовательно, произведение содержит только 2 верные значащие цифры, в данном примере: десятки и единицы. В физических исследованиях данное действие должно записываться в виде:  $2,8 \cdot 12,3 \approx 34$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЫОДЕНТА

Из данного пособия следует, что в различных задачах обработки результатов измерений используется коэффициент Стюдента. Для уяснения смысла этого коэффициента следует ознакомиться с распределением Стюдента. Случайная величина Стюдента является непрерывной и может быть определена следующим образом:

$$T_v = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \xi_i^2}}, \quad (28)$$

где  $\xi$  и  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v$ ) – независимые случайные величины, каждая из них имеет гауссово нормированное распределение вероятностей, плотность которых выражается формулой (25). Видно, что случайная величина  $T_v$  имеет единственный целочисленный параметр  $V$ , который называется числом степеней свободы. Смысл этого названия разъясняется в подробном курсе математической статистики.

В курсе теории вероятности доказывается, что функция плотности вероятности случайной величины Стюдента выражается через гамма-функцию  $\Gamma(x)$ :

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad (29)$$

Можно получить, что математическое ожидание случайной величины Стюдента равно нулю:  $M(T_v) = 0$ , а дисперсия равна отношению:

$$D(T_v) = v / (v - 2). \quad (30)$$

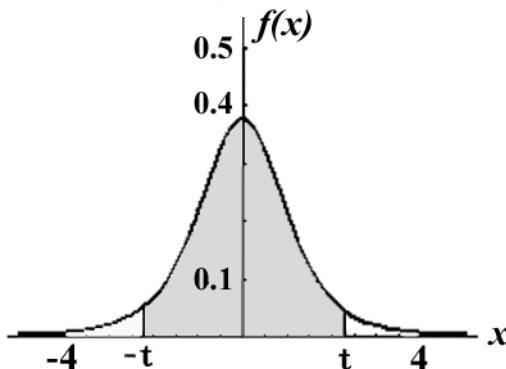
График плотности вероятности случайной величины (28) имеет максимум в точке  $x=0$ , представляет собой уномодальный «горб», который в соответствии с (30) расширяется при уменьшении параметра  $V$ .

При возрастании числа степеней свободы  $V$  плотность вероятности случайной величины Стьюдента быстро стремится к плотности вероятности гауссовой нормированной случайной величины (25). При этом дисперсия (30) приближается к единице.

Коэффициент Стьюдента  $t$  для заданной доверительной вероятности  $\alpha$  и числа степеней свободы  $V$  вычисляется с помощью определенного интеграла:

$$\int_0^t f_T(x) \, dx = \alpha/2. \quad (30)$$

Иначе говоря,  $\alpha$  равна вероятности того, что случайная величина, подчиняющаяся распределению Стьюдента, по модулю не превысит значения коэффициента  $t$  (см.рис.9). Таким образом, коэффициент Стьюдента  $t$  при уровне доверия  $\alpha$  равен квантилю для значения вероятности  $0,5 + \alpha/2$ .



**Рис.9.** Коэффициент Стьюдента  $t = 2,132$  для доверительной вероятности  $\alpha=0,9$  и числу степеней свободы  $V = 4$ .

Серым цветом залита площадь, соответствующая вероятности  $\alpha=0,9$ .

Ясно, что коэффициент Стьюдента должен возрастать с увеличением доверительной вероятности и уменьшением числа степеней свободы. Ниже прилагается таблица коэффициентов Стьюдента для трех значений доверительных вероятностей  $\alpha$  и 34 различных чисел степеней свободы  $v$ .

## КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЪЮДЕНТА

Число степеней свободы	Доверительная вероятность		
	0.9	0.95	0.99
1	6.314	12.706	63.619
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
11	1.796	2.201	3.106
12	1.782	2.179	3.055
13	1.771	2.160	3.012
14	1.761	2.145	2.977
15	1.753	2.131	2.947
16	1.746	2.120	2.921
17	1.740	2.110	2.898
18	1.734	2.103	2.878
19	1.729	2.093	2.861
20	1.725	2.086	2.845
21	1.721	2.080	2.831
22	1.717	2.074	2.819
23	1.714	2.069	2.807
24	1.711	2.064	2.797
25	1.708	2.060	2.787
26	1.706	2.056	2.779
27	1.703	2.052	2.771
28	1.701	2.048	2.763
29	1.699	2.045	2.756
30	1.697	2.042	2.750
40	1.684	2.021	2.704
60	1.671	2.000	2.660
120	1.658	1.980	2.617
$\infty$	1.645	1.960	2.576

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

В первом столбце таблицы указаны целые и десятые доли значений аргумента.

В верхней строке указаны сотые доли значений аргумента.

В последнем разделе таблицы приведены значения функции Лапласа для больших аргументов.

Для аргумента 3 значения в верхней строке обозначают десятые доли аргумента.

Нуль целых и запятая — разделитель целой и дробной части — у большинства значений функции опущены.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4732	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47981	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48746	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49135	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3	49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,4999997									

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для инженерных приложений. М.: Наука, 1968.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970.
4. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985.
5. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974.
6. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей. М.: Наука, 1983.
7. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1995.
8. Сквайрс Дж. Практическая физика. М.: Мир, 1971.
9. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	2
<b>ГЛАВА 1. Измерение и погрешность результата .....</b>	5
<b>ГЛАВА 2. Прямые измерения .....</b>	11
§ 2.1. Систематические погрешности или поправки .....	11
§ 2.2. Случайные погрешности прямых измерений .....	12
§ 2.3. Учет приборной погрешности .....	17
§ 2.4. Абсолютная и относительная погрешности .....	20
§ 2.5. Анализ промахов .....	22
<b>ГЛАВА 3. Косвенные измерения .....</b>	26
§ 3.1. Расчет абсолютной погрешности косвенных измерений .....	27
§ 3.2. Использование относительных погрешностей .....	29
<b>ГЛАВА 4. Неравноточные измерения .....</b>	37
<b>ГЛАВА 5. Метод наименьших квадратов .....</b>	41
§ 5.1. Принцип метода .....	41
§ 5.2. Линейная аппроксимация .....	45
§ 5.3. Доверительные интервалы для линейной аппроксимации .....	49
§ 5.4. Линейная аппроксимация при повторных измерениях .....	55
§ 5.5. Доверительные интервалы в случае повторных измерений .....	59
§ 5.6. Приведение зависимостей к линейному виду .....	64
§ 5.7. Примеры использования метода наименьших квадратов .....	69
<b>ГЛАВА 6. Линейная корреляция .....</b>	81
§ 6.1. Функциональные и стохастические зависимости .....	81
§ 6.2. Расчет коэффициента корреляции .....	83
§ 6.3. Доверительный интервал для коэффициента корреляции .....	88
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Некоторые сведения из теории вероятностей .....</b>	94
1. Вероятность случайного события .....	94
2. Случайные величины .....	97
3. Основные характеристики случайных величин .....	103
4. Центральная предельная теорема и эмпирические распределения ...	106
5. Основные характеристики эмпирических распределений .....	110
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Значащие числа .....</b>	113
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Распределение Стьюдента .....</b>	116
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Значения функции Лапласа .....</b>	120
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	121