

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Передовая инженерная школа «Космическая связь, навигация и радиолокация»
Научно-исследовательский физико-технический институт

М.А. Фаддеев, П.В. Андреев

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

**Рекомендации
для начинающих физиков-экспериментаторов**

*Учебное пособие для школьников, и руководителей
школьных научно-исследовательских работ и инженерных проектов*

Под ред. проф. В.Н. Чувильдеева

Нижний Новгород
2025

УДК 001.891+37.033+372.853+006.915.1+53.05

ББК 22.3с+74.262.23

Ф15

Фаддеев М.А., Андреев П.В.

Ф15 **Измерительные приборы и методика измерений.** Под редакцией проф. В.Н. Чувильдеева. Учебное пособие. Н. Новгород: Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского. 2025. 133 с.

ISBN 978-5-91326-976-8

В учебном пособии подробно изложены методы экспериментальной физики, необходимые школьнику, желающему проводить научные исследования и осваивать современные инженерные технологии. Пособие содержит описание основных физических величин, физических принципов работы различных измерительных приборов, имеющихся в школьных физических кабинетах или доступных в домашних условиях, предложены методы изучения некоторых физических явлений, а также приведено подробное описание математических методов обработки результатов экспериментов и показаны корректные формы представления полученных результатов.

В приложениях даны сведения, полезные для учителей физики, руководящих школьными исследовательскими проектами.

Учебное пособие предназначено для школьников, выполняющих исследовательские работы по экспериментальной физике и их научных руководителей, а также учителей физики средних учебных заведений и всех, стремящихся в какой-либо роли принимать участие в научной и инженерной работе школьников, задавая высокую планку фундаментального физического и инженерного образования будущих профессионалов.

ISBN 978-5-91326-976-8

УДК 001.891+37.033+372.853+006.915.1+53.05

ББК 22.3с+74.262.23

© Фаддеев М.А., Андреев П.В., 2025

«Измерено, взвешено, подсчитано»

Надпись на стене дворца Валтасара



ВВЕДЕНИЕ

Когда человечество обрело возможность отправить за пределы Солнечной системы космический аппарат, потенциально способный к встрече с разумными существами инопланетных цивилизаций, возник вопрос, как сделать наше послание понятным. Создателям золотой пластинки космического аппарата «Вояджер» удалось закодировать две физических величины – единицу времени и единицу длины, которые являются ключом к расшифровке всей остальной информации. Таким образом, в основе языка, на котором мы могли бы общаться с внеземными цивилизациями, лежат фундаментальные физические величины. Этот пример показывает значимость правильного проведения физических измерений.

Измерение физических величин лежит в основе науки метрологии, без которой невозможны современные технологии промышленного производства. Без измерений времени, расстояния или массы невозможно функционирование человеческого сообщества. Большинство людей на нашей планете пользуются общей системой единиц измерения, и существует межгосударственный контроль за правильным использованием этой системы.

Начинающим физикам очень важно как можно раньше осваивать методы физических измерений. Полученный опыт позволит приобщиться к культуре

экспериментальной работы и будет полезен в постижении физических и инженерных наук.

Основной целью данного учебного пособия является знакомство с основными физическими величинами и способами их измерения. Этих знаний вполне достаточно для выполнения множества физических экспериментов школьного уровня. Для этого рассмотрены приборы, работающие на различных физических принципах. Акцент сделан на современные приборы, доступные к покупке для школьных учебных и даже домашних лабораторий. Даны короткие комментарии в форме аннотаций по измерениям так называемого переднего края науки с целью формирования научного кругозора учащихся.

Для измерений некоторых производных величин предложены отработанные авторами экспериментальные схемы, которые можно воспроизвести или использовать как пример при реализации собственных исследовательских идей.

Учебное пособие содержит подробное изложение математических методов обработки результатов экспериментов, прежде всего, корректный расчет погрешностей.

Последняя часть настоящего пособия посвящена наглядному и адекватному представлению результатов выполненной научно-исследовательской работы.

Учебное пособие снабжено несколькими приложениями, включенными по настоятельным просьбам школьных учителей, руководящих исследовательскими работами школьников.

Данное учебное пособие предназначено, в первую очередь, для школьников, проходящих довузовскую подготовку к обучению в Лаборатории инженерной и физической подготовки студентов и абитуриентов Передовой инженерной школы ННГУ. Кроме того, это учебное пособие полезно для всех учащихся, выполняющих учебно-исследовательские работы и школьные проекты по экспериментальной физике. Студенты младших курсов физических и инженерных направлений подготовки могут ознакомиться с пособием для восполнения пробелов и расширения кругозора, для более уверенного освоения практических дисциплин. Авторы надеются, что предлагаемые рекомендации будут использованы учителями физики средних учебных заведений.

В заключение заметим, что предлагаемое пособие дополняет ранее опубликованное нами руководство по НИР школьников¹.

Авторы благодарят Татьяну Александровну Рычёву за подготовку данной работы к изданию.

¹ Андреев П.В., Фаддеев М.А. Как написать и защитить школьную научно-исследовательскую работу по физике. Нижний Новгород, ННГУ. 2021. 72 с.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Основные и производные физические величины

Измерение – получение экспериментальным путем численного значения исследуемой физической величины.

Физические величины по определению подразделяются на основные и производные.

Единица основной физической величины определяется независимо от прочих физических величин. Единицы измерения основных физических величин согласно Международной системы единиц СИ (SI) приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Основные физические величины системы СИ
и единицы их измерения**

Физическая величина	Единица измерения
длина	метр
время	секунда
масса	килограмм
сила электрического тока	ампер
термодинамическая (абсолютная) температура	kelvin
сила света	свеча (кандела)

Производные физические величины связаны с основными (и другими производными) определёнными формулами. Примерами производных величин являются: скорость, ускорение, площадь, объем, плотность вещества, сила, энергия, модуль Юнга, электрическое сопротивление, теплоёмкость, показатель преломления и многие другие.

Единицы производных величин выражаются через единицы основных (или других производных) величин соответствующими формулами. Например, скорость определяется через длину пройденного расстояния и интервал времени, за который это расстояние пройдено. Следовательно, единица скорости – метр, деленный на секунду. Согласно определению ускорения его единица – метр, деленный на секунду в квадрате.

Единица силы (ニュ顿) определяется через 2-й закон Ньютона: ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорцио-

нально его массе. Таким образом, ньютон равен килограмму, умноженному на метр и деленному на секунду в квадрате. В кратких обозначениях:

$$H = \text{м}\cdot\text{кг} / \text{с}^2$$

Единицей работы и энергии является джоуль (Дж). По определению работа – это сила, умноженная на перемещение тела, тогда:

$$Дж = \text{м}^2\cdot\text{кг} / \text{с}^2$$

Такая же размерность получается из формулы кинетической энергии.

Некоторые производные физические величины не имеют размерности. Они представляют собой отношения размерных величин. Например, безразмерной величиной является показатель преломления вещества, который определяется как отношение скоростей света в вакууме и данном веществе. Также коэффициент трения является безразмерной величиной, так как представляет собой отношение модуля силы трения к модулю силы нормальной реакции опоры.

В табл. 1.2 приведены использованные в настоящем пособии производные величины и их единицы измерения.

Таблица 1.2

**Некоторые производные физические величины системы СИ
и единицы их измерения**

Физическая величина	Единица измерения	Обозначение
объем	кубический метр	м^3
сила	ニュтон	$[H] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right]$
скорость	метр в секунду	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$
ускорение	метр за секунду в квадрате	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
коэффициент трения	безразмерный	–
коэффициент преломления	безразмерный	–
плотность вещества	килограмм в кубическом метре	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

§ 2. Прямые и косвенные измерения

Измерения основных и производных физических величин могут проводиться как прямыми, так и косвенными методами.

Прямое измерение физической величины представляет собой сравнение с **эталоном**. Эталоном является стандартный объект той же размерности, что и измеряемая величина. В акте прямого измерения устанавливается, грубо говоря, сколько раз эталон укладывается в измеряемой величине.

Носителем эталонов является измерительный прибор. Это, например, линейка с определенными делениями, весы с набором разновесов, термометр со шкалой и т.п.

Для увеличения точности результата измерения используемый эталон необходимо уменьшать. Требуемая точность задается условиями конкретной задачи. Простейший пример: для измерения длины могут использоваться мерные ленты с сантиметровыми или миллиметровыми делениями.

Прямые измерения могут проводиться электрическими и электронными приборами, сложные физические процессы в которых могут быть неизвестны школьникам. В таких случаях эталонами являются деления стрелочной шкалы или десятичные разряды цифрового табло. Измерение заключается в непосредственном подключении прибора к исследуемому объекту и считывание результата со шкалы или табло.

В косвенных измерениях результат получается вычислениями на основе прямых измерений других физических величин, с которыми связана исследуемая величина.

Строго говоря, косвенные измерения – это измерения прямыми методами с последующими вычислениями. Тем не менее, термин «косвенное измерение» закрепился в экспериментальной физике, поэтому стал общеупотребительным.

Вычисления в косвенных измерениях проводятся по формулам, которые выражают связь искомой величины с другими величинами, измеренными прямыми методами.

Например, величина плотности твердого тела может быть получена делением массы (измеренной прямым методом) на объем тела (производная величина, которая может быть измерена тоже прямым методом).

Упомянутые прямые методы описаны в следующих параграфах.

В современной физике более широко используются методы косвенных измерений.

§ 3. Точность и воспроизводимость измерений

При прямых измерениях величина, которую мы получаем, кратна цене наименьшего деления измерительного прибора. Однако это совершенно не означает, что **истинное** значение измеряемой величины также кратно цене наименьшего деления прибора. Например, рост человека, как правило, измеряется в сантиметрах, но это не означает, что человек в определенные моменты времени вырастает сразу на целый сантиметр, а потом длительное время не растёт. Мы понимаем, что рост меняется плавно и незаметно для окружающих и самого себя. И истинное значение измеряемого роста в сантиметрах является дробной величиной в сантиметрах. При этом истинное значение роста мы не знаем и не можем определить никакими методами. Это парадокс экспериментальной физики – мы обречены никогда не узнать истинное значение измеряемой величины.

Различие измеренного и истинного значения определяется **точностью измерения**. Для количественной характеристики точности измерения используются абсолютные и относительные погрешности.

Следовательно, одной из важнейших характеристик любого измерительного прибора или метода измерения косвенной величины является его **точность**. Точность характеризует отличие измеренного значения от истинного и выражается как величина обратная относительной погрешности. Подробнее о погрешностях написано в части 4.

В ситуации, когда один и тот же объект измеряется одним и тем же способом в разных условиях, например, разными линейками, то результаты могут немного различаться.

Воспроизводимость измерений определяется как различие между результатами при измерении одним и тем же методом (в общем случае – в разных лабораториях). Например, если вы измерили размеры объекта линейкой в школе, а затем принесли объект домой и измерили другой линейкой дома, результаты могут не совпасть, однако они не будут сильно отличаться. В случае значительных различий результаты измерений являются недостоверными и необходимо искать ошибки в методике измерения.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОСНОВНЫХ ВЕЛИЧИН

В этой части мы предлагаем познакомиться с методами измерения четырех основных величин: линейных размеров, времени, массы и температуры. Измерение силы электрического тока будет рассмотрено в следующей части вместе с другими электрическими измерениями, так как методы и приборы для этих измерений работают на схожих физических принципах. В школьных исследовательских работах редко проводятся количественные измерения силы света, поэтому методы ее измерения не вошли в наше руководство. В данной части описано измерение углов так как в системе СИ плоский угол отнесен к основным (дополнительным) величинам.

§ 4. Измерения линейных размеров

Измерения размеров многих тел проводятся прямыми методами. Используются различные измерительные приборы, в зависимости от размера измеряемого объекта и требуемой точности результата.

Методы определения и расчёта погрешностей экспериментов излагаются в следующей главе 4, §§ 18–22. Здесь следует указать, что за величину приборной погрешности целесообразно брать цену наименьшего деления (ЦНД) данного измерительного прибора. Если прибор имеет цифровую шкалу, то величиной приборной погрешности является единица младшего разряда.

При работе с относительно небольшими предметами измерительным прибором часто служит линейка с миллиметровыми делениями. Таким образом, эталоном является интервал длиной 1 мм. Количество делений (в данном примере миллиметров), которые укладываются вдоль измеряемого тела, определяет его длину (см. рис. 4.1).

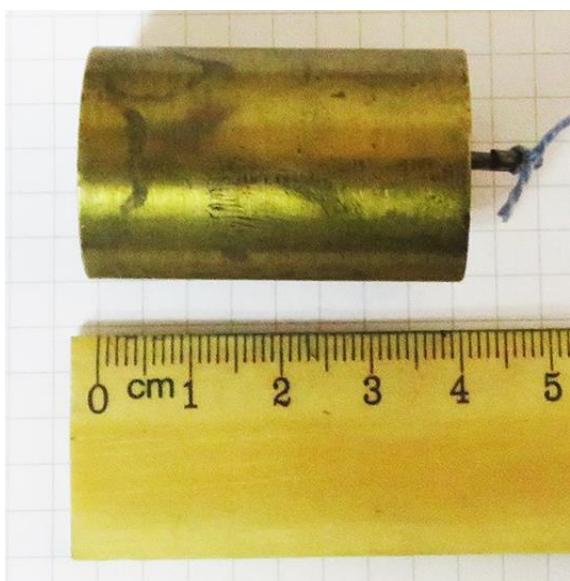


Рис. 4.1. Измерение высоты латунного цилиндра линейкой с миллиметровыми делениями

Более совершенным прибором измерения длин является штангенциркуль (см. рис. 4.2). Наличие дополнительной шкалы – нониуса – позволяет увеличить точность до 0,05 мм.

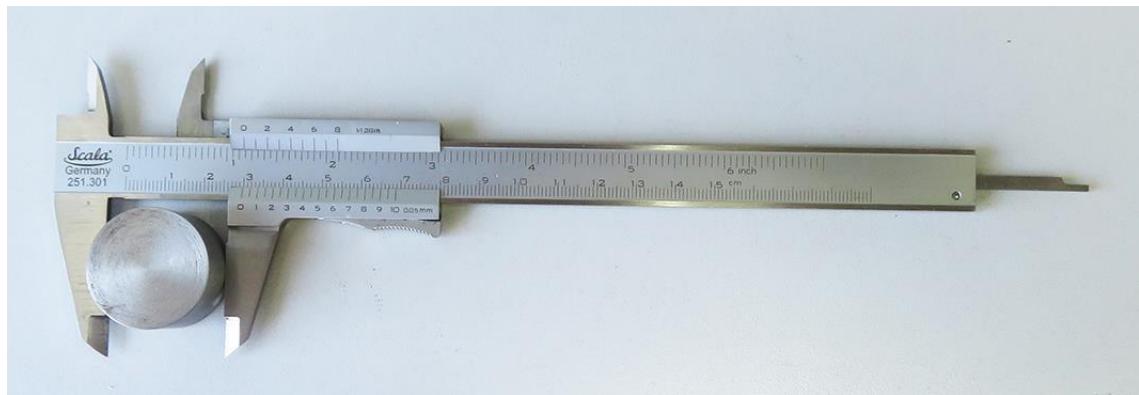


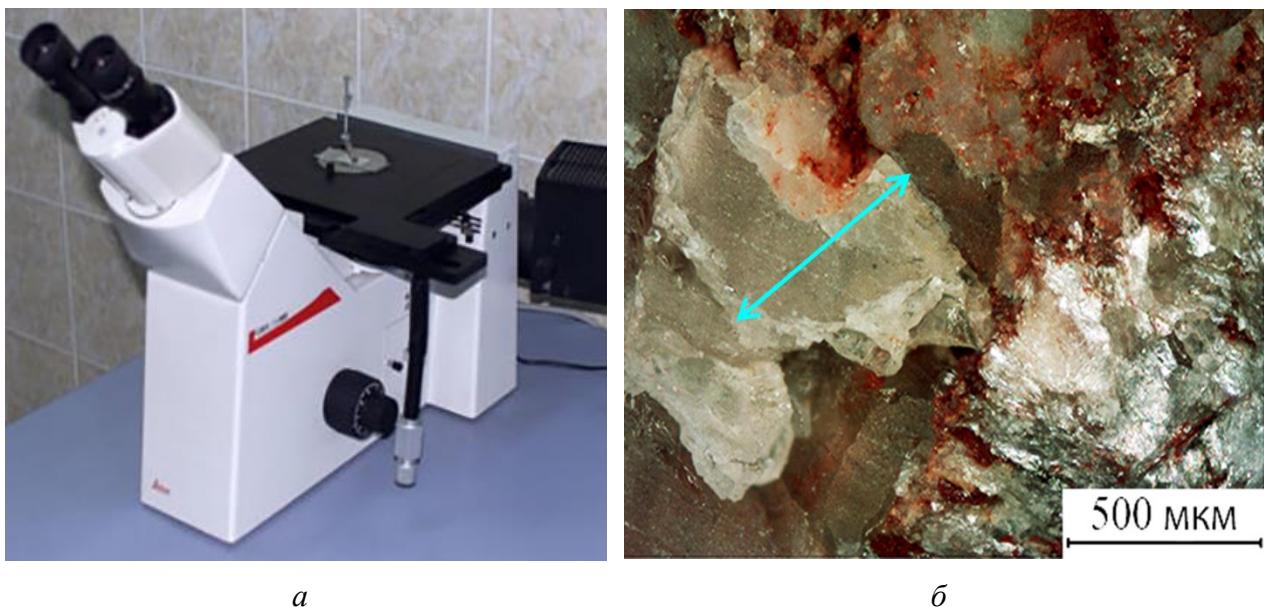
Рис. 4.2. Измерение диаметра стального цилиндра штангенциркулем

Размеры порядка миллиметра (но, как правило, не больше 25 мм) и менее целесообразно измерять микрометром (рис. 4.3). Этот измерительный прибор имеет, кроме линейной, дополнительно круговую шкалу нониуса, что повышает точность измерений до сотой доли миллиметра.



Рис. 4.3. Измерение толщины проволоки микрометром

Для измерения размеров ещё более мелких объектов используются специальные приборы. Примером является оптический микроскоп, в поле зрения которого располагается масштабный маркер (см. рис. 4.4).



а

б

Рис. 4.4. Измерения объектов небольших размеров.

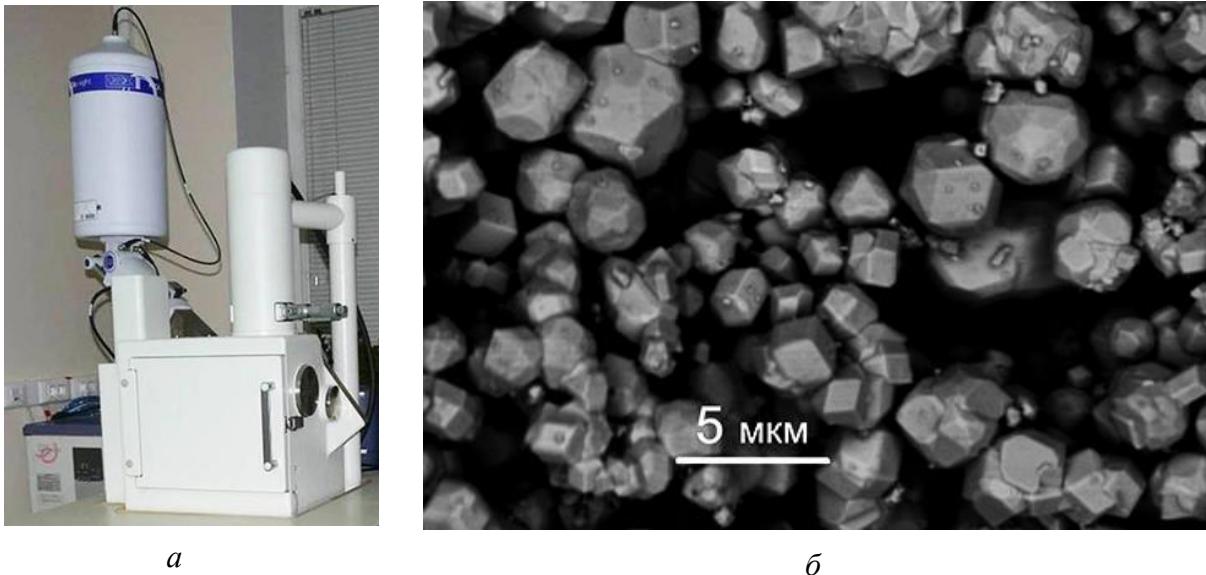
- а) оптический микроскоп Leica DM IRM (внешний вид):
- б) фотография поверхности поликристалла (в правом нижнем углу масштабный маркер, позволяющий измерить размеры микрокристаллов)

Размеры наблюдаемых в микроскоп объектов определяются с помощью пропорций относительно отрезка масштабного маркера. По фотографии измеряется размер исследуемого объекта L_1 , например, линейкой с миллиметровыми делениями. Той же линейкой измеряется длина масштабного маркера L_0 на той же фотографии. Искомый размер вычисляется умножением отношения L_1/L_0 на длину маркера (в примере на рис. 4.4.б: на 500 мкм). Легко проверить, что размер, изображенный на рис. 4.4.б двойной стрелкой, равен 560 мкм.

Современные микроскопы снабжаются специальной программой, которая автоматически выполняет расчет расстояния между отмеченными точками по вышеописанному методу.

Если размер объекта становится меньше 1 мкм, то оптическая микроскопия уже не позволяет строить изображения, так как достигается так называемый дифракционный предел. Используются микроскопы, работающие на других физических принципах – сканирующие зондовые и электронные микроскопы.

Изображения в электронных микроскопах также снабжаются масштабными маркерами и соответствующим программным обеспечением, что позволяет вычислять размеры исследуемых объектов с приборной погрешностью до 1 мкм (см. пример на рис. 4.5).



a

б

Рис. 4.5. Измерения малых размеров.

- а) растровый электронный микроскоп JOEL JSM-6490 (внешний вид):
- б) изображение вольфрамового порошка (внизу – масштабный маркер)

Ещё более малыми длинами являются расстояния между атомами в твердых телах. Они измеряются с помощью просвечивающего электронного микроскопа или атомно-силового микроскопа (см. рис. 4.6).



a

б

Рис. 4.6. Измерения атомных размеров.

- а) атомно-силовой микроскоп NT-MDT NEXT II (внешний вид):
- б) изображение соединения MoTe₂
(рельеф соответствует сетке атомов кристаллической структуры).
Изображения получены на интернет-ресурсе <https://www.ntmdt-si.ru>

При измерениях на атомно-силовом микроскопе не происходит визуального сравнения размеров изучаемого объекта с эталоном. Отображаемые на экране шкалы получаются вследствие градуировки микроскопа с помощью специальных эталонных образцов.

Перейдём к методам измерения размеров более крупных объектов. Очевидно, что для этого требуются другие приборы.

Чтобы измерять тела длиной несколько дециметров или несколько метров, удобно использовать рулетку. Это лента длиной в несколько метров с миллиметровыми делениями, которая легко сворачивается в бухту и размещается в компактной коробочке (см. рис. 4.7).



Рис. 4.7. Рулетка с лентой, на которую нанесены миллиметровые деления

Для измерения размеров ещё более крупных объектов и расстояний в десятки метров часто используются лазерные дальномеры. У таких приборов результат измерения отображается на цифровом табло (см. рис. 4.8).



Рис. 4.8. Лазерный дальномер

Механизм действия лазерного дальномера и многих других измерительных приборов основан на использовании сложных физических явлений, которые не изучаются в курсе средней школы. Однако, такие приборы школьники могут уверенно использовать, предварительно проведя их проверку на уже заранее известных размерах (эталонах). Цифровое табло лазерного дальномера (рис. 4.7) имеет младший разряд для количества миллиметров. Следовательно, за приборную погрешность дальномера можно брать 1 мм. Иногда целесообразно завысить приборную погрешность. Например, если по-

верхность стены, к которой приложен дальномер, неровная, можно смело считать приборную погрешность равной 1 см.

Измерения ещё больших размеров, например, расстояний до космических объектов, естественно, не могут быть прямыми. У Человечества нет соответствующих эталонов, удобных для использования. Такие измерения являются косвенными.

В III веке до н.э. греческий ученый Эратосфена, живший в Александрии, был уверен в шарообразности Земли и сумел измерить размер Земного шара.

В те времена уже было известно, что в день летнего солнцестояния в городе Сиене (современный Асуан) в полдень освещалось дно самого глубокого колодца, иными словами, Солнце находилось в зените. В Александрии, которая находится на том же меридиане, в тот же день и час, вертикальные предметы отбрасывают тени на горизонтальной поверхности.

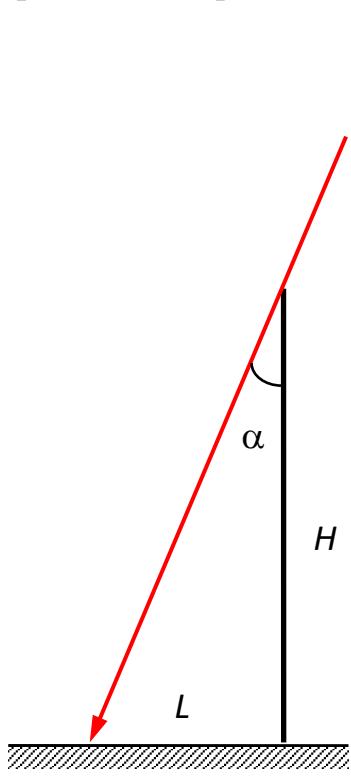


Рис. 4.9. Тень от вертикального шеста

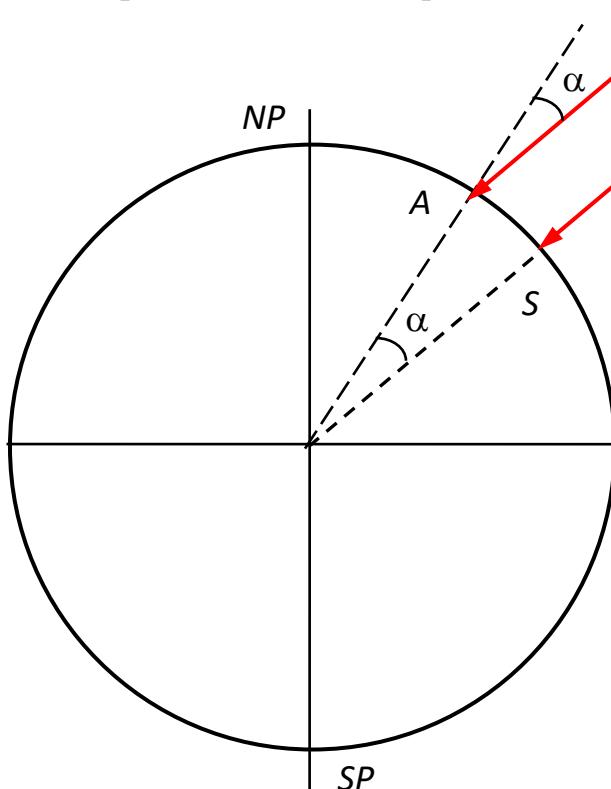


Рис. 4.10. Схема падения солнечных лучей на Землю в день летнего солнцестояния.
 A – Александрия, S – Сиена,
 NP – северный полюс, SP – южный полюс

Эратосфен измерил, что шест высотой $H = 4$ м даёт тень длиной $L \approx 53$ см, что даёт угол отклонения солнечных лучей от вертикали $\alpha \approx 7,5^\circ$ (см. рис. 4.9).

Расстояние между Александрией и Сиеной, измеренное по меридиану, в современных единицах длины равно $s = 840$ км.

Используя геометрическую схему на рис. 4.10, можно длину окружности Земли вычислить из пропорции

$$\frac{360^\circ}{7,5^\circ} = \frac{\text{Длина окружности Земли}}{\text{Расстояние между городами}} \quad (4.1)$$

Расчет даёт длину окружности Земли, равную 40000 км, что хорошо совпадает с современными измерениями.

Расстояния до планет Солнечной системы очень точно измеряются методами радиолокации. Мощный импульс ультракороткого электромагнитного излучения посыпается на исследуемый объект. Чувствительный приемник регистрирует импульс, отраженный от объекта (см. схему на рис. 4.11).

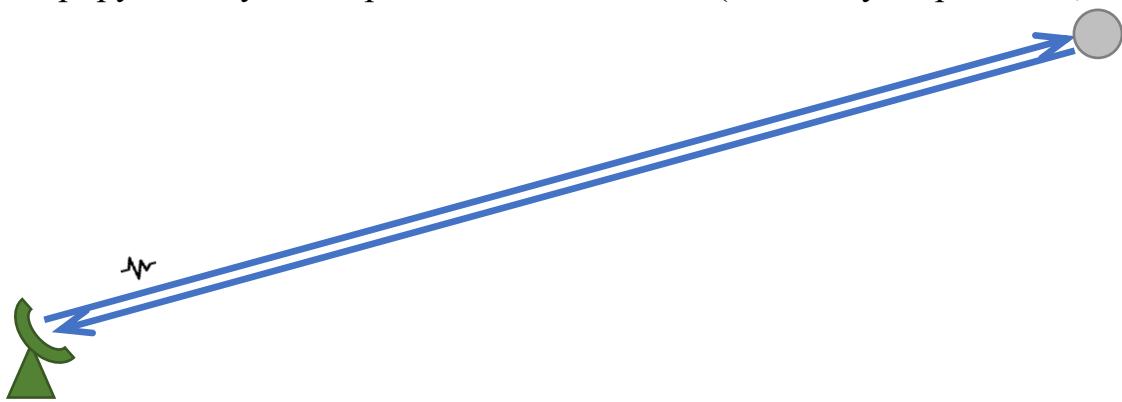


Рис. 4.11. Схема радиолокации Луны

Если интервал времени от посылки до регистрации импульса равен Δt^2 , то расстояние до объекта равно

$$L = v_c \Delta t / 2, \quad (4.2)$$

где v_c – скорость распространения электромагнитного излучения (скорость света).

Расстояния до ближайших звезд измеряются методом полугодового параллакса (рис. 4.12).

Параллаксом называется изменение видимого положения объекта относительно удалённого фона в зависимости от положения наблюдателя.

На рис. 4.12 показано видимое положение звезды в два момента времени с интервалом полгода.

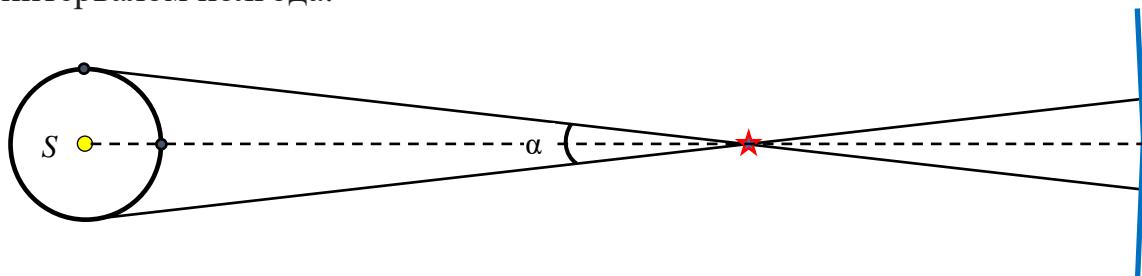


Рис. 4.12. Полугодовой параллакс звезды на фоне далеких звезд.
S – Солнце, окружность слева – орбита Земли, синяя дуга справа – фон далеких звезд.

² Таким образом, измерение расстояния делается на основе измерения времени с использованием известной константы скорости света.

По углу смещения светящегося объекта на фоне далеких звезд можно геометрически вычислить расстояние до него.

$$L = R / \operatorname{tg}(\alpha/2) \quad (4.3)$$

где R – радиус земной орбиты (расстояние от Солнца до Земли)

Расстояния свыше десятков световых лет (т.е. более 10^{18} м) измеряются косвенными многоступенчатыми методами, которые имеют невысокую точность.

Как показано, очень точно можно измерить маленькие размеры, а очень большие измеряются с большой погрешностью. В связи с этим возникает вопрос, какие измерения являются наиболее точными. Таковыми в настоящее время считаются измерения, которые проводятся на интерферометре LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), который был построен в США при участии многих научных организаций со всего мира для изучения гравитационных явлений. Реализуемая относительная погрешность измерений составляет 10^{-21} .

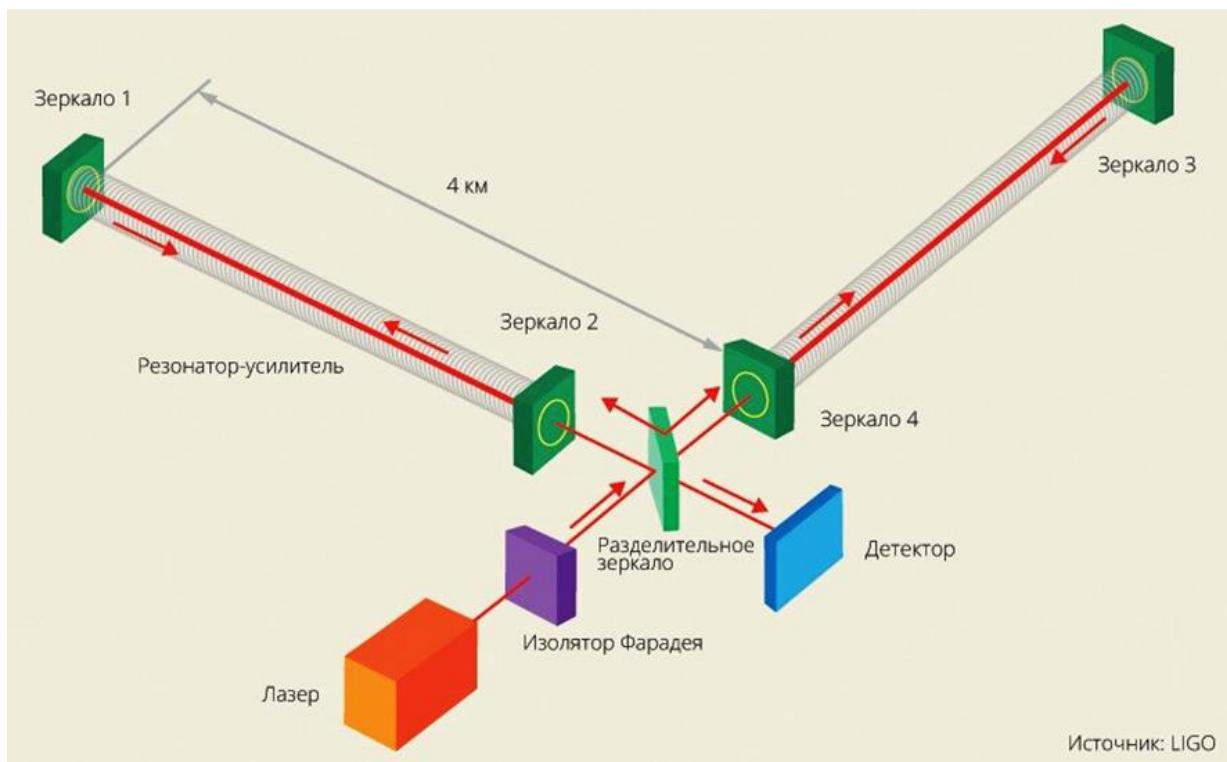


Рис. 4.13. Упрощенная схема интерферометра LIGO

Методы измерений очень маленьких и очень больших размеров, а также высокоточные измерения выходят за пределы обычных школьных научных работ. При необходимости с этим вопросом можно ознакомиться в специальной литературе с помощью учителя или научного руководителя.

§ 5. Измерения массы

Масса – одна из основных физических величин и важнейшая характеристика материальных тел.

Простейший принцип измерения массы основан на явлении гравитации. На любое тело с массой m действует сила тяжести, равная по величине mg , где g – величина ускорения свободного падения. Эта сила направлена вертикально вниз, точнее к центру Земного шара.

Для измерения массы тела можно применять механический балансовый метод, примером прибора с этим принципом работы являются рычажные равноплечие весы. В стандартный набор оборудования школьного физического кабинета входят, как правило, т.н. лабораторные весы, снабженные набором гирек определённых масс (рис. 5.1). Достоинством рычажных весов является то, что на них проводится непосредственное и наглядное выравнивание искомой массы и известной массы стандартных тел (эталонов). Уравновешивание чашек весов определяется по строго вертикальному положению указательной стрелки. Диапазон измеряемых масс обычно составляет от десятков миллиграмм до сотен грамм. Приборная погрешность оценивается по минимальной массе груза, которая приводит к заметному отклонению указательной стрелки от положения равновесия.

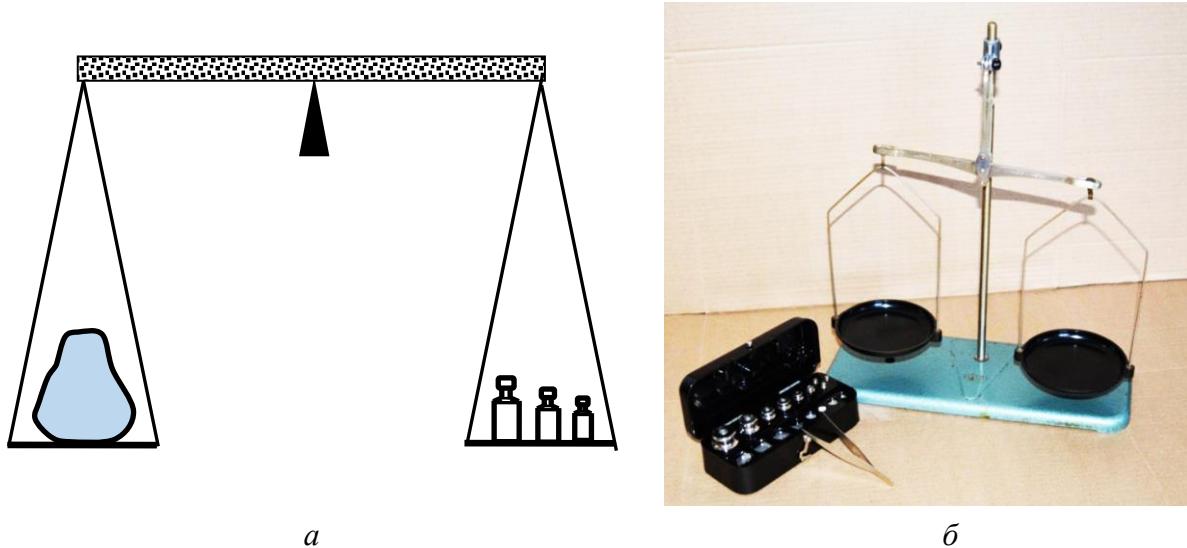


Рис. 5.1. Схема взвешивания тела на рычажных равноплечих весах (а), лабораторные рычажные весы с набором стандартных грузов (б)

Искомая масса тела в балансовых механических системах измеряется путем уравновешивания рычага – одно из древнейших технических изобретений человечества. Метод базируется на уравнении моментов сил. В положении равновесия рычага справедливо равенство

$$F_1 p_1 = F_2 p_2 \quad (5.1)$$

где F_1 и F_2 – модули сил, действующих на концы рычага, p_1 и p_2 – их плечи соответственно.

В равноплечих весах точка опоры находится посередине коромысла, чашки подвешены к его концам (рис. 5.1а).

На левой чашке находится взвешиваемое тело, на правую чашку помещаются гири известной массы до тех пор, пока коромысло не займёт горизонтальное положение. Тогда силы F_1 и F_2 станут равными по величине $m_x g$ и $m_0 g$ соответственно, где m_x – искомая масса тела, m_0 – суммарная масса гирь. Плечи этих сил равны $L/2$, где L – длина коромысла. Уравнение (5.1) примет вид:

$$m_x g L/2 = m_0 g L/2 \quad (5.2)$$

откуда следует равенство:

$$m_x = m_0. \quad (5.3)$$

Таким образом измеряется искомая масса взвешиваемого тела.

Как видно из уравнения (5.2), регулировкой длины плеч весов также возможно достичь баланса в механических системах. На этом принципе работают неравноплечие балансовые весы (весы с подвижным эталонным грузом, рис. 5.2.а).

Для практических приложений используются и более сложные механические весы, в которых взвешиваемый груз уравновешивается за счет передвижения двух или трех гирек по своим отградуированным планкам (рис. 5.2.б).



Рис. 5.2. Неравноплечие балансовые весы.
а) «римские» весы; б) трехлучевые весы

Другим широко распространенным инструментом измерения массы служат пружинные весы. Метод состоит в уравновешивание силы тяжести силой упругости пружины. Исследуемое тело подвешивается на пружине, верхний конец которой зафиксирован на кронштейне штатива (рис. 5.3). Действие силы тяжести mg приводит к растяжению пружины и возникновению силы упругости F_H , также приложенной к телу.

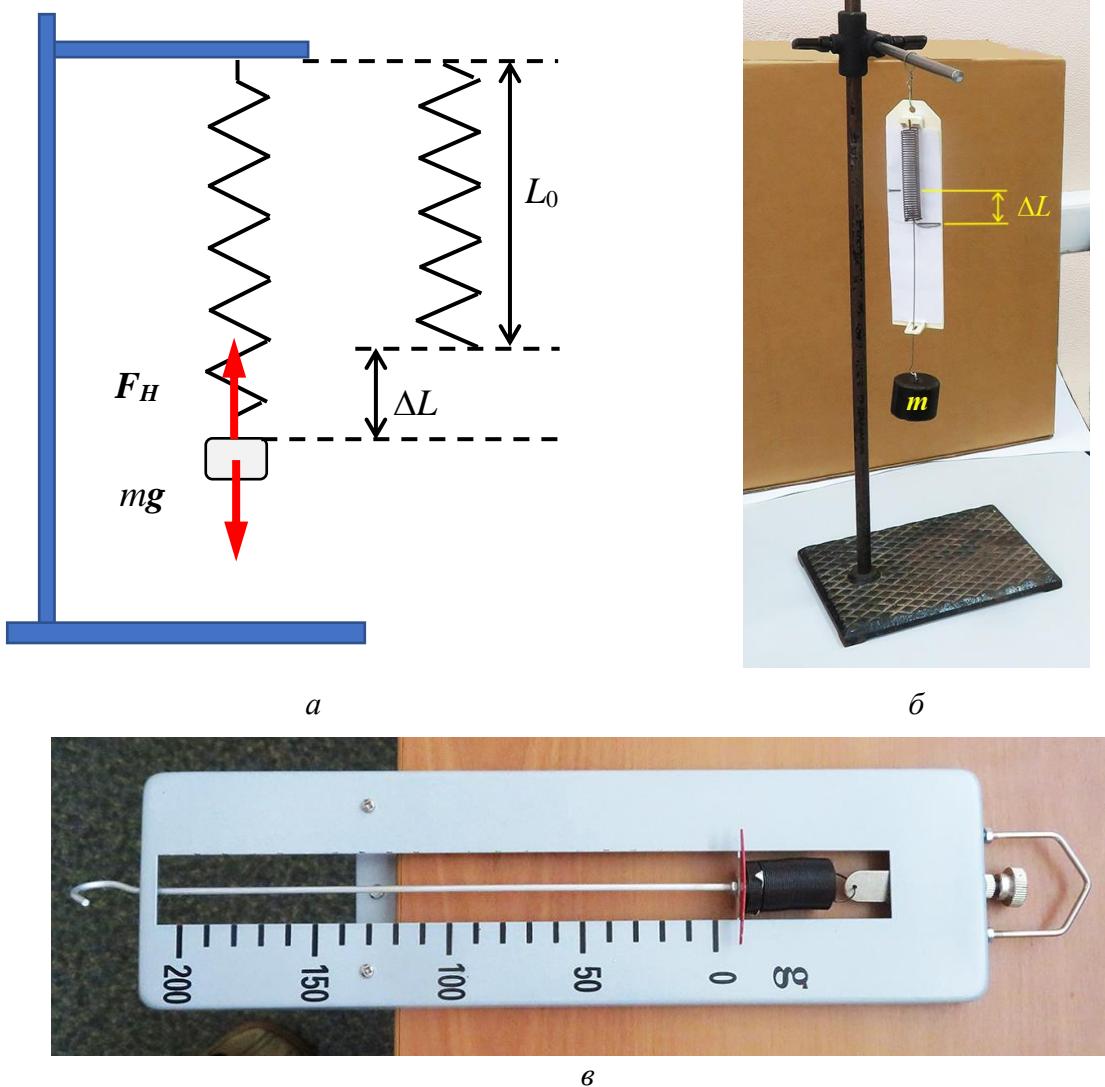


Рис. 5.3. Взвешивание груза на пружинных весах, работающих на растяжение.
Схематическое изображение (а),
растяжение пружины подвешенным грузом массы m (б);
динамометр с отградуированной шкалой масс (в)

В положении равновесия тела сила упругости F_H равна по величине силе тяжести mg . При измерении массы тела используются пружины, которые растягиваются (увеличивают свою длину) на величину ΔL , которая значительно меньше длины недеформированной (нерастянутой) пружины L_0 . Тогда величина силы упругости подчиняется закону Гука

$$F_H = k \Delta L, \quad (5.4)$$

где k – постоянная, называемая жёсткостью пружины. (Подробнее про силу Гука написано в § 10).

Уравнение равновесия подвешенного тела записывается в виде

$$mg = k \Delta L, \quad (5.5)$$

решение которого даёт искомую массу тела

$$m = k \Delta L/g . \quad (5.6)$$

Величина удлинения ΔL может измеряться линейкой с делениями, закреплённой параллельно подвешенной пружине.

Чтобы отдельно не определять жёсткость пружины k , перед проведением измерений целесообразно заранее отградуировать шкалу в единицах массы.

Такой прибор для измерения масс называется пружинными весами или динамометром. На практике используются динамометры с пружинами различной жёсткости, рассчитанные на измерения масс разных диапазонов. Пружинные весы, изображенные на рис. 5.3.в, дают приборную погрешность 10 грамм.

Наиболее распространенные лабораторные, бытовые и промышленные весы имеют схожий принцип работы, но работают не на растяжение, а на сжатие. Пружина устанавливается на неподвижной опоре, которая не может деформироваться при максимально допустимой измеряемой массе. На верхнем конце пружины закрепляется платформа. Измеряемый груз помещается на плиту сверху, как показано на рис. 5.4.а.

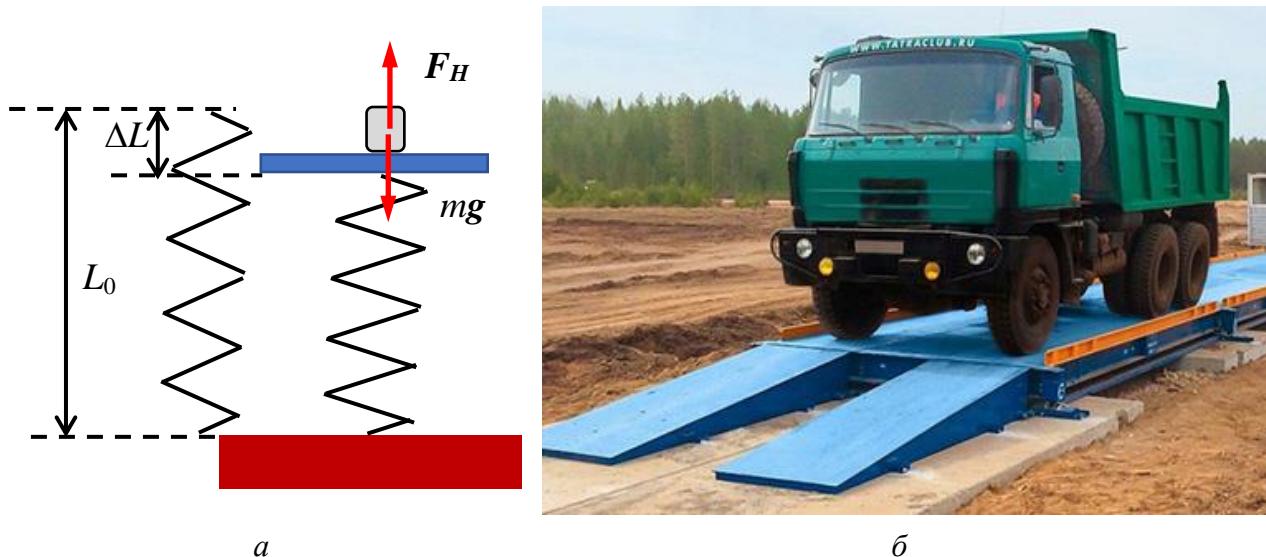


Рис. 5.4. Взвешивание груза на пружинных весах, работающих на сжатие:
а) силы и деформации пружины; б) взвешивание грузового автомобиля

В такой конструкции сила упругости F_H формируется сжатием пружины. Уравнения (5.5) и (5.6) остаются справедливыми, только величина ΔL представляет собой сокращение длины пружины. Измерительная шкала пружинных весов, схематично изображенных на рис. 5.4, градуируется в единицах массы для простоты практической работы. Приборная погрешность весов определяется ценой наименьшего деления шкалы масс.

В случае применения тензодатчиков вместо пружины измерение деформации заменяется другим типом измерений, как правило, электрическим. Более подробно о работе тензодатчиков написано в §10 настоящего пособия.

В учебных и научных лабораториях применяются различные весы по измеряемому диапазону масс и приборной погрешности. Для наиболее точных измерений применяются так называемые аналитические весы, которые имеют высокую точность. Такие весы очень чувствительны к вибрациям и даже пыли, которая может осесть из воздуха, по этой причине они снабжаются специальным колпаком или боксом, накрывающим платформу, а также устанавливаются на массивную опору, с защитой от вибраций. Таким столом обычно служит толстая гранитная плита, установленная на резиновые амортизаторы. На рис. 5.5.а изображены цифровые лабораторные весы, рассчитанные на определение массы в диапазоне 1–1000 г с приборной погрешностью 0.1 г. На рис. 5.5.б изображены аналитические лабораторные весы, рассчитанные на измерение массы в диапазоне до 200 г с приборной погрешностью не выше 0.0001 г.

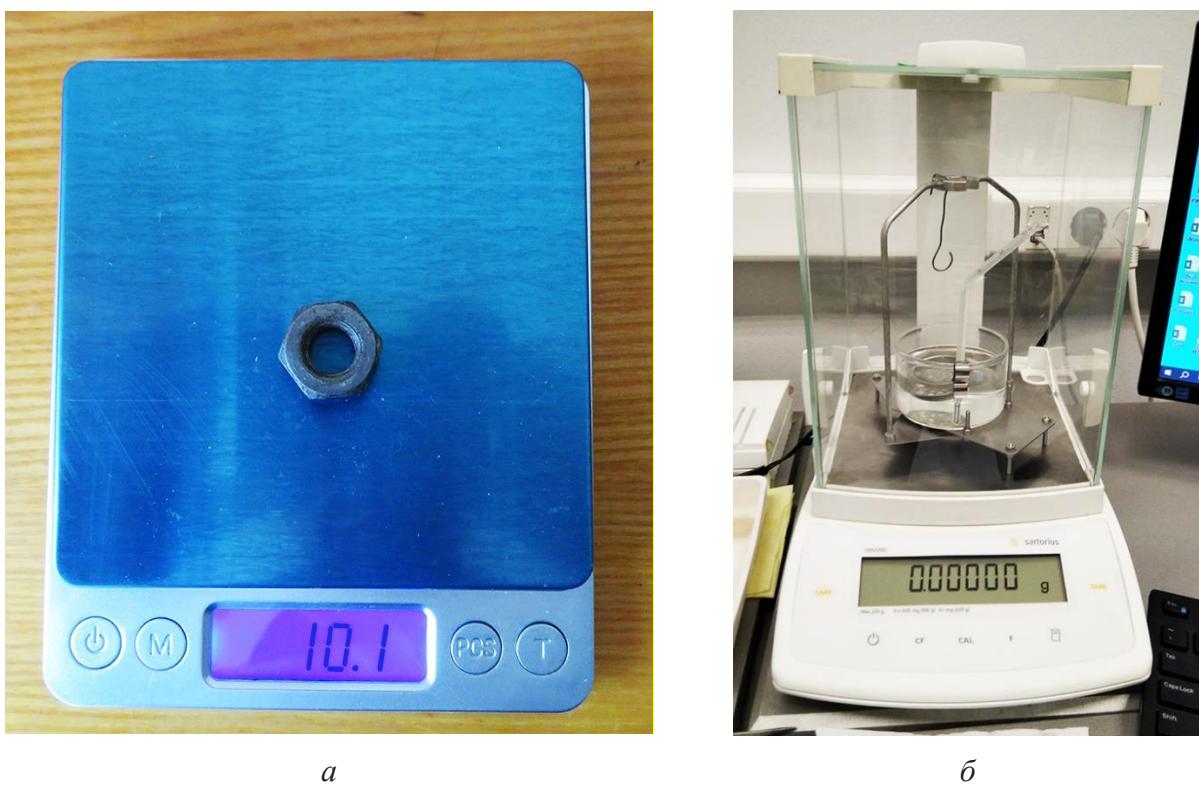


Рис. 5.5 Лабораторные весы (а), аналитические весы (б)

Физикам иногда приходится измерять массы молекул, атомов, элементарных частиц. Вышеописанные методы применить невозможно, так как гравитационные силы, действующие на них, очень малы. Распространенным методом является масс-спектрометрия. В основе методов лежит измерение параметров траектории движущихся электрически заряженных частиц, на которые действуют электрические и магнитные силы. Методы масс-спектро-

метрии относятся к косвенным, т.к. измеренные величины пересчитываются в величину массы исследуемой частицы. Наименьшей из измеренных масс можно считать массу электрона, которая составляет $9.109\ 383\ 7139 \times 10^{-31}$ кг с погрешностью 28×10^{-41} кг.

Современная астрофизика требует измерения масс звёзд, планет и других удаленных небесных объектов. Для этого разработаны специальные методы, базирующиеся на астрономических наблюдениях и решении уравнений динамики. При измерении масс планет в качестве единицы часто используют массу Земли. Для масс звезд удобной единицей является масса Солнца M_\odot , т.к. самые большие звезды имеют массы порядка сотен M_\odot ³.

Методы измерения масс космических объектов являются косвенными и выходят за рамки программы средней школы.

³ Астрономический календарь на 2020 год. Н. Новгород, ННГУ, 2019. 308 с.

§ 6. Измерения времени

Время – основная и самая загадочная физическая величина. Время имеет одно направление. Мы, как и окружающая нас Вселенная, подчиняемся единому течению времени, и оно кажется нам равномерным. В физике измеряются промежутки между моментами времени.

Возможность измерять время нам дала сама природа – суточное вращение Земли позволяет отмерить сутки, наблюдая за небесными светилами.

Измерениями меньших интервалов времени люди занимались с древнейших времён. Основной принцип измерения интервалов – это наблюдение за равномерными процессами, такими как вытекание воды, пересыпание песка или горение свечи (рис. 6.1). Технической проблемой таких часов являлось обеспечение равномерности используемого процесса.

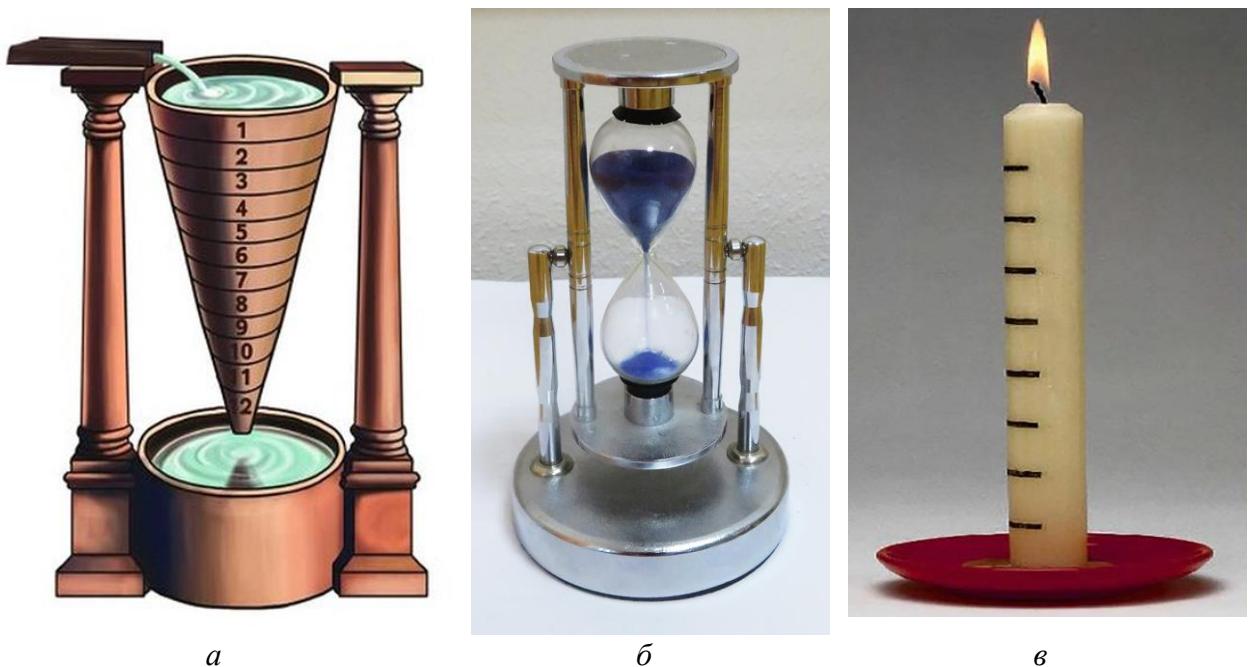


Рис. 6.1. Устаревшие приборы для измерения интервалов времени:
клепсидра (а), песочные часы (б), свеча с отметками (в)

Галилео Галилей, основоположник экспериментальной физики, за неимением доступных приборов проводил свои многочисленные измерения, отмечая время падения тел с высоты по количеству ударов собственного пульса.

Прорывом в измерении небольших интервалов времени стало использование различного рода маятников. Наиболее простой «математический» маятник представляет собой тело массы m , подвешенное на тонкой нити длиной L . Длина нити должна быть много больше размера тела, а толщина нити – много меньше (см. рис. 6.2). Масса нити пренебрежимо мала по сравнению с величиной m .

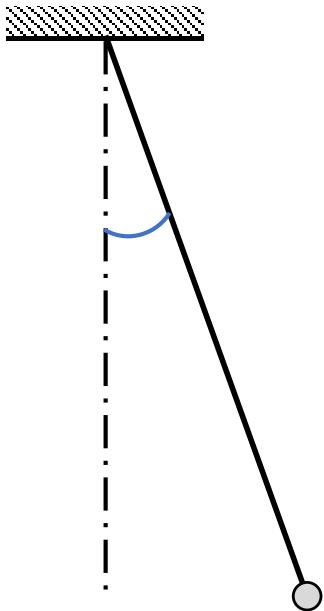


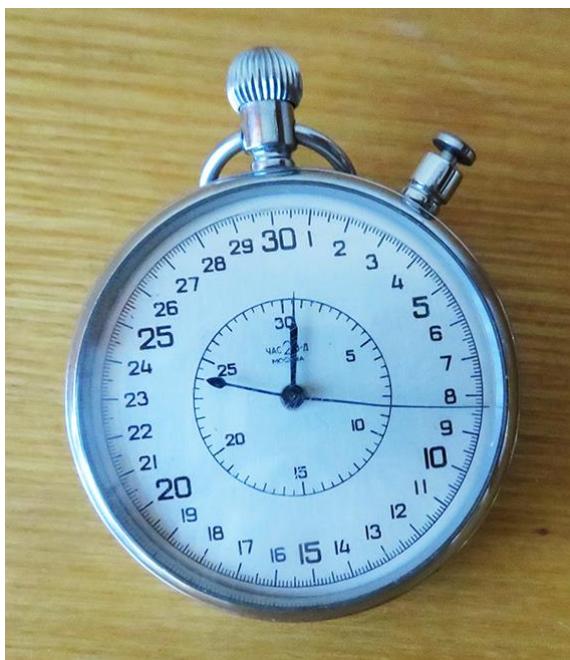
Рис. 6.2. Схема математического маятника

Экспериментально было установлено, что период колебаний определяется только длиной нити. Если отклонение от вертикали не очень велико (несколько угловых градусов), то период колебаний выражается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad (6.1)$$

где g – ускорение свободного падения.

Принцип маятниковых часов дал возможность измерять время с точностью до секунд и ускорил прогресс в методике измерения времени. В настоящее время все измерители времени основаны на колебательных процессах. Сначала были применены компактные пружинные механизмы (см. рис. 6.3). Характерная цена деления механического секундомера составляет 0.2 с и может быть достигнута с использованием маятникового механизма с периодом 0.4 с.



a



b

Рис. 6.3. Механический секундомер (а)
и колесо баланса механических часов с пружиной (б)

В настоящее время точное измерение интервалов времени осуществляется, чаще всего, с помощью электронных часов. В них для отсчета равных интервалов времени служит кварцевый резонатор. Его основой является кристалл кварца, на который подается постоянное напряжение от маленькой батарейки. Кристалл кварца обладает свойством пьезоэффеクта – под действием электрического поля кристалл совершает периодические колебания. Под-

ключенные к кристаллу механические и электронные устройства преобразуют колебания в дискретные сигналы, повторяющиеся через определённый интервал времени (1 секунду, 1 миллисекунду и т.п.).

Показания времени могут осуществляться стрелками, как на механических часах, или выражаться числами на цифровом табло (см. рис. 6.4).

Кварцевый резонатор, используемый в часах и секундомерах, совершает 32768 колебаний в секунду, поэтому теоретически может выдавать очень высокую точность.



Рис. 6.4. Электронный секундомер (а) и кварцевый резонатор (б)

Приборная погрешность измерения времени современных кварцевых часов и секундомеров указывается в их паспорте или в инструкции по использованию. Приближенным значением погрешности является ЦНД у стрелочных часов и единица младшего разряда у часов с цифровым табло. Однако следует помнить, что если процесс измеряется путем нажатия на него рукой, то точность будет определяться скоростью реакции экспериментатора. В этом случае требуется приборную погрешность завысить как минимум до 0.2 с.

Для проведения точного измерения времени в школьных экспериментальных задачах есть два рекомендуемых способа. Возможно использовать специальные оптические ворота – в них сигнал о запуске или остановке секундомера поступает в момент перекрытия инфракрасного луча предметом (рис. 6.5.а). Более простой способ – использование цифровой камеры на штативе (рис. 6.5.б). Фотосъемка цифровой камерой происходит как минимум с созданием 30 кадров в секунду. Применяя специальное несложное в освоении программное обеспечение, возможно просмотреть последовательность

кадров и установить время, в которое этот кадр получен, с точностью $1/30$ с ≈ 0.033 с.



Рис. 6.5. Маятник с оптическими воротами (а) и кадр из видеосъемки колебаний математического маятника (б)

Очень короткие интервалы времени измеряются приборами микроэлектроники, работа которых основана на квантовых явлениях – атомными часами. Наиболее известные цезиевые атомные часы совершают в одну секунду 9 192 631 770 фиксируемых переходов через равные промежутки времени. Такая точность необходима в научных задачах, а также в задачах геопозиционирования. Благодаря тому, что космические спутники имеют возможность синхронизироваться с атомными часами, они могут очень точно фиксировать время прохождения электромагнитных волн и благодаря этому человек в любой точке Земли с помощью модуля ГЛОНАСС в своем телефоне может очень быстро и очень точно установить свое местоположение.

Очень большие интервалы времени, например, длительность геологических эпох или ледниковых периодов, значительно превышают время существования человеческой цивилизации. Такие интервалы времени измеряются косвенными методами измерения, в частности, по накоплению осадков в слоях земной коры, по радиоактивному распаду долгоживущих изотопов и др.

Например, большую пользу для археологии принесло открытие метода радиоуглеродного датирования. Он основан на том, что радиоактивный изотоп углерода C^{14} непрерывно формируется в земной атмосфере и это его единственный источник на планете. Углерод участвует в биохимических реакциях и в живых организмах присутствует такая же доля изотопа C^{14} , как и в атмосфере. После окончания жизнедеятельности животного или растения доля изотопа C^{14} непрерывно уменьшается из-за его распада. Поэтому измеряя изотопный состав углеродсодержащего объекта, извлеченного из земной коры, можно по известному закону радиоактивного распада вычислить время, которое прошло после гибели этого объекта. Предельные значения, которые можно вычислить таким способом – это 50 тысяч лет, а точность составляет около 3%. Например, если расчет дал время образца 2000 лет, то точность (погрешность) составит 60 лет.

§ 7. Измерения температуры

Начальное понятие температуры формируется с детства эмпирическим путём, как характеристика ряда «холодное – тёплое – горячее».

Научное определение температуры даётся на базе выводов молекулярно-кинетической теории, как средняя кинетическая энергия молекул.

Единицей температуры в системе СИ является Кельвин. На практике широко используется шкала Цельсия. Кельвины и градусы Цельсия совпадают по величине. Различие шкал состоит в положении нуля. Нуль шкалы Цельсия совпадает с точкой замерзания воды со значением 273,15 шкалы Кельвина. Нуль шкалы Кельвина совпадает с температурой абсолютного нуля, поэтому шкала называется также шкалой абсолютной температуры.

Традиционный метод измерения температуры основан на явлении расширения веществ при нагревании (т.е. при повышении температуры).

Объём тела V_2 при температуре T_2 может быть выражен так:

$$V_2 = V_1 [1 + \beta (T_2 - T_1)], \quad (7.1)$$

где V_1 – объём тела при температуре T_1 , β – температурный коэффициент объёмного расширения данного вещества. Для термометра важно подобрать такой материал, коэффициент β для которого был бы одинаков на всем диапазоне измеряемых температур.

В бытовых и экспериментальных термометрах в диапазоне характерных для окружающей среды температур (от -50°C до $+100^{\circ}\text{C}$) расширяющимся материалом служит жидкость: обычно, ртуть или подкрашенный спирт. Жидкость находится в трубке постоянного сечения, следовательно, для длины столбика жидкости в термометре справедлива формула:

$$L_2 = L_1 [1 + \beta (T_2 - T_1)], \quad (2)$$

где L_1 и L_2 – длина столбика жидкости при температурах T_1 и T_2 соответственно. Для удобства работы термометры снабжаются заранее отградуированной шкалой (см. рис. 7.1).

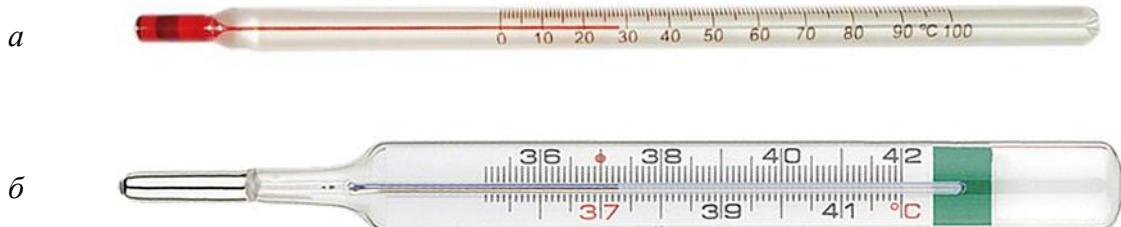


Рис. 7.1. Жидкостные термометры: спиртовой с ценой деления 1° (а), ртутный с ценой деления $0,1^{\circ}\text{C}$ (б)

Приборы для измерения температуры – термометры – приводятся в контакт с телом, чью температуру требуется измерить, или погружаются в жид-

кость. При этом температуры тела и термометра выравниваются. Реакция термометра на изменение температуры по этой причине не мгновенна. Использовать термометры со стеклянной колбой следует осторожно, так как стеклянная колба хрупкая, а содержащаяся ртуть токсична.

В качестве альтернативы жидкостным термометрам в настоящее время широко распространяются термометры, работающие на терморезистивном эффекте.

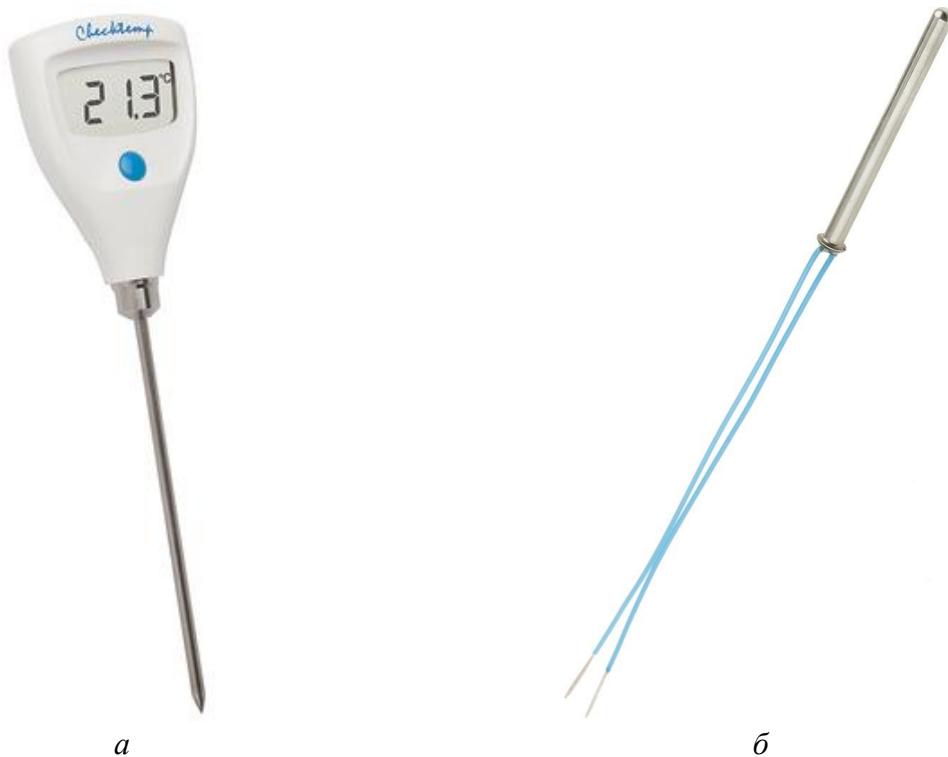


Рис. 7.2. Внешний вид лабораторного терморезистивного термометра (а), терморезистивный датчик (б).

Рабочим элементом терморезистивного термометра является проводник, сопротивление которого зависит от температуры. Характерный диапазон работы таких термометров составляет от -50°C до $+100^{\circ}\text{C}$, а цена наименьшего деления 0.1°C . Использование таких термометров наиболее оптимально для выполнения экспериментов школьниками, так как они просты в эксплуатации и обеспечивают необходимую точность.

Для измерения температур в более широком диапазоне используются термопары, действие которых основано на термоэлектрическом эффекте.

В контактах двух разных металлов возникает разность потенциалов, величина которой зависит от температуры. Если проводник из разных металлов А и В включить в электрическую цепь, показанную на рис. 7.3, то вольтметр V будет показывать напряжение, пропорциональное разности температур ($T_2 - T_1$) на контактах. Такое устройство измерения температур называется термопарой.

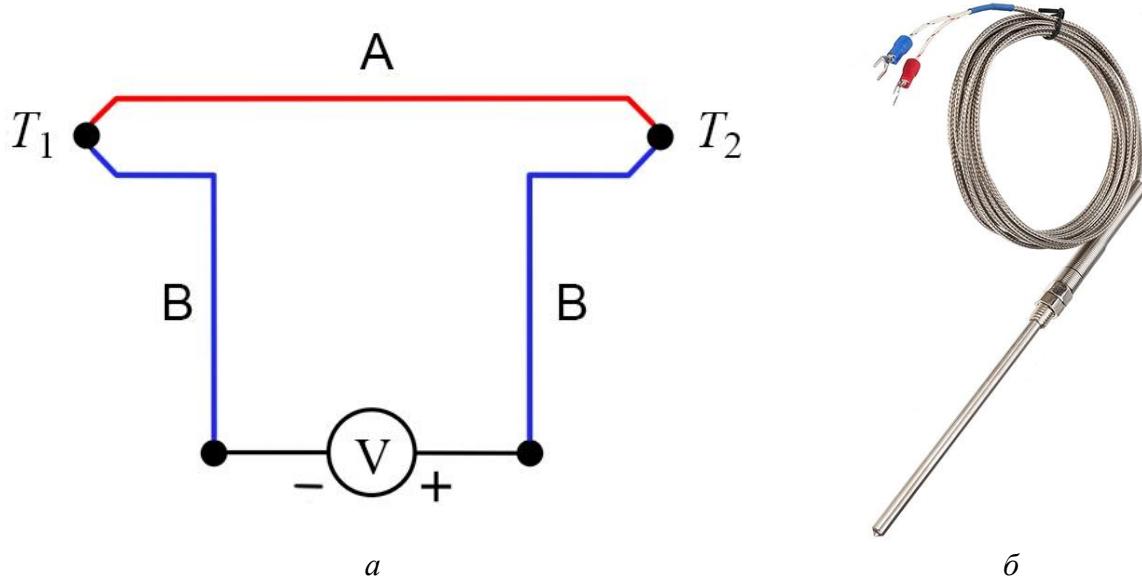


Рис. 7.3. Электрическая схема термопары (а),
внешний вид термопары до 600° (б)

Теория термоэлектрических явлений базируется на квантовой физике твёрдого тела, которая не изучается в средней школе, однако, термометры с термопарами могут успешно использоваться в школьных физических экспериментах.

Простейший термометр, содержащий термопару, снабжается таблицей перевода измеренного напряжения в градусы температуры. Более совершенные термометры имеют шкалу, отградуированную в градусах Цельсия или Кельвина.

Термопары разного состава применяются для разных диапазонов температур.

Таблица 7.1

Характеристики наиболее распространенных материалов термопар

Материал термоэлектродов		Диапазон рабочих температур	Максимальная погрешность
положительного	отрицательного		
Железо	Константан Cu-Ni	-210...+1200	2,2°C или 0.75%
Хромель Cr-Ni	Алюмель Ni-Al	-210...+1200	2,2°C или 0.75%
Вольфрам-рений W-5%Re	Вольфрам-рений W-26%Re	0...+2320	4,5°C до +425°C 1% до +2320

Еще одним распространенным методом измерения температуры является инфракрасная пирометрия. Этот метод основан на явлении физики – каждое нагретое тело излучает электромагнитные волны, причем форма спектра излучения зависит от температуры тела. Прибор, работающий на этом принципе, называется пирометром. Для измерения пирометр направляется на объект и измерение происходит дистанционно. Пирометр, применяемый в медицинских целях, работает в диапазоне от -20°C до 80°C, а его погрешность не превышает 0,2°. Промышленные и лабораторные пирометры обычно измеряют в диапазоне от -20°C до 500°C, их погрешность составляет 2° и более.

На том же принципе работают тепловизоры. Основное различие состоит в том, что поле зрения тепловизора разбито на сетку пикселей, для каждого из которых определяется температура. Изображение строится таким образом, чтобы один цвет соответствовал одной конкретной температуре. Точность измерения современными тепловизорами может составлять примерно 2% при доступном диапазоне температур от -20°C до 500°C. Для тепловизора также характерны величины разрешения изображения, как правило не превышающие 0,1 мегапикселя, и температурной чувствительности (то есть минимально различаемая температура двух точек в поле зрения), которая по заявлению производителей может достигать 0,35 миллиКельвин.

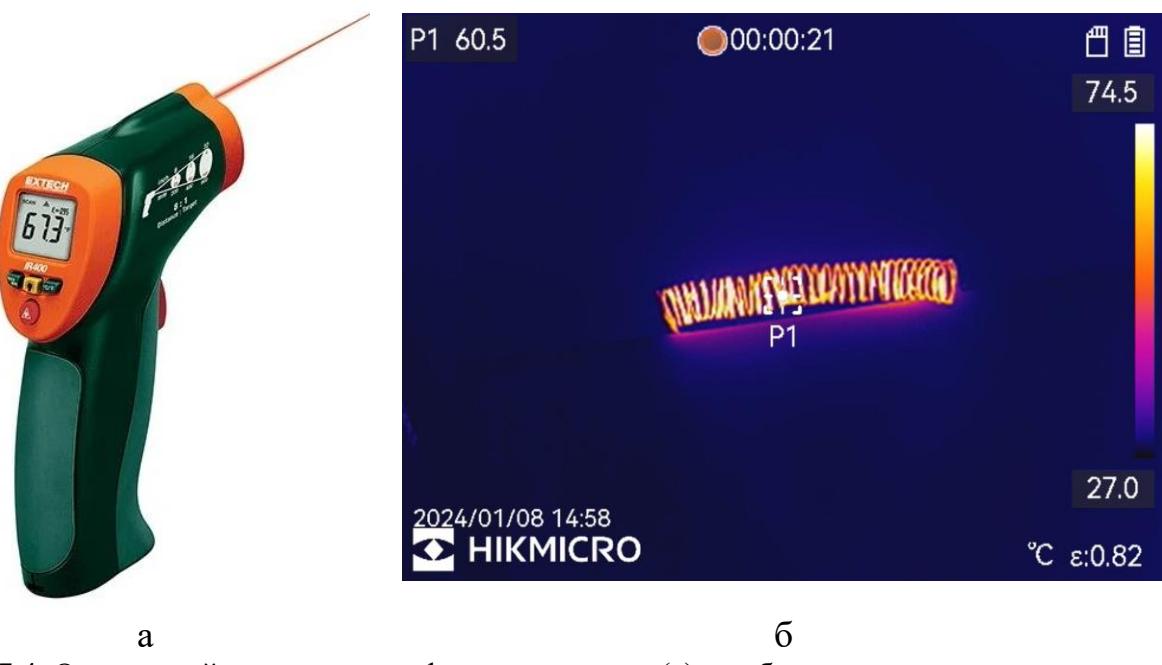


Рис.7.4. Оптический пирометр с цифровым экраном (а), изображение проводника с током, полученное с помощью тепловизора (б)

Как было отмечено, диапазон температур ограничен снизу температурой абсолютного нуля, по этой причине самые точные и самые низкие значения температур получают в научных лабораториях. Для этого газ, состоящий из тысяч атомов (это очень мало), удерживают в магнитных и электрических полях, затем снижают кинетическую энергию атомов и косвенным методом вычисляют температуру. Опубликованные результаты таких работ в настоящее время приводят данные в десятки пикоКельвин (10^{-12} К) с погрешностью в единицы пикоКельвин.

Очень высокую температуру имеют звезды, называемые голубыми гигантами. Температура их поверхности достигает 60 тысяч Кельвин и определяется по максимуму их оптического спектра. Погрешность определения температуры этим методом может составлять десятки процентов⁴.

⁴ Астрономия и Астрофизика. Звезды. Под ред. В.Г. Сурдина. М.: Физматлит. 2009. 428 с.

§ 8. Измерения углов

Плоский угол, по определению, образован двумя лучами, исходящими из одной точки, которая называется вершиной угла (рис. 8.1).

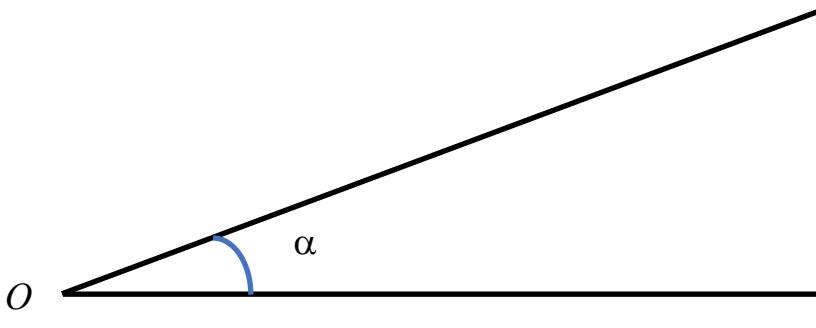


Рис. 8.1.
Плоский угол α .
Точка O – вершина
угла

Популярной единицей измерения углов является угловой градус. В полной окружности по определению укладываются 360 градусов (360°).

Единицей угла в системе SI является радиан. Он определяется как величина центрального угла, опирающегося на дугу длиной радиуса данной окружности.

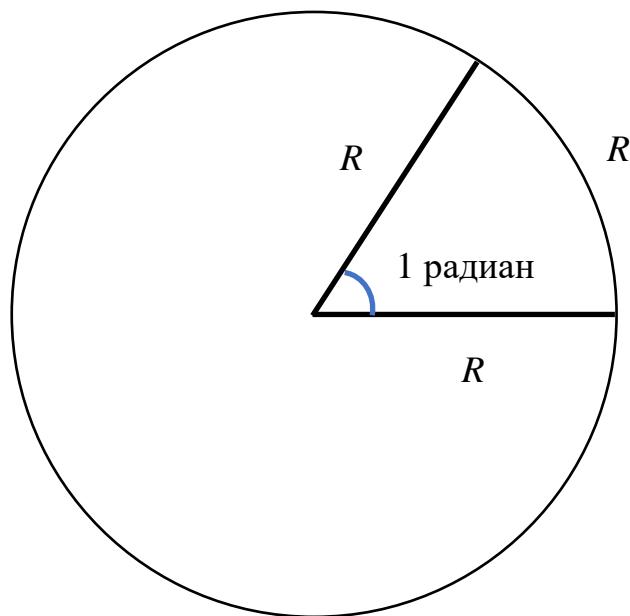


Рис. 8.2.
К определению радиана

Длина окружности равна $2\pi R$. Следовательно, полный центральный угол равняется 2π радиан. Заметим, что радиан является безразменой величиной. Таким образом, получается равенство $360^\circ = 2\pi$ радиан. Отсюда следуют формулы перевода:

$$1 \text{ радиан} = 180^\circ/\pi; \quad 1^\circ = \pi/180 \text{ радиан.} \quad (8.1)$$

Приблизительно 1 радиан $\approx 57^\circ$.

Простейший экспериментальный метод измерения углов осуществляется с помощью транспортира.

Транспортир имеет полукруговую шкалу с делениями (рис. 8.3). Школьные транспортиры, как правило, имеют цену деления 1 угловой градус (1°), что определяет приборную погрешность измерения угла. Чем больше транспортир, тем удобнее им измерять. Транспортир предназначен для построения изображений, то есть измерения углов или построений на чертежах, но также он может применяться при решении экспериментальных задач. Например, с помощью обычного транспортира можно измерять угол наклона при исследовании движения тел по наклонным плоскостям, снабдив его отвесом, как показано на рис. 8.3.

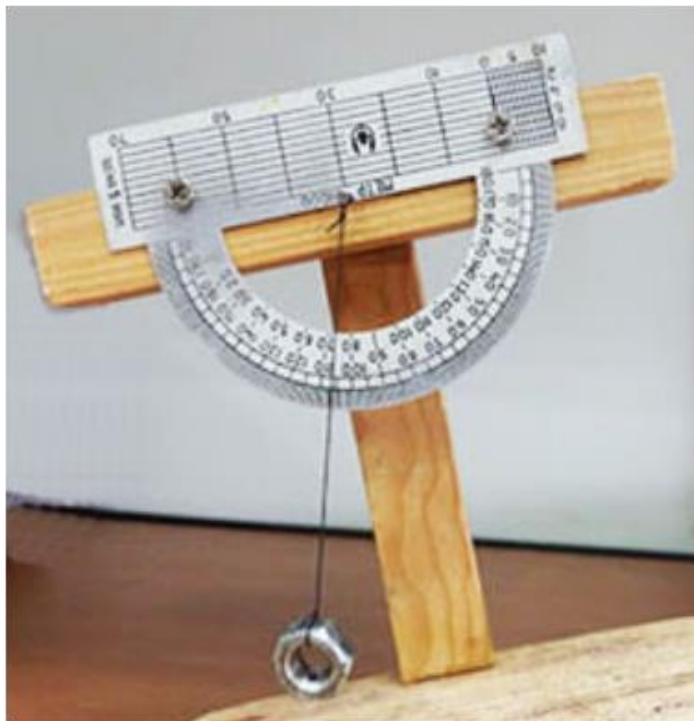


Рис. 8.3. Самодельный угломер, изготовленный из школьного транспортира

В школьных экспериментах для измерения углов иногда удобно использовать косвенный метод, который не требует применения транспортира.

Измеряемый угол достраивается до прямоугольного треугольника, как показано на рис. 8.4. Штриховой линией AB изображен катет, противолежащий измеряемому углу α . Отрезок OA соответственно является прилежащим катетом. Отношение длин противолежащего и прилежащего катетов равно тангенсу искомого угла α .

$$\operatorname{tg}(\alpha) = x / y \quad 8.2)$$

Угол является α арктангенсом отношения длин катетов:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(x / y) \quad (8.3)$$

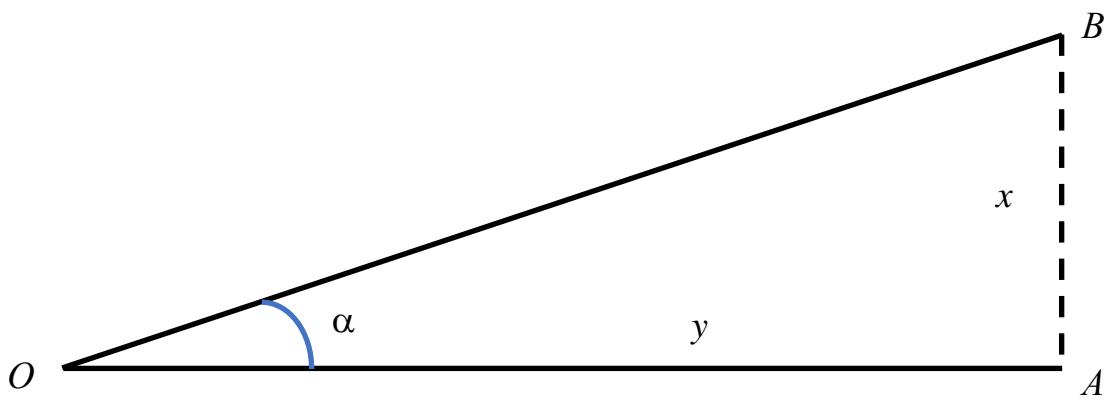


Рис. 8.4. К вычислению угла α .
 x – длина катета AB , y – длина катета OA

В эксперименте этот метод можно реализовать следующим образом. В оптической схеме (рис. 8.4) точке O соответствует точка выхода отклоненного луча (образец), точке A – след первичного луча, точке B – след отклоненного луча на экране, установленном перпендикулярно направлению первичного луча. В этом случае угол α является искомым углом и может быть вычислен тем точнее, чем дальше расположен экран от точки O .

При работе с объемными фигурами обычно измеряются двугранные углы. Для этого используются гoniометры различного устройства (рис. 8.5).

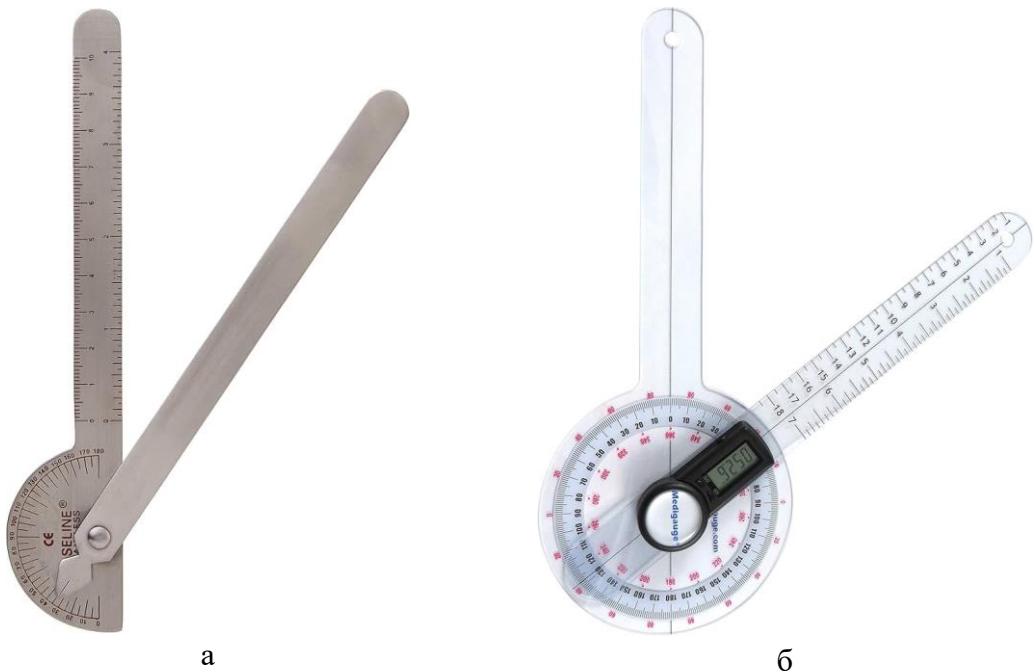


Рис. 8.5. Прикладные гониометры: механический (а), цифровой (б)

Например, кристаллографы с помощью гониометра измеряют углы грани кристаллов. При измерении грани совмещают с двумя планками гониометра, соединенными шарниром. Угол определяют с помощью стрелки на обратной стороне подвижной рейки, или считывают с экрана, если гониометр цифровой.

Также гoniометрами в оптике называются специальные механизмы, способные устанавливать объект в заданной ориентации в пространстве. На рис. 8.6 изображен оптический гoniометр, предназначенный для измерения углов между оптическими лучами.



Рис. 8.6. Оптический гoniометр

Кроме того, такой прибор позволяет ориентировать исследуемый образец в определенном положении. Например, на рис. 8.6 показано позиционирование на столике стеклянной призмы.

ПРЯМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЛИЧИН

Этот раздел посвящен знакомству с методами измерения некоторых производных величин, которые часто используются в лабораторных практикумах и самостоятельных исследовательских работах по физике: объёма, силы и некоторых электрических измерений. Для исследования этих величин существуют приборы, позволяющие проводить прямые измерения.

§ 9. Измерения объёма

Для измерений объемов твердых тел и жидкостей применяются как прямые, так и косвенные методы.

При измерении объёма жидкостей используются мерные цилиндры или мензурки различного размера и с разной ценой наименьшего деления (см. рис. 9.1).

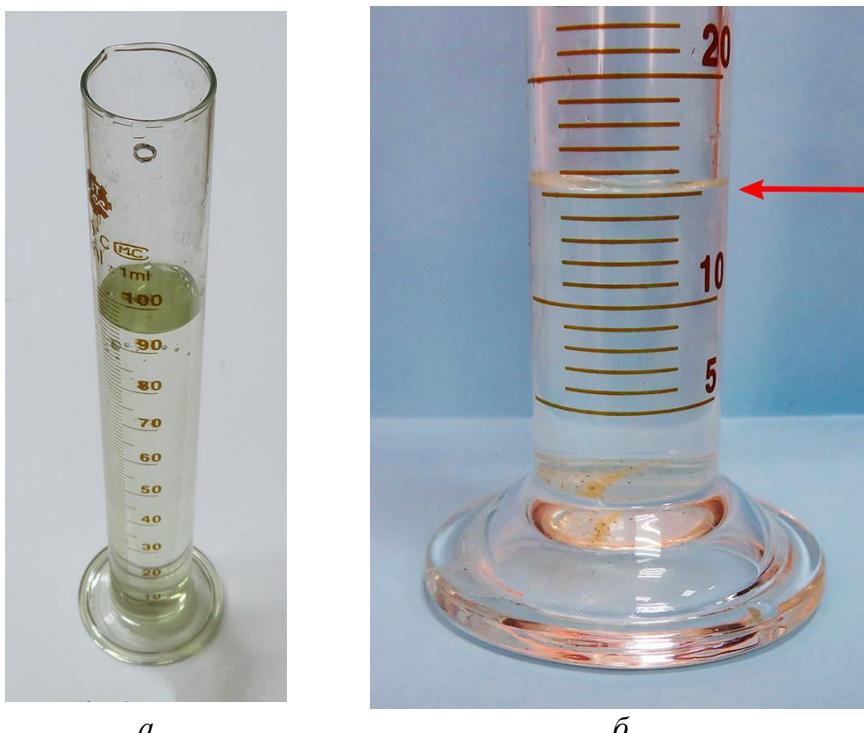


Рис. 9.1. Измерение объёма некоторого количества жидкости
а) лабораторная мензурка; б) отсчёт объёма по шкале мензурки

Численное значение измеряемого объема отсчитывается по делению шкалы на стенке мензурки, совпадающим с уровнем жидкости (см. рис. 9.1.б). Шкала отградуирована в единицах объема, данный метод измерения объема жидкости является прямым.

Для измерения объёмов небольших твёрдых тел также можно использовать мензурки. Предмет погружается в мензурку с заранее налитым объёмом воды V_0 . После погружения требуется по увеченному уровню воды зафиксировать

ровать суммарный объём воды и тела V_1 (см. рис. 9.2.в). Очевидно, что искомый объём тела равен разности $V = V_1 - V_0$. Метод можно отнести к косвенным, т.к. измеряются уровни жидкости, а окончательный результат вычисляется.

Приборная погрешность измерения объема тел методом погружения определяется, прежде всего, ценой наименьшего деления мензурки.

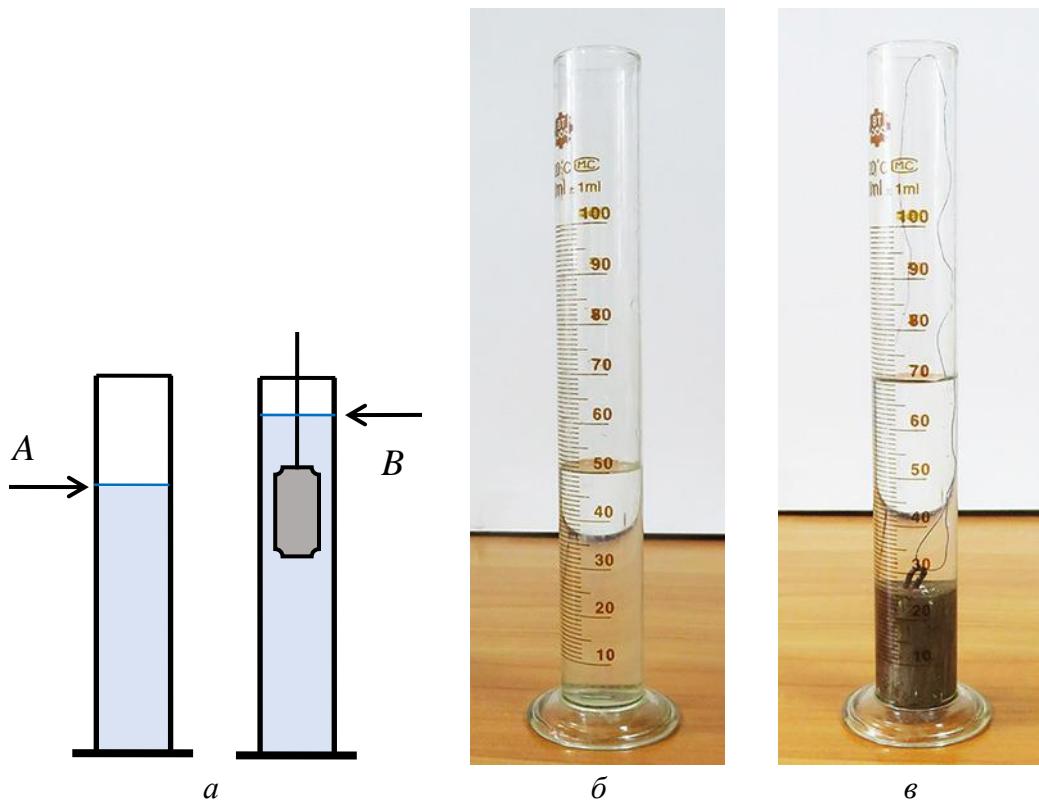


Рис.9.2. Измерение объёма тела с помощью мензурки с водой.

а) Схема измерения. A и B – уровни воды,

до и после погружения тела;

б) мензурка с водой V_0 . в) мензурка с погруженным телом

При отсчёте объёма по делениям мензурки необходимо учитывать поправку на мениск, который возникает из-за смачивания водой внутренних стенок мензурки (см. рис. 9.3).

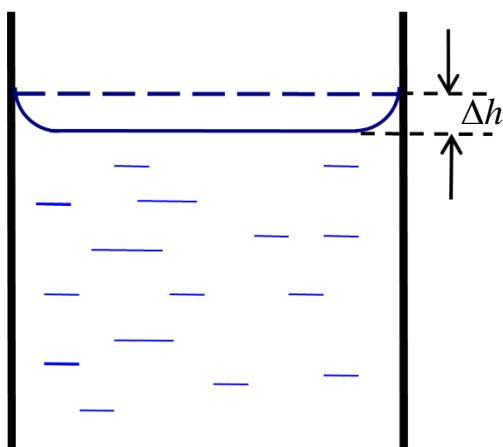


Рис. 9.3. Осевое сечение цилиндрического сосуда.
Виден мениск у границы воды и стенки сосуда.
 Δh – высота мениска

Измерение более крупных предметов, которые не умещаются в мензурке, проводится с помощью отливных сосудов. Действия проводятся в несколько этапов.

Сначала вода наливается в отливной сосуд до уровня носика. Под носик помещается пустой приёмный сосуд. Затем измеряемое тело аккуратно погружается в отливной сосуд. При этом из отливного сосуда в приёмный переливается объём воды, равный объёму измеряемого тела V (см. рис. 9.4.а).



Рис. 9.4. Измерение объема образца кварцита с помощью отливного сосуда.

- а) погружение образца в отливной сосуд;
- б) переливание воды из приемного сосуда в мензурку

Наконец, для измерения этого объёма вода из приёмного сосуда переливается в мензурку (см. рис. 9.4.б).

Ещё более крупные тела могут не помещаться в стандартный отливной сосуд. Тогда в качестве отливного сосуда может использоваться бытовой инвентарь – ведро, а в качестве приёмного – таз (см. рис. 6.5.а). В ведро вода предварительно наливается до краёв. После погружения тела в ведро объём воды V (равный объёму тела) переливается в таз. Затем вода из таза переливается в мензурку для измерения объём тела V (см. рис. 6.5.б).



a



b

Рис. 9.5. Измерение объема крупного тела методом вытеснения воды;

а) ведро, до краёв наполненное водой, стоит в пустом тазу;

б) переливание воды из таза в мензурку

Этот вариант метода даёт значительную погрешность из-за объёма мениска в ведре. Согласно рис. 9.3, объём мениска приближенно можно вычислить по формуле:

$$\Delta V = \pi D (\Delta h)^2 / 8 \quad (9.1)$$

где Δh – высота мениска, D – внутренний диаметр сосуда,

Очевидно, что для широких сосудов объём ΔV (9.1) необходимо учитывать при подсчёте погрешностей.

Если тело имеет простую геометрическую форму, то его объём можно получить косвенным методом, используя формулы стереометрии.

Например, известно, что объём кругового цилиндра выражается формулой

$$V = \pi H D^2 / 4 \quad (9.2)$$

где H – высота цилиндра, D – его диаметр.

Путём прямых измерений с помощью линейки или штангенциркуля определяются значения высоты и диаметра цилиндра. Затем объём цилиндра вычисляется по формуле (9.2).

Аналогичным косвенным методом можно измерять объёмы тел другой геометрической формы. Некоторые полезные формулы приведены в табл. 9.1. Для более сложных тел можно найти формулы в справочниках, а для составных – вывести самостоятельно.

Таблица 9.1

Объёмы некоторых геометрических тел

Геометрическое тело	Формула подсчёта объёма	Пояснения
Куб	a^3	a – сторона куба
Прямоугольный параллелепипед	abc	a, b, c – стороны параллелепипеда
Круговой цилиндр	$\pi R^2 h$	R – радиус основания, h – высота
Шар	$(4/3)\pi R^3$	R – радиус шара
Круговой конус	$(1/3) \pi R^2 h$	R – радиус основания, h – высота
Призма	$S h$	S – площадь основания, h – высота
Пирамида	$(1/3) S h$	S – площадь основания, h – высота

Погрешность объёмов, полученных этим методом, определяется погрешностью прямых измерений длин параметров тела (стороны, диаметра, высоты) и вычисляется по формулам погрешностей косвенных измерений (см. § 22).

В некоторых задачах требуется переместить заданное небольшое количество жидкости. Для этого используются градуированные пипетки с грушей (см. рис. 9.6.а), позволяющие переместить нужный объем из одной посуды в другую, что может быть полезно при изготовлении растворов.

В более точных работах, например, в биологических исследованиях, применяются автоматические пипет-дозаторы (см. рис. 9.6.б).



Рис. 9.6. Градуированные пипетки (а), автоматические дозаторы переменного объема (пипет-дозаторы) (б)

Одним из современных универсальных методов определения объема тела является способ расчета по его трёхмерной модели. Для построения моделей применяются 3D-сканеры. Сканер генерирует компьютерный файл с координатами внешней поверхности сканируемого объекта. Специальное инженерное программное обеспечение может рассчитать объем объекта по его модели. На рис. 9.7 приведено изображение 3D-сканера и пример модели.



Рис. 9.7. 3D-сканер (а), модель отсканированного объекта (б)

§ 10. Измерения сил

Измерения сил базируются, в основном, на уравновешивании другими силами, величина и направление которых уже известны. Самый простой принцип: уравновесить измеряемую силу другой, известной по величине и направлению.

В качестве известной силы часто используется сила тяжести, действующая на тела с массой m . Её величина равна $m \times g$ (где g – ускорение свободного падения), направлена она вертикально вниз, т.е. к центру Земного шара и практически неотличима в разных точках планеты.

С помощью силы тяжести удобно измерять силу упругости F_H пружин, подвешивая к ним грузы известной массы, как было показано на рис. 5.3. При равновесии модули силы тяжести mg и силы упругости F_H равны

$$F_H = mg \quad (10.1)$$

Последовательное подвешивание к пружине грузов различной массы позволяет отградуировать шкалу в единицах силы и получить прибор, названный динамометром (силомером, по-русски).

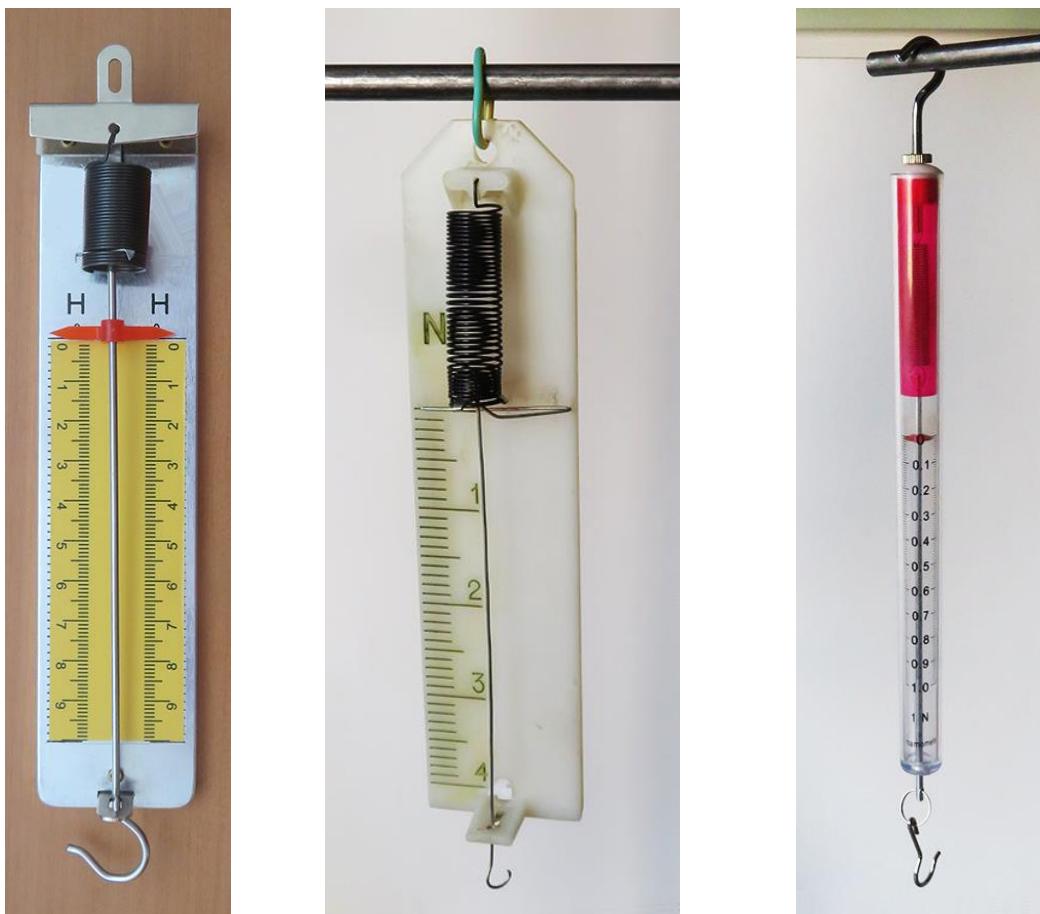


Рис. 10.1. Школьные пружинные динамометры на различные диапазоны силы

Очевидно, что динамометр от пружинных весов, описанных в §5, отличается только градуировкой шкалы.

В школьных физических кабинетах используются пружинные динамометры различной конструкции и на разные диапазоны сил (см. рис. 10.1). Приборная погрешность измерения силы динамометром определяется ценой наименьшего деления его шкалы. Имея в наличии динамометры, можно исследовать силы различной природы.

Современные способы измерения сил возможны электронными приборами, имеющими в своей конструкции тензометрические датчики. Тензометрический датчик преобразует величину деформации рабочего элемента в считываемый сигнал, например, электрический. Современные цифровые весы (например, приведенные на рис. 5.5 в §5) и цифровые динамометры используют тензометрические датчики резистивного типа (см. рис. 10.2).



Рис. 10.2. Цифровой динамометр (а), тензометрический датчик (б)

Терморезистивный датчик представляет собой тонкий проводник, нанесенный на очень гибкую подложку. Форма проводника выбирается таким образом, чтобы действие растягивающей и сжимающей силы совпадало с направлением дорожек (см. рис. 10.3).

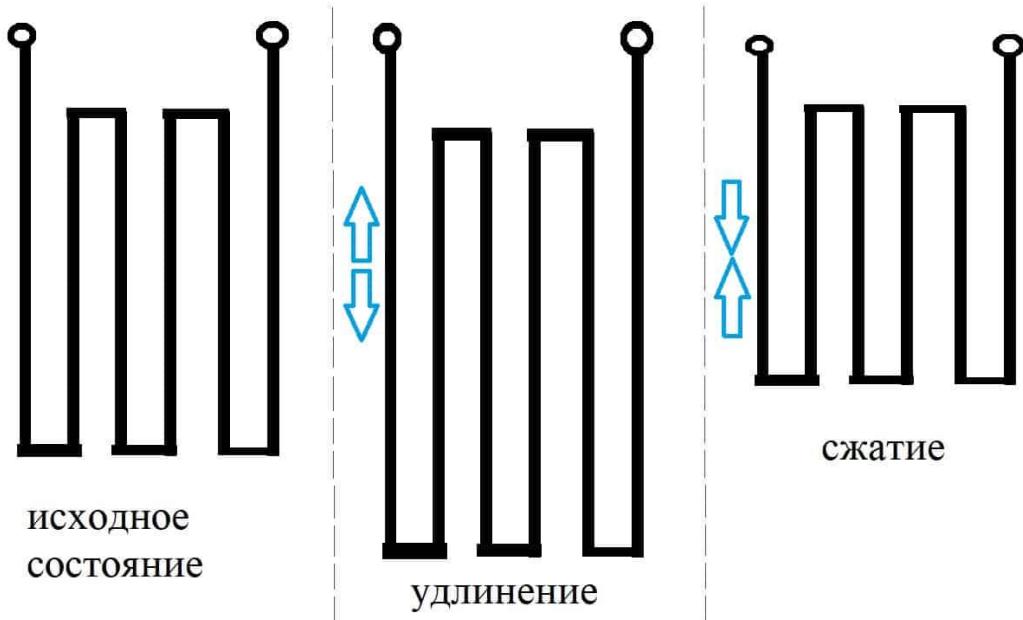


Рис. 10.3. Принцип работы резистивного тензометрического датчика

Как известно, сопротивление проводника связано с удельным сопротивлением материала

$$R = \rho L/S \quad (10.2)$$

где ρ – удельное сопротивление материала, как правило, в качестве металла с постоянным удельным сопротивлением используют константан; L – длина проводника; S – поперечное сечение проводника.

Как видно из схемы, представленной на рис. 10.3, при воздействии силы тензодатчик изменяет свой размер, за счет чего изменяется длина проводника. Путем пропускания электрического тока через проводник, можно определить его сопротивление, которое будет зависеть от степени деформации датчика, а значит и от механического напряжения, которое создает измеряемая сила.

Так как современные датчики чаще всего применяются в весах, то и диапазоны измерений чаще всего производителем указывается в единицах массы и сравнимы с точностью весов. Как было показано в случае с измерением массы, высокую точность и малые величины необходимо измерять, создавая подходящие внешние условия, прежде всего, отсутствие вибраций.

§ 11. Электрические измерения

В отличие от предыдущих описываемых величин электрические невозможна оценить с помощью доступных человеку органов чувств. Электрические измерения в рамках школьной программы физики, в основном, сводятся к измерению силы тока I через проводник или падения напряжения U на участке электрической цепи. Приборы для измерения силы тока I : амперметры (миллиамперметры, микроамперметры). Падение напряжения U измеряется вольтметрами (милливольтметрами, микровольтметрами).

Известно, что в амперметрах сила тока не прикладывается к «эталону ампера». Аналогично, в вольтметре напряжение не сравнивается непосредственно с «эталоном вольта».

Традиционные электроизмерительные приборы работали со шкалой и стрелкой, такого типа *аналоговые* электрические приборы применяются и в школьных физических кабинетах (рис. 11.1).

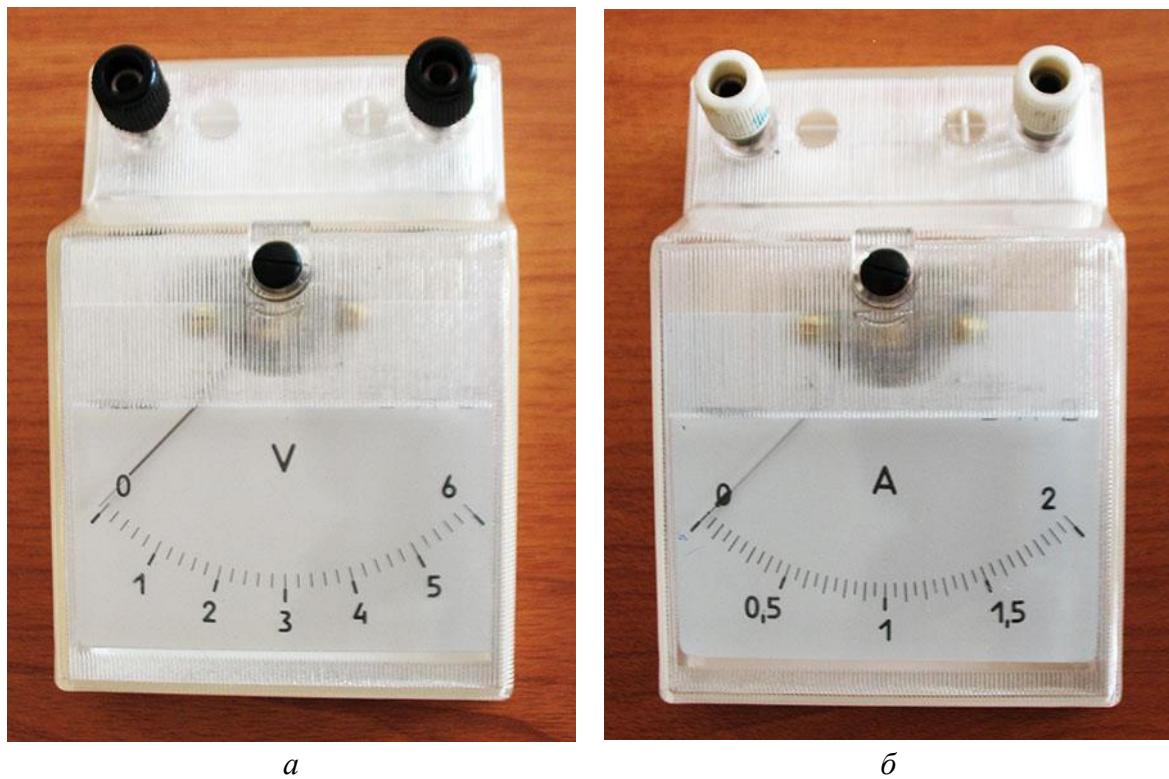


Рис. 11.1. Вольтметр (а), амперметр (б)

Механизмы работы электрических приборов базируются на электромагнитных и электродинамических явлениях. Например, в магнитоэлектрической системе измеряемый ток проходит через проводящую катушку, намотанную на поворачивающуюся рамку, которая помещена между полюсами постоянного магнита. Магнитное поле действует на электрический ток с силой Ампера, которая создает врачающий момент рамки, которая механически связана со стрелкой. В результате угол отклонения стрелки пропорционален силе тока, протекающего через прибор. В средней школе целесообразно начать освоение электрических измерений со стрелочных амперметров и

вольтметров, устройство и функционирование которых вполне объясняется в рамках школьной физики.

В современных мультиметрах микроэлектронные схемы преобразуют величину тока или напряжения в символы на цифровом табло прибора (см. рис. 11.2). В их электронных схемах процесс измерения заключается в сравнении измеряемого сигнала с некоторым опорным.



Рис. 11.2. Мультиметр

Мультиметры могут измерять токи, напряжения, а также сопротивление проводников и емкость конденсатора. Они компактны, просты и удобны в использовании.

Следует иметь в виду, что амперметр показывает силу тока, который проходит через прибор. Вольтметр показывает падение напряжения на своём внутреннем сопротивлении, через которое проходит ток. Это означает, что и амперметр, и вольтметр, вообще говоря, искажают величины, которые должны измеряться.

Амперметр включается в электрическую цепь последовательно (см. рис. 11.3).

Сила тока в замкнутой цепи на рис. 11.3.а равняется

$$I_1 = E / (R + r) \quad (11.1)$$

После подключения амперметра в цепь (рис. 11.3.б), её общее сопротивление увеличивается на собственное сопротивление амперметра R_A . Следовательно, сила тока в цепи становится равной

$$I_2 = E / (R + r + R_A) \quad (11.2)$$

т.е. несколько уменьшается $I_1 > I_2$.

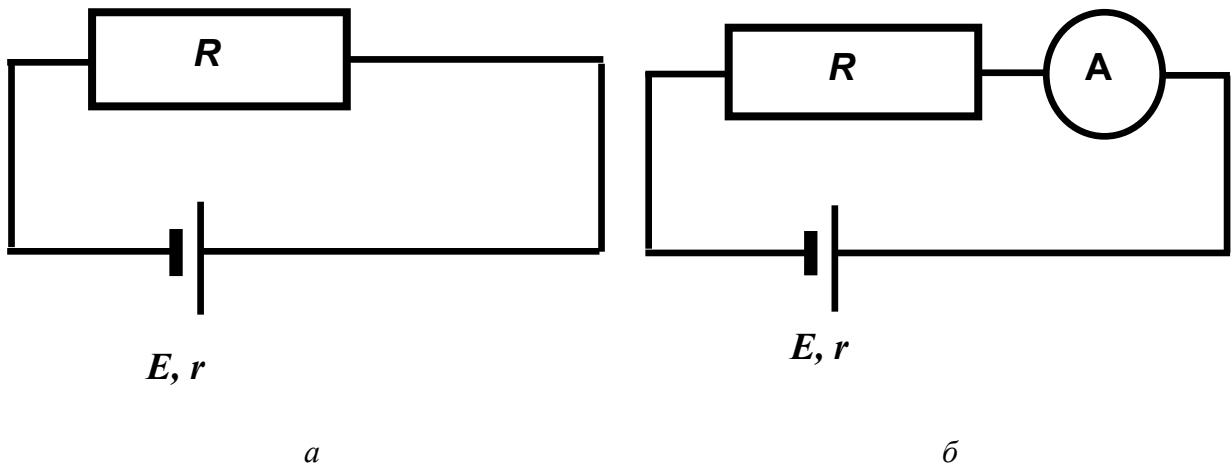


Рис.11.3. Подключение амперметра в электрическую цепь

а) замкнутая электрическая цепь;

б) последовательное включение амперметра.

A – амперметр, E – ЭДС источника тока,

r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление внешней цепи

Иными словами, амперметр вносит искажение в ту величину, которую предназначен измерять. Из формулы (11.2) следует, что чем меньше сопротивление амперметра R_A , тем меньше различие токов I_1 и I_2 . Однако, на практике невозможно величину R_A уменьшать до нуля.

Вольтметр подключается параллельно к участку цепи, падение напряжения на котором он должен измерять (см. рис. 11.4).

До подключения вольтметра сила тока в цепи выражается формулой (11.1), т.к. цепи на рис. 11.3.а и 11.4.а одинаковы. Согласно законам Ома для участка цепи и замкнутой цепи, падение напряжение на внешнем сопротивлении равно

$$U_R = I_1 R = ER / (R + r) \quad (11.3)$$

После подключения вольтметра, как показано на рис. 11.4.б, ток в точке D разветвляется, т.к. часть тока проходит через вольтметр.

Сопротивление участка цепи DF, состоящего из двух параллельных ветвей, равно

$$R^* = RR_V / (R + R_V), \quad (11.4)$$

а общее сопротивление цепи становится равным

$$R_0 = r + R^* = r + RR_V / (R + R_V) \quad (11.5)$$

где R_V – сопротивление вольтметра.

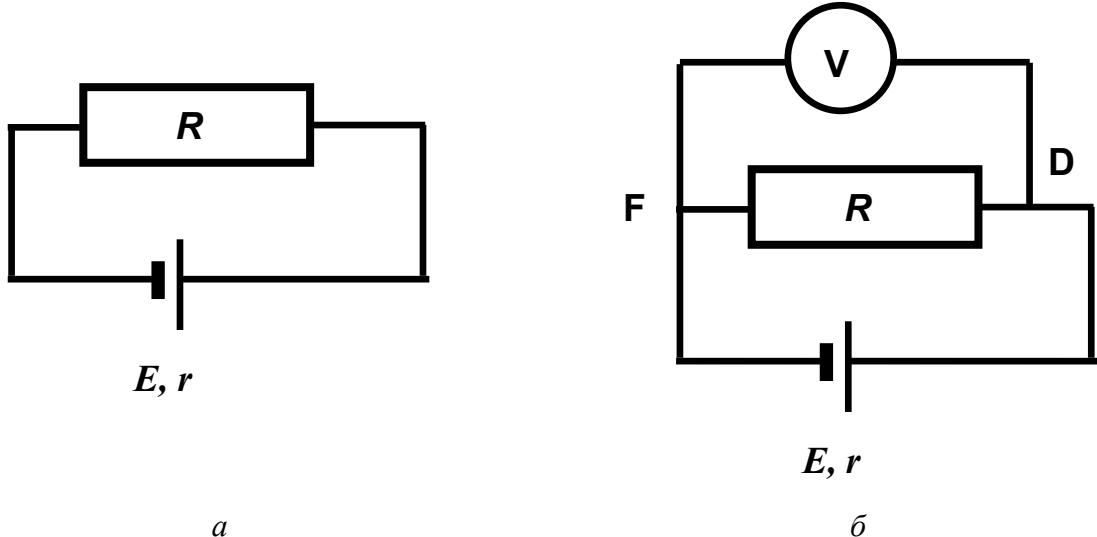


Рис. 11.4. Подключение вольтметра к участку электрической цепи
а) замкнутая электрическая цепь; *б*) параллельное подключение вольтметра.
 В – вольтметр, Е – ЭДС источника тока,
 r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление внешней цепи

Через источник протекает ток силой

$$I_0 = E / R_0 \quad (11.6)$$

Падение напряжение на участке цепи DF, которое измеряет вольтметр, равно

$$U_V = I_0 R^* = ER^* / (R^* + r) \quad (11.7)$$

Очевидно, что величины, выраженные формулами (11.3) и (11.7), различны. Иными словами, подключение вольтметра изменяет падение напряжения, которое надо измерить. Различие величин U_R и U_V определяется различием сопротивлений R и R^* . Из формулы следует, что различие уменьшается с ростом сопротивления R_V . Легко убедиться, что при $R_V \gg R$ становится $R^* \approx R$.

Таким образом, на практике следует использовать амперметры с малым внутренним сопротивлением R_A , а вольтметры, напротив, с большим внутренним сопротивлением R_V .

Из вышеизложенного следует, что из электроизмерительного устройства можно сделать и амперметр, и вольтметр. Чтобы изготовить хороший амперметр следует параллельно устройству поставить шунт, т.е. проводник с малым сопротивлением. Шунтом может служить короткий кусок толстой медной проволоки.

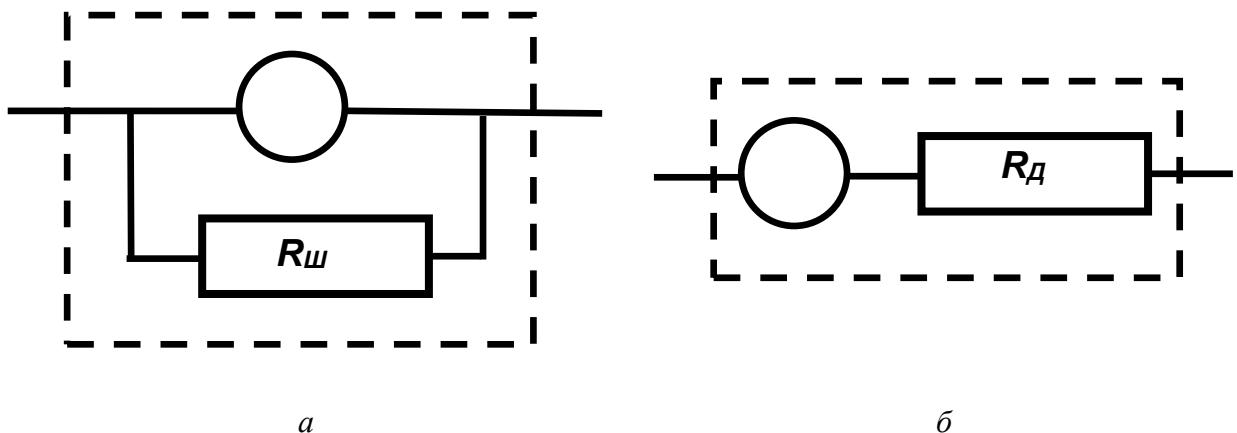


Рис. 11.5. Шунтирование амперметра (а),
подключение дополнительного сопротивления к вольтметру (б).
Кружок – измерительное устройство, $R_{ш}$ – сопротивление шунта,
 R_d – дополнительное сопротивление.
Штриховой контур изображает корпус нового прибора

Сопротивление амперметра с шунтом равно

$$R_A = R_{ш}R_i / (R_{ш} + R_i), \quad (11.8)$$

где R_i – сопротивление измерительного устройства прибора.

Очевидно, что при $R_{ш} \ll R_i$ сопротивление амперметра (11.8) становится приблизительно равным сопротивлению шунта $R_A \approx R_{ш}$.

Как показано ранее, чем меньше сопротивление амперметра, тем меньше искажения его показаний. Однако, следует учитывать, что слишком малое сопротивление шунта $R_{ш}$ может привести к «короткому замыканию», т.е. недопустимо большим токам в цепи, что приведёт к выходу из строя источника тока и других элементов электрической схемы.

Для получения хорошего вольтметра следует к измерительному прибору присоединить последовательно проводник с большим сопротивлением (рис.11.5.б). При этом сопротивление вольтметра просто увеличится на величину дополнительного сопротивления R_d и искажения измерения падения напряжения станут меньше. Очевидно, что увеличивать беспредельно величину R_d нельзя, т.к. через измерительное устройство вольтметра должен проходить ток, достаточный для его надёжной работы.

При градуировке электроизмерительных приборов рассчитываются поправки, обусловленные наличием шунтов и дополнительных сопротивлений. Приборные погрешности исправных приборов определяются ценой наименьшего деления шкалы или единицей младшего разряда цифрового табло.

Мультиметры позволяют измерять разные физические величины и в различных диапазонах. Следует помнить, что не нужно выбирать наибольший диапазон как наиболее универсальный. Имеет смысл первые значения измеряемой величины получить на заведомо большем диапазоне, а затем пере-

ключить на меньший. На аналоговых мультиметрах легко обнаружить, что для наиболее точных измерений следует стремиться подбирать диапазон так, чтобы измеряемое значение было в правой половине шкалы. В цифровых мультиметрах следует придерживаться этого же правила, так как приборная погрешность зависит от выбранного диапазона. Более точно об этом может быть описано в паспорте прибора. Наиболее компьютеризированные мультиметры имеют опцию автоматического подбора оптимального диапазона.

Большинство мультиметров в своем функционале имеют опцию измерения сопротивления проводника. Однако в некоторых работах применяются, так называемые, мостовые схемы. Мостовую схему Уинстона (рис. 11.6) применяют и при выполнении исследовательских работ.

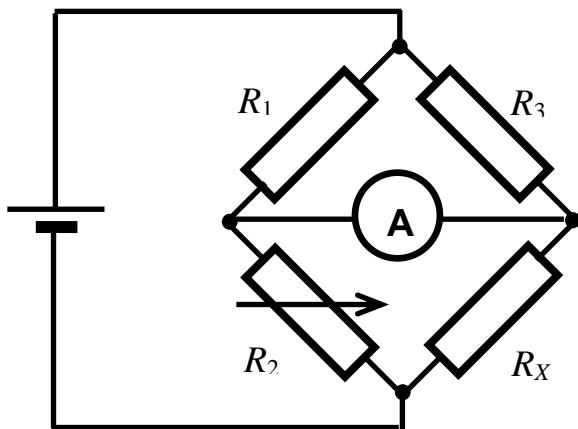


Рис. 11.6. Схема Уинстона для измерения сопротивления проводника

Принцип измерения неизвестного сопротивления R_X основан на уравнивании отношений сопротивлений в обоих плечах моста. «Равновесие» достигается, когда прибор (гальванометр, микроамперметр, миллиамперметр), включённый между плечами, будет показывать нулевое значение силы тока.

На рис. 11.6 элементы R_1 и R_3 – резисторы с известными значениями сопротивлений. Резистор R_2 является переменным.

Легко показать, что баланс моста (нулевое значение силы тока в диагонали с измерительным прибором) достигается, когда отношение двух известных сопротивлений в плече R_2/R_1 равно отношению сопротивлений в плече R_X/R_3 . Переменный резистор R_2 регулируют до тех пор, пока гальванометр не укажет на ноль.

При использовании мостика Уинстона потребуется магазин сопротивлений, гальванометр (или миллиамперметр) и резистор с переменным сопротивлением.

Часто вместо сопротивлений R_1 и R_2 используют металлическую струну и с подвижным третьим контактом. Тогда отношение R_2/R_1 равно отношению длин участков струны, поделенных подвижным контактом. Резистором R_3 при этом служит магазин сопротивлений.

КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЛИЧИН

В этой части рассматриваются измерения таких физических величин, как плотность, ускорение свободного падения, показатель преломления и коэффициент трения. Для этих величин не существуют приборы, позволяющие проводить прямые измерения, однако отработаны несложные и эффективные методики косвенных измерений. Эта часть является руководством к выполнению только измерений и примером для разработки методик косвенных измерений других физических величин.

§ 12. Измерения плотности

Плотность твердого тела определяется как отношение его массы к его объёму:

$$\rho = m / V \quad (12.1)$$

Определение (12.1) обуславливает возможность получения величины плотности тела методом косвенных измерений.

Прямым методом, описанным в §5, измеряется масса тела. Затем, одним из методов, изложенных в §9, определяется объём этого тела. Наконец, по формуле (12.1), рассчитывается величина плотности тела ρ .

Однако, плотность тела ρ можно получить также косвенным методом двойного взвешивания, где на вес тела оказывает влияние выталкивающая сила Архимеда.

Здесь уместно вспомнить формулу величины силы Архимеда

$$F_A = \rho_0 V g \quad (12.2)$$

где ρ_0 – плотность жидкости, V – объём погруженной части тела.

Если тело плавает в жидкости, частично в неё погрузившись, то ясно, что величина силы Архимеда равна модулю силы тяжести, действующей на это тело (см. рис. 12.1).

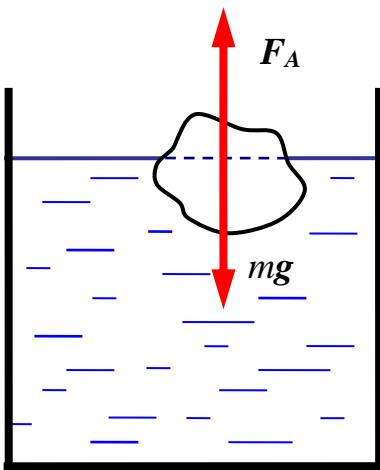


Рис. 12.1. Силы, действующие на плавающее тело, частично погруженное в жидкость.
 mg – сила тяжести,
 F_A – сила Архимеда

В тех случаях, когда тело тонет, т.е. когда его средняя плотность превышает плотность жидкости, сила тяжести и сила Архимеда уже не компенсируют друг друга.

Если тело утонуло, то величина V равна полному объёму тела. Тогда достаточно измерить объём тела V , как было описано в §9. Затем по известной плотности жидкости ρ_0 вычислить силу (12.2).

Однако, как было показано в том же §9, методы измерения объёма тел имеют значительную погрешность. Как следствие, косвенный метод определения силы Архимеда на основе прямого измерения объема и последующего расчета по формуле (12.2), не дает высокую точность. Более точным является другой косвенный метод – метод двойного взвешивания, изобретенный самим Архимедом. Для этого исследуемое тело взвешивают два раза – в воздухе и в воде (рис. 12.2).

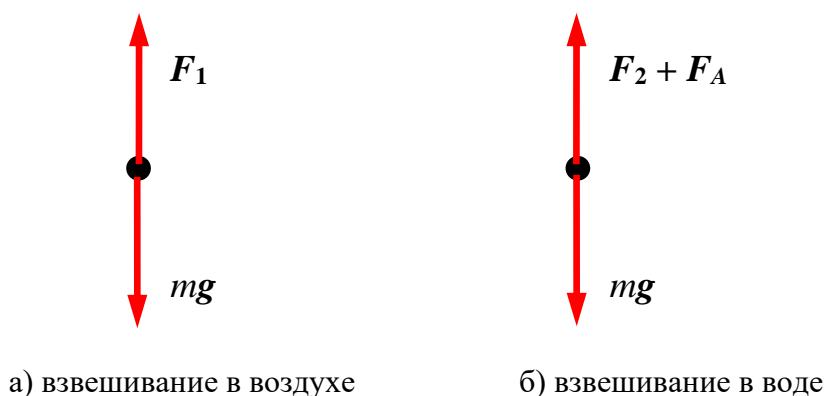


Рис. 12.2. Схема метода двойного взвешивания.
 F_1 и F_2 – силы тяги (например, силы упругости пружины при взвешивании динамометром);
 F_A – сила Архимеда; mg – сила тяжести

Силы F_1 и F_2 на рис. 12.6 представляют собой вес тела в воздухе и в воде соответственно.

Векторные уравнения равновесия тела в воздухе и в воде (рис. 12.2) имеют вид:

$$mg + \mathbf{F}_1 = 0 \quad (12.3)$$

$$mg + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_A = 0 \quad (12.4)$$

где \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 – силы упругости пружины при взвешивании динамометром; mg – сила тяжести; \mathbf{F}_A – сила Архимеда.

Проектирование уравнений (12.3) и (12.4) на вертикальную ось, направленную вверх, даёт систему:

$$-mg + F_1 = 0 \quad (12.5)$$

$$-mg + F_2 + F_A = 0 \quad (12.6)$$

Вычитание уравнения (12.5) из уравнения (12.6) позволяет получить величину силы Архимеда в виде разности

$$F_A = F_1 - F_2 \quad (12.7)$$

где F_1 и F_2 – модули сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , т.е. значения, полученные при взвешивании.

Опыт показывает, что измерения сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 можно провести с удовлетворительной точностью с помощью школьных динамометров. Как следствие, расчёт величины силы Архимеда по формуле (12.7) обеспечивает лучшую точность по сравнению с методом измерения объёма и последующего расчёта по формуле (12.2).

Решая систему уравнений (12.1), (12.2), (12.5), (12.6), получаем выражение плотности тела в виде:

$$\rho = \rho_0 F_1 / (F_1 - F_2) \quad (12.8)$$

где F_1 и F_2 – вес тела в воздухе и в жидкости соответственно, измеренный прямым методом, например, с помощь динамометра. Величина ρ_0 – плотность жидкости, в которой взвешивалось исследуемое тело.

Эксперименты и расчеты погрешностей показывают, что на обычном школьном оборудовании второй косвенный метод даёт лучшую точность результата. В современных исследовательских лабораториях этот метод также активно применяется. Для этого кроме использования более точных весов требуется знать плотность жидкости. Обычно применяют дистиллированную (очищенную от примесей) воду и контролируют ее температуру (так как плотность воды изменяется в зависимости от температуры).

Заметим, что для неоднородных тел расчет плотности по формуле (12.1) даёт лишь среднюю (усредненную по всему объему) плотность.

§ 13. Измерение ускорения свободного падения

Величина скорости движения v тела, согласно её определению, как правило, вычисляется методом косвенных измерений. Прямыми методами, описанными в §4 и §6, измеряются пройденное телом расстояние s и интервал времени Δt , за которое исследуемое тело это расстояние прошло. Затем вычисляется величина скорости по формуле:

$$v = s / \Delta t \quad (13.1)$$

Очевидно, что формула (13.1) даёт величину средней скорости на заданном интервале времени Δt . Мгновенная скорость определяется с помощью предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$. В экспериментах возможно получать приближенные значения, уменьшая интервал времени Δt и измеряя соответствующие расстояния s .

Более сложной задачей является измерение ускорения.

По определению ускорение – характеристика изменения скорости с течением времени.

Рассмотрим измерение такой важной физической величины, как ускорения свободного падения.

Очевидный метод измерения – сделать видеосъёмку падения груза с большой высоты (например, с крыши высокого здания).

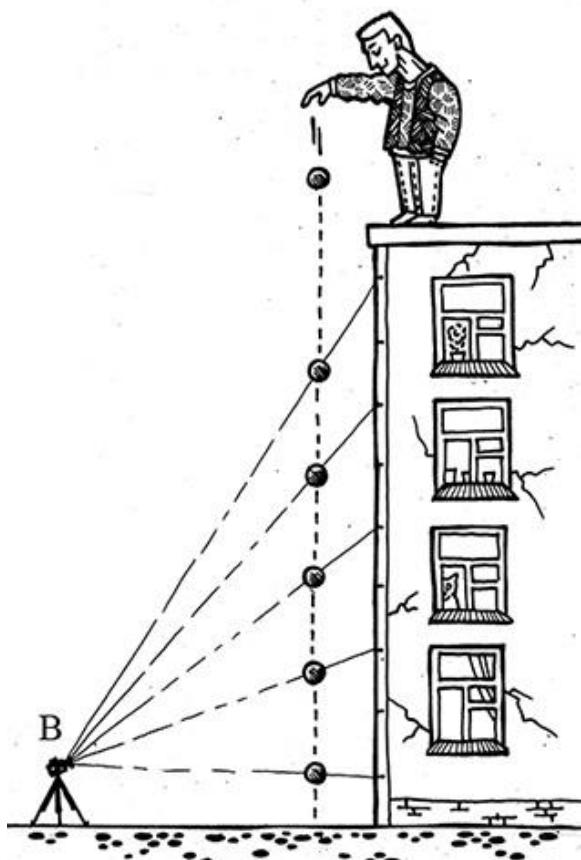


Рис. 13.1. Схема видеосъёмки свободно падающего груза.
В – видеокамера, штрих-пунктирные линии – направления видеосъёмки в разные моменты времени

Однако для того, чтобы узнать расстояния, пройденные грузом в равные интервалы времени, необходимо нанести на стену дома разметку, что потребует помощи верхолаза. Кроме того, придётся учитывать параллакс. Как видно на рис. 13.1, вертикальная координата груза не совпадает с зафиксированной отметкой на стене дома.

Более целесообразно применить метод косвенных измерений, основанный на свойстве изохронности колебаний математического маятника. Период малых колебаний математического маятника выражается известной формулой (6.1), которая содержит ускорение свободного падения g . Выразив величину g из равенства (6.1), получим следующую формулу:

$$g = 4\pi^2 L / T^2 \quad (13.2)$$

В условиях школьного кабинета нетрудно изготовить маятник длиной L около 2 метров. Следует с таким маятником провести серию экспериментов, чтобы возможно точнее измерить период колебаний. Для этого целесообразно измерять время t , за которое маятник совершил N полных колебаний. Для измерения времени t можно использовать стрелочный или электронный секундомер.

Период выразится отношением

$$T = t / N \quad (13.3)$$

Длину маятника L надо измерить прямым методом (см. § 4) с мерной лентой (рулеткой) с миллиметровыми делениями.

Если в лаборатории имеется установка, снабженная оптическими воротами, показанная на рис. 6.5.а, то следует её использовать для измерения периода колебаний маятника, т.к. это дает более точное значение искомой величины.

Так как формула (6.1) справедлива для колебаний с малой амплитудой, начальное угловое отклонение маятника от вертикали не рекомендуется делать свыше 10 угловых градусов.

Выполнение вышеперечисленных требований к эксперименту и расчёт по формуле (13.2) обеспечит достаточную точность определения ускорения свободного падения.

§ 14. Измерения показателя преломления прозрачного материала

Законы геометрической оптики, изучаемые в средней школе, позволяют проводить измерения оптических характеристик веществ.

Для измерения показателя преломления материала можно использовать толстую пластину или образец в виде прямоугольного параллелепипеда. Существенно, чтобы исследуемое тело имело две параллельные плоскости (см. рис. 14.1).

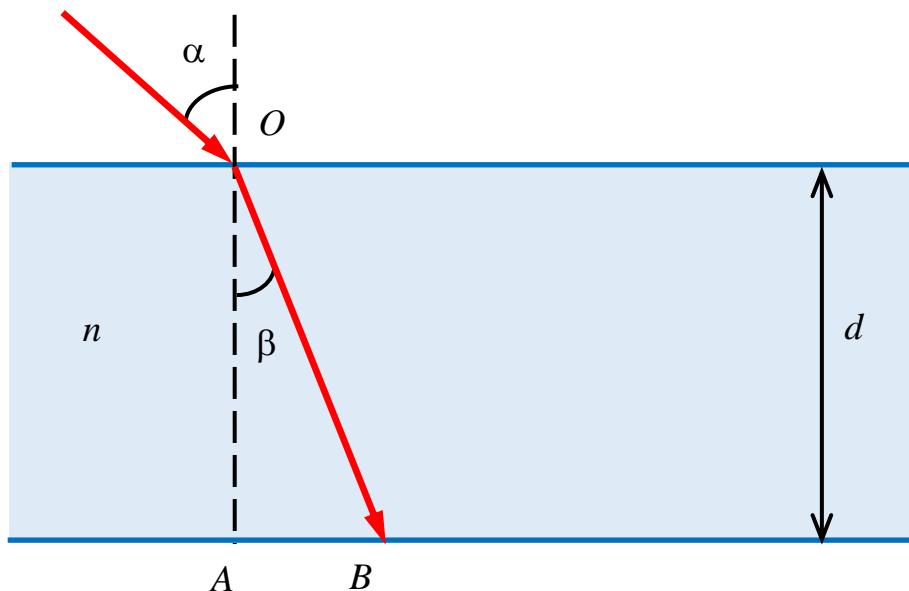


Рис. 14.1. Схема прохождения света через плоскую пластину толщиной d .

Красные стрелки – лучи света.

Штриховая линия OA – перпендикуляр к поверхностям пластины.

α – угол падения; β – угол преломления.

O – точка входа падающего луча в пластину,

B – точка выхода преломленного луча из пластины

В эксперименте луч лазерной указки направляется по поверхности пластины под углом α (рис. 14.1). После преломления луч света распространяется в веществе под углом β относительно перпендикуляра к поверхности пластины. Связь между углами α и β выражается законом Снеллиуса

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n \quad (14.1)$$

где n – показатель преломления материала (точнее, показатель преломления относительно воздуха).

В опыте следует зафиксировать точку B, т.е. точку выхода преломленного луча из пластины, и измерить расстояние h между точками A и B (рис. 14.1). Тогда синус углов преломления легко выразить из треугольника OAB:

$$\sin(\beta) = \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad (14.2)$$

Подстановка выражения (14.2) в формулу (14.1) даёт возможность вычислить показатель преломления материала прозрачной пластины.

Пример 14.1. В эксперименте использовался образец плексигласа в форме прямоугольного параллелепипеда. Толщина бруска равнялась $d = 40$ мм. На поверхность образца был направлен луч лазерной указки под углом $\alpha=45^\circ$ к перпендикуляру, как показано на рис. 14.2.

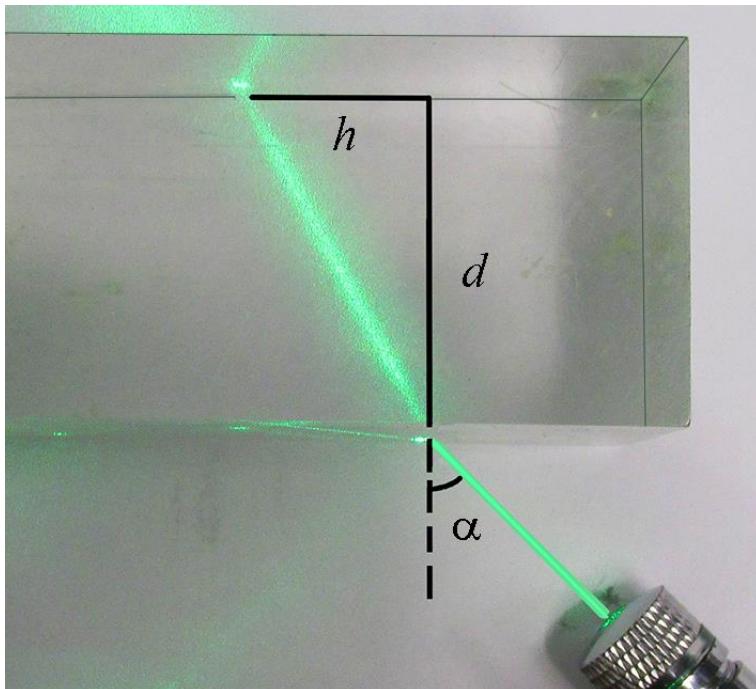


Рис. 14.2. Преломление
луча лазерной указки на
границе воздух-
plexiglas.
Угол α равен 45°

При этом было измерено расстояние $h = 40$ мм. Расчеты по формулам (14.2) и (14.1) дают значение показателя преломления $n \approx 1,5$; что совпадает с табличными данными для плексигласа.

§ 15. Измерения коэффициента трения

15.1. Коэффициент трения скольжения.

При перемещении тела по твердой поверхности, на него действует сила трения скольжения F_{TC} . Еще в XVII веке было обнаружено, что величина силы трения пропорциональна величине силы нормальной реакции N , действующей на тело со стороны поверхности.

$$F_{TC} = \mu N \quad (15.1)$$

Коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом трения скольжения. Этот коэффициент является характеристикой соприкасающихся материалов. Например, «сталь по асфальту», «дуб по березе» и т.д.

Измерение коэффициента μ является косвенным. Проводятся прямые измерения величины силы трения скольжения F_{TC} . Например, для измерения коэффициентом трения скольжения стали по дереву можно использовать деревянную доску и стальной брускок. Следует прикрепить крюк динамометра к брускоку и двигать его равномерно (т.е. с постоянной скоростью) по горизонтально расположенной доске, как показано на рис. 15.1.а.

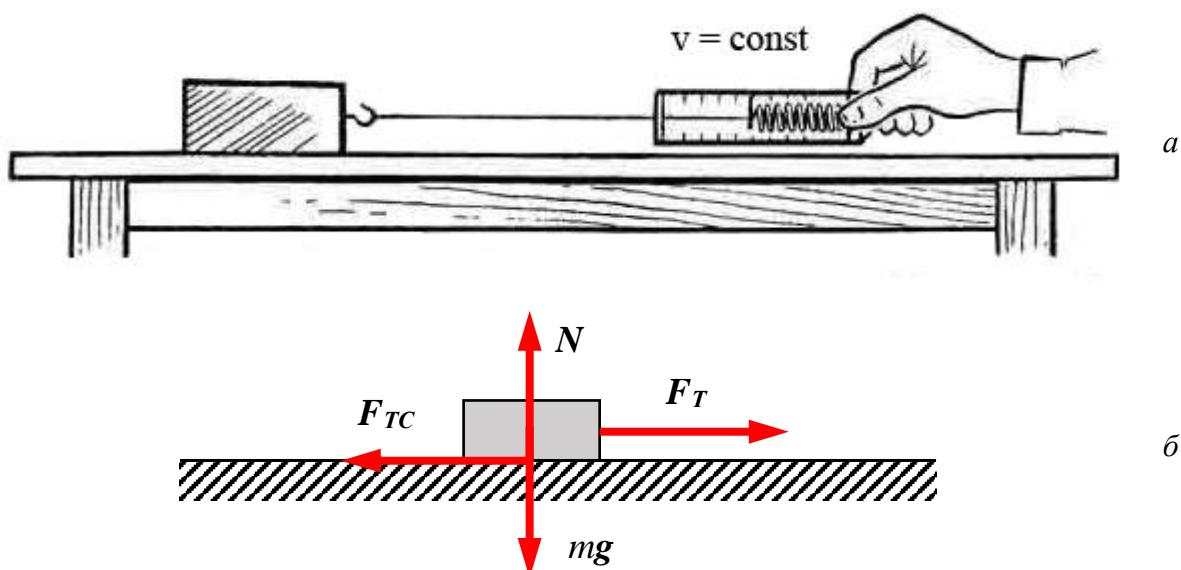


Рис. 15.1. Схема измерения силы трения скольжения:

- а) равномерное перемещение бруска по горизонтальной поверхности с помощью динамометра.
- б) силы, приложенные к брускоку: F_T – сила тяги, F_{TC} – сила трения скольжения; mg – сила тяжести; N – сила нормальной реакции

При равномерном перемещении бруска сумма сил, действующих на него, равна нулю (рис. 15.1.б).

Следовательно, модули силы трения скольжения F_{TC} и силы тяги F_T равны. Но сила тяги создается динамометром, она равна силе упругости пружины и её величина указывается на шкале динамометра. Т.о., показания динамометра дают нам величину силы трения скольжения F_{TC} .

Сила нормальной реакции равна по модулю сила тяжести. Следовательно, для получения величины N достаточно взвесить груз на любых весах (пружинных, рычажных, электронных,...) и использовать равенство

$$N = mg \quad (15.2)$$

Из уравнений (15.1) и (115.2) выражается коэффициент трения скольжения

$$\mu = \frac{F_T}{mg} \quad (15.3)$$

Недостатком данного метода является то, что на практике трудно осуществить строго равномерное перемещение бруска по горизонтали.

15.2. Коэффициент трения покоя.

Практика показывают, что сдвинуть тяжелый предмет, стоящий на горизонтальной поверхности, труднее, чем тащить его равномерно. Это означает, что трения покоя превышает по величине трение скольжения.

Сила трения покоя, вообще говоря, зависит от внешних сил, приложенных к данному телу. Наибольший интерес имеет максимальное значение силы трения покоя.

Целесообразно для различных пар материалов ввести коэффициент трения покоя μ_p уравнением, аналогичным равенству (15.1):

$$F_M = \mu_p N \quad (15.4)$$

где F_M – модуль максимальной силы трения покоя.

Для получения значения μ_p целесообразно применить процедуру косвенного измерения. Используем наклонную плоскость из определенного материала, угол наклона которой можно плавно увеличивать от нуля. На плоскости свободно устанавливается брускок, изготовленный из второго материала (рис. 15.2.а).

При малых углах наклона плоскости брускок лежит неподвижно. При этом сумма трёх сил, действующих на него равна нулю (рис. 15.2.б).

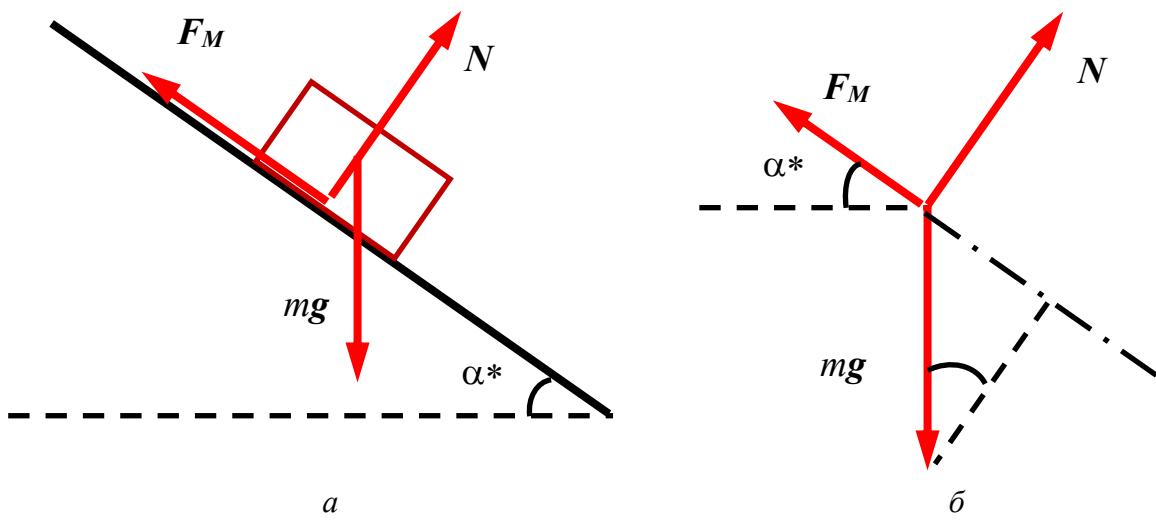


Рис. 15.2. Схема измерения максимального значения силы трения покоя:
а) силы, приложенные к неподвижному брускку на наклонной плоскости.
б) векторная диаграмма для расчёта максимальной силы трения покоя.

F_M – максимальная сила трения покоя; mg – сила тяжести;

N – сила нормальной реакции

При плавном и медленном увеличении угла наклона плоскости α наступит момент, когда брускок начнет соскальзывать вниз. Максимальный угол α^* перед соскальзыванием бруска определяет максимальную величину силы трения покоя F_M . Пользуясь векторной схемой на рис. 15.2.б и теоремой о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами, получаем значение

$$F_M = mg \sin(\alpha^*) \quad (15.5)$$

Погрешность найденного значения силы определяется точностью измерения угла α^* .

Для измерения угла наклона плоскости можно использовать способы и инструменты, описанные в §8.

По векторной схеме на рис. 15.2.б легко вычислить модуль нормальной реакции, действующей на брускок. Для момента начала соскальзывания

$$N = mg \cos(\alpha^*) \quad (15.6)$$

Используя равенства (15.4) – (15.6), получаем выражение для коэффициента трения покоя

$$\mu_{\Pi} = \operatorname{tg}(\alpha^*) \quad (15.7)$$

Таким образом, для определения коэффициента трения покоя следует возможно точнее измерить минимальный угол соскальзывания α^* .

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Результаты физических экспериментов представляются, как правило, в виде чисел. Это правильно. Ещё Пифагор утверждал, что в основе всего сущего лежат числа. Согласно Галилею, математика – единственный язык, на котором Человек может разговаривать с Природой. Это означает, что для выяснения физического смысла результатов экспериментов требуется этап математической обработки.

§ 16. Округление чисел

Прежде чем обратиться к методам математической обработки результатов физических экспериментов, следует вспомнить правила округления чисел.

Операция округления заключается в отбрасывании младших разрядов числа. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то оставшиеся цифры остаются без изменений.

Пример 16.1. Округление числа 26,47122 до сотых долей даёт число 26,47.

Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов больше 5, то цифра младшего разряда из оставшихся увеличивается на единицу.

Пример 16.2. Округление числа 49,3623 до десятых долей даёт число 49,37.

Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов равна 5, то, как и в предыдущем случае, цифру младшего разряда из оставшихся надо увеличить на единицу.

Пример 16.3. Округление числа 12,6345 до тысячных долей даёт 12,635.

Последнее правило обосновано тем, что после отбрасываемой цифры 5 могут быть ещё какие-то цифры больше нуля. В последнем примере более точное выражение исходного числа может быть таким: 12,634501. Ясно, что число 0,000501 больше половины числа 0,001. Следовательно, при округлении до тысячных надо добавить единицу в разряд тысячных.

§ 17. Значащие цифры

Часто утверждается, что сейчас человечество живёт в цифровом мире. Огромное количество информации выдаётся в числовом виде. Нас окружают компьютеры, которые постоянно обрушаивают на нас потоки чисел. В такой

ситуации квалифицированному физику-исследователю необходимо отличать правдивую информацию от ложной.

В прямых измерениях экспериментатор списывает результат со шкалы прибора или с цифрового табло. Если прибор прошёл предварительную проверку, то всем записанным цифрам можно доверять. Все эти цифры являются **значащими**, они несут правдивую информацию об измеряемых физических величинах. Однако, результат косвенных измерений необходимо вычислять (см. § 2).

При современном распространении вычислительной техники молодежь начинает выполнять вычисления на калькуляторах, планшетах и ноутбуках. При этом большое количество цифр в полученном результате часто воспринимается как достигнутая высокая точность.

Пример 17.1. Требуется определить площадь прямоугольного листа бумаги. Линейкой с миллиметровыми делениями была измерена длина сторон листа: $a = 211$ мм и $b = 297$ мм. Таким образом, исходные данные имеют 3 значащие цифры. Искомая площадь получается перемножением длин сторон $S = ab$ на калькуляторе или на бумаге «столбиком»: $S = 62667$ мм². Но значение площади не может содержать 5 значащих цифр, т.к. умножение не может увеличить точность результата в 100 раз! Вычисленное значение площади необходимо округлить до 3-х значащих цифр. Результат удобно выразить в квадратных сантиметрах: $S = 627$ см².

Пример 17.2. Равномерно движущееся тело проходит 2 метра за 6,3 секунды. Найти скорость тела.

Расчёт обычно выполняется на калькуляторе или в электронной таблице Excel. Деление расстояния на время дает величину скорости. Вид полученного результата зависит от количества разрядов вывода и может иметь такой вид:

$$0,3174603175.$$

Авторы неоднократно видели подобные результаты в отчётах по школьным научно-исследовательским работам.

Большинство школьников понимает, что результат надо округлить, но до какого знака?

Разумный подход к представлению результата вычислений базируется на точности исходных данных.

Пусть в рассматриваемом эксперименте использовались такие измерительные приборы, которые позволили измерить длину с точностью 1 см, а время – с точностью 0,1 сек. Это означает, что измеренная длина имеет три значащих цифры (200 см), а время – две (6.3 сек.).

За погрешности прямых измерений принимаются единицы младших разрядов. Следовательно, относительная погрешность измерения длины равна $1/200 = 0,005$; относительная погрешность измерения времени $0,1/6,3 \approx 0,016$. Очевидно, что точность результата не может превышать точности исходных

данных. Это означает, что результат вычисления скорости придётся округлить до $32 \text{ см/с} = 0,32 \text{ м/с}$, т.е. до двух значащих цифр.

Если результат округлить до трёх значащих цифр, т.е. записать значение скорости, как $31,7 \text{ см/с}$, то это будет означать, что результат получен с точностью до $0,1 \text{ см/с}$. Тогда относительная погрешность скорости будет равна $0,1/31,7 \approx 0,003$, т.е. в 5 раз меньше, чем относительная погрешность измерения времени! Но точность результата не может быть выше точности исходных данных! Третья значащая цифра в числе $31,7$ реально не обоснована и является ненадежной, *незначимой*.

В данном примере проиллюстрировано общее практическое правило: количество значащих цифр в результате равно наименьшему количеству значащих цифр в исходных данных.

Отсюда следует важный практический вывод.

Точность (относительная погрешность) результата определяется самым неточным из исходных данных. Нет смысла увеличивать точность одного из измерительных приборов, если у другого низкая точность.

Например, в вышеприведённом примере нет смысла измерять расстояние с точностью до 1 мм при использовании того же секундомера.

Замечание. Иногда от школьников удается услышать такое утверждение: «значащие цифры – это цифры после десятичной запятой». Автору неизвестно происхождение этого определения, но для размерных величин оно абсурдно. Очевидно, что при изменении единицы измерения положение десятичной запятой смещается.

Пример 16.3. $170 \text{ мм} = 17 \text{ см} = 0,17 \text{ м} = 0,00017 \text{ км}$.

В научной литературе иногда численные значения величин записываются с указанием в скобках погрешности младшего (или младших) разрядов. Например, запись $0,743(2)$ означает, что данный результат получен с погрешностью $0,002$. Это значит, что в приведенном примере только 2 цифры являются верными значащими $0,74$.

Особо отметим понятие *значащего нуля*. Это нули, которые являются значимыми цифрами в числе и не могут быть опущены без потери точности измерения или значения. Очевидно, что в числе 30017 все нули значащие. Значимость нулей в младших разрядах числа зависит от его заданной точности. Например, если число $4,880000$ имеет точность, равную одной миллионной, то все нули являются значащими. Если же это же число задано с точностью до одной сотой, то все нули являются незначащими и должны быть отброшены.

Важным является вопрос об округлении математических констант и фундаментальных физических величин. Иногда встречаются школьники, которые уверены, что число «пи» (отношение длины окружности к её диаметру) равно $3,14$ точно.

Современные программы обработки числовой информации при своей работе загружают в память компьютера основные математические константы (число π , число Эйлера e и другие) с большим количеством десятеричных разрядов. При их использовании в расчётах можно не заботиться об их выражении, но конечный результат вычислений необходимо округлить до верных значащих цифр, согласно вышеизложенной методике.

Фундаментальные физические постоянные в хороших справочниках приводятся с большим количеством значащих цифр, что обусловлено высокой точностью экспериментов, в которых они были измерены.

При использовании в расчётах этих постоянных следует записать их в память компьютера с большей точностью, чем собственные экспериментальные результаты. Например, если данные опытов содержат 3 значащие цифры, то физические постоянные можно задать с 5-ю значащими цифрами. Это делается для того, чтобы избежать накопления погрешностей при промежуточных вычислениях. Окончательный результат расчётов, безусловно, округляется по вышеприведённым правилам.

§ 18. Приборные погрешности

Многовековой опыт экспериментальной физики показывает, что абсолютно точных измерений не бывает. Следовательно, одной из важнейших задач физики является расчёт погрешностей измерений.

Как было указано в § 2, измерения физической величины представляет собой сравнение с определённым эталоном.

Например, эталонами на линейке (рис. 4.1 в § 4) или ленте рулетки (рис. 4.7 в § 4) являются отрезки длиной 1 мм, расположенные между рисками. Масса при взвешивании измеряется с помощью эталонных гирек (грузов определённой массы).

Очевидно, что любой эталон имеет конечный размер, массу и т.п. Именно наименьший используемый эталон задаёт погрешность, называемую **приборной** или **аппаратной**.

Ясно, что измерить данным прибором величину с погрешностью меньше приборной – невозможно.

У стрелочных приборов за величину приборной погрешности целесообразно брать цену наименьшего деления (ЦНД) данного измерительного прибора.

ЦНД, конечно, «оценка сверху». Заметим, что встречающиеся иногда в учебных пособиях рекомендации считать приборной погрешностью половину или треть деления не являются надёжными, так как половина или треть деления оценивается «на глаз», который не у всех людей «как ватерпас».

Приборная погрешность, т.е. ЦНД, линейки и рулетки (рис. 4.1 и 4.7, § 4) равна 1 мм. Шкала нониуса у штангенциркуля (рис. 4.2, § 4) позволяет уменьшить приборную погрешность до 0,05 мм. Круговая дополнительная шкала микрометра (рис. 4.3) даёт приборную погрешность равную 0,01 мм.

Приборная погрешность измерения массы пружинными весами, показанными на рис. 5.3.в, § 5, равняется 10 г.

Приборная погрешность измерения времени механическим секундомером на рис. 6.3.а, § 6 равна 0,1 сек.

Приборные погрешности измерения температуры жидкостными термометрами, изображенными на рис. 7.1.а и 7.1.б, в § 7, равны 1°C и 0,1°C соответственно.

Приборная погрешность измерения объёма жидкости мензуркой на рис. 9.1, § 9 равна ЦНД = 1 мл, плюс объём мениска.

Приборная погрешность измерения напряжения вольтметром на рис. 11.1.а (§ 11) равна 0,2 В, приборная погрешность измерения силы тока амперметром на рис. 11.б (§ 11) равна 0,05 А.

Если прибор имеет цифровую шкалу, то за величину приборной погрешности следует брать единицу младшего разряда.

Цифровое табло лазерного дальномера (рис. 4.8, § 4) градуировано в метрах и содержит три разряда дробной части. Это означает, что приборная погрешность дальномера составляет 1 мм.

Приборная погрешность измерения массы тела на лабораторных весах, показанных на рис. 5.5.а (§ 5), равна 0,1 г, на аналитических весах, показанных на рис. 5.5.б (§ 5), равна 1 мкг.

Младший разряд электронного секундомера 0,001 сек (рис. 6.3, § 6). Это означает, что приборная погрешность секундомера в дальномере составляет 0,001 сек.

Иногда на приборе особо указывается точность прибора (приборная погрешность) в его единицах измерения. Тогда нет оснований принимать за приборную погрешность ЦНД.

§ 19. Систематические погрешности

Перед проведением измерений следует проверить правильность работы используемого прибора. При проверке используется надёжный эталон.

Например, перед использованием электронных тензовесов из школьного кабинета, необходимо взвесить на них гирьку из стандартного набора разновесов.

На рис. 19.1. приведен типичный случай. На цифровом табло отображается значение измеряемой массы с точностью до 0,01 г. Следовательно, весы должны гарантировать приборную погрешность 0,01 г.



Рис. 19.1. Систематическая погрешность школьных тензометров

Однако, при взвешивании эталонной гири массой 100 грамм, на табло отобразилось число 100,12 г. Это означает, что весы дают систематическую погрешность Δ_0 , равную 0,12 грамма, которая значительно превышает ЦНД.

При использовании прибора, обладающего систематической погрешностью Δ_0 , необходимо её учитывать. Если показания прибора превышают значение эталона, то из результата измерения следует вычесть погрешность Δ_0 . Если, наоборот, показание прибора меньше значение эталона, то к результату измерения необходимо прибавить величину Δ_0 .

Систематической погрешностью является отклонение стрелки от нуля у выключенного прибора (так называемый, «сбитый ноль»), как показано на рис. 11.1.а. В таких случаях, «нуль можно вернуть на место» путем механической регулировки положения стрелки.

Систематическая погрешность может быть постоянной величиной, а может и зависеть от измеряемой величины. В любом случае, до проведения экспериментов систематическая погрешность должна быть измерена или рассчитана, а затем учтена при вычислении результата измерений.

Далее полагается, что все систематические погрешности исправлены или учены.

§ 20. Случайные погрешности

Из предыдущего текста хочется сделать следующие выводы. Надо устранить все систематические погрешности. Затем, если брать всё более точные приборы (с меньшей и меньшей приборной погрешностью), то можно точность измерений увеличивать неограниченно.

Однако, при выполнении опытов часто складывается иная ситуация. В одинаковых условиях, одним и тем же методом, одним и тем же прибором проводятся измерения определённой, но неизвестной экспериментатору физической величины.

Например, 5 измерений времени падения груза с высоты $h = 2$ м электронным секундомером дало результаты:

$$0,65 \text{ с}; \quad 0,64 \text{ с}; \quad 0,67 \text{ с}; \quad 0,66 \text{ с}; \quad 0,64 \text{ с}.$$

Во-первых, видно, что результаты различаются. Причем различие превышает приборную погрешность, равную 0,01 с.

Во-вторых, в разбросе полученных значений не просматривается никакой регулярности.

Прежде всего, интересна причина разброса чисел, полученных, как утверждалось выше, «в одинаковых условиях». Дело в том, что в даже тщательно выполненных опытах может соблюдаться неизменность только наблюдаемых, контролируемых факторов. Но в реальных условиях на результат опыта действует множество неизвестных факторов или тех, которые невозможно стабилизировать в используемом экспериментальном методе. Это могут быть колебания температуры и давления, движения воздуха, вибрации приборов, нестабильность питания в электрической сети и многое другое.

Конечно, в хорошо продуманном эксперименте, каждый из этих факторов оказывает очень слабое влияние, но их случайное сочетание может значительно повлиять на численное значение результата измерений. Погрешности, вызванные нерегулярными и неконтролируемыми факторами, называются **случайными**.

При проведении экспериментов, естественно, необходимо постараться уменьшить влияние случайных, неконтролируемых факторов. Но если нельзя уменьшить до нуля случайные погрешности, то их надо правильно учитывать.

Методы анализа и оценки случайных погрешностей разработаны в разделе прикладной математики, которая называется математической статистикой.

Пусть в эксперименте требуется измерить числовое значение определённой физической величины A . Измерения проводятся n раз в неизменных условиях, при этом получились результаты:

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n, \quad (20.1)$$

которые, вообще говоря, не одинаковы. Каждое значение содержит случайную погрешность, которая неизвестна.

Согласно математической статистике, наилучшим приближенным значением измеряемой величины A является **среднее статистическое** \bar{a} .

Среднее статистическое равно сумме всех полученных значений (20.1), делённой на количество этих значений:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (20.2)$$

Из-за случайных погрешностей абсолютно точное значение искомой величины A остаётся, строго говоря, неизвестным.

Равенство:

$$A \approx \bar{a} \quad (20.3)$$

является приближенным.

Чтобы на практике принимать за искомую величину A среднее статистическое (20.2), необходимо убедиться, что абсолютное значение разности

$$| A - \bar{a} | \quad (20.4)$$

достаточно мало.

В математической статистике случайная погрешность вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n-1}}. \quad (20.5)$$

Под корнем в числителе стоит сумма квадратов разностей измеренных значений и среднего статистического. Величина (20.5) часто называется **среднеквадратичной погрешностью** или стандартным отклонением.

Два замечания.

Во-первых, при $n = 1$ формула (20.5) теряет смысл. Это означает, что при однократном измерении невозможно узнать случайную погрешность эксперимента.

Во-вторых, видно, что с ростом числа измерений n величина погрешности (20.5) S уменьшается. Казалось бы, при $n \rightarrow \infty$ величина S станет равной нулю и мы получим точное равенство $\bar{a} = A$. Однако, это спекулятивное рассуждение, т.к. невозможно долго поддерживать неизменные условия эксперимента и в реальных условиях число n не может быть очень большим.

Важно!

Величина (20.5) представляет собой не максимальную, а среднюю погрешность. Как следствие, среди результатов измерений могут встречаться числа, которые находятся за пределами интервала $(\bar{a} - S ; \bar{a} + S)$.

В начале данного параграфа был приведен пример эксперимента по измерению времени свободного падения груза с высоты $h = 2$ м. Среднее статистическое время падения, подсчитанное по формуле (20.2), равно $\bar{t} = 0,652$ с. Среднеквадратичная случайная погрешность времени падения вычисляется по формуле (20.5) и равняется $S_t = 0,013$ с. Интервал $(\bar{t} - S_t ; \bar{t} + S_t)$ имеет границы: $(0,639$ с. ; $0,665$ с.). Видно, что результат $t_3 = 0,67$ с. лежит вне данного интервала.

Для экспериментальной физики было бы полезно иметь численное значение максимальной случайной погрешности S_{max} . Это было бы такое число, что все результаты последующих экспериментов (в тех же условиях) не выходили бы из интервала $(\bar{a} - S_{max} ; \bar{a} + S_{max})$.

Конечно, можно взять заведомо огромную величину. Например, в предыдущем примере $S_{max} = 1$ мин. Ясно, что такая величина бесполезна для оценки точности измерений и анализа физического смысла эксперимента.

В математической статистике расчёт случайной погрешности базируется на использовании доверительной вероятности. Дело в том, что теоретически случайное отклонение $|A - a_i|$ может быть сколь угодно большим. Однако, практика показывает, что большие отклонения столь маловероятны, что в конкретном эксперименте не наблюдаются.

Расчёт случайной погрешности ΔA_{cl} начинается с выбора величины **доверительной вероятности** α . Это, как правило, число, близкое к единице. Для школьных экспериментов часто выбирается $\alpha = 0,95$. На основе вероятности α рассчитывается такая погрешность ΔA_{cl} , что вероятность попадания в интервал $(\bar{a} - \Delta A_{cl} ; \bar{a} + \Delta A_{cl})$ результатов измерения a_i равна α . И напротив, вероятность того, что любой последующий результат измерения a_i окажется вне интервала $(\bar{a} - \Delta A_{cl} ; \bar{a} + \Delta A_{cl})$, равна $1 - \alpha$. Иными словами, такое событие настолько маловероятно, что в определенном эксперименте практически не происходит.

Теория вероятностей изучается в высшей школе, поэтому здесь ограничимся рецептом случайной погрешности ΔA_{cl} .

Выбирается определенное значение доверительной вероятности α . В школьных экспериментах обычно используются величины $\alpha = 0,9$; $\alpha = 0,95$; $\alpha = 0,99$. Далее потребуется параметр, называемый в теории вероятностей «число степеней свободы», который равен $v = n - 1$, где n – количество измерений в одинаковых условиях.

Затем следует обратиться к таблице (или к соответствующей компьютерной программе) коэффициентов Стьюдента (см. табл. 21.1 в конце следующего параграфа). По заданным значениям α и v в таблице отыскивается соответствующее значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, v}$.

Тогда случайная погрешность выражается формулой

$$\Delta A_{cl} = S t_{\alpha,v} / \sqrt{n} \quad (20.6)$$

где S – среднеквадратичная погрешность (19.5).

Вернёмся к примеру с падением тела. Было проведено 5 измерений, следовательно, число степеней свободы $v = 4$. Возьмём доверительную вероятность $\alpha = 0,95$. В табл.21.1 на пересечении соответствующих строк находим коэффициент Стьюдента $t_{0,95; 4} = 2,776$. Следовательно, случайная погрешность $\Delta A_{cl} = 0,018$ сек.

Легко проверить, что все экспериментальные значения не выходят из интервала $(\bar{t} - \Delta A_{cl}; \bar{t} + \Delta A_{cl})$.

§ 21. Абсолютная и относительная погрешности

Как следует из предыдущих параграфов, систематические погрешности можно убрать или учесть. В полную погрешность результата эксперимента дают вклад приборная и случайная погрешности.

В математической статистике доказывается, что результирующая погрешность равна квадратному корню из суммы квадратов приборной и случайной погрешностей:

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A_{cl})^2 + (\Delta A_{np})^2}. \quad (21.1)$$

Случайная погрешность ΔA_{cl} вычисляется по формуле (20.6). Приборная погрешность обсуждалась в §18. В школьных экспериментах можно за приборную погрешность брать ЦНД, если нет более подробной информации.

Диапазон чисел $(\bar{a} - \Delta A; \bar{a} + \Delta A)$ называется **доверительным интервалом**. Полуширина доверительного интервала совпадает с погрешностью ΔA .

Проиллюстрируем использование формулы (21.1) тем же примером о свободном падении. Из данных эксперимента (по младшему разряду результатов измерений) можно сделать вывод, что приборная погрешность $\Delta A_{np} = 0,01$ с. Расчёт по формуле (21.1) с учётом ранее вычисленной случайной погрешности даёт значение $\Delta A_t \approx 0,021$ с.

Теперь следует обратить внимание, что результаты измерений были записаны с двумя значащими цифрами. Следовательно, окончательные результаты математической обработки должны тоже иметь не более двух значащих цифр. Расчёт границ доверительного интервала даёт пару чисел: (0,63 с.; 0,67 с.). Таким образом, в результате получается: время падения равно 0,65 сек. с погрешностью 0,02 сек.

Погрешность ΔA имеет ту же размерность, что и измеряемая величина A . Такая погрешность называется абсолютной. Также для анализа результатов

эксперимента используется относительная погрешность ε_A , определяемая формулой:

$$\varepsilon_A = \Delta A / A. \quad (21.2)$$

Очевидно, что абсолютная погрешность выражается через относительную равенством:

$$\Delta A = \varepsilon_A A. \quad (21.3)$$

Так как исследуемая величина A , вообще говоря, неизвестна экспериментатору, то относительную погрешность вычисляют делением абсолютной погрешности на среднее статистическое:

$$\varepsilon_A = \Delta A / \bar{A}. \quad (21.4)$$

Согласно формуле (21.1), абсолютная погрешность определяется двумя разными причинами: неточностью измерительного прибора и разбросом измеренных значений из-за действия случайных факторов.

В практике встречают разные случаи.

Например, в некотором эксперименте определенный груз взвешивается динамометром. Неоднократное повторение взвешивания дает одинаковые результаты. При этом не следует полагать результат взвешивания абсолютно точным. В таких случаях равна нулю случайная погрешность (19.6). Абсолютная погрешность (21.1) совпадает с приборной, которая определяется ценой деления шкалы прибора (динамометра).

Результаты повторных измерений могут совпадать, когда измерительный прибор имеет такую ЦНД, что приборная погрешность много больше случайной, т.е. $\Delta A_{np} \gg \Delta A_{cl}$. Тогда абсолютная погрешность практически равна приборной

$$\Delta A \approx \Delta A_{np} \quad (21.5)$$

Это может означать, что для измерений был выбран слишком грубый прибор.

Иногда в ходе экспериментов возникают ситуации, когда систематическая погрешность принимает столь нерегулярные значения, которые трудно учитывать.

Пример. Для экспериментального исследования трения качения используются цилиндры различного радиуса. Один из объектов представлял собой цилиндр из бука. Измерения диаметра цилиндра проводились штангенциркулем, шкала нониуса которого обеспечивала приборную погрешность 0,1 мм.

Однако, при измерениях диаметров в разных направлениях получались значения, различающиеся более, чем на величину приборной погрешности (см. рис. 21.1).

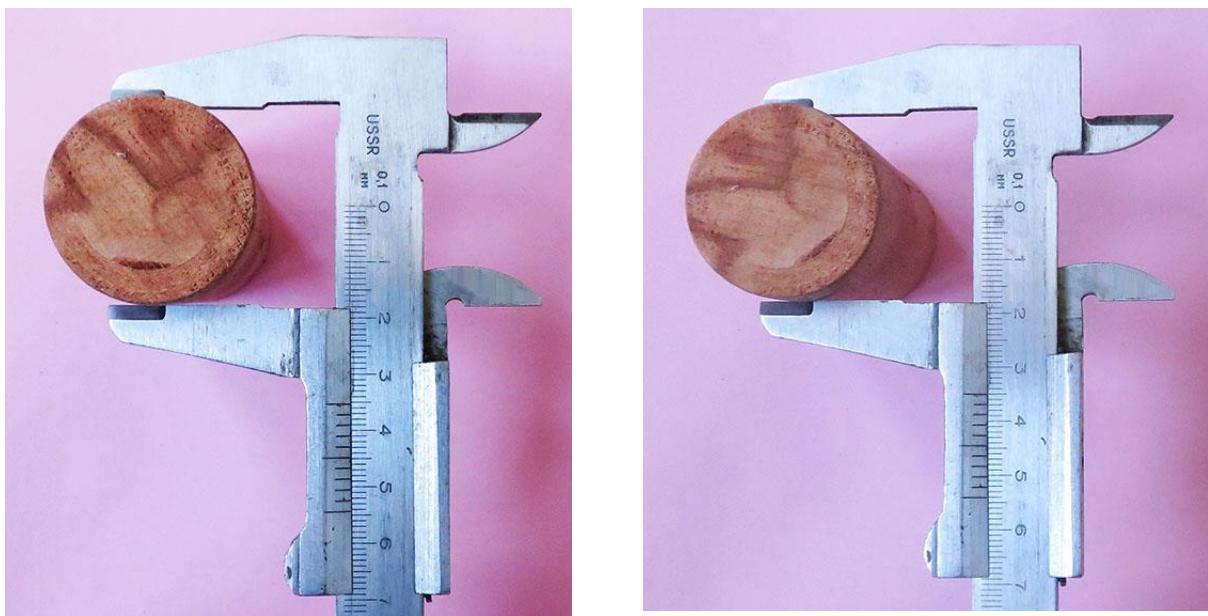


Рис. 21.1. Измерения штангенциркулем диаметра деревянного цилиндра
в разных направлениях

Это означает, что измеряемый объект не является точным цилиндром, а имеет более сложную геометрическую форму. При этом затруднительно вычислить величину систематической погрешности диаметра, которая должна использоваться в дальнейших расчетах.

Многолетняя практика доказала надёжность следующей математической процедуры. Диаметр измеряется несколько раз в разных направлениях. Разброс измеренных чисел рассматривается не как результат систематических отклонений, а как значения случайной величины. За величину диаметра принимается среднее статистическое (20.2), а случайная погрешность вычисляется по формулам (20.5) и (20.6). Затем с учётом приборной погрешности рассчитывается абсолютная погрешность (21.1).

В примере с деревянным цилиндром были измерены 8 разных диаметров. Среднее значение получилось равным $\bar{d} \approx 35,2$ мм. Случайная погрешность (19.6) при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ равнялась $\Delta d_{cl} \approx 0,09$ мм, т.е. немного меньше приборной. Таким образом, отклонение нашей «деревяшки» от точной цилиндрической формы дало абсолютную погрешность диаметра $\Delta d \approx 0,13$ мм, что незначительно превышает приборную погрешность.

Таблица 21.1

Коэффициенты Стьюдента

Число степеней свободы	Доверительная вероятность		
	0.9	0.95	0.99
1	6,314	12,706	63,619
2	2,92	4,303	9,925
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,86	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,25
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,055
13	1,771	2,16	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,12	2,921
17	1,74	2,11	2,898
18	1,734	2,103	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845
21	1,721	2,08	2,831
22	1,717	2,074	2,819
23	1,714	2,069	2,807
24	1,711	2,064	2,797
25	1,708	2,06	2,787
26	1,706	2,056	2,779
27	1,703	2,052	2,771
28	1,701	2,048	2,763
29	1,699	2,045	2,756
30	1,697	2,042	2,750

Для большего числа степеней свободы имеются таблицы в специальной литературе⁵.

⁵ Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. Нижний Новгород, ННГУ. 2004. 120 с.

§ 22. Погрешности косвенных измерений

В § 2 утверждалось, что в современной экспериментальной физике, в основном, используются, так называемые, косвенные измерения.

В таких экспериментах искомая величина Z выражается через величины $A, B, C\dots$, которые измеряются непосредственно, т.е. методами прямых измерений.

Например, для измерения жесткости пружины мы используем метод, описанный в § 5. Пружина подвешивается на кронштейне штатива, к её нижнему концу крепится груз (см. рис. 5.3). В опыте измеряется удлинение пружины и масса груза. Из уравнения равновесия (5.5) выражается жесткость пружины

$$k = mg / \Delta L. \quad (22.1)$$

После измерения удлинения пружины и массы груза рассчитываются погрешности этих величин. Возникает вопрос: как получить погрешность жесткости k , вычисленной по формуле (22.1)?

Таким образом, перед экспериментатором ставится проблема расчёта погрешности ΔZ «косвенно измеряемой величины» Z при уже известных погрешностях результатов прямых измерений $\Delta A, \Delta B, \Delta C\dots$. При этом известна зависимость величины Z от величины $A, B, C\dots$

Погрешности величин $A, B, C\dots$ вычисляются методами, изложенными в § 18 – § 21.

Общая методика расчёта погрешностей косвенных измерений базируется на теоремах теории вероятностей, математической статистики и требует умения дифференцировать функции. Но для обработки результатов большинства школьных экспериментов достаточно знать несколько простых правил, не выходящих за рамки учебной программы средних ученических заведений.

Вид формул вычисления погрешностей косвенных измерений зависит от вида функции, связывающей искомую величину с результатами прямых измерений.

22.1. Искомая величина Z выражается суммой двух измеряемых величин A и B .

$$Z = A + B. \quad (22.2)$$

Обозначим ΔA и ΔB – абсолютные погрешности величин A и B соответственно. Тогда абсолютная погрешность величины Z выражается формулой:

$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \quad (22.3)$$

Пример 22.1. Неравноплечий рычаг уравновешивается двумя грузами массами m_1 и m_2 . Оба груза предварительно были по отдельности взвешены

на весах. Погрешностями масс являются приборные погрешности Δm_1 и Δm_2 . Если грузы взвешивались на разных весах, то погрешности Δm_1 и Δm_2 могут быть неравными. Тогда абсолютная погрешность суммарной массы выражается так:

$$\Delta(m_1 + m_2) = \sqrt{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2} \quad (22.4)$$

Если грузы взвешивались на одном и том же приборе, то приборные погрешности равны $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$ и выражение абсолютной погрешности суммарной массы упрощается:

$$\Delta(m_1 + m_2) = \Delta m \sqrt{2} \quad (22.5)$$

Если погрешность измерения каждой массы равна $\Delta m = 1$ г, то погрешность суммарной массы составляет $\Delta(m_1 + m_2) \approx 1,4$ г.

Формула (22.3) обобщается на любое конечное количество слагаемых.

$$\Delta(A + B + C + \dots) = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 + (\Delta C)^2 + \dots} \quad (22.6)$$

22.2. Искомая величина Z выражается разностью двух измеряемых величин A и B .

$$Z = A - B. \quad (22.7)$$

С помощью общей методики доказывается, что абсолютная погрешность величины Z выражается также формулой (22.3), т.е.

$$\Delta(A - B) = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} \quad (22.8)$$

22.3. Искомая величина Z выражается произведением двух измеряемых величин A и B , т.е.

$$Z = AB. \quad (22.9)$$

В таких случаях удобно сначала перейти от абсолютных погрешностей к относительным:

$$\varepsilon(A) = \Delta A / A; \quad \varepsilon(B) = \Delta B / B \quad (22.10)$$

Относительная погрешность произведения $Z = AB$ выражается формулой

$$\varepsilon(Z) = \sqrt{\varepsilon^2(A) + \varepsilon^2(B)} \quad (22.11)$$

Затем проводится переход к абсолютной погрешности произведения с помощью общей формулы (21.3):

$$\Delta Z = Z \varepsilon(Z). \quad (22.12)$$

Формула (22.11) обобщается на произвольное конечное количество сомножителей.

$$\varepsilon(ABC...) = \sqrt{\varepsilon^2(A) + \varepsilon^2(B) + \varepsilon^2(C) + \dots} \quad (22.13)$$

при этом остаётся справедливым равенство (22.12).

22.4. Искомая величина Z выражается отношением двух измеряемых величин A и B , т.е.

$$Z = A / B. \quad (22.14)$$

Этот случай аналогичен рассмотренному в предыдущем пункте **22.3**. Сначала целесообразно перейти от абсолютных погрешностей к относительным по формулам (22.10). Затем использовать формулы (22.11) и (22.12).

Пример 22.2. В начале данного параграфа рассматривалось вычисление жёсткости пружины k на основе результатов измерений массы груза m и удлинения пружины ΔL по формуле (22.1). Согласно вышеизложенной методике, сначала выражается относительная погрешность жёсткости

$$\varepsilon(k) = \sqrt{\varepsilon^2(m) + \varepsilon^2(g) + \varepsilon^2(\Delta L)} \quad (22.15)$$

Все относительные погрешности, стоящие под радикалом, выражаются через соответствующие абсолютные, как в формулах (22.10):

$$\varepsilon(m) = \Delta m / m; \quad \varepsilon(g) = \Delta g / g; \quad \varepsilon(\Delta L) = \Delta(\Delta L) / \Delta L \quad (22.16)$$

Абсолютные погрешности массы груза Δm и удлинения пружины $\Delta(\Delta L)$ должны быть вычислены по формуле (21.1), учитывающей и приборные, и случайные погрешности, полученные по результатам эксперимента.

Заметим, что в формулах (22.16) величины m и ΔL являются средними значениями массы и удлинения, полученными в эксперименте.

Если в расчётах используется величина ускорения свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, то за абсолютную погрешность можно брать единицу младшего разряда (см. § 17), т.е. $\Delta g = 0,1 \text{ м/с}^2$.

22.5. Искомая величина Z выражается степенью измеряемой величины A :

$$Z = cA^P. \quad (22.17)$$

где P – показатель степени, c – известный численный коэффициент.

Тогда относительная погрешность $\varepsilon(Z)$ выражается формулой:

$$\varepsilon(Z) = P \varepsilon(A) \quad (22.18)$$

Заметим, что коэффициент c в формулу (22.18) не входит.

Переход к абсолютной погрешности ΔZ проводится по общему правилу (21.3):

$$\Delta Z = cA^P P \Delta A / A. \quad (22.19)$$

где A – величина, полученная в результате прямых измерений, ΔA – её абсолютная погрешность.

Пример 22.3. Требуется вычислить площадь диска. Диаметр диска D измеряется штангенциркулем. Известно, что площадь круга выражается формулой

$$S = \pi D^2 / 4 \quad (22.20)$$

Согласно (22.18), относительная погрешность площади равна:

$$\varepsilon(S) = 2\varepsilon(D) \quad (22.21)$$

Абсолютная погрешность площади диска вычисляется по формуле (22.19):

$$\Delta S = \pi (D^2/4) 2 \Delta(D) / D = \pi (D/2) \Delta D \quad (22.22)$$

где ΔD – абсолютная погрешность измерения диаметра диска.

22.6. Если же искомая величина Z выражается более сложными зависимостями от измеряемых величин, то для расчёта погрешностей используются последовательно вышеизложенные правила.

Пример 22.4. Требуется узнать объём круглого стержня (т.е. стержня, у которого поперечное сечение – круг). Объём определяется формулой для цилиндра:

$$V = \pi H D^2 / 4 \quad (22.23)$$

где H – длина стержня, D – его диаметр.

Длина стержня измерялась линейкой с миллиметровыми делениями, диаметр – микрометром. Абсолютные погрешности длины и диаметра являются приборными: $\Delta H = 1$ мм; $\Delta D = 0,01$ мм.

Формула (22.23) содержит операции умножения и возведения в степень, следовательно, надо использовать правила, описанные в пунктах **22.3** и **22.5** данного параграфа.

Для ясности сделаем расчёт подробно. Объём V сначала выразим произведением

$$V = H S \quad (22.24)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

Согласно формуле (22.11), относительная погрешность объёма выразится так:

$$\varepsilon(V) = \sqrt{\varepsilon^2(H) + \varepsilon^2(S)} \quad (22.25)$$

Но относительная погрешность площади $S = \pi D^2/4$ выразится по формуле (22.18):

$$\varepsilon(S) = 2 \varepsilon(D) \quad (22.26)$$

Следовательно, относительная погрешность объёма получит вид:

$$\varepsilon(V) = \sqrt{\varepsilon^2(H) + 4\varepsilon^2(D)} \quad (22.27)$$

Переход к абсолютной погрешности объёма проводится, как и ранее, по общей формуле (21.3):

$$\Delta V = V \varepsilon(V). \quad (22.28)$$

Аналогично можно получить формулу для относительной погрешности кинетической энергии тела $E_K = mv^2/2$:

$$\varepsilon(E_K) = \sqrt{\varepsilon^2(m) + 4\varepsilon^2(v)} \quad (22.29)$$

Если рассматривается случай равномерного движения, то скорость v вычисляется как отношение пройденного расстояния s к времени t , за которое это расстояние пройдено телом: $v = s / t$. Тогда измеримыми величинами являются масса, расстояние и скорость. Обратившись к пункту **22.4** этого параграфа, преобразуем последнюю формулу так:

$$\varepsilon(E_K) = \sqrt{\varepsilon^2(m) + 4(\varepsilon^2(s) + \varepsilon^2(t))} \quad (22.30)$$

В выражение (22.30) следует подставить относительные погрешности, выраженные через соответствующие абсолютные, которые были получены в ходе эксперимента

$$\varepsilon(m) = \Delta m / m ; \quad \varepsilon(s) = \Delta s / s; \quad \varepsilon(t) = \Delta t / t \quad (22.31)$$

Наконец, абсолютная погрешность кинетической энергии тела рассчитывается по формуле (21.3):

$$\Delta(E_K) = E_K \varepsilon(E_K) . \quad (22.32)$$

Формулы для расчёта погрешности потенциальной энергии тела в гравитационном поле читателю предлагается получить самостоятельно.

§ 23. Функции и уравнения

В предыдущих параграфах показана работа с числами для получения значений физических величин, которые невозможно измерять непосредственно, излагались корректные методы расчёта погрешностей для достижения максимально возможной точности результатов, рассматривались вычисления по заданным формулам физической теории и т.д.

Однако, работа с числами является первым уровнем описания физической картины Мира. Следующий уровень – функциональное описание.

Физическое описание окружающего мира использует постоянные величины (гравитационная постоянная, элементарный электрический заряд, масса нейтрона, ...) и переменные (координаты падающего тела, температура воздуха, высота растущего дерева, ...). Интересно то, что многие физические величины при своих изменениях остаются связанными определенными закономерностями, т.е. являются зависимыми. Например, давление воздуха убывает с высотой над уровнем мирового океана. Многие физические величины изменяются с течением времени.

Зависимые физические величины связываются с помощью функций различного вида. Например, длина пройденного пути s при равномерном движении выражается линейной функцией времени t .

$$s = v t$$

где v – величина постоянной скорости.

Замечание. В учебной литературе часто путаются математические понятия функции и уравнения, что существенно затрудняет обучение школьников.

Строгие определения приведены в серьёзных учебниках по математике, которые бывают сложными для восприятия. По этой причине целесообразно формировать у учащихся математические понятия постепенно, опираясь на простые школьные физические опыты и лабораторные работы.

В школьной физике, в основном, используются функции, которые по своему смыслу являются связью двух физических переменных. Стандартная запись:

$$y = f(x) \quad (23.1)$$

где x и y – переменные. Символом f обозначается функция, т.е. правило, по которому для каждого значения переменной x (из её области определения) вычисляется значение переменной y .

Пример 23.1. Пусть тело свободно упало на плоскую поверхность с высоты h . Начальная скорость равна нулю, сопротивлением воздуха пренебрегается. Тогда величина скорости тела в функционально зависит от высоты h

$$v = \sqrt{2gh} \quad (23.2)$$

Аргументом в функции (23.2) является высота h , зависимой переменной – величина скорости v . Ускорение свободного падения g – константа. Математически функция (23.2) относится к степенным с показателем степени $1/2$.

Следует ещё раз подчеркнуть, что функция связывает *переменные* величины.

Множество уравнений (точнее, алгебраических уравнений), используемых в физике, можно представить в виде:

$$f(x) = 0 \quad (23.3)$$

где некоторая функция приравнивается к нулю. Решением уравнения (23.3) является *числовое* значение аргумента, которое обращает равенство (23.3) в тождество.

Пример 23.2. Камень подброшен вертикально вверх, как показано на рис. 23.1. Сопротивлением воздуха пренебрегается, ускорение свободного падения g – постоянная.

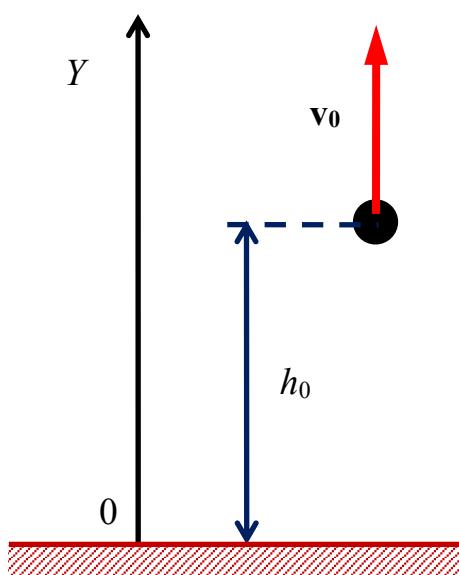


Рис. 23.1. Схема подбрасывания камня вертикально вверх.
 v_0 – начальная скорость камня, h_0 – вертикальная координата камня в начальный момент времени. Нуль оси Y выбран на поверхности земли

Зависимость вертикальной координаты y от времени t выражается квадратичной функцией:

$$y = h_0 + v_0 t - g t^2/2 \quad (23.4)$$

где g – ускорение свободного падения.

Чтобы найти момент падения камня на поверхности земли t^* , надо с помощью функции (23.4) составить уравнение:

$$y(t = t^*) = 0 \quad \text{или} \quad h_0 + v_0 t^* - g t^{*2}/2 = 0 \quad (23.5)$$

Корнем уравнения (23.5) является искомый момент времени t^* , иными словами: время полёта от момента броска до падения камня на поверхность земли.

Квадратное уравнение (23.5) имеет два корня, но отрицательный корень не имеет физического смысла. Следовательно, время полета равно:

$$t^* = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \quad (23.6)$$

Для закрепления понятий ещё раз отметим: (23.4) – функция, (23.5) – уравнение.

В равенстве (23.4) величина t – переменная. Напротив, величина t^* , выраженная формулой (23.6), определенное число. При подстановке выражения (23.6) в равенство (23.5) оно обращается в тождество.

Таким образом, уравнения и функции являются различными математическими понятиями.

Разные формулы, которыми пользуются школьники, чаще всего, представляют собой функции. Примерами являются вышеприведённые равенства (23.2) и (23.4). Формула (23.4) может рассматриваться как функция двух аргументов: зависимость времени полета тела t^* от начальной высоты h_0 и величины начальной скорости v_0 .

§ 24. Интерполяция и экстраполяция

При экспериментальном исследовании взаимосвязи двух переменных физических величин x и y иногда неизвестен математический вид этой функции $f(x)$. Результаты опытов представляются таблицей чисел, состоящей из двух столбцов или двух строк.

Таблица 24.1

x_1	x_2	x_n
y_1	y_2		y_n

Важно, что каждая пара чисел $x_i; y_i$ ($i = 1, \dots, n$) была получена в определённых физических условиях. Например, величины x и y являются температурой и давлением атмосферы в определенный момент времени.

Пример 24.1. Эксперимент заключался в исследовании деформации изгиба. Один конец упругой пластины закреплялся в зажиме на кронштейне штатива. К другому концу последовательно подвешивались грузы разной массы M . Для каждого груза измерялось вертикальное смещение h конца упругой пластины (рис. 24.1).

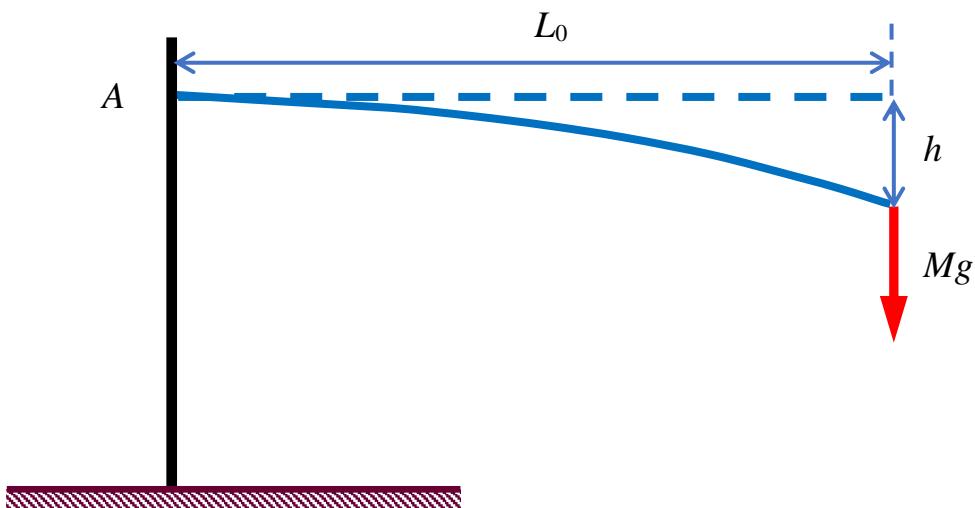


Рис. 24.1. Схема эксперимента по исследованию упругого изгиба стальной пластины.

A – точка закрепления пластины; L_0 – длина изгибаемой пластины;

Mg – вес груза; h – стрела прогиба

Результаты серии опытов для определенной пластины записаны в табл. 24.2.

Таблица 24.2

Результаты серии опытов по упругому изгибу стальной пластины

Масса груза (г)	9,7	15,4	25,1	36,1	50,6	60,1
Стрела прогиба (мм)	4	7	11	16	22	27

В ходе исследования при анализе и обсуждении результатов может понадобиться числовое значение величины y_p для значения величины x_p , которого нет в 1-й строке табл. 24.1.

Пусть число x_p лежит в интервале $x_i; x_{i+1}$, т.е. $x_i < x_p < x_{i+1}$.

Тогда требуемое число y_p находится методом линейной интерполяции. Для этого неизвестную функцию на интервале $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют линейной, график которой проходит через точки $(x_i; y_i)$ и $(x_{i+1}; y_{i+1})$.

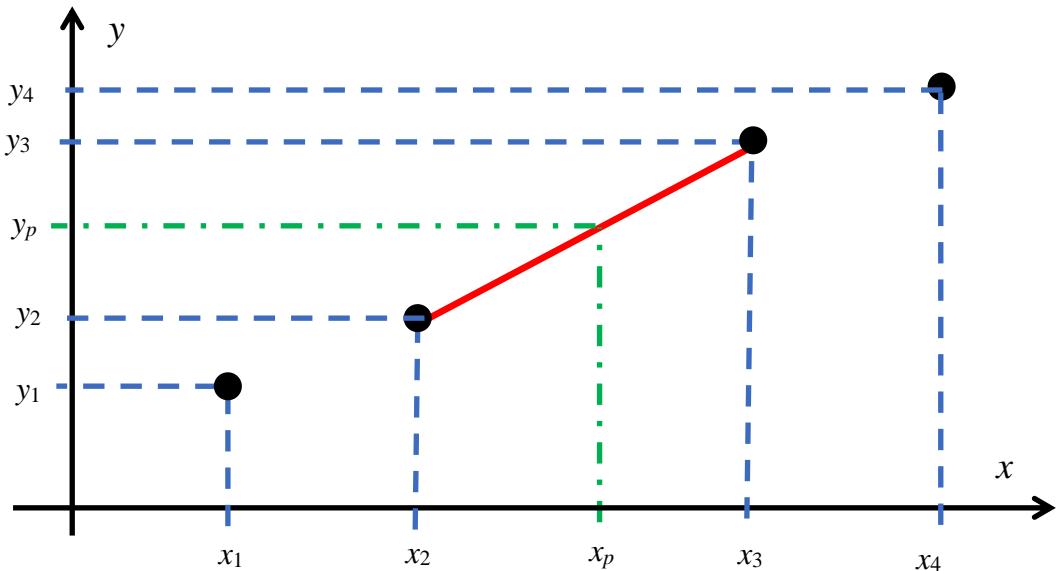


Рис. 24.2. Пример линейной интерполяции

Например, на графике, приведенном на рис. 24.2 точка x_p лежит между точками x_2 и x_3 .

Используя подобие прямоугольных треугольников, запишем пропорцию:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_p - y_2}{x_p - x_2} \quad (24.1)$$

Решение пропорции даёт искомую величину y_p :

$$y_p = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} (x_p - x_2) + y_2 \quad (24.2)$$

В общем случае, формула линейной интерполяции может быть записана в следующем виде:

$$y_p = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x_p - x_i) + y_i \quad (24.3)$$

где точка x_p лежит внутри интервала $[x_i; x_{i+1}]$.

Метод линейной интерполяции даёт надёжные результаты, когда интервал $[x_i ; x_{i+1}]$ мал и многие функции на этом интервале могут с хорошим приближением заменяться линейной зависимостью. Можно сказать, что при этом «сглаживание» неоднородностей не даёт значительных погрешностей.

В примере 24.1, используя данные таблицы 24.2 и формулу (24.3), вычислим стрелу прогиба для массы груза $M = 40$ г. Подставив в формулу (24.3) значения

$$x_i = 36,1; x_{i+1} = 50,6; y_i = 16; y_{i+1} = 22; x_p = 40; \text{ получим } y_p = 17,6.$$

Это означает, что при нагрузке массы $M = 40$ г стрела прогиба данной пластины равна 17,6 мм.

Контрольный эксперимент с грузом $m = 40$ г даёт стрелу прогиба 18 мм, что близко к результату линейной интерполяции

Следует иметь в виду, что формальное использование линейной интерполяции может дать ложные результаты.

Пример 24.2. Ученик 6-го класса в течение нескольких дней в 9 часов утра записывал температуру воздуха на улице. Результаты измерений он оформил в виде графика, приведенного на рис. 24.3.

По каким-то причинам он пропустил 27 ноября. Можно ли восстановить температуру в этот день путем линейной интерполяции?

Как легко видеть, линейная интерполяция даёт значение минус 2 по Цельсию. Однако, удалось выяснить у независимого наблюдателя, что температура 27 ноября равнялась плюс 2°C. Оказалось, что через данную местность 27 ноября прошел небольшой теплый циклон, который повысил температуру.

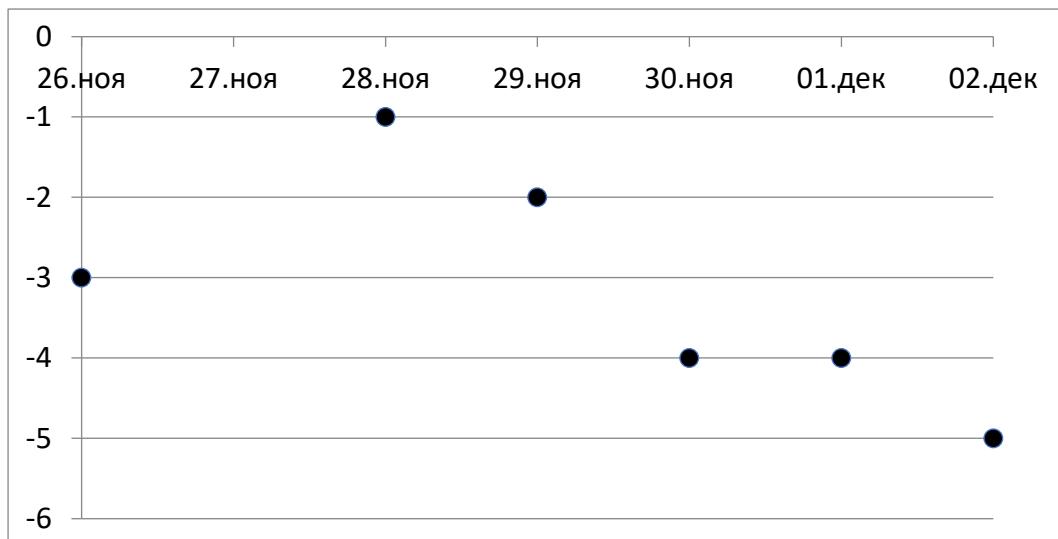


Рис. 24.3. Температура уличного воздуха, измеренного в течении нескольких дней

Следует сделать вывод, что интерполяцию можно применять в случаях медленно изменяющихся функций.

Более сложным является ситуация, когда требуется получить значение зависимой переменной y для аргумента x , который лежит вне исследованного диапазона. Иными словами, для интересующей нас точки x_p выполняется одно из неравенств: $x_p < x_{min}$ или $x_p > x_{max}$.

В таких задачах иногда предлагается использовать линейную интерполяцию по двум первым (левым) или двум последним (правым) точкам и продолжить линейную функцию на пределы интервала аргумента $[x_{min}; x_{max}]$ (см. пример на рис. 24.4).

Такую математическую операцию называют линейной **экстраполяцией**. Для вычислений значения числа y_p по заданному аргументу x_p можно использовать формулу (24.3).

Однако, метод линейной экстраполяции даёт справедливые результаты только если имеются надёжные основания полагать функцию $y = f(x)$ линейной вне экспериментально исследованного диапазона $[x_{min}; x_{max}]$. При удалении от границ данного интервала риск получить ложные результаты растёт.

Часто экстраполяцию применяют для функций времени, иными словами, для предсказаний будущего.

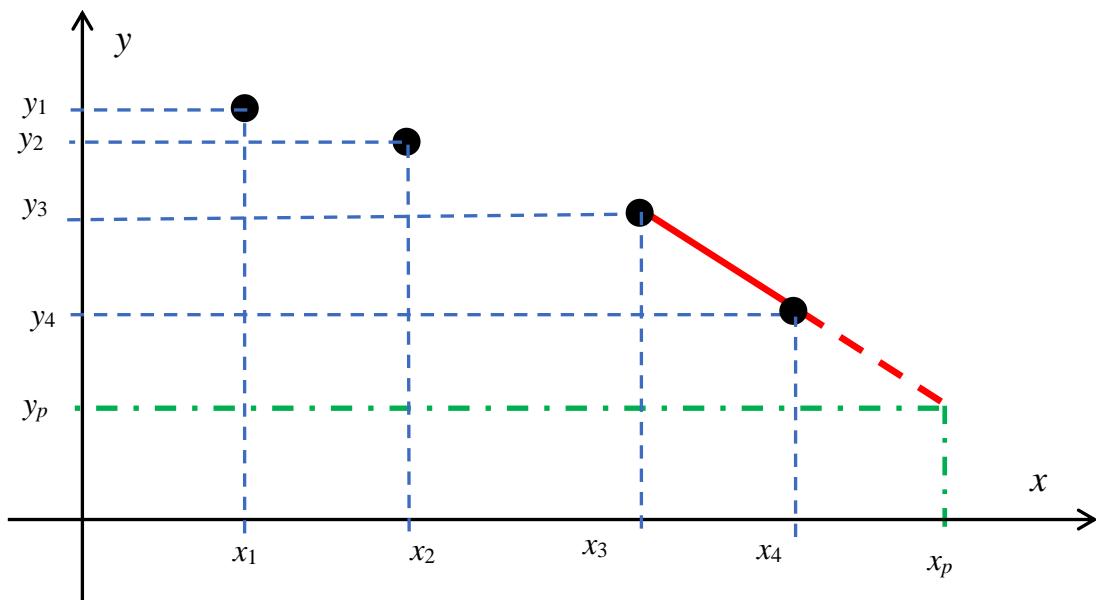


Рис. 24.4. Пример линейной экстраполяции.

Сплошная красная линия – линейная интерполяция на интервале $[x_3; x_4]$,
штриховая красная линия – линейная экстраполяция на интервале $[x_4; x_p]$

Пример 24.3. В Нижнем Новгороде дневная (полуденная) температура с 9 по 11 августа 2020 года была равна $+21^{\circ}\text{C}$, $+18^{\circ}\text{C}$ и $+15^{\circ}\text{C}$ соответственно. Видно, что ежедневно температура уменьшалась на 3°C , точки графика зависимости температуры от времени лежат на одной прямой. Если использовать формулу (24.3) для экстраполяции температуры в будущие дни, то легко получить, что 1 сентября температура в Нижнем Новгороде станет равной минус 48°C ! Дальнейшее использование линейной экстраполяции даёт к 31 декабря температура составила бы -414°C , что существенно ниже абсолютного нуля.

Приведённый пример демонстрирует необходимость осторожности в применении экстраполяции.

§ 25. Аппроксимация

В ходе выполнения научно-исследовательской работы после проведения измерений часто обнаруживается некоторая взаимосвязь между разными физическими величинами. Сначала эта связь обнаруживается качественно. Например, может быть замечено, что период колебаний грузика на нитке (математического маятника) возрастает с увеличением длины нити. Однако, при научном подходе делать утверждение о наличии взаимосвязи величин можно только руководствуясь результатами количественных расчётов.

Во многих случаях вид этой зависимости может быть получен из теоретического анализа исследуемого физического процесса. Например, это может быть линейная функция, или обратно пропорциональная зависимость, или экспоненциально убывающая функция и т.д. Результаты экспериментов качественно соответствуют предполагаемой теорией зависимости с учётом погрешностей измерений. Однако, как правило, теория не может дать численных значений постоянных коэффициентов этой функции.

Задача вычисления функциональной зависимости по результатам измерений называется **аппроксимацией**. Следует сразу уяснить, что аппроксимация даёт лишь приближенную функцию, так как погрешности измерений неустранимы. Для решения задачи аппроксимации в математике разработана процедура, называемая методом наименьших квадратов (МНК).

Для линейных функций существуют формулы МНК, приведенные в учебных пособиях по статистической обработке результатов эксперимента (например, ⁶), которые позволяют вычислить наилучшие приближенные значения углового коэффициента и свободного члена, а также их абсолютные погрешности.

Пусть теория предсказывает прямо пропорциональную зависимость физической величины Y от другой физической величины X . Иными словами, величины X и Y связаны линейной зависимостью с нулевым свободным членом

$$Y = k X \quad (25.1)$$

где k – постоянный коэффициент. Если теоретически вычислить значение коэффициента k оказывается невозможным, то оно рассчитывается на основе результатов экспериментов.

Проводится серия измерений n пар значений обеих величин X и Y в исследуемом диапазоне. Результаты могут представляться в виде таблицы типа 24.1 из предыдущего параграфа.

Ещё раз заметим, что пара чисел $x_i ; y_i$ ($i = 1, \dots, n$) измеряется в определённых физических условиях. Например, это могут быть сила тока и падения напряжения на проводнике в электрической цепи.

⁶ Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. Нижний Новгород, ННГУ. 2004. 120 с.

В МНК выводится формула, которая даёт наилучшее приближенное значение углового коэффициента k в функции (25.1).

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (25.2)$$

Если построить график функции (25.1) с коэффициентом k , рассчитанным по формуле (25.2), то он, вообще говоря, не пройдёт точно через экспериментально полученные точки $x_i ; y_i$ ($i = 1, \dots, n$) из-за погрешностей измерений. Следовательно, необходимо прояснить, что такое «наилучшее приближенное значение».

Вычислим разности $(y_i - k x_i)$ для всех точек $i = 1, \dots, n$, возведём разности в квадрат и просуммируем:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - k x_i)^2 \quad (25.3)$$

В МНК доказано, что при подстановке в правую часть равенства (25.3) значения коэффициента k (25.2) величина Q имеет минимум при данных результатах измерений $x_i ; y_i$ ($i = 1, \dots, n$). Иными словами, значение (25.2) обеспечивает минимум суммы отклонений расчетных значений от экспериментальных.

Абсолютная погрешность полученной величины k в МНК выражается формулой

$$\Delta k = t_{\alpha; v} \sqrt{\frac{Q}{(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (25.4)$$

где $t_{\alpha; v}$ – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности α и числа степеней свободы v , который был описан в §13. Параметр v в данном методе равен $n - 1$, где n – число пар измеренных значений.

Пример 25.1. В работе исследовалось удельное сопротивление графитовых стержней карандашей. Измерялись вольт-амперные характеристики (ВАХ), т.е. сила тока I в стержне при различных значениях напряжения U на его концах. Результаты измерений для одного из образцов приведены на рис. 25.1.

В данном эксперименте было измерено 7 значений силы тока I_i для 7-и значений приложенного напряжения U_i ($i = 1, \dots, 7$).

Расположение экспериментальных точек на графике рис. 25.1 свидетельствует в пользу предположения, что проводник является омическим, т.е. для него справедлив закон Ома. Следовательно, сила тока I и напряжение U должны быть связаны линейной функцией с нулевым свободным членом. Тогда в зависимости

$$U = kI \quad (25.5)$$

угловой коэффициент k представляет собой сопротивление R данного проводника.

Для вычисления сопротивления R целесообразно провести линейную аппроксимацию вольт-амперной характеристики исследуемого проводника с помощью МНК. Наилучшее приближенное значение сопротивления вычисляется по формуле (25.2) $R = 12,1$ (Ом). Зададим доверительную вероятность $\alpha = 0,95$. Число степеней свободы для 7-и пар измерений I_i и U_i ($i = 1, \dots, 7$) равно $v = 6$. $t_{\alpha; v}$ – коэффициент Стьюдента $t_{0,95; 6}$ для данных параметров извлекается из табл. 21.1 § 21, а абсолютная погрешность сопротивления рассчитывается по формуле (25.4) $\Delta R = 0,3$ (Ом). Результат округлён до десятых долей Ом.

На рис. 25.1 показан график найденной аппроксимирующей линейной функции. Видно, что отрезок прямой проходит через «коридор погрешностей» экспериментальных результатов.

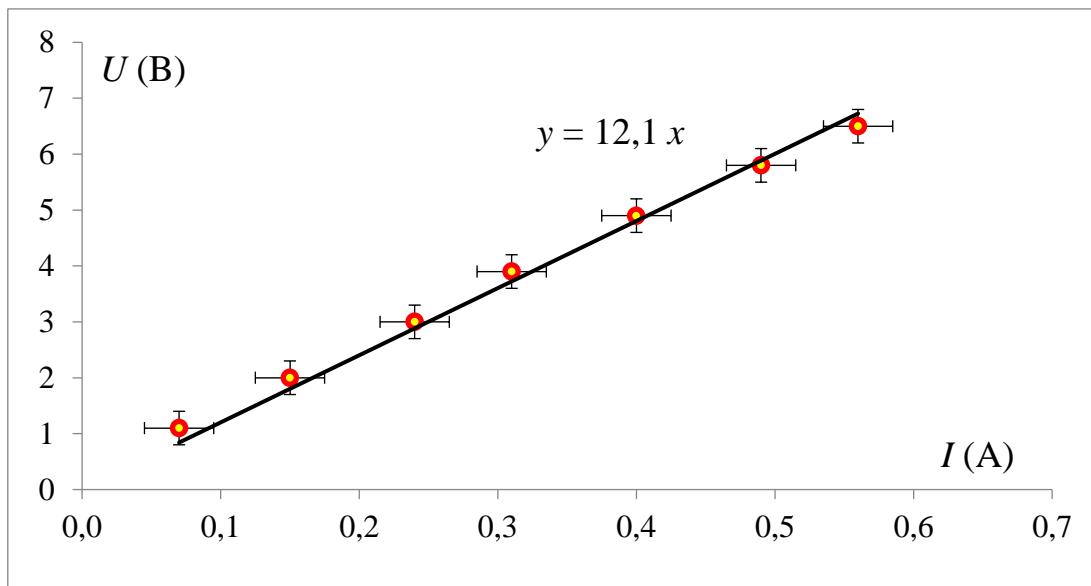


Рис. 25.1. Вольт-амперная характеристика грифеля карандаша марки «Конструктор», твёрдость 2Т.

Кружки – результаты измерений, отрезок прямой – график линейной функции, рассчитанный по МНК.

Тангенс угла наклона равняется сопротивлению проводника

Аппроксимация результатов экспериментов более сложными функциями является задачей, вообще говоря, выходящей за рамки обычной средней

школы. Однако, при анализе многих ситуаций оказывается возможным привести нелинейную зависимость к линейной функции с помощью простых алгебраических преобразований.

Пример 25.2. Согласно теории, период колебаний математического маятника (при небольшой амплитуде) выражается следующей формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (25.6)$$

где L – длина маятника, g – величина ускорения свободного падения.

Математический маятник, для которого теоретически получена формула (25.6), представляет собой идеализированный объект, который описан в § 20. В экспериментах используются, строго говоря, модели математического маятника. Для конкретной модели справедливость формулы (25.6) следует проверять экспериментально.

Для опытов был использован стальной шарик диаметром 12 мм, подвешенный на леске толщиной 0,15 мм. За длину нити L принималось расстояние от точки подвеса до центра шарика. Начальный угол отклонения нити от вертикали во всех опытах брался равным 15° . Измерялось время t десяти первых полных колебаний, период вычислялся как $T = t / 10$. Эксперименты проводились для нескольких длин L , указанных во 2-й строке табл. 25.1. Соответствующие значения периодов записаны в 3-строке.

Таблица 25.1

Результаты экспериментов с моделью математического маятника

Номер опыта	1	2	3	4	5
Длина нити L (см)	10	17	24	31	38
Период колебаний T (с)	0,64	0,83	0,99	1,12	1,24
Квадрат периода T^2 (с ²)	0,4096	0,6889	0,9801	1,2544	1,5376

Согласно формуле (25.6), связь периода колебаний и длина маятника – нелинейная. Однако, возведя в квадрат обе части равенства (25.6), мы получим прямо пропорциональную зависимость между квадратом периода T^2 и длиной нити L .

$$T^2 = 4\pi^2 L / g \quad (25.7)$$

Для наглядности полезно (например, с помощью программы Excel) построить по данным табл. 25.1 график зависимости квадрата периода T^2 от длины нити L (рис. 25.2).

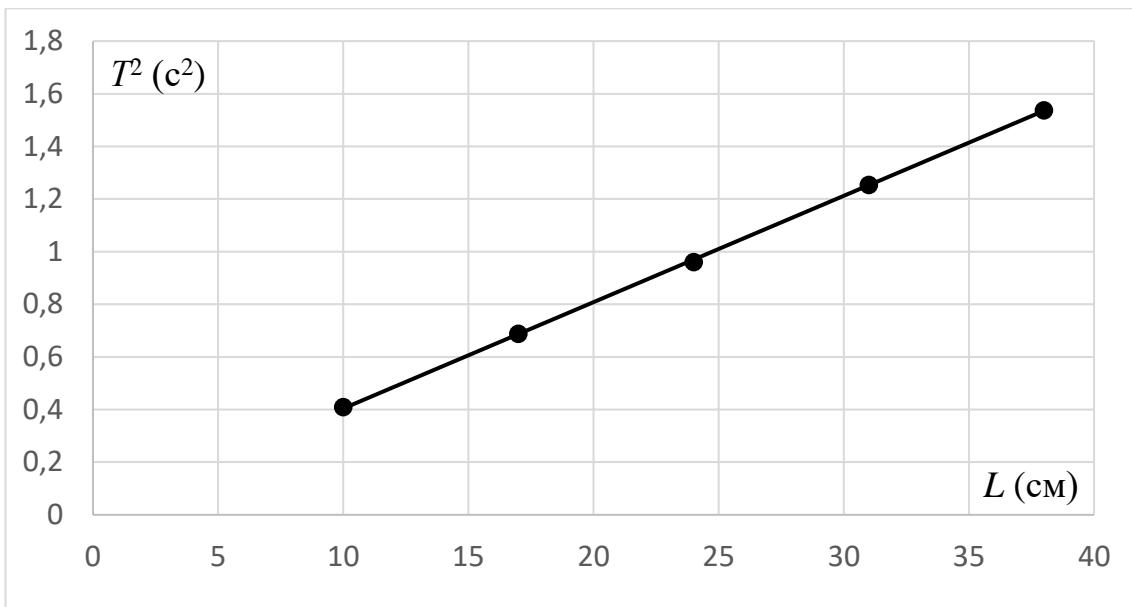


Рис. 25.2. Зависимость квадрата периода колебаний от длины маятника

Видно, что экспериментальные точки хорошо «ложатся» на исходящую из начала координат. Наилучший (оптимальный) линейный аппроксимант вида

$$T^2 = c L \quad (25.8)$$

строит по запросу сама программы Excel. Угловой коэффициент зависимости (25.8), вычисленный по данным табл. 25.1, равен c .

Сопоставив равенства (25.7) и (25.8), мы получим выражение ускорения свободного падения через полученный в эксперименте угловой коэффициент c :

$$g = 4\pi^2 / c \quad (25.9)$$

Подстановка в (25.9) найденного значения коэффициента $c = 4,04$ с²/м даёт величину $g \approx 9,8$ м/с². Эта проверка доказывает, что для используемого маятника формула периода (25.6) справедлива. Иными словами, параметры нашего маятника таковы, что его можно полагать математическим с хорошей точностью.

Методы аппроксимации результатов измерений более сложными функциями изложены в специальной литературе, например, в⁷.

⁷ Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. Нижний Новгород, ННГУ. 2004. 120 с.

§ 26. Корреляция

В окружающей нас Вселенной происходит множество разнообразных и удивительных явлений, которые иногда не вмещаются в разработанные математические модели и схемы.

В § 23 рассматривались обнаруженные в Природе функциональные зависимости между различными физическими величинами.

С другой стороны, несомненно, множество пар физических величин, являются независимыми.

К сожалению, иногда нам приходится сталкиваться с «промежуточными» случаями.

Характерным примером является зависимость количества пятен на Солнце от времени.

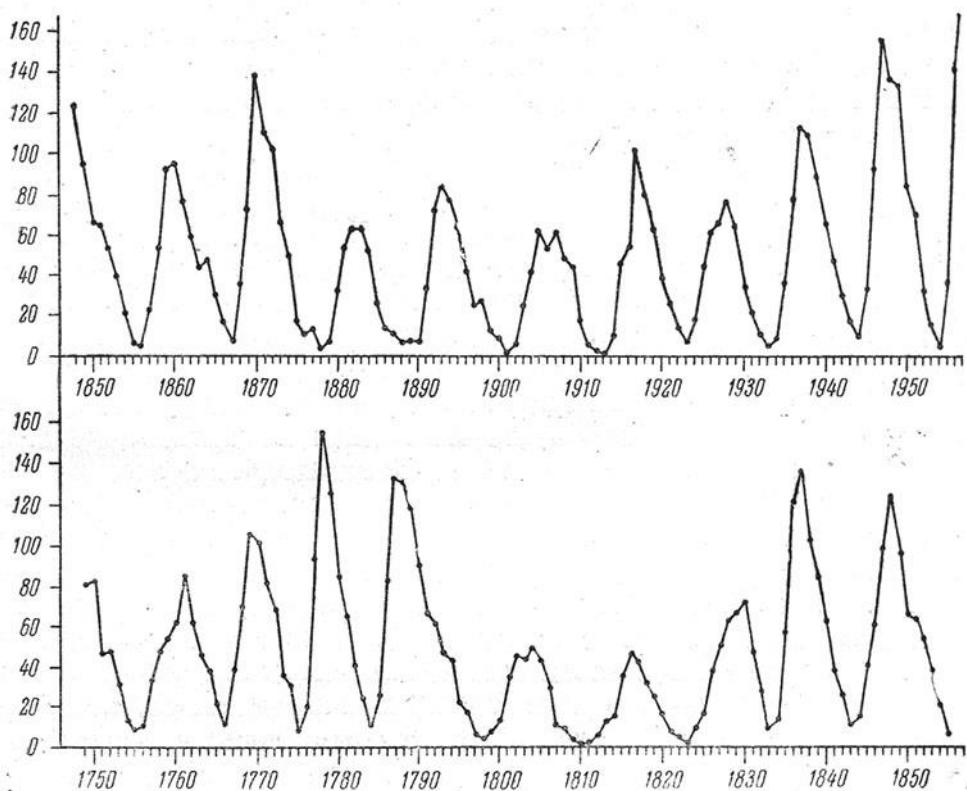


Рис. 26.1. Количество пятен на Солнце за 200 лет наблюдений

По графику на рис. 26.1 ясно, что число пятен на Солнце обладает некоторой регулярностью. Но описать эту регулярность какой-нибудь функцией, имеющей физический смысл, пока не удается. Иногда употребляется термин «квазипериодичность», но практическая польза этого термина сомнительна.

Одним из способов количественной оценки связи физических величин X и Y в случаях, когда функциональная зависимость не просматривается, является расчёт коэффициента линейной корреляции на основе результатов измерений.

Пусть в эксперименте было проведено n измерений каждой из исследуемых величин X и Y и получены n пар числовых значений: $x_i, y_i ; (i = 1, \dots n)$.

Эмпирический коэффициент линейной корреляции выражается следующей формулой:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (26.1)$$

где \bar{x} и \bar{y} — средние значения результатов измерений x_i и y_i соответственно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (26.2)$$

Если величина (26.1) близка к единице, то это означает, что между исследуемыми величинами есть некая связь, которую, к сожалению, не удается выразить определенной функциональной зависимостью. Как говорят, «имеется тенденция» к возрастанию величины Y с ростом величины X .

Если же коэффициент корреляции (26.1) близок к минус единице, то утверждается, что «имеется тенденция» к убыванию величины Y с ростом величины X .

Пример. 26.1. В эксперименте проводилось исследование проводимости графитовых стержней от карандашей марки «Koh-I-Noor». Для стержней разной твердости измерялись вольт-амперные характеристики, затем вычислялось сопротивление R с помощью линейной аппроксимации, как было изложено в §25. Кроме того, были измерены длины L и диаметры d стержней для расчетов удельных сопротивлений r :

$$r = RL/S \quad (26.3)$$

где S — площадь поперечного сечения проводника $S = \pi (d/2)^2$.

На рис. 26.2 приведены рассчитанные удельные сопротивления r графитовых стержней разной твёрдости. Твёрдость выражена в относительных единицах, удельное сопротивление в системе СИ.

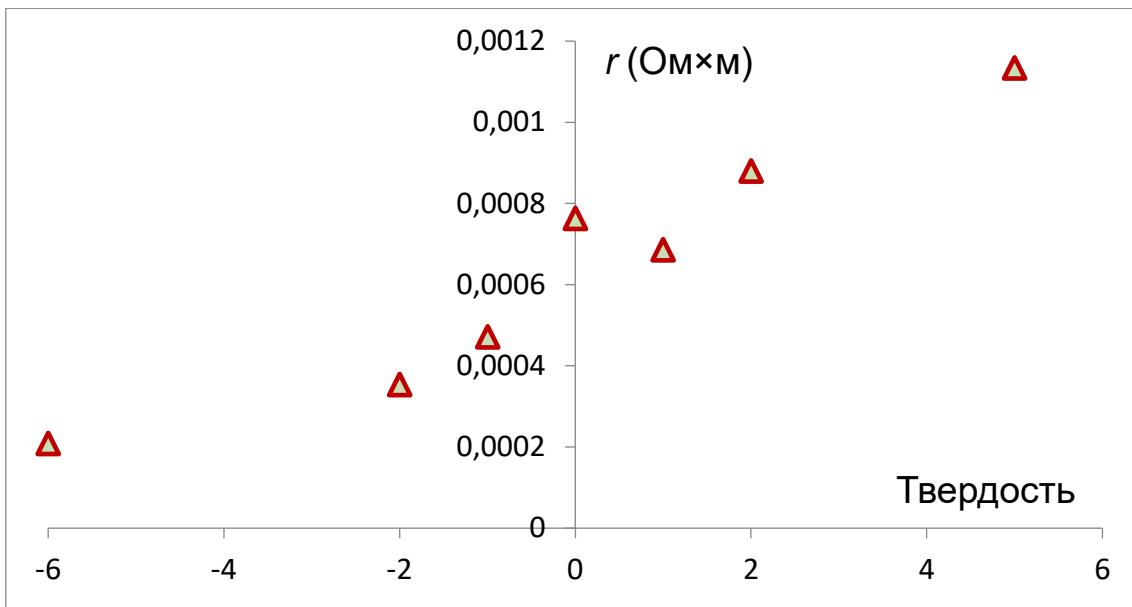


Рис. 26.2. Зависимость удельного сопротивления r от твёрдости графитовых стержней карандашей марки «Koh-I-Noor»

Твёрдость карандашей регулируется, в частности, добавлением примесей в технический графит. При этом может изменяться электропроводность материала. Имеет физический смысл исследование связи удельного сопротивления и твердости графитовых стержней.

Прежде всего, на рис. 26.2 наблюдается в среднем возрастание удельного сопротивления r с ростом твёрдости стержня. Однако, экспериментальные точки не ложатся ни на какую монотонно возрастающую функцию. Погрешность удельных сопротивлений Δr на графике изображена высотой треугольников. Нет оснований выкидывать 4-ю точку из результатов эксперимента.

Для проверки связи твёрдости и удельного сопротивления был вычислен коэффициент линейной корреляции по формуле (26.1) $R = 0,958$, что очень близко к единице. Таким образом, можно сделать вывод об общей тенденции увеличения удельного сопротивления графитового стержня с ростом его твёрдости. Причины отсутствия определённой функциональной зависимости удельного сопротивления и твердости требуют дополнительных исследований.

Если две физические величины X и Y независимы, то их коэффициент линейной корреляции теоретически должен равняться нулю. Однако, расчет по формуле (26.1) всегда даёт число отличное от нуля из-за неизбежных погрешностей при измерении величин x_i , y_i ; ($i = 1, \dots, n$). Конечно, при этом коэффициент R близок к нулю.

В математической статистике разработана процедура, которая позволяет установить независимость физических величин X и Y по результатам пар измерений x_i , y_i ; ($i = 1, \dots, n$). Для этого после расчёта коэффициента корреляции ρ по формуле (26.1) вычисляется T -критерий:

$$T_R = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}} \quad (26.4)$$

Очевидно, что при малом коэффициенте корреляции ρ величина T -критерия также мала.

Вывод о независимости физических величин X и Y делается на определенном уровне достоверности. Мы выбираем доверительную вероятность, например, $\alpha = 0,95$. Затем извлекаем из таблиц коэффициента Стьюдента значение $t_{\alpha, N-2}$, соответствующее выбранной доверительной вероятности α и числу степеней свободы, равному $N - 2$.

Если справедливо неравенство $T_R \leq t_{\alpha, N-2}$, т.е. T -критерий относительно мал, то исследуемые величины X и Y можно полагать независимыми.

В противоположном случае при $T_R > t_{\alpha, N-2}$ между величинами X и Y существует некоторая взаимосвязь, для установления которой необходимо проводить дополнительные экспериментальные исследования.

В рассмотренном выше примере (рис. 26.2) расчет по результатам измерений даёт $T_R = 7,94$. С другой стороны, для $\alpha = 0,95$ и $N - 2 = 5$ коэффициент Стьюдента $t_{\alpha, N-2} = 2,57$. Следовательно, электропроводность карандашного графита как-то связана с его твердостью.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

§ 27. Протокол измерений

Протокол измерения – это признак выполненного эксперимента. Отсутствие (потеря) протокола измерений аннулирует все результаты.

Протокол должен содержать минимум необходимой информации: название эксперимента, дату опыта, список измерительных приборов и измеренные численные значения с понятными обозначениями. Хорошим тоном является указание в протоколе температуры и влажности в помещении, где проводились исследования. Как правило, протокол содержит информацию о некотором количестве измерений или экспериментов, проведенных поочередно в один рабочий день без длительных перерывов.

Протокол можно оформлять на отдельном листе бумаги разборчивым почерком. Протокол может быть в электронном виде – вся информация в этом случае записывается в файл на компьютере. В этом случае протокол рекомендуется оформить в виде листа электронной таблицы (Excel или аналога). В таком случае данные протокола будет удобно использовать для дальнейших расчётов и представления результатов.

Чаще всего, результаты измерений записываются в таблицу. Как правило, протокол измерений содержит несколько таблиц.

Каждая таблица в протоколе должна соответствовать одному эксперименту. Таблицы принято подписывать сверху, в подписи необходимо указать полезную информацию, например, параметры приборов, использованные конкретно в этом эксперименте, что особенно важно, если протокол содержит несколько экспериментов с различным оборудованием.

В зависимости от вида информации таблица может быть вертикальной или горизонтальной. Опыт показывает, что удобнее использовать вертикальные таблицы. Верхняя часть (часть с заголовками столбцов) таблицы кратко называется «шапкой». Каждая клетка шапки является верхней определенного столбца. В клетках шапки должны быть указаны название физической величины, её обозначение и размерность.

Рассмотрим первый тип таблицы, посвященной измерению одной величины. В такой таблице имеется столбец с порядковыми номерами измерений и столбец с соответствующими значениями.

Пример 27.1

Таблица измерений диаметра шарика микрометром (ц.н.д.=0.01мм)

Номер измерения	Диаметр d , мм
1	5,03
2	4,99
3	4,98
4	5,01
5	5,00

Рассмотрим другой тип таблицы, в котором исследуется зависимость одной величины от другой. В ней есть одна часть, которая соответствует «задаваемым» величинам – их задает экспериментатор, выбирая значения в нужном диапазоне, а вторая – зависимым величинам, которые считаются с измерительного прибора. Удобно левый столбец в такой таблице заполнить нумерацией экспериментов. При повторных измерениях удобно добавить столбцы для каждого из повторных измерений.

Пример 27.2

Зависимость угла отклонения луча света, проходящего через треугольную призму, от угла падения луча на грань призмы при измерении транспортиром (ц.н.д.=1°).

	Угол падения α (°)	Угол отклонения φ (°)		
		Измерение 1	Измерение 2	Измерение 3
1	12	47	48	47
2	14	40	41	40
3	16	37	37	38
4	15	38	37	39
5	18	35	36	35
6	20	34	33	33
7	22	32	32	32
8	19	34	35	33
9	24	32	33	32
10	26	31	30	32
11	28	30	30	31
12	32	29	28	28

Пример 27.3.

Протокол измерений

Тема НИР «Исследование нагревания проводников
при пропускании электрического тока»

Дата 27.11.2018

Температура +23°C

Относительная влажность: 54%

Измерительные приборы: вольтметр, миллиамперметр, штангенциркуль, микрометр

Таблица. Измерения диаметра образца №4 микрометром (ц.н.д.=0.01мм)

Номер измерения	Диаметр d , мм
1	2,12
2	2,11
3	2,07
4	2,08
5	2,10

Таблица. Измерения длины образца №4 штангенциркулем (ц.н.д.=0.1мм)

Номер измерения	Длина l , мм
1	16,7
2	16,7
3	16,8
4	16,7
5	16,6

Таблица. Вольт-амперная характеристика образца № 4.

	Напряжение U (В)	Сила тока I (А)
1	22	0,3
2	30	0,4
3	38	0,5
4	45	0,6
5	53	0,7
6	69	0,9
7	78	1,0
8	94	1,2
	Приборные погрешности: 0,5 Вольт, 0,1 Ампер	

§ 28. Изображение зависимостей физических величин с помощью графиков

Для отображения результатов эксперимента целесообразно использовать общепринятые графические образы, которые гораздо нагляднее таблиц.

Чаще всего, в виде графиков изображаются взаимосвязи различных физических величин. Например, зависимость температуры от времени при нагреве определённого количества жидкости, удлинение пружины при увеличении массы подвешенного груза и т.п. Графики, даже в случае трёх пар значений, выглядят информативнее, чем таблицы.

Для изображения графиков зависимостей между физическими величинами X и Y обычно используются прямоугольные системы координат, которые не являются декартовыми.

На горизонтальной оси (абсцисс) откладываются значения величины, которая рассматривается как аргумент (то есть ту, которую мы сами варьируем в ходе эксперимента), на вертикальной оси – значения другой переменной.

В таких системах координат на осях откладываются значения величин разной размерности, поэтому единицы масштаба на осях в принципе различные и несравнимы.

В общем случае каждая ось прямоугольной системы координат имеет положительную и отрицательную полуоси. (см. приложение 2). Иными словами, в общем случае, график может располагаться в 4-х квадрантах системы координат. Однако, пустые квадранты не несут информации, бессмысленно занимают площадь листа и производят тягостное впечатление.

В зависимости от диапазона отображаемых значений величин X и Y для построения графика могут использоваться не все 4 квадранта. В частности, если обе величины X и Y принимают только положительные значения, то для отображения графика достаточно одного, первого квадранта.

При выборе поля построения графика следует опираться на диапазоны значений величин, которые отображаются на осях графика.

Пример 28.1. В лабораторной работе ученик измерял транспортиром углы отражения β лазерного луча от плоского зеркала при определенных углах падения α . Так как углы падения и отражения выражаются положительными числами, то для построения графика связи этих углов достаточно 1-го квадранта. Так углы падения α и β острые, то диапазон их значений лежит в интервале ($0^\circ \dots 90^\circ$). При этом по горизонтали следует откладывать угол α . Построенный график приведён на рис.28.1.

На графиках следует указывать величину погрешностей отображаемых величин. В вышеописанном эксперименте погрешность измерения углов составляла 1° . Как следствие, на рис. 28.1 размер погрешностей не превышает диаметра кружков.

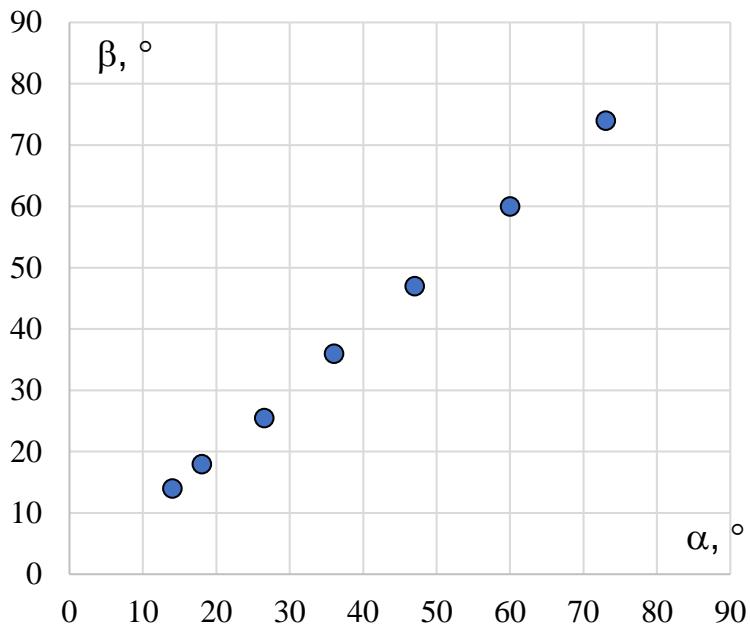


Рис. 28.1. Пример. Зависимость угла отражения β от угла падения

Выбор интервала значений переменных

Вообще говоря, не обязательно совмещать начало оси с нулевым значением на ней. «Пустая» часть на листе графика абсолютно неинформативна и свидетельствует о недостаточной квалификации автора отчёта.

Пример 28.2. В серии экспериментов измерялся показатель преломления для лучей лазеров различного цвета видимого диапазона. Естественно, для построения графика достаточно взять интервал длины волн 400–700 нм (см. рис. 28.2, 28.3).

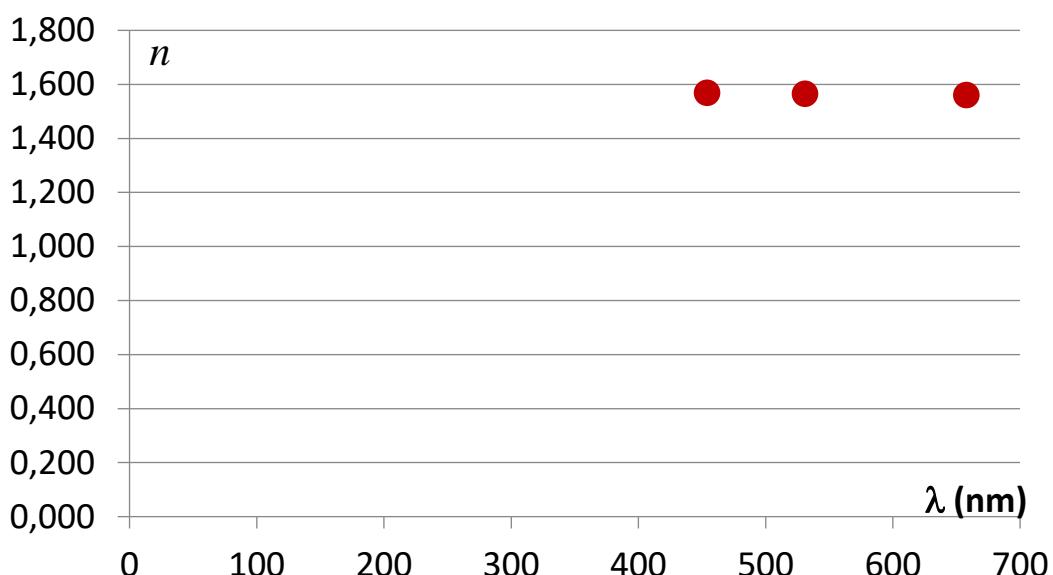


Рис. 28.2. Зависимость показателя преломления n от длины волны света λ . Неудачный вариант

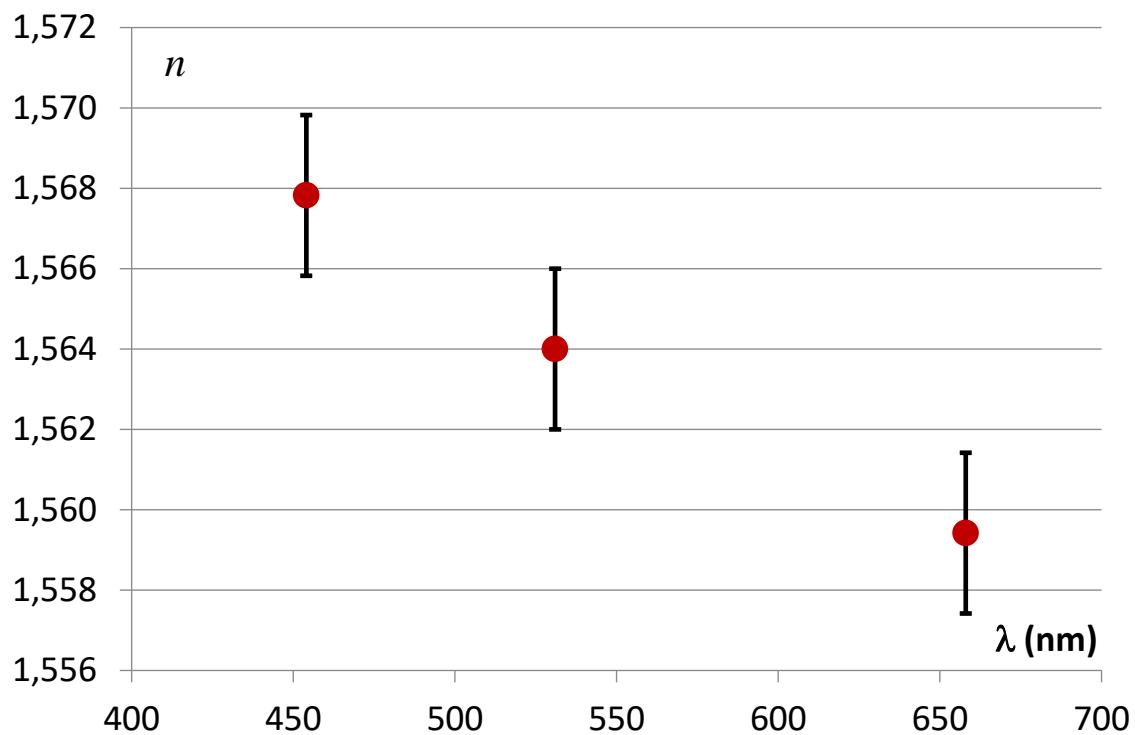


Рис. 28.3. Зависимость показателя преломления n от длины волны света λ . Удачный вариант

Если бы погрешности были бы, например, втрое больше, то вывод об убывающей зависимости показателя от длины волны света был бы некорректным.

Зависимость двух величин от общей переменной

Часто на одном графике целесообразно изображать две и более зависимостей для демонстрации или поиска взаимосвязи между ними. Однако, при этом могут получаться представления неудобные для дальнейшего анализа или даже маскирующие важные научные результаты, что иллюстрировано следующим примером.

Пример 28.3. В течение месяца проводились измерения температуры воздуха T и атмосферного давления P ежедневно в 9.00. Для исследования связи давления и температуры были построены графики величин P и T на единой оси времени (рис. 28.3).

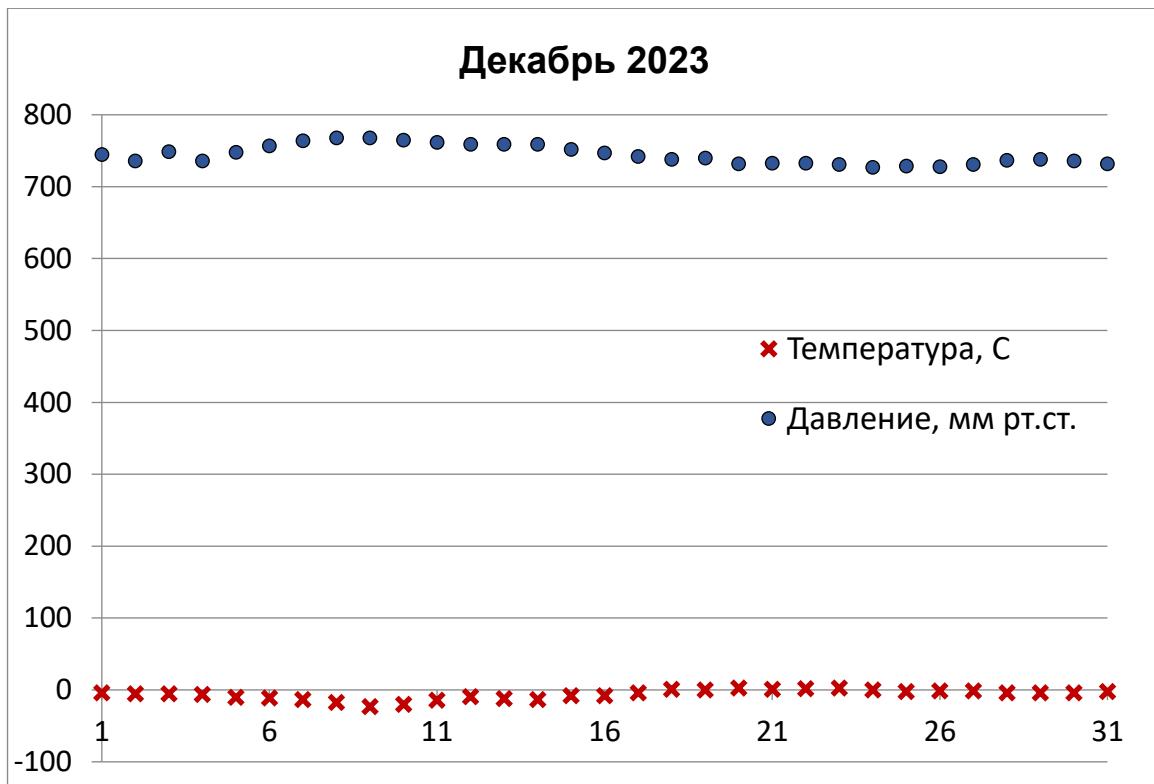


Рис.28.4. Ежедневные атмосферное давление и температура в декабре 2023 года.
На горизонтальной оси – даты. Числа на вертикальной оси –
давление в мм рт.ст. и температура в градусах Цельсия

На рис. 28.4 мы наблюдаем пример неудачного графика. Две физические величины (температура T и давление P) имеют значения, различающиеся в сотни раз. На графике невозможно обнаружить какие-либо существенные закономерности.

Целесообразно обе физические величины P и T отобразить на разных графиках с одинаковой горизонтальной осью времени. Тогда для давления и температуры можно использовать разные диапазоны значений и разные масштабы.

Даже беглый взгляд на рис. 28.5 позволяет обнаружить существенную особенность: повышение атмосферного давления сопровождается понижением температуры и наоборот. Обнаруженная закономерность может быть подвергнута математической обработке и стать предметом физического исследования. В таких задачах целесообразно оба графика помещать на одном рисунке, используя две вертикальные оси с единицами разной размерности (рис. 28.6).

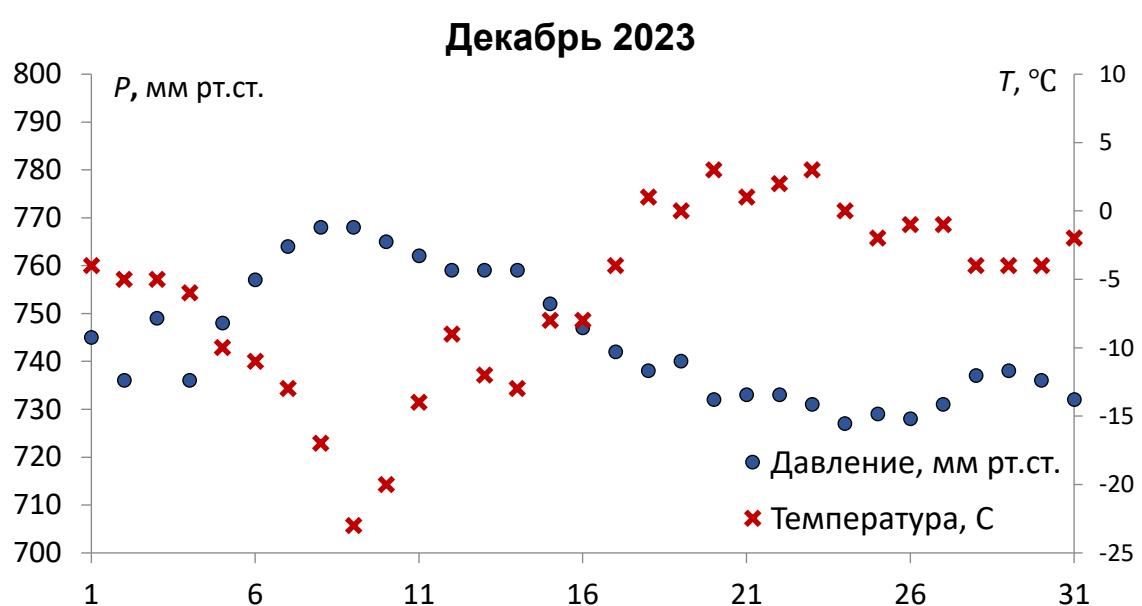
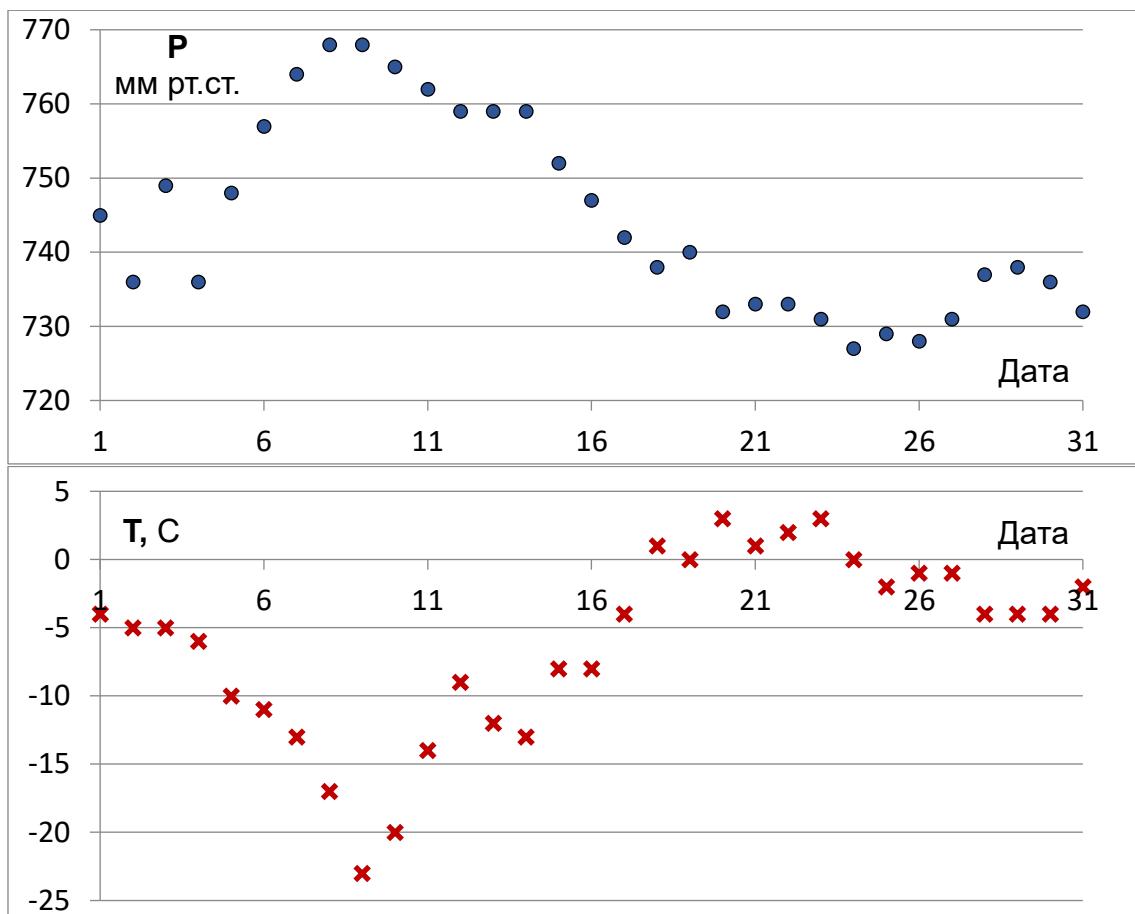


Рис. 28.6. Атмосферное давление и температура в декабре 2023 года.
На горизонтальной оси – даты. Ось значений давления слева, а температуры справа

О соединении точек графиков линиями

Графики, полученных в экспериментах зависимостей, школьники обычно строят с помощью программы Excel. Это компьютерное приложение имеет большое количество полезных опций, но начинающие физики-экспериментаторы используют их иногда некорректно.

Например, при построении графика исследуемой связи двух физических величин с помощью программы Excel школьники часто используют соединения точек экспериментальных результатов отрезками прямых линий.

Пример 28.4. В эксперименте проводились исследования колебаний модели математического маятника, который представлял собой свинцовый шарик, подвешенный на капроновой леске.

На рис. 28.7 показаны результаты изучения затухания колебаний маятника. Угол начального отклонения нити маятника от вертикали равнялся $\Phi_0 = 15^\circ$.

На горизонтальной оси координат указаны номера периодов колебаний, на вертикальной оси – максимальные углы отклонения от положения равновесия в соответствующий период (угловые амплитуды).

На рис. 28.7.а экспериментальные точки соединены отрезками прямых линий, что даёт график в виде ломаной линии. Все элементы графика должны иметь физический смысл. В частности, становится необходимым объяснить зигзаг, образованный точкой 4-го периода. Почему-то уменьшение амплитуды во время 4-го периода было аномальным.

Формальная замена отрезков прямой на гладкую плавную кривую не добавляет физического смысла (см. рис. 28.7.б.). Непонятны причины извилистого характера уменьшения амплитуды с течением времени. Кроме того, создается впечатление, что в течение 4-го и 5-го периодов затухания не происходило, а ранее и позже – амплитуда неуклонно уменьшалась.

Имеет смысл вспомнить, что номер периода по смыслу величина целочисленная, следовательно, соединять точки экспериментального графика не имеет физического смысла. Некоторая нерегулярность в расположении точек объясняется случайными и приборными погрешностями измерений.

Разумно на графике изобразить значения угловой амплитуды для каждого периода с указанием вычисленных погрешностей (см. рис. 28.7.в.). В таком представлении отсутствует ложная информация.

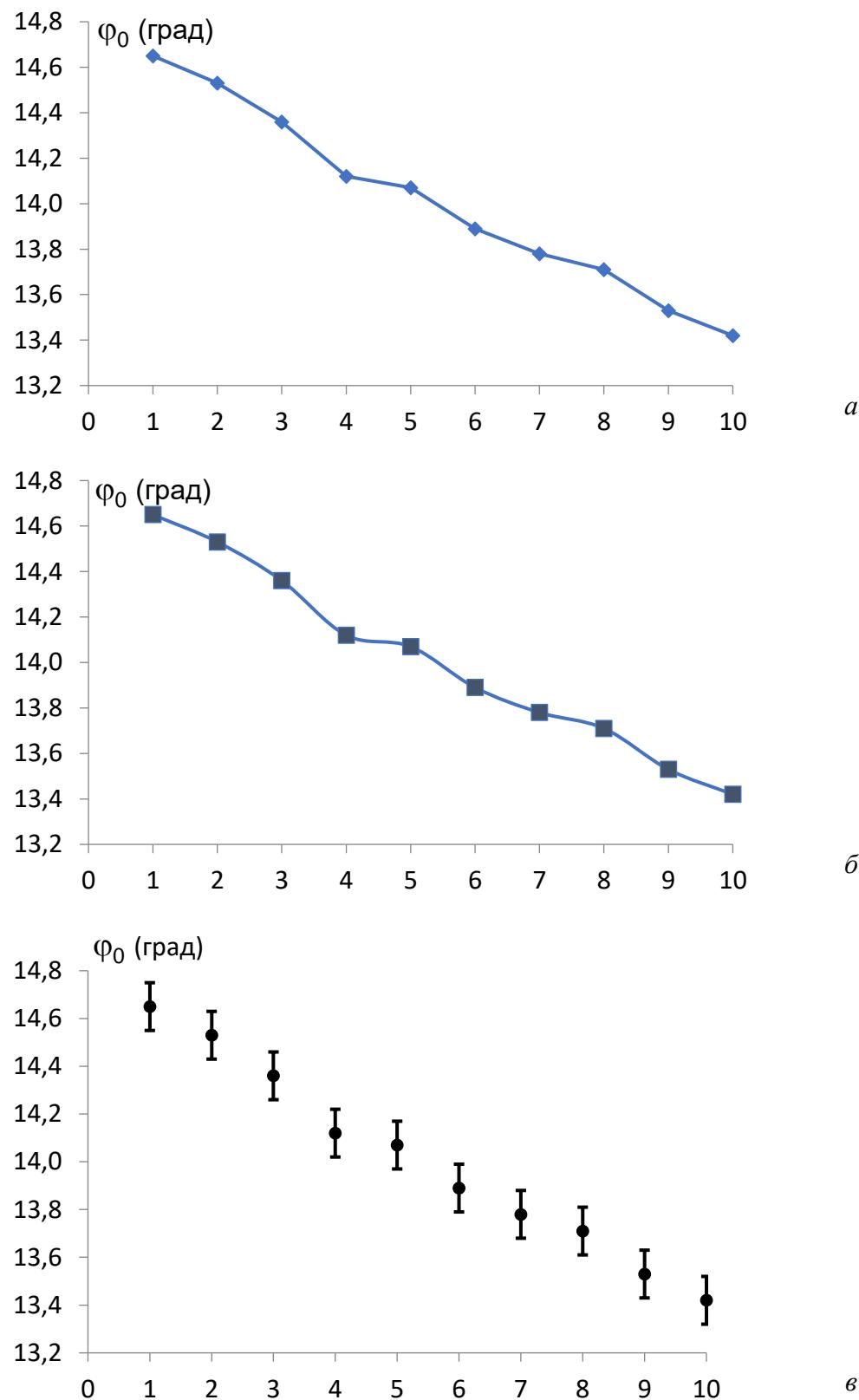


Рис. 28.7. Затухание колебаний модели математического маятника.

По горизонтали – номер периода,
по вертикали – угловая амплитуда в градусах

Графики с нелинейным масштабом по осям

Вернемся к выше рассмотренному примеру 28.4.

Теория описывает уменьшение амплитуды колебаний φ_0 с течением времени t убывающей экспоненциальной функцией

$$\varphi_0 = \Phi_0 \exp(-\beta t) \quad (28.1)$$

где Φ_0 – начальное отклонение нити маятника от вертикали, β – коэффициент затухания.

Логарифмированием равенства (28.1) экспоненциальная функция преобразуется в линейную:

$$\ln(\varphi_0 / \Phi_0) = -\beta t \quad \text{или} \quad \ln(\Phi_0 / \varphi_0) = \beta t \quad (28.2)$$

Параметр β выражается угловым коэффициентом линейной зависимости (28.2). Для его вычисления следует вычислить величины $\ln(\Phi_0 / \varphi_0)$, используя результаты измерения угловых амплитуд в проведенном эксперименте.

В том же эксперименте наблюдалась изохронность колебаний маятника и по результатам измерений был вычислен период колебаний $T = 2,58$ сек.

Для получения величины коэффициента затухания β целесообразно построить график зависимости $\varphi_0(t)$, используя нелинейный масштаб на вертикальной оси координат. Конкретнее, на горизонтальной оси откладывать моменты времени $t = nT$, где n – номер колебания, а на вертикальной оси – значения натурального логарифма $\ln(\Phi_0 / \varphi_0)$, как показано на рис. 28.8.

Видно, что экспериментальные точки хорошо «ложатся» на прямую линию, исходящую из начала координат. Это свидетельствует о справедливости описания затухания колебаний экспоненциальной функцией (28.1). Прямая, наиболее приближенная к экспериментальным точкам, определяется с помощью программы Excel (см. рис. 28.8). Угловой коэффициент оптимальной прямой равняется параметру затухания $\beta = 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

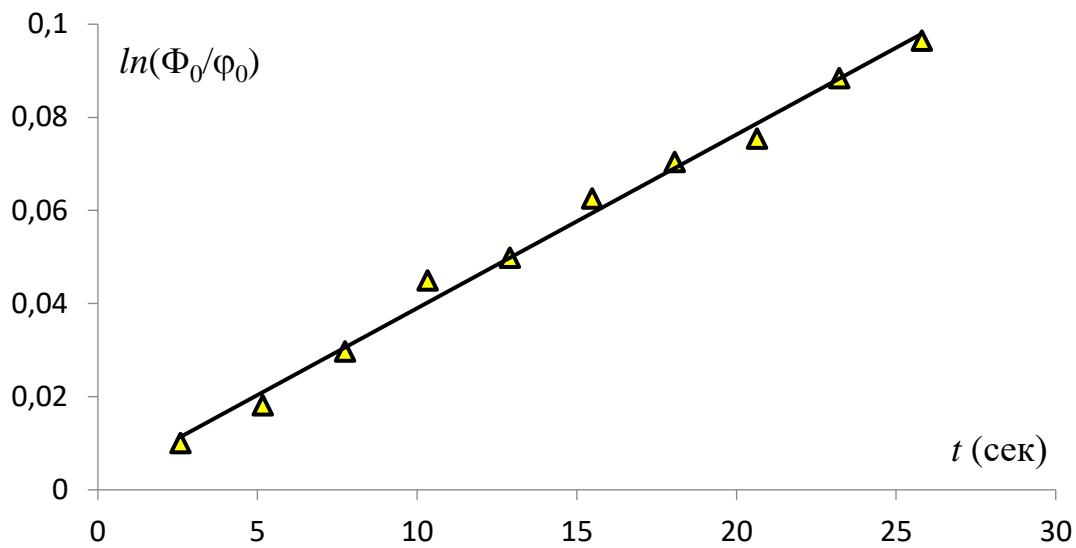


Рис. 28.8. График для расчёта коэффициента затухания колебаний маятника.
Треугольники – результаты расчёта на основе данных эксперимента, прямая линия
аппроксимация линейной функцией

Вычисленные параметры Φ_0 и β подставим в функцию (28.1) и вычислим амплитуды первых 10-и колебаний ϕ_0 . Теперь полезно сопоставить результаты эксперимента и расчётов (см. рис. 28.9). На рисунке видно, что результаты совпадают в пределах экспериментальных погрешностей.

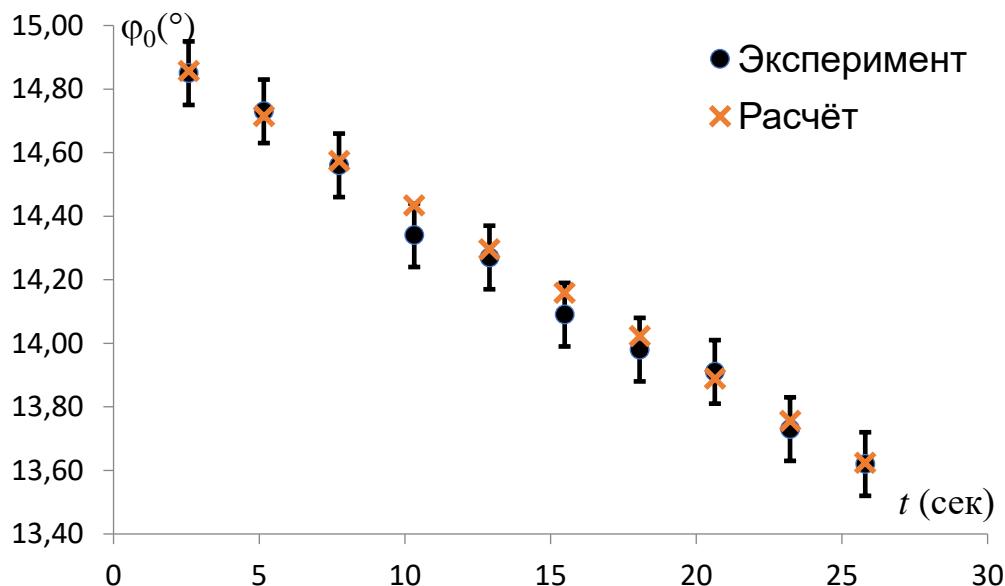


Рис. 28.9. Затухание колебаний модели математического маятника.
По горизонтали – время, по вертикали – угловая амплитуда в градусах

Следовательно, эксперимент доказывает монотонное экспоненциальное убывание амплитуды колебаний модели математического маятника.

§ 29. Представление данных на диаграммах

Графическое изображение зависимостей, полученных в экспериментах, является наглядным и информативным. Однако, встречаются случаи, когда аргумент не выражается числовыми значениями или числовые значения не имеют физического смысла. Например, это может быть дата исследования, маркировка или номер образца.

Отдельной группой задач является статистическая обработка большого количества данных. Каждое значение аргумента является числом, но для выяснения физического смысла результатов целесообразно их сгруппировать в интервалы конечной ширины.

Пример 29.1. В ходе исследования ряда абразивных материалов проводились оптические исследования их микрокристаллической структуры. С помощью металлографического микроскопа (рис. 29.1.а) рассматривалась поверхность образцов, при этом наблюдались характерные объекты, которые представляли собой срезы микрокристаллов (рис. 29.1.б). Посредством цифровой фотокамеры микроскопа получали фотографии, а затем с помощью специальной программы были проведены измерения размеров наблюдавшихся микрокристаллов.

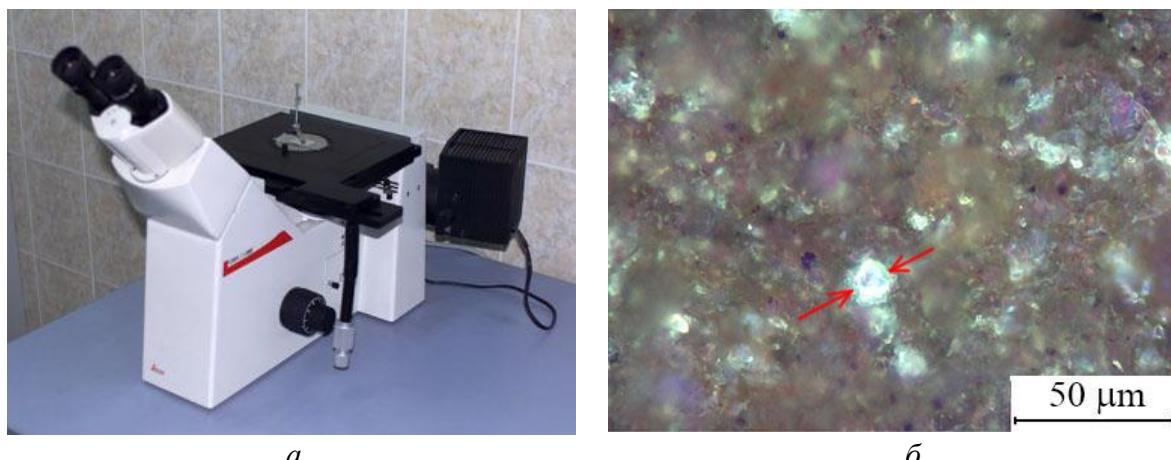


Рис. 29.1. Исследование микроструктуры образца абразивного материала Brasil Bordo.
а) металлографический микроскоп; б) участок поверхности
(красные стрелки указывают размер микрокристалла)

По результатам измерений строилось распределение размеров микрокристаллов в виде **столбчатых** диаграмм.

Типичный пример изображен на рис. 29.2. Каждый «столбик» определяется интервалом размеров микрокристаллов, записанным под горизонтальной осью. Высота соответствующего «столбика» равна количеству обнаруженных кристаллов с размерами в данном интервале.

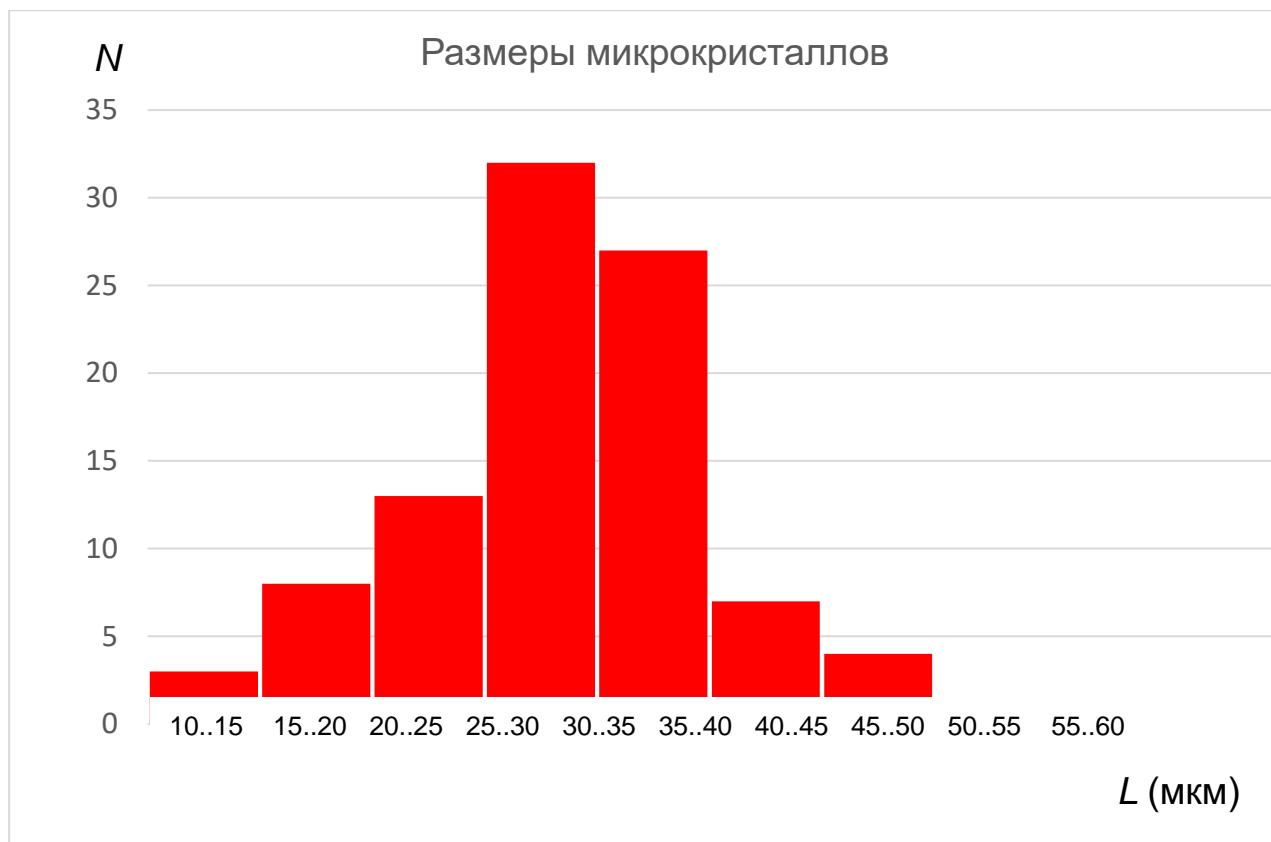


Рис. 29.2. Диаграмма распределения размеров микрокристаллов в образце абразивного материала Brasil Bordo.

По горизонтали – интервал размеров микрокристалла, по вертикали – количество соответствующих микрокристаллов.

Распределение построено по измеренным размерам 97 микрокристаллов

По рис. 29.2 видно, что исследуемый материал содержит микрокристаллы различного размера. Видно, что превалирующая часть кристаллов имеет размеры в интервале 25...35 мкм. Количество кристаллов с меньшими и большими размерами уменьшается при удалении от максимума распределения. Заметно, что распределение не симметрично относительно максимума, изредка встречаются микрокристаллы с аномально большим размером.

Пример. 29.2. Каменный образец, найденный в области Пучеж-Катунской астроблемы (Ковернинский район), был подвергнут элементному анализу (см. рис. 29.3).

Элементный состав выражается относительной концентрацией всех химических элементов в исследуемом веществе. Относительная концентрация определенного химического элемента равняется количеству атомов такого элемента в единице объёма к количеству всех атомов в этом объёме. Сумма относительных концентраций всех химических элементов, очевидно, равна единице или 100%.

Распределения величин, в сумме дающих 100% удобно выражать в виде **круговых диаграмм**. На рис. 29.3.б изображены относительные концентрации

химических элементов, входящих в состав исследуемого образца. Доля атомов каждого элемента прямо пропорциональна площади соответствующего сектора.

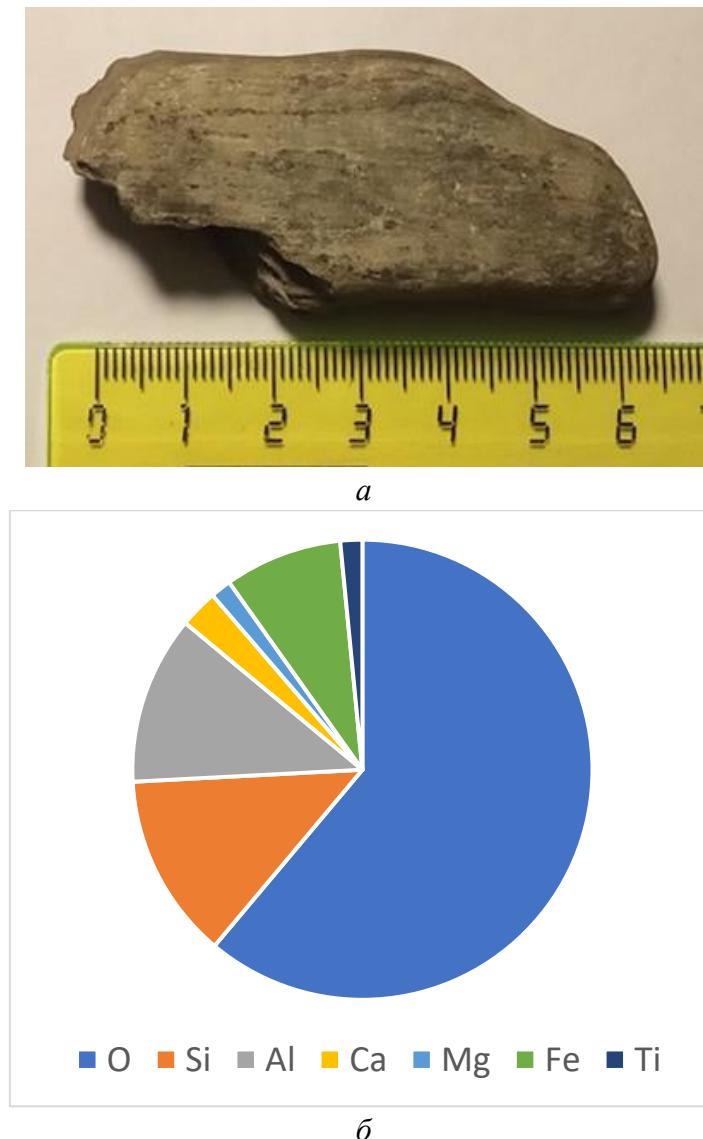


Рис. 29.3. Каменный образец из Пучеж-Катунской астроблемы
а) внешний вид образца; б) элементный состав образца,
выраженный в относительных концентрациях

Результаты элементного анализа, приведенные на рис. 29.3.б, свидетельствуют в пользу того, что образец является сложным аллюмосиликатом метаморфического происхождения.

Пример. 29.3. Ученик каждое утро в 9 часов записывал направление ветра в течении месяца. Результаты наблюдений можно наглядно представить в форме лепестковой диаграммы (рис. 29.4).

По периферии указываются направления («стороны света»). На данной диаграмме указано 8 направлений с общепринятыми обозначениями. От цен-

тра диаграммы в каждом направлении откладывается отрезок, длина которого прямо пропорциональна количеству дней с этим направлением ветра. Затем концы отрезков соединяются ломаной линией.

Диаграмма такого вида в метеорологии называется розой ветров.

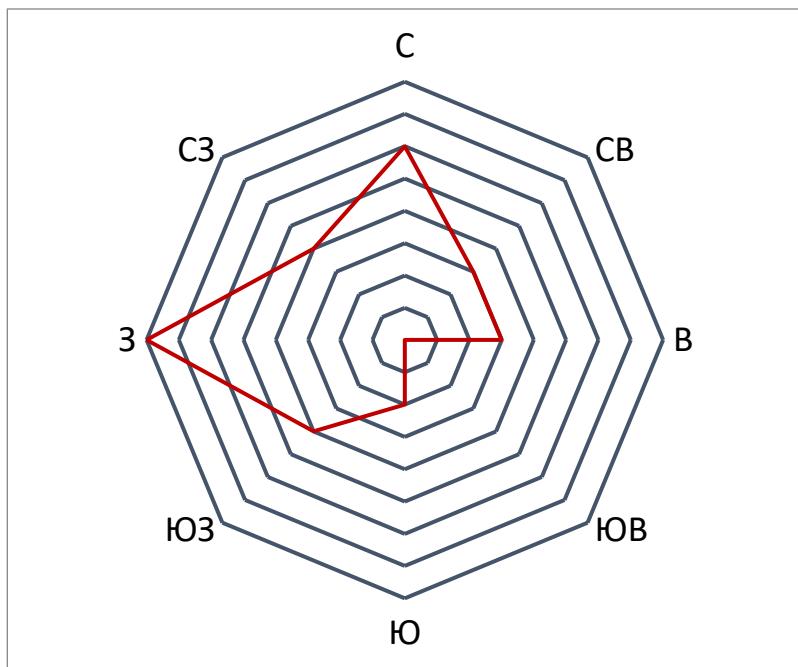


Рис. 29.4. Роза ветров
Нижний Новгород,
май 2024 года

По результатам на рис. 29.4 можно сделать вывод, что в этом месяце и данной местности преобладали ветра западного и северного направлений.

Идеализация физических объектов

При математической обработке результатов экспериментов приходится, помимо прочего, использовать понятия, объекты и выводы теоретической физики.

В теоретической физике широко используется определенная идеализация реальных объектов. Наиболее востребованные идеализации рассматриваются ниже.

1.1. Материальной точкой называется физическое тело с определенной массой m , размерами которого можно пренебречь при решении данной задачи. Иногда для краткости материальную точку называют *частичей*.

Возможность такого приближения зависит не столько от абсолютных размеров рассматриваемого тела, сколько от условий поставленной задачи. Например, земной шар можно рассматривать как материальную точку при расчете орбитального движения вокруг Солнца. Напротив, при исследовании суточного вращения земного шара вокруг своей оси такое приближение невозможно. Тела, находящиеся на экваторе и полюсе, описывают существенно различные траектории.

Идеализируя физическое тело материальной точкой, мы пренебрегаем размерами тела, его формой, цветом, запахом и т.д.

Материальная точка может совершать только поступательное движение. Вращение точки является бессмысленным понятием.

Примером использования понятия материальной точки является решение задачи о теле, брошенном под углом к горизонту, которое рассматривается во всех школьных учебниках механики.

1.2. Идеальная нить

Под идеальной нитью (шнуром, веревкой и т.п.) понимается «нерастяжимый» и «невесомый» объект.

Нерастяжимость нити понимается так, что её длина L практически не изменяется в условиях данной задачи.

Следует иметь ввиду, что сила натяжения нити, которая используется при решении задач является по своей природе силой упругости, подчиняющейся закону Гука. Эта сила формируется при определенном удлинении нити. Буквально «нерастяжимая» нить не сможет создавать силу тяги.

Невесомость нити означает, что масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массами других тел рассматриваемой физической системы (см. пример на рис. П.1.1).

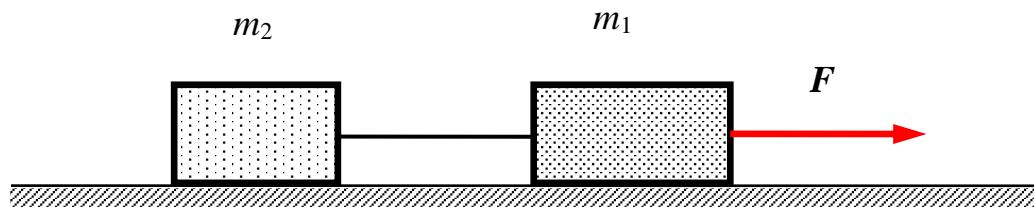


Рис. П.1.1. Два бруска связаны идеальной нитью.

При действии силы тяги F длина нити не изменяется.

Масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массой брусков m_1 и m_2

Далее, у идеальной нити пренебрегают толщиной (или диаметром). У такой нити поперечный размер много меньше длины L .

Заметим, что идеальной нитью можно тянуть, но невозможно толкать.

Характерным примером идеализированной физической системы является математический маятник, описанный во всех учебниках механики. Это материальная точка, подвешенная на идеальной нити и совершающая колебания относительно вертикали (см. рис. П.1.2)

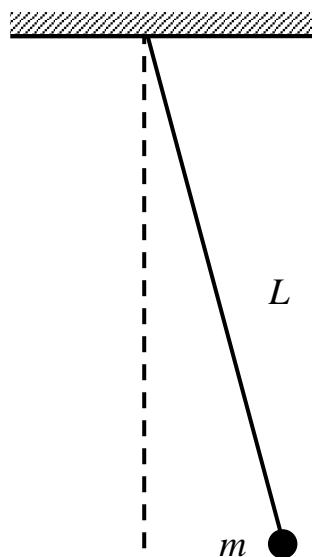


Рис. П.1.2. Математический маятник.
Материальная точка массы m подвешена
на идеальной нити длиной L

1.3. Абсолютно твердое тело (АТТ) имеет определённую массу, форму и размеры. Абсолютно твердым оно называется потому, что, как правило, при решении школьных задач пренебрегается изменением его формы и размеров. Иными словами, АТТ не деформируется в ходе решения задачи.

Стержни, с помощью которых начинается изучение момента сил и других физических характеристик статики, рассматриваются сначала как АТТ. Напротив, пружина, к которой прицепляются грузы (рис. 2.1, § 2) для демонстрации закона Гука не является АТТ.

В физических задачах часто рассматриваются твердые тела разной формы: кубы, призмы, пирамиды, параллелепипеды, цилиндры, шары, конусы и т.д. Как правило, полагается, что эти тела обладают идеальной геометриче-

ской формой. Объёмы, площади граней и т.п. можно вычислять по формулам геометрии.

Напротив, реальные тела, с которыми проводятся эксперименты, всегда имеют отклонения от идеальной формы. Это требуется учитывать при сопоставлении теоретических данных и результатов измерений.

Например, при исследовании трения качения рассматриваются цилиндрические тела, которые скатываются с наклонной плоскости. В экспериментах удобно использовать деревянные цилинды разного диаметра, выточенные на токарном станке. Естественно, боковая поверхность таких тел не является идеальным цилиндром. Но при теоретическом анализе процесса скатывания цилиндр рассматривается как идеальное геометрическое тело с определенным радиусом. При сопоставлении теоретических выводов с результатами экспериментов используются данные измерений с рассчитанной погрешностью.

1.4. Идеальный блок

Блоки очень часто встречаются в школьных задачах механики. Это диск, способный вращаться вокруг центральной оси. По периметру диска проложена канавка для размещения верёвки.

Блоки используются как простые устройства для изменения направления действия силы.

В рамках школьной физики рассматриваются блоки с пренебрежимо малой массой (следовательно, с нулевым моментом инерции). Как правило, через блок в таких задачах перебрасывается идеальная верёвка или нить, рассмотренная выше. При этом пренебрегается трением нити о диск и в оси диска. При этих условиях силы натяжения нити одинаковы по величине в любом её сечении и не зависят от угла охвата блока.

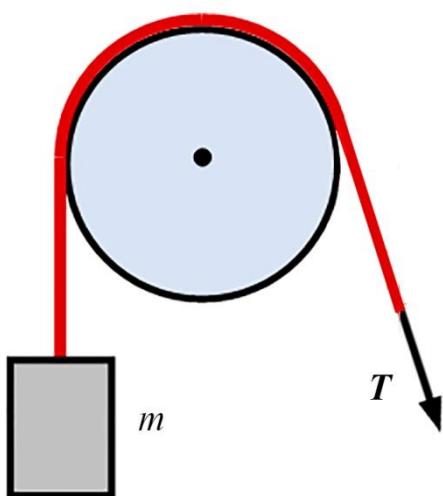


Рис. П.1.4. Веревка, перекинутая через блок, позволяет с помощью силы тяги T поднимать груз массой m .
При равномерном движении или неподвижности груза величина силы тяги равна mg .

Заметим, что это свойство идеального блока справедливо как для неподвижных, так и для подвижных блоков.

1.5. Приближенные формулы

В реальных физических условиях участвует множество сложных микроскопических процессов.

Например, при скольжении одного твердого тела о другое трение обусловлено контактным взаимодействием атомов, находящихся на поверхности тел. Их огромное количество не даёт возможным описать процесс как взаимодействие отдельных атомов. Физики вынуждены формулировать приближенные формулы, в которых используются усредненные характеристики и величины. Многие формулы получаются на основе обобщения результатов множества опытов.

При использовании эмпирических формул необходимо помнить, что они являются приближенными и могут использоваться в ограниченном диапазоне физических условий.

Пример П.1.1. Сила трения скольжения.

Это сила, действующая на твердое тело, которое движется по твердой плоскости. Направление силы противоположно вектору скорости тела. Величина силы приближенно выражается законом Амонтона

$$F = \mu N \quad (\text{П.1.1})$$

где N – модуль силы нормальной реакции, которая (по 3-му закону Ньютона) по модулю равна силе давления.

Множитель μ называется коэффициентом трения скольжения, величина которого определяется материалами соприкасающихся объектов и состоянием их поверхностей. В данном приближении полагается, что коэффициент μ не зависит от скорости тела. Понятно, что таблица значений коэффициента μ должна быть очень большой, т.к. должна содержать всевозможные пары материалов (например, медь по стали, сталь по стали, береза по дубу и т.д.). Состояние поверхности также весьма существенно: скольжение по строганой и нестроганой доске значительно различаются.

Следует помнить, что независимость силы (П.1.1) от относительной скорости тел нарушается при возрастании скорости.

Таким образом, формула (П.1.1) является довольно грубым приближением. Тем не менее, она успешно применяется при анализе простых школьных экспериментов.

Наконец, независимость от скорости выполняется только в небольшом интервале скоростей.

Сопротивление окружающей среды (газовой и жидкой) является сложнейшей проблемой, которая до сих пор не имеет полного теоретического решения. Несмотря на многолетнее развитие теоретической аэродинамики и гидродинамики, окончательный вариант конструкций современных самолетов и кораблей утверждается после многократных прогонов в аэродинамических трубах и опытных бассейнах прототипов и моделей.

Общего выражения силы сопротивления пока получить не удалось. На практике используются разные приближенные формулы с ограниченным диапазоном применения. Общим является лишь то, что направление силы противоположно вектору скорости тела.

Выбор приближенной формулы для различных физических ситуаций, в первую очередь, определяется величиной критерия Рейнольдса

$$Re = \rho L v / \eta \quad (\text{П.1.2})$$

где ρ и η – массовая плотность и вязкость окружающей среды соответственно, v – модуль скорости тела, L – характерный размер тела (например, для шара это радиус).

Пример П.1.2. Сила Стокса (сила вязкого трения). Для движения в вязкой среде тела сферической формы используется сила, величина которой выражается формулой:

$$F = -6\pi R \eta v \quad (\text{П.1.3})$$

где R – радиус тела, η – вязкость окружающей среды, v – скорость тела.

Область применимости формулы (П.1.3) ограничена небольшими значениями критерия Рейнольдса $Re < 1$.

Пример П.1.3. Сила аэродинамического сопротивления. Напротив, при больших значениях критерия Рейнольдса $Re \sim 1000$ и более, можно использовать следующую приближенную формулу:

$$F = C_F S \rho v^2 / 2 \quad (\text{П.1.4})$$

где C_F – безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела, S – площадь поперечного сечения тела. В справочных изданиях можно встретить таблицы значений коэффициента C_F для тел определенной формы. Однако, с увеличением критерия Рейнольдса коэффициент C_F становится зависящим от скорости тела, что ограничивает область применимости формулы (П.1.4).

Пример П.1.4. В средней школе изучается закон Ома для участка электрической цепи (зависимость силы тока I от падения напряжения U на проводнике)

$$I = U / R \quad (\text{П.1.5})$$

где R – сопротивление проводника.

Этот закон также является приближенным. Прежде всего, при прохождении тока через проводник, он нагревается по закону Джоуля-Ленца. Как следствие, сопротивление R возрастает и прямо пропорциональная зависимость (П.1.5) между током I и напряжением U нарушается.

Закон Ома (П.1.5) при небольшой силе тока удовлетворительно выполняется для металлов. Для многих веществ (например, полупроводников) связь силы тока I и падения напряжения U является нелинейной.

Приложение 2.

Системы координат

Графики, как правило, строятся в определенной системе координат. Одной из самых распространенных является *декартова система координат*. Эта система в общем случае состоит из трех взаимно перпендикулярных координатных осей. Часто их обозначают латинскими буквами X , Y , Z .

Для решения задач о движении физических тел в одной плоскости используется 2-мерная декартова система координат, состоящая из двух взаимно перпендикулярных координатных осей. В случае описания движения объекта вдоль прямой можно ограничиться одной координатной осью.

Каждая координатная ось представляет собой *числовую ось*. Иными словами, это прямая с выбранным направлением, на которой указана точка нуля и масштаб. Каждой точке оси соответствует определенное действительное число, и наоборот — каждому действительному числу соответствует определенная точка на оси. Стрелка на оси указывает направление возрастания числовых значений точек. Точка нуля делит каждую ось на положительную и отрицательную полуоси.

Оси декартовой системы координат пересекаются в точке нулей на всех осиях. Эта точка называется *центром* системы координат.

Обычно одна из осей направляется горизонтально вправо и называется осью *абсцисс*. Вторая ось направляется вертикально вверх и называется осью *ординат*. Третья ось (ось *аппликат*) перпендикулярна остальным, направление её подчиняется правилу правого винта.

Для определения декартовых координат какой-либо точки в пространстве следует из этой точки опустить перпендикуляры на все координатные оси. Аналогично определяются координаты точки плоскости.

Для наглядности рассмотрим произвольную точку A на плоскости. На этой же плоскости введена двумерная система декартовых координат (см. рис. П.2.1).

Опустим из данной точки A перпендикуляр на ось координат X и тем самым получим на этой оси точку x_A . Так как координатная ось — числовая, то этой точке x_A соответствует определенное число, которое называется проекцией точки A на координатную ось X . Согласно введенному выше названию оси, число x_A называют *абсциссой* точки A .

Аналогично, опустив перпендикуляр из точки A на ось Y , мы получаем на оси точку y_A , которой также соответствует определенное число. Это число y_A называется *ординатой* точки A .

В примере, приведенном на рис. П.2.1, видно, что согласно выбранному масштабу координаты точки A выражаются числами $x_A = 2,5$ и $y_A = 3,5$.

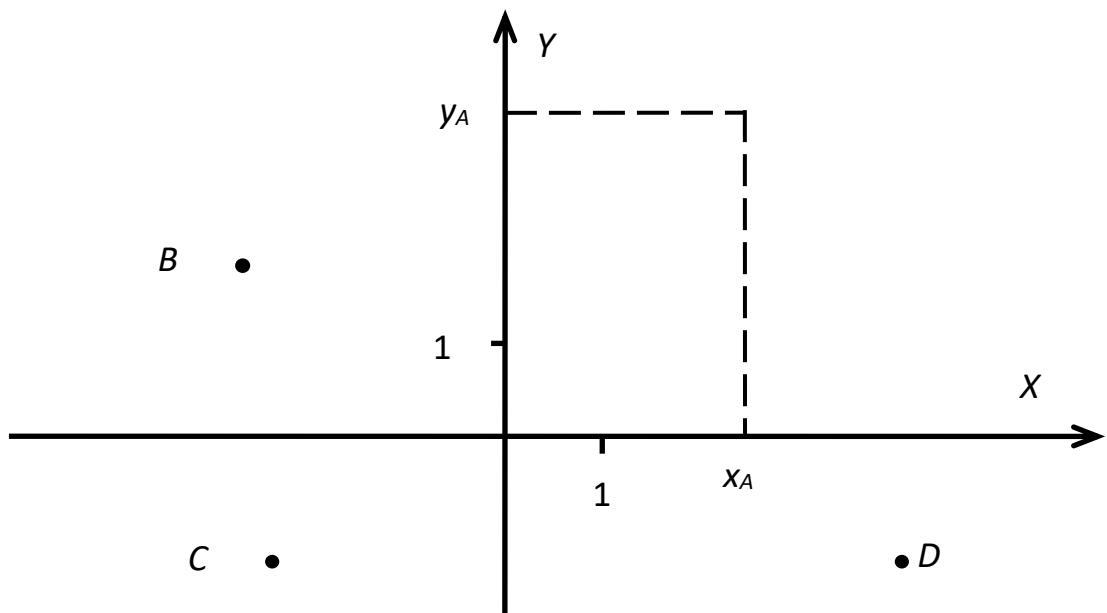


Рис. П.2.1. Декартова система координат на плоскости.
 X — ось абсцисс, Y — ось ординат, A, B, C, D — точки на плоскости.
 x_A и y_A — абсцисса и ордината точки A соответственно.
Штриховые линии — перпендикуляры, опущенные из точки A на координатные оси

В зависимости от положения точки на плоскости (или в пространстве) относительно выбранной системы координат проекции рассматриваемой точки могут быть как положительными, так и отрицательными. Ясно, что на рис.П.5.1 проекции точек имеют следующие знаки: $x_B < 0, y_B > 0; x_C < 0, y_C < 0; x_D > 0, y_D < 0$.

Пример использования декартовой системы координат приведён на рис. П.2.2.

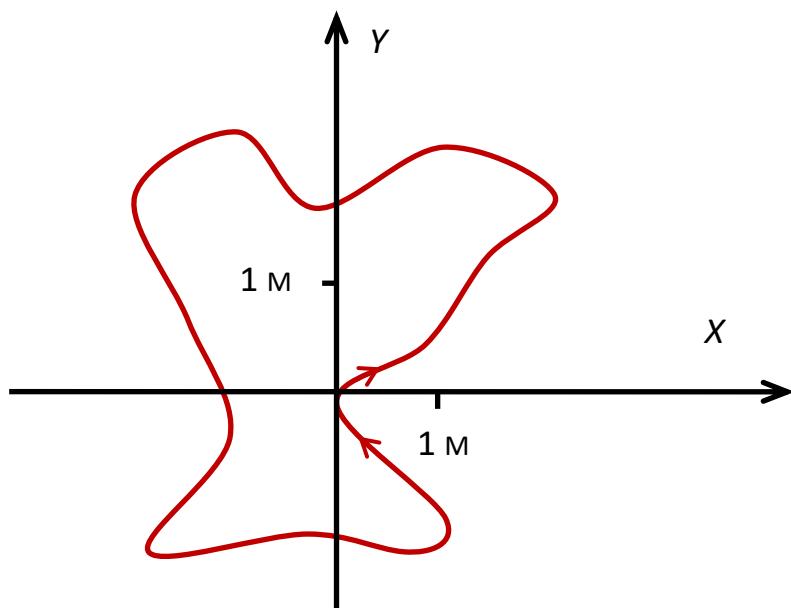


Рис. П.2.2. Траектория движения суслика вокруг своей норы

Иногда при решении задач целесообразно использовать **полярную систему координат** на плоскости. Эта система задается особой точкой, называемой **полюсом**, и **полярной полуосью**, как показано на рис. П.2.3. В полярной системе координат положение произвольной точки на плоскости характеризуется двумя координатами.

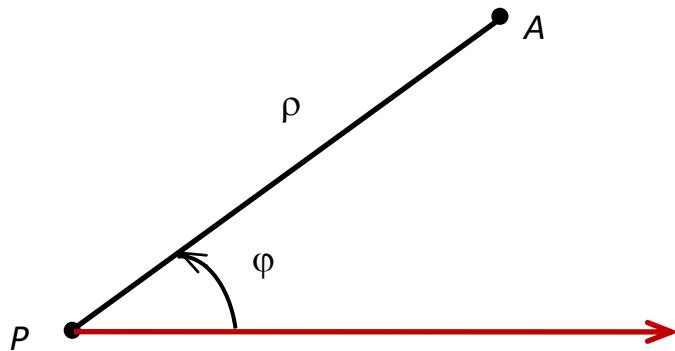


Рис. П.2.3. Полярная система координат.
Точка P – полюс, красная стрелка – полярная ось

Первая полярная координата (часто обозначаемая греческой буквой ρ) представляет собой расстояние до данной точки от полюса P системы координат. Вторая полярная координата (обычно обозначаемая греческой буквой φ) — угол, образованный отрезком, соединяющим данную точку с полюсом, и полярной полуосью (см. рис. П.2.3).

Очевидно, что координата ρ для всех точек плоскости положительна. Возможные значения координаты φ располагаются в интервале $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или в градусной мере: $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$).

При решении задач случается переходить от полярных координат к декартовым или наоборот. Для этой операции требуется совмещение двух систем координат. Обычно используется следующий способ. Центр декартовой системы координат совмещают с полюсом полярной системы координат, а положительную полуось абсцисс — с полярной осью (см. рис. П.2.4).

Из чертежа на рис. П.2.4 видна связь декартовых и полярных координат произвольной точки плоскости:

$$x = \rho \cos(\varphi), y = \rho \sin(\varphi). \quad (\text{П.2.1})$$

Не составляет труда записать обратное преобразование координат:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \operatorname{arctg}(y/x). \quad (\text{П.2.2})$$

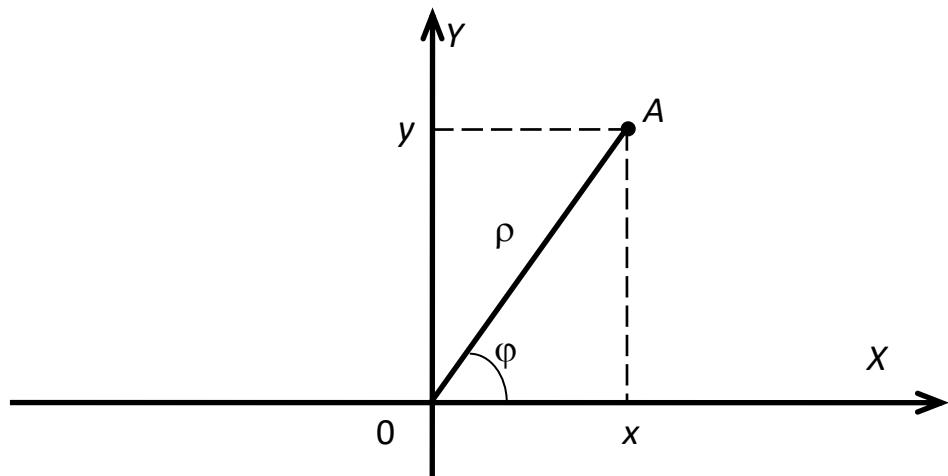


Рис. П.2.4. Совмещение декартовой и полярной систем координат на плоскости.
ρ и φ — полярные координаты, x и y — декартовы координаты точки A

Операции с векторами

Многие физические величины имеют векторный характер. Это означает, что они характеризуются не только величиной, но и направлением. Векторами являются, например, скорость, сила, ускорение, импульс и т.д.

Величины, полностью определяемые числовыми значениями, являются скалярными. К ним относятся масса, время, энергия и т.д.

Произвольный вектор удобно изображать направленным отрезком (т.е. стрелкой). Направление однозначно определяет начало и конец вектора (см. рис. П.3.1).

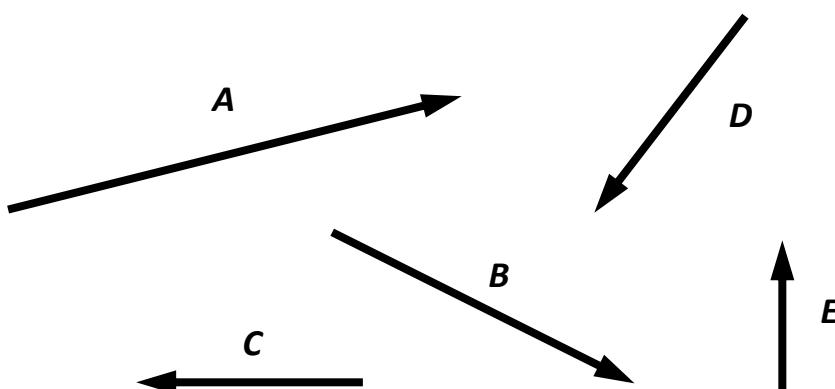


Рис. П.3.1. Примеры векторов

Длина отрезка называется **модулем** вектора. Модуль вектора – скаляр, причем всегда положительный.

В текстах векторные величины обычно обозначаются полужирными буквами (например, **A**, **B**, **C**,...), либо буквами со стрелкой сверху (\vec{A} , \vec{B} , \vec{C} ,...). Модуль вектора **A** обозначается соответствующей нежирной буквой **A** или так: $|A|$.

Ниже рассматриваются простейшие операции с векторами, которые необходимо знать при изучении физики.

Сложение векторов.

Суммой двух векторов является вектор, который можно построить двумя способами.

1. Метод параллелограмма. Векторы **A** и **B** сдвигаются параллельно самим себе так, чтобы совместились их начала. Затем строится параллелограмм, двумя сторонами которого являются суммируемые векторы. Вектор суммы **A+B** представляется диагональю построенного параллелограмма. При этом начало вектора суммы совмещено с общим началом **A** и **B**. На

рис. П.3.2.*a* показано сложение векторов A и B , заданных на рис. П.3.1, методом параллелограмма.

2. Метод треугольника. Векторы сдвигаются параллельно самим себе так, чтобы начало второго B совместились с концом первого A . Сумма $A+B$ представляет собой вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом второго. На рис. П.3.2.*b* изображено сложение методом треугольника тех же векторов A и B , которые складывались на рис. П.3.2.*a* методом параллелограмма.

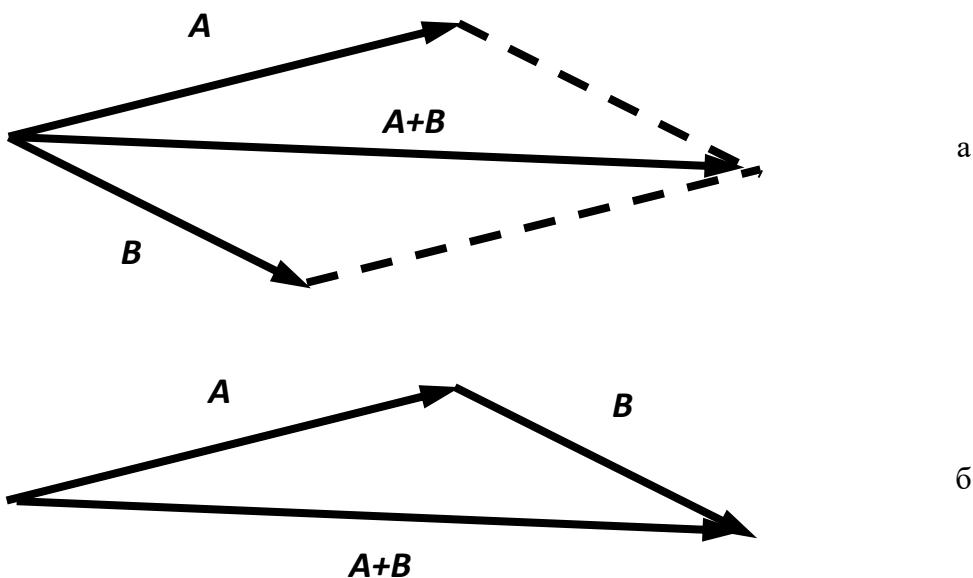


Рис. П.3.2. Сложение двух векторов A и B .
a – метод параллелограмма, *б* – метод треугольника

Нетрудно доказать с помощью геометрии, что оба способа дают один и тот результат. Кроме того, ясно, что если в методе треугольника, наоборот, начало первого вектора A совместить с концом второго B , то полученная сумма не изменится. Таким образом, сложение векторов *коммутативно*, то есть результат суммирования не зависит от порядка слагаемых.

Вышеописанные методы позволяют складывать векторы попарно. К полученной сумме можно прибавить ещё один, затем ещё и т.д. Однако есть способ сложить сразу несколько векторов.

3. Метод многоугольника.

Суммируемые векторы сдвигаются параллельно самим себе так, чтобы начало следующего вектора совместились с концом предыдущего. Суммарный вектор имеет начало, совпадающее с началом первого вектора, а конец – с концом последнего. На рис. П.3.3 показано сложение методом многоугольника пяти векторов, изображенных на рис. П.3.1.

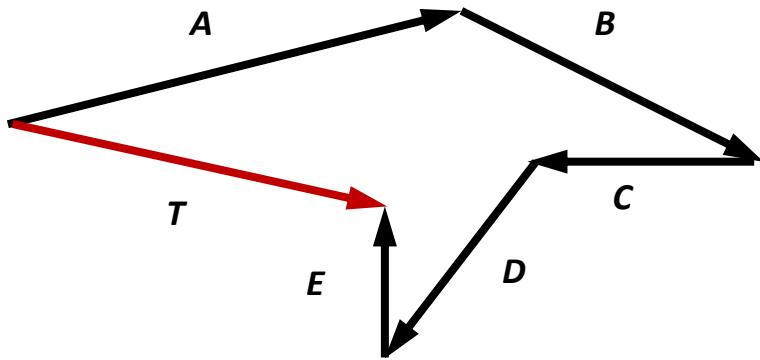


Рис. П.3.3. Сложение пяти векторов методом многоугольника.
 T – вектор суммы: $T = A + B + C + D + E$

Очевидно, что метод треугольника является частным случаем метода многоугольника.

Умножение скаляра на вектор.

Результатом умножения скаляра (т.е. числа) на вектор является вектор. Обозначим вектор символом A , а скаляр – буквой u . Вектор uA имеет модуль (длину) равную произведению $|u| |A|$, т.е. произведению абсолютной величины скаляра и модуля исходного вектора A . Ясно, что если $|u| > 1$, то вектор uA длиннее, чем вектор A . Наоборот, если $|u| < 1$, то вектор uA короче вектора A .

Направление вектора uA определяется знаком скаляра u . Если число u положительное, то векторы uA и A направлены в одну и ту же сторону. Если же $u < 0$, то векторы uA и A ориентированы взаимно противоположно (см. рис. П.3.4).

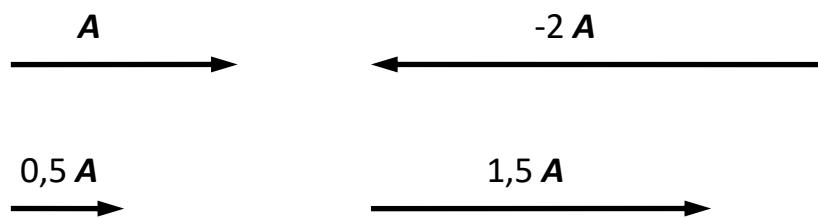


Рис. П.3.4. Примеры умножения вектора на число

Очевидно, что умножение вектора на -1 эквивалентно повороту вектора на 180° без изменения его модуля. Можно кратко записать $A \uparrow\downarrow -A$ и $|\vec{A}| = |- \vec{A}|$

Вычитание векторов.

Операция вычитания из вектора A вектора B эквивалентна сложению вектора A с вектором $-B$ (т.е. с вектором, противоположно направленному вектору B):

$$A - B = A + (-B) \quad (\text{П.3.1})$$

Таким образом, для вычитания достаточно второй вектор развернуть на 180° , а затем применить какой-либо способ сложения векторов (метод параллелограмма или метод треугольника). Пример вычитания векторов приведен на рис. П.3.5.

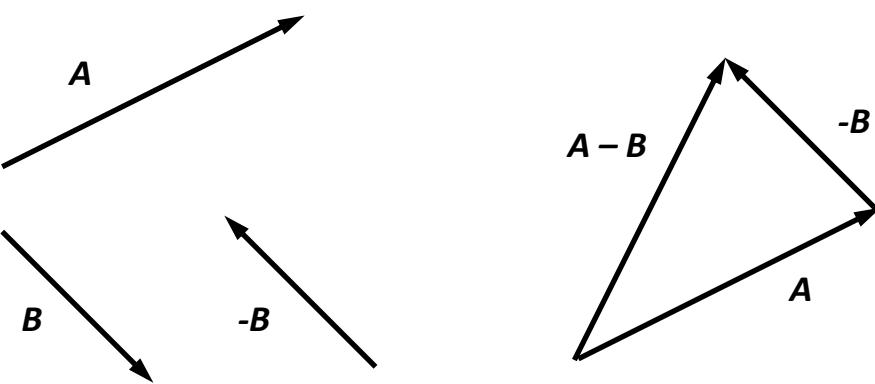


Рис. П.3.5. Пример вычитания векторов A и B

Проектирование векторов.

Для проектирования векторов необходимо задать декартову систему координат. Операция проектирования вектора на координатную ось заключается в следующем: из начала и конца вектора опускаются перпендикуляры на данную ось. При этом получаются две точки на координатной оси, которые называются проекциями начала и конца данного вектора соответственно. Согласно изложенному в приложении 4, проекции точек выражаются числами. **Проекция вектора** на ось равна разности проекций конца и начала этого вектора. Ясно, что проекция вектора – скаляр.

Аналогично строится и вычисляется проекция вектора на другие оси координат декартовой системы.

Проиллюстрируем вышеизложенное схемой на рис. П.3.6. Двумерная декартова система координат XOY расположена на плоскости, в которой лежит вектор A . Опуская перпендикуляры на ось OX , получим числа x_1 и x_2 – проекции конца и начала вектора A на ось абсцисс. Аналогично, опустив перпендикуляры на ось OY , получаем числа y_1 и y_2 – проекции конца и начала вектора A на ось ординат.

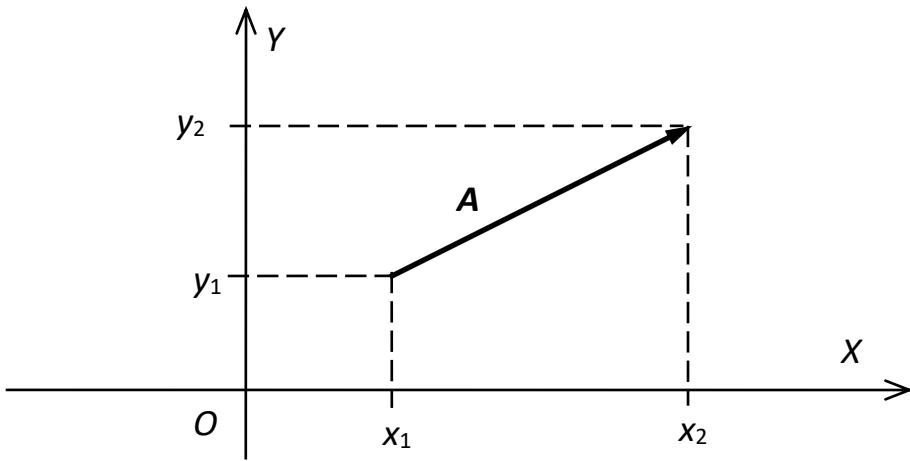


Рис. П.3.6. Проецирование вектора A на оси декартовой системы координат XOY

Проекцией вектора A на ось абсцисс является разность:

$$A_x = x_2 - x_1 \quad (\text{П.3.2})$$

Проекция того же вектора A на ось ординат равна:

$$A_y = y_2 - y_1 \quad (\text{П.3.3})$$

Обе проекции вектора A в данном примере положительны. Но если перенести параллельным переносом на данную систему координат XOY векторы B , C и E , то легко убедиться, что проекции векторов могут быть как положительными, так и отрицательными.

Вектор в 3-мерном пространстве может быть расположен так, что не лежит ни в одной координатной плоскости декартовой системы координат. Тогда для его проецирования необходимо опускать перпендикуляры на все три координатные оси и вычислять три проекции: две по формулам (П.3.2) и (П.3.3), а третью по аналогичной формуле

$$A_z = z_2 - z_1 \quad (\text{П.3.4})$$

где z_1 и z_2 – проекции конца и начала вектора A на координатную ось Z .

Из предыдущего ясно, что если начала вектора и точка начала координат совмещены, то вычисления проекций вектора упрощаются. Согласно формулам (П.3.2) – (П.3.4), в этих случаях все проекции начала вектора равны нулю. Следовательно, проекция вектора численно совпадает с проекцией конца вектора. Иначе говоря, в таких случаях для нахождения проекций векторов достаточно спроектировать только концы векторов.

Графическое решение задач кинематики

В предыдущих параграфах графики рассматривались как изображение результатов. Но иногда встречается обратная ситуация – графики являются условиями задачи.

На начальном этапе изучения механики материальной точки рассматриваются равномерные и равноускоренные движения. При решении задач очень полезно использовать графики кинематических функций времени.

Задача П.4.1. Для примера рассмотрим типичную задачу школьной программы. Частица движется неравномерно вдоль прямой линии, по которой направляется координатная ось X . График зависимости проекции скорости v_x от времени t показан на рис. П.4.1.

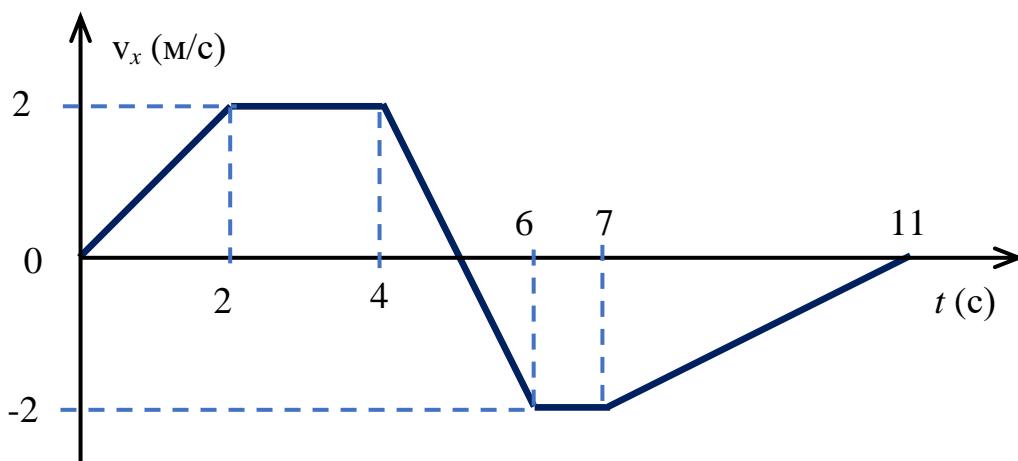


Рис. П.4.1. График зависимости проекции скорости частицы, движущейся вдоль координатной оси X

Задача заключается в построении графиков зависимостей проекции ускорения $a_x(t)$ и координаты $x(t)$ от времени t .

Заметим, что отрицательное значение проекции скорости v_x означает, что частица движется противоположно направлению выбранной координатной оси X .

Используя определение проекции ускорения a_x легко построить график функции $a_x(t)$.

По графику на рис. П.4.1 видно, что на интервале времени ($0 < t < 2$ с) проекция скорости v_x линейно увеличивается от нуля; на интервале времени ($4 \text{ с} < t < 6 \text{ с}$) линейно уменьшается; на интервале времени ($7 \text{ с} < t < 11 \text{ с}$) вновь линейно увеличивается. На интервалах времени ($2 \text{ с} < t < 4 \text{ с}$) и ($6 \text{ с} < t < 7 \text{ с}$) – имеет постоянное значение. Следовательно, на интервалах времени ($2 \text{ с} < t < 4 \text{ с}$) и ($6 \text{ с} < t < 7 \text{ с}$) проекция ускорения a_x равна нулю.

Линейный вид зависимости $v_x(t)$ означает, что движение происходит с постоянным ускорением, т.е. $a_x = \text{const}$. Проекцию ускорения a_x можно вычис-

лиль по определению $a_x = \Delta v_x / \Delta t$. Иными словами, величина a_x выражается тангенсом угла наклона графика функции $v_x(t)$.

На интервале времени ($0 < t < 2$ с) $a_x = \frac{2-0}{2-0} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Аналогично, на интервале времени ($4 < t < 6$ с) $a_x = \frac{-2-2}{6-4} = -2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Наконец, на интервале времени ($7 < t < 11$ с) $a_x = \frac{0-(-2)}{11-7} = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Результаты расчётов проекции ускорения a_x приведены на рис. П.4.2.

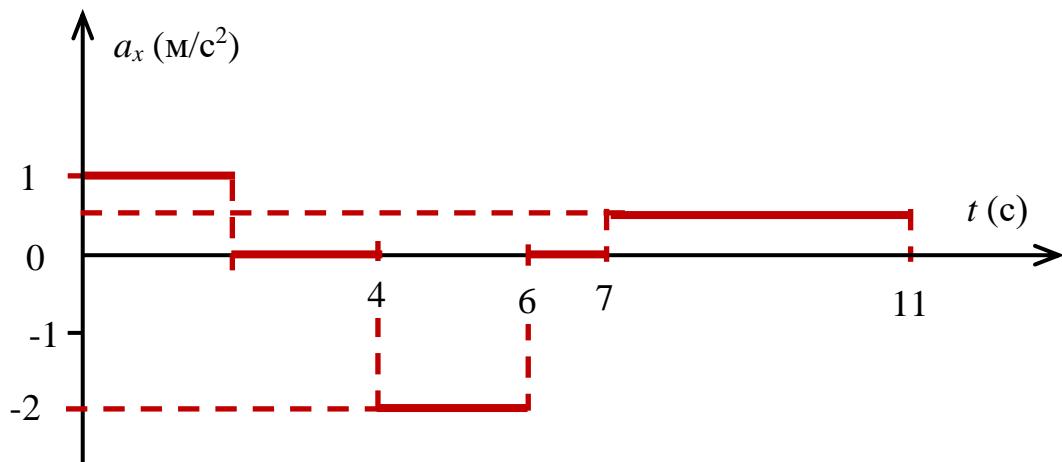


Рис. П.4.2. График зависимости проекции ускорения частицы, скорость которой задана на рис. 26.1

Заметим, что положительное значение проекции ускорения $a_x > 0$ влечет увеличение проекции скорости v_x , отрицательное $a_x < 0$ – уменьшение величины v_x .

Для расчёта зависимости координаты частицы от времени необходимо знать начальную координату x_0 . Положим $x_0 = 0$.

На интервале времени ($0 < t < 2$ с) частица движется равноускоренно с $a_x = 1 \text{ м/с}^2$ при нулевой начальной скорости. Следовательно, зависимость координаты от времени на этом интервале выразится так: $x = a_x t^2/2$. График этой функции – отрезок параболы с вершиной в точке $t = 0$ и «рогами» вверх. Координата в конце этого интервала $x(t=2) = 2 \text{ м}$.

На интервале времени ($2 < t < 4$ с) частица движется равномерно, с постоянной скоростью $v_x = 2 \text{ м/с}$. За 2 секунды координата увеличится на 4 метра, т.е. $x(t=4) = 6 \text{ м}$. График функции $x(t)$ на этом интервале – отрезок прямой.

На интервале ($4 < t < 6$ с) частица вновь движется равноускоренно, причем проекция ускорения отрицательна $a_x = -2 \text{ м/с}^2$. График функции $x(t)$ – отрезок параболы «рогами» вниз.

Из определения проекции скорости v_x следует, что в точке, где $v_x = 0$, касательная к графику функции $x(t)$ – горизонтальна. Это означает, что в момент времени $t = 5$ с, парабола $x(t)$ имеет вершину.

В этот момент времени $t = 5$ с координата частицы

$$x(t=5) = 6 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 / 2 = 7 \text{ (м).}$$

В момент $t = 5$ с проекция скорости v_x сменила знак, иными словами, частица изменила направление движения.

В момент времени $t = 6$ с координата $x(t=6) = 6 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 / 2 = 6$ (м).

На интервале времени (6 с $< t < 7$ с) частица опять движется равномерно, но с отрицательной проекцией скорости $v_x = -2$ м/с. Координата частицы уменьшается по линейному закону за одну секунду на 2 метра. Таким образом, $x(t=7) = 4$ м.

На последнем интервале времени (7 с $< t < 11$ с) частица движется равноускоренно, с положительной проекцией ускорения $a_x = 0,5$ м/с². Однако, проекция скорости v_x остаётся отрицательной, постепенно уменьшаясь по абсолютной величине (см. рис. П.4.2). При этом координата $x(t)$ уменьшается по квадратичной функции, график – отрезок параболы «рогами» вверх. Вершина параболы $x(t)$ находится в точке $t = 11$ сек., т.к. $v_x(t = 11) = 0$ (рис. П.4.3). Легко вычислить, что на интервале времени (7 с $< t < 11$ с) координата x изменяется на $-2 \cdot 4 + 0,5 \cdot 4^2 / 2 = -4$ метра. Следовательно, $x(t = 11) = 0$ (рис. П.4.3).

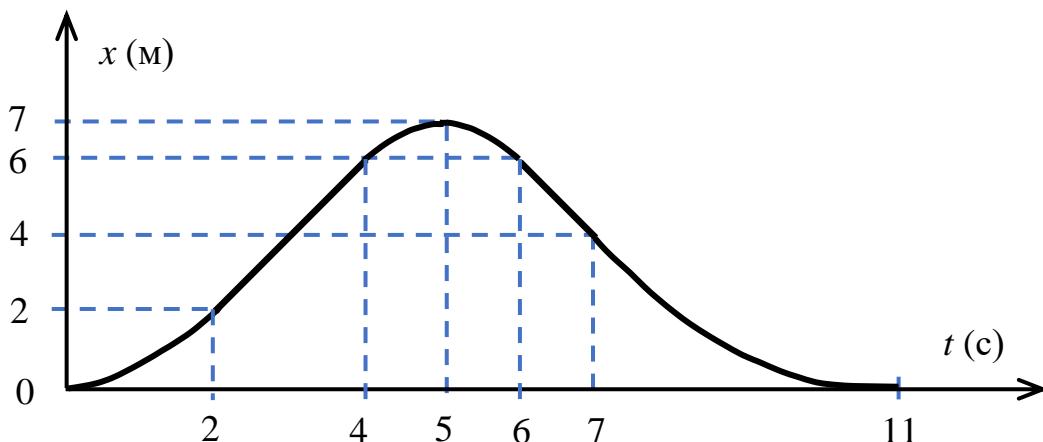


Рис. П.4.3. График зависимости координаты частицы, скорость которой задана на рис. П.4.1

Таким образом, за 11 секунд движения частица вернулась в исходную точку.

Очевидно, что функция $x(t)$ является непрерывной без разрывов и скачков. Не может частица в любой момент времени изменить свою координату. Существенно, что график функции $x(t)$ не может иметь изломов. Тангенс угла касательной к графику функции $x(t)$ численно равен проекции скорости v_x в данный момент времени. Следовательно, излом на графике функции $x(t)$ означал бы, что в этот момент времени частица имеет два различных значения величины проекции скорости v_x !

Изломы на графике функции $v_x(t)$ означают, что в соответствующие моменты времени ускорение меняется скачком. Это возможно, т.к. ускорение обусловлено действием сил на частицу. Если в некоторый момент времени сила изменилась, то, согласно 2-му закону Ньютона, меняется и ускорение, что наблюдается на рис. П.4.2.

Задача П.4.2. Иногда школьникам предлагаются задания, типа изображенного на рис. П.4.4. Частица движется прямолинейно, причём на разных интервалах времени движется с постоянной скоростью, но с неодинаковой на этих интервалах. Требуется построить график проекции ускорения частицы на интервале времени: (0; 7 сек).

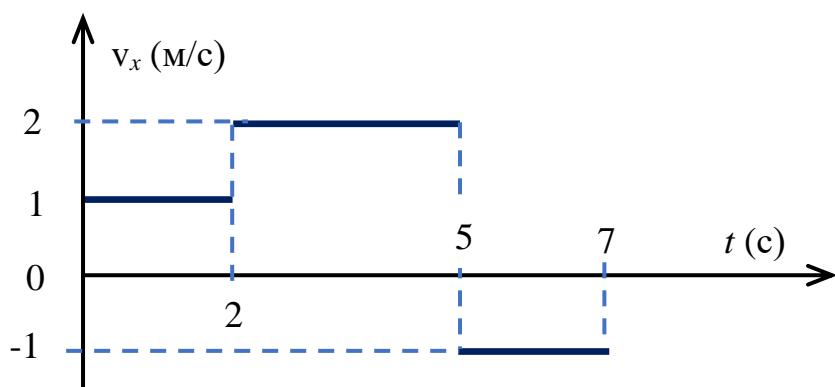


Рис. П.4.4. График зависимости проекции скорости частицы от времени

Очевидно, при движении с постоянной скоростью ускорение частицы равно нулю.

Особый интерес имеют моменты времени $t = 2$ с и $t = 5$ с, когда скорость частицы меняется скачком на конечную величину. Используя для момента $t = 2$ с определение проекции ускорения $a_x = \Delta v_x / \Delta t$, мы формально получаем $a_x = (2 - 1) / 0$ бесконечную величину, что является физически бессмысленным.

В реальной ситуации проекция скорости может изменяться на конечную величину $\Delta v_x = 2$ м/с не мгновенно, а за малый или очень малый интервал времени Δt : 1 мс; 1 мкс и т.д. При этом величина проекции ускорения на этом интервале времени выражается очень большим положительным числом, но не бесконечным!

Аналогичная ситуация наблюдается в момент времени $t = 5$ с. Формальное применение формулы расчета проекции ускорения $a_x = \Delta v_x / \Delta t = (-1 - 2) / 0$ даёт также бесконечную величину, но со знаком «минус».

Возвращаясь к реальности, мы полагаем, что изменение проекции скорости на величину $\Delta v_x = -3$ м/с произошло не мгновенно, а за очень малый интервал времени Δt . Проекция ускорения на интервале времени Δt имеет отрицательное значение, но большое по абсолютной величине.

Так как интервалы времени изменения скорости численно не заданы, то график зависимости проекции ускорения частицы от времени следует изобразить схематически, как показано на рис. П.4.5.

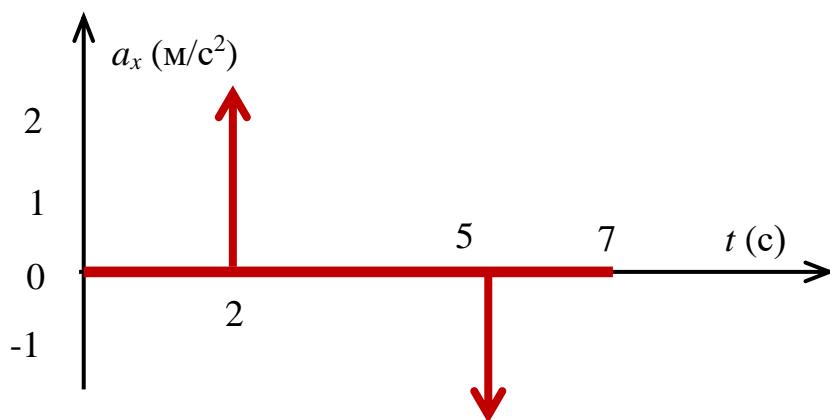


Рис. П.4.5. График зависимости проекции ускорения частицы от времени, скорость которой задана на рис. 26.4

Рассмотренный процесс может произойти, если движущаяся частица получила дважды резкие толчки большой силы: в момент $t = 2$ с в направлении оси X , а в момент $t = 5$ с – в противоположном направлении.

Если задать начальную координату частицы, то можно по данным рис. П.4.4 построить график зависимости координаты от времени. Ничто не мешает положить $x_0 = 0$.

На интервале времени ($0 < t < 2$ с) частица движется равномерно с постоянной скоростью $v_x = 1$ м/с. Следовательно, координата с течением времени растёт линейно и в момент времени $t = 2$ с становится равной $x = 2$ м.

На интервале времени ($2 < t < 5$ с) частица движется также равномерно, но с постоянной скоростью $v_x = 2$ м/с. За три секунды частица получает приращение координаты $\Delta x = (2 \cdot 3) = 6$ м. Следовательно, в момент времени $t = 5$ с координата $x(t = 5) = 8$ м.

На интервале времени ($5 < t < 7$ с) частица имеет постоянную, но отрицательную проекцию скорости $v_x = -1$ м/с. Это означает, что координата линейно уменьшается. За две секунды приращение координаты $\Delta x = (-1 \cdot 2) = -2$ м. Таким образом, $x(t = 6) = 6$ м.

График координаты частицы от времени изображен на рис. П.4.6. Прямые отрезки – графики линейных функций, обусловленные постоянной скоростью и нулевым ускорением.

Ясно, что график зависимости $x(t)$ не может иметь разрывов и скачков, т.к. координата частицы является непрерывной функцией.

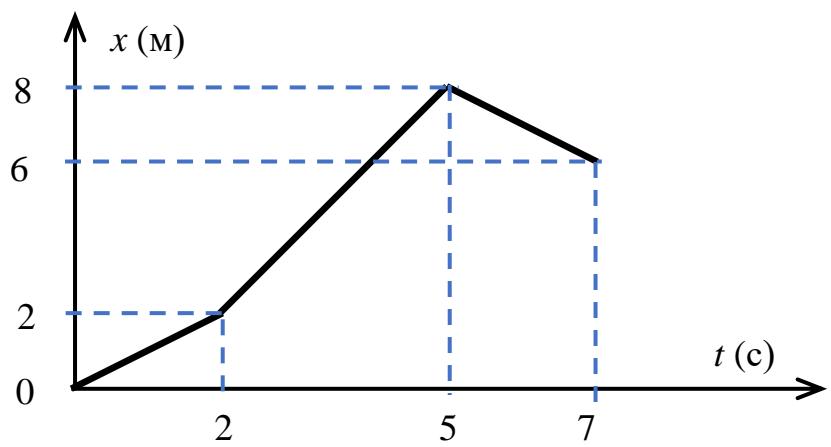
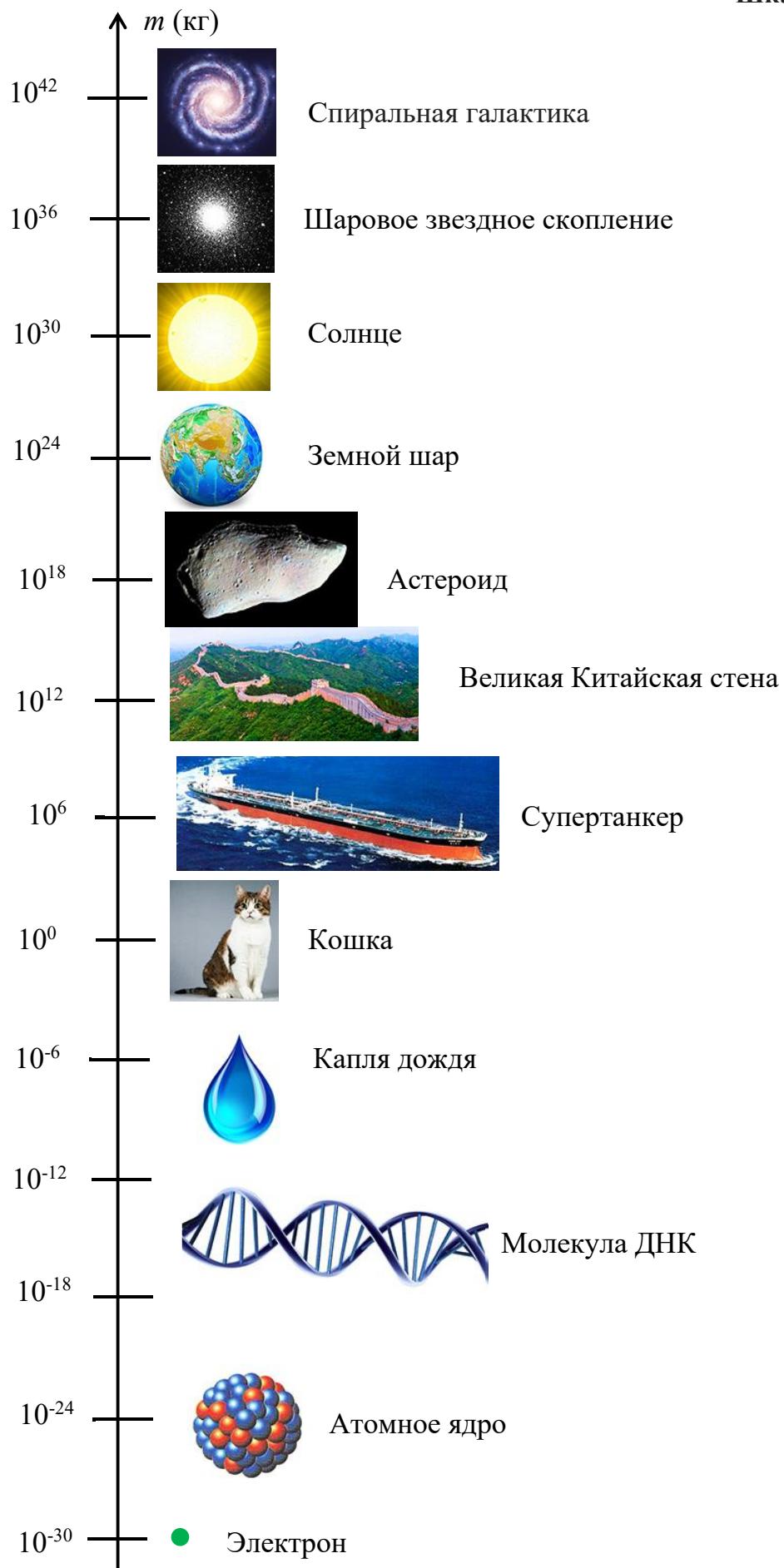
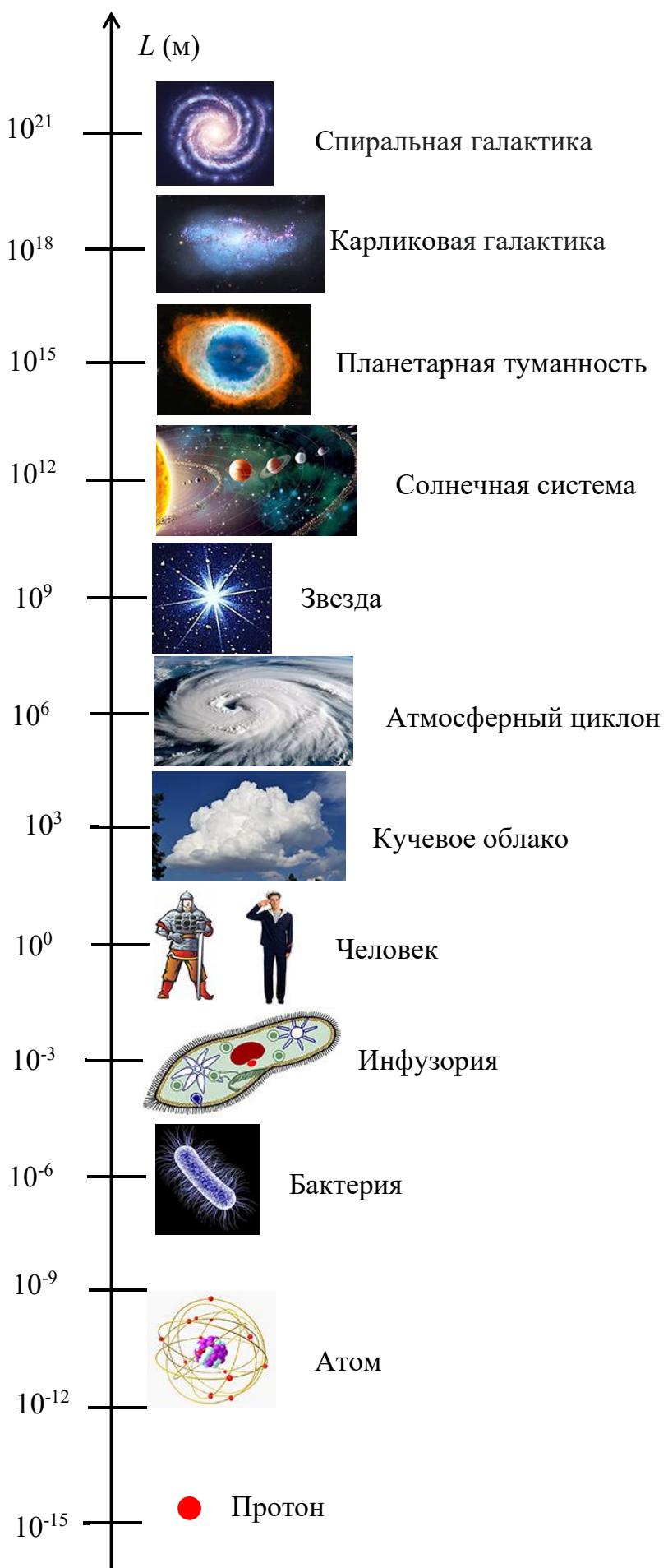


Рис. П.4.6. График зависимости координаты частицы от времени, скорость которой задана на рис. П.4.4

Шкала масс



Шкала размеров



Оглавление

Введение.....	3
Часть 1. Общие понятия экспериментальной физики	5
§ 1. Основные и производные физические величины	5
§ 2. Прямые и косвенные измерения	7
§ 3. Точность и воспроизводимость измерений	8
Часть 2. Методы измерения основных величин	9
§ 4. Измерения линейных размеров.....	9
§ 5. Измерения массы	17
§ 6. Измерения времени	23
§ 7. Измерения температуры	28
§ 8. Измерения углов.....	32
Часть 3. Прямые измерения производных величин	36
§ 9. Измерения объёма	36
§ 10. Измерения сил.....	41
§ 11. Электрические измерения	45
Часть 4. Косвенные измерения производных величин	51
§ 12. Измерения плотности.....	51
§ 13. Измерения ускорения свободного падения	54
§ 14. Измерения показателя преломления прозрачного материала.....	56
§ 15 Измерения коэффициента трения	58
Часть 5. Математическая обработка результатов экспериментов	61
§ 16. Округление чисел	61
§ 17. Значащие цифры.....	61
§ 18. Приборные погрешности	64
§ 19. Систематические погрешности.....	65
§ 20. Случайные погрешности	66
§ 21. Абсолютная и относительная погрешности	70
§ 22. Погрешности косвенных измерений	74
§ 23. Функции и уравнения.....	79
§ 24. Интерполяция и экстраполяция	81
§ 25. Аппроксимация.....	86
§ 26. Корреляция.....	91
Часть 6. Представление результатов экспериментов	95
§ 27. Протокол измерений	95
§ 28. Изображение зависимостей физических величин с помощью графиков ...	98
§ 29. Представление данных на диаграммах	107
Приложение 1. Идеализация физических объектов	111
Приложение 2. Системы координат	116
Приложение 3. Операции с векторами	120
Приложение 4. Графическое решение задач кинематики.....	125
Приложение 5. Шкалы масс и размеров	131

Фаддеев М.А., Андреев П.В.

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

**Рекомендации
для начинающих физиков-экспериментаторов**

Учебное пособие

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603022, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23

Подписано в печать 21.05.2025.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7,78. Заказ № 165/25. Тираж 200 экз.

Отпечатано в типографии ННГУ им. Н.И. Лобачевского.
603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37