

"Курсовая работа по дискретной математике"

Иван Кочкожаров, студент группы М8О-108Б-22

28 мая 2023 г.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- а) матрицу односторонней связности;
- б) матрицу сильной связности;
- в) компоненты сильной связности;
- г) матрицу контуров.

Решение.

Изображение графа:

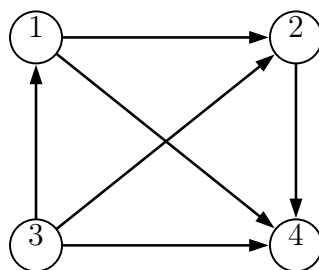


Рис. 1: Граф G

Матрица односторонней связности:

$$A = A(D) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \\ &\vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица двусторонней связности:

$$S(D) = T(D) \& [T(D)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S(D) = E \Rightarrow$ в графе D нет контуров.

Компоненты сильной связности:

$$S_2(D) = S(D) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_1 = (V_1, X_1), V_1 = \{v_1\}$$

$$A(D_1) = \begin{array}{c|c} & v_1 \\ \hline v_1 & 0 \end{array} \quad D_1 : \quad \textcircled{1}$$

$$S_2(D) = \begin{array}{c|c|c|c} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_2 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_2 = (V_2, X_2), V_2 = \{v_2\}$$

$$A(D_2) = \begin{array}{c|c} & v_2 \\ \hline v_2 & 0 \end{array} \quad D_2 : \quad \textcircled{2}$$

$$S_3(D) = \begin{array}{c|c|c} & v_3 & v_4 \\ \hline v_3 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_3 = (V_3, X_3), V_3 = \{v_3\}$$

$$A(D_3) = \begin{array}{c|c} & v_3 \\ \hline v_3 & 0 \end{array} \quad D_3 : \quad \textcircled{3}$$

$$S_4(D) = \begin{array}{c|c} & v_4 \\ \hline v_4 & 1 \end{array}$$

$$D_4 = (V_4, X_4), V_4 = \{v_4\}$$

$$A(D_4) = \begin{array}{c|c} & v_4 \\ \hline v_4 & 0 \end{array} \quad D_4 : \quad \textcircled{4}$$

Матрица контуров:

$$K(D) = A(D) \& S(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.

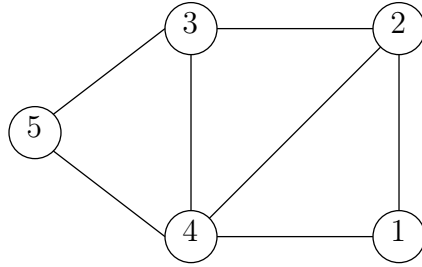


Рис. 2: Граф G

Решение.

Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри. Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм дает следующий возможный маршрут:

$$v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_3 v_4 v_2 v_4 v_1 v_4 v_5 v_3 v_2 v_1$$

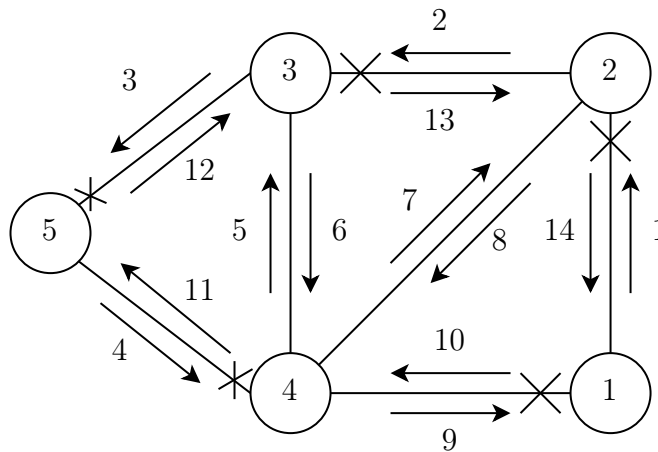


Рис. 3: Визуализация алгоритма Терри

3. Орграф $D = (V, X)$, где $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$ задан матрицей смежности $A(D)$. Найти все минимальные пути v_1 в v_8 .

$$A = A(D) =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	1	1	0	0
v_3	1	0	0	0	0	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	1	0	0	1	1
v_6	0	0	1	1	0	0	0	0
v_7	1	0	1	1	1	1	1	0
v_8	1	0	1	1	0	0	1	0

Решение.

Действуя согласно алгоритму фронта волны, последовательно определяем:

$$\begin{aligned}
 FW_0(v_1) &= \{v_1\}, FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_3, v_6\}, \\
 FW_2(v_1) &= D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_3, v_6\}) \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \\
 &= \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \{v_4\} \\
 FW_3(v_1) &= D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\} \setminus \\
 &\setminus \{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2\} \\
 FW_4(v_1) &= D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) = \\
 &= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_5\} \\
 FW_5(v_1) &= D(FW_4(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1) \cup FW_4(v_1)) = \\
 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_7, v_8\}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $v_8 \in FW_5(v_1)$, а следовательно, согласно алгоритму фронта волны существует минимальный путь в орграфе D из v_1 в v_8 длины 5. Найдём все эти пути.

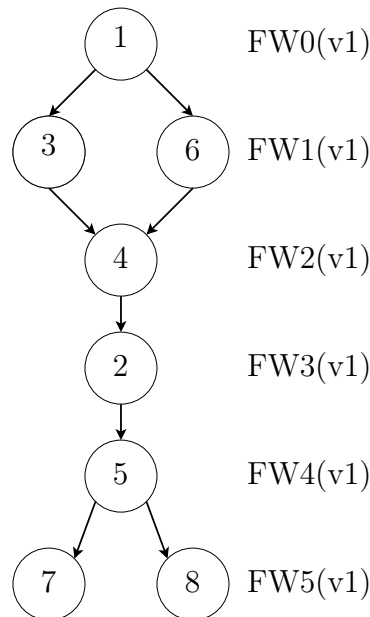


Рис. 4: Граф D'

На рисунке 4 изображен подграф D' орграфа D , на котором последовательно изображены множества $FW_k(v_1), k = 1, 2, 3, 4, 5$, а так же дуги вида (v, v') , где для некоторого $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, v \in FW_k(v_1), v' \in FW_{k+1}(v_1)$, т.е. исходящие из вершин некоторого k -го фронта волны и заходящие в вершины следующего $(k + 1)$ -го фронта волны.

Используя изображение D' нетрудно выделить все минимальные пути из v_1 в v_8 в орграфе D . При этом, следуя алгоритму фронта волны, находим эти минимальные пути, используя оргграф D' но двигаясь в D' в обратной последовательности (т.е. не из v_1 в v_8 а наоборот, из v_8 в v_1). Используя рисунок 4, получаем, что в любом минимальном пути из v_1 в v_8 соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине v_8 может быть v_5 . Вершиной, предшествующей вершине 5 может быть v_2 . Вершиной, предшествующей вершине v_2 – вершина v_4 . Вершиной, предшествующей вершине v_4 – любая из вершин v_3, v_6 . Вершиной, предшествующей вершинам v_3 и v_6 может быть только v_1 . Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из v_1 в v_8 которое компактно изображено на рисунке 5. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути v_1 в v_8 . Для каждой из промежуточных вершин v показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих v и заходящие в v). Из рисунка 5 видно, что всего существует два минимальных пути из v_1 в v_8 : $v_1v_3v_4v_2v_5v_8, v_1v_6v_4v_2v_5v_8$.

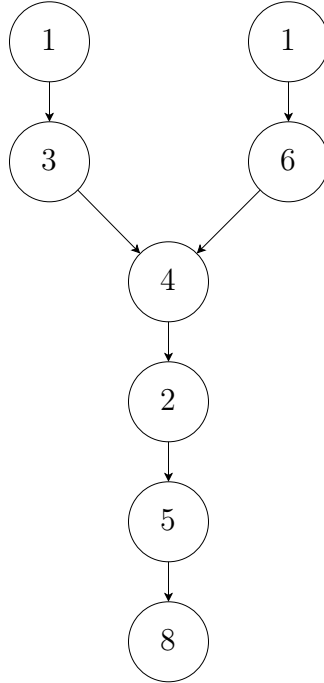


Рис. 5: Граф минимальных путей

4. Нагруженный оргграф D задан матрицей длин дуг $C(D)$. Найти минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины.

$$C(D) = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 10 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & 3 & 11 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Решение.

Воспользуемся алгоритмом Форда. Сначала определим таблицу величин $\lambda_i^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n - 1$, где $n = 8$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$
v_1	∞	4	∞	∞	5	∞	∞	∞		0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	5	∞	7	10	2	∞	∞	∞		∞	4	4	4	4	4	4	4
v_3	∞	∞	∞	2	∞	2	∞	∞		∞	∞	11	10	10	10	10	10
v_4	6	∞	∞	∞	∞	∞	3	5		∞	∞	14	13	12	12	12	12
v_5	3	2	∞	∞	∞	3	11	∞		∞	5	5	5	5	5	5	5
v_6	4	∞	2	∞	∞	∞	7	∞		∞	∞	8	8	8	8	8	8
v_7	8	∞	∞	3	∞	∞	∞	3		∞	∞	16	15	15	15	15	15
v_8	∞	∞	∞	∞	17	∞	∞	∞		∞	∞	∞	19	18	17	17	17

$C(D)$

Таблица величин

Обозначим $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_8^{(k)})^T$, где $k = 0, 1, \dots, 7$. Это столбцы в таблице величин. Первая строка по таблице величин состоит из нулевых элементов ($\lambda_1^{(k)} = 0, k = 0, 1, \dots, 7$), а первый столбец заполняем следующим образом: $\lambda_i^{(0)} = \infty, i = 2, \dots, 8$. Далее, используя формулу $\lambda_j^{(k+1)} = \min_{1 \leq i \leq 8} \{\lambda_i^{(k)} + c_{ij}\}$ последовательно определяем элементы столбца $\lambda^{(1)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(0)}$ (а так же элементы матрицы $C(D)$), затем находим элементы столбца $\lambda^{(2)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(1)}$ и т.д.

Длина минимального пути из v_1 в v_8 равна 17. Вершине v_8 предшествует v_4 , потому что $\lambda_8^{(5)} = 17 = \lambda_4^{(4)} + c_{48} = 12 + 5$. Вершине v_4 предшествует v_3 и т.д. В итоге получаем минимальный путь: $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4 v_8$ (в таблице выделен жирным шрифтом). Соответственно, $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4$, $v_1 v_5 v_6 v_3$, $v_1 v_5 v_6$, $v_1 v_5$ - минимальные пути из v_1 в соответствующие вершины. Минимальный путь из v_1 в v_7 находится аналогично. Получаем такой минимальный путь: $v_1 v_5 v_6 v_7$. Минимальный путь из v_1 в v_2 , очевидно, $v_1 v_2$.

5. Найти остовное дерево графа G с минимальной суммой длин входящих в него ребер.

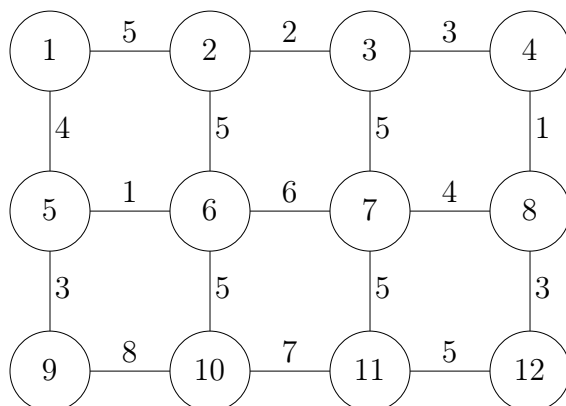


Рис. 6: Граф G

Решение. Согласно алгоритму Краскала выбираем ребро $\{v_5, v_6\}$ минимальной длины 1. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_5 либо v_6 с какой-нибудь новой (т.е. отличной от v_1, v_5) вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_5, v_1\}, \{v_5, v_9\}, \{v_6, v_2\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_{10}\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_5, v_9\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_5 , либо v_6 , либо v_9 с какой-нибудь новой вершиной графа (выбираем между $\{v_9, v_{10}\}, \{v_6, v_{10}\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_2\}, \{v_5, v_1\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_5, v_1\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Следующим ребром минимальной длины (если таких несколько, можно выбрать любое) среди всех возможных является $\{v_1, v_2\}$, затем $\{v_2, v_3\}$, далее $\{v_3, v_4\}$, далее $\{v_4, v_8\}$, далее $\{v_8, v_{12}\}$, далее $\{v_7, v_8\}$, далее $\{v_7, v_{11}\}$ и, наконец, $\{v_6, v_{10}\}$. Выделено $11 = 12 - 1 = n(G) - 1$ ребер, алгоритм окончен, выделяем минимальное остовное дерево графа (см. на рис. 7 подграф графа G , ребра которого выделены жирными линиями).

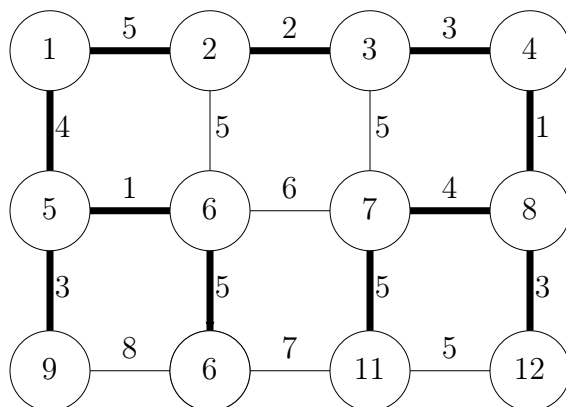


Рис. 7: Граф G с выделенным подграфом - минимальным остовным деревом

6. Пусть каждому ребру неориентированного графа изображенного на рис. 8 соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно незави-

симые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить общую систему уравнений для токов.

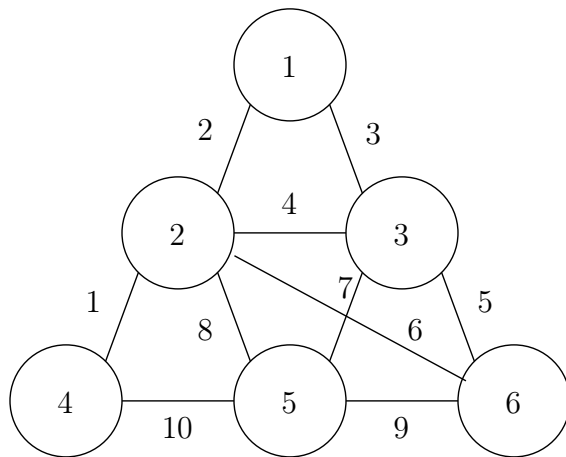


Рис. 8: Граф G

Решение. Выделим произвольным образом остовное дерево графа. Для графа изображенного на рис. 8, одним из возможных остовных деревьев является дерево, изображенное на рис. 9 (пунктирными линиями изображены удаленные из ребра).

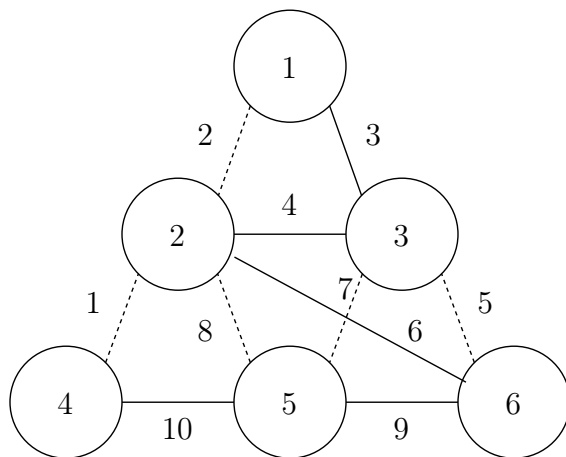


Рис. 9: Остовное дерево графа G

Добавляя любое из ребер, не вошедших в остовное дерево графа G (изображенных на рис. 9 пунктирными линиями), мы получим граф с некоторым простым циклом. Всего в остовное дерево не вошли $v(G) = m(G) - n(G) + 1$ ребер (для графа, изображенного на рис. 8, $v(G) = 10 - 6 + 1 = 5$), а поэтому можем получить таким образом $v(G) = 5$ простых циклов. Эти циклы различны в том смысле что каждый из них проходит через ребро (то самое, которое мы добавляли для выделения

данного цикла), через которое не проходит ни один другой цикл. Они образуют *цикловой базис графа G* .

Для графа, изображенного на рис. 8 в цикловой базис войдут циклы:

$$\mu_1 = \mu_1(x_1) = x_1 x_6 x_9 x_{10}, \mu_2 = \mu_2(x_2) = x_2 x_3 x_4, \mu_3 = \mu_3(x_5) = x_5 x_6 x_4$$

$$\mu_4 = \mu_4(x_7) = x_7 x_9 x_6 x_4, \mu_5 = \mu_5(x_8) = x_8 x_6 x_9$$

Введем произвольную ориентацию на ребрах графа G . В результате каждое ребро x_j превратится в дугу \tilde{x}_j и, соответственно, множество ребер X в множество дуг \tilde{X} , а сам граф $G = (V, X)$ в орграф $D = (V, \tilde{X})$. Для графа G , изображенного на рис. 8, в результате введения ориентации на его ребрах получаем, например, орграф $D = (V, \tilde{X})$, изображенный на рис. 10.

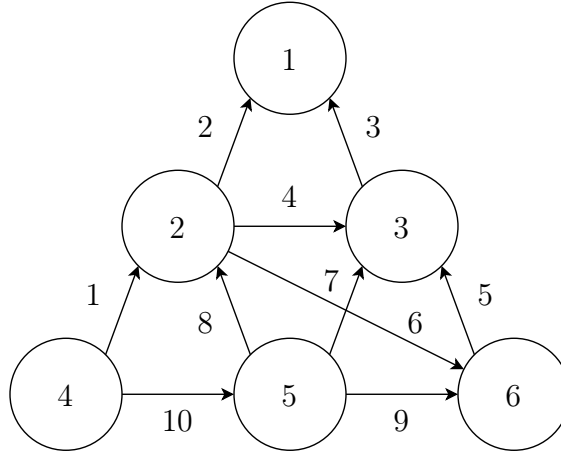


Рис. 10: Орграф D

Для графа G с выделенным ранее цикловым базисом $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ и выбранной ориентацией ребер, соответствующей орграфу D , изображенному на рис. 10, цикломатическая матрица имеет вид:

$$C(G) = \begin{array}{c|cccccccccc} & * & * & & & * & & * & * & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ \hline \mu_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \mu_2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

При построении циклового базиса графа G мы поочередно добавляли к основному дереву графа G ребра x_1, x_2, x_5, x_7, x_8 . Выделяем соответствующие этим ребрам столбцы в матрице $C(G)$. Из выделенных столбцов составим матрицу и найдем ее определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ранг матрицы $C(G)$ равен числу строк, т.е. $v(G)$.

Пусть теперь граф G соответствует электрической цепи, где первому и пятому ребру соответствуют E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями.

Выберем произвольным образом направления токов в элементах цепи (условные направления; после решения соответствующей системы уравнений знаки при величинах токов покажут истинные направления токов). Пусть эти направления соответствуют выбранной ранее ориентации ребер графа G . Впишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений:

$$\mu_1 : -u_1 + u_6 - u_9 - u_{10} = 0$$

$$\mu_2 : u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

$$\mu_3 : u_4 - u_5 - u_6 = 0$$

$$\mu_4 : u_4 - u_6 - u_7 + u_9 = 0$$

$$\mu_5 : u_6 + u_8 - u_9 = 0$$

или, с учетом закона Ома, а также того, что $u_1 = E_1, u_5 = E_2$, а номера сопротивлений соответствуют номерам ребер, имеем:

$$\begin{cases} -E_1 + i_6 r_6 - i_9 r_9 - i_{10} r_{10} = 0 \\ i_2 r_2 - i_3 r_3 - i_4 r_4 = 0 \\ i_4 r_4 - E_2 - i_6 r_6 = 0 \\ i_4 r_4 - i_6 r_6 - i_7 r_7 + i_9 r_9 = 0 \\ i_6 r_6 + i_8 r_8 - i_9 r_9 = 0 \end{cases}$$

Система уравнений Кирхгофа для токов имеет вид, где

$$C(G) = \begin{array}{c|cccccccccc} & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_4 & \tilde{x}_5 & \tilde{x}_6 & \tilde{x}_7 & \tilde{x}_8 & \tilde{x}_9 & \tilde{x}_{10} \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

При этом для достижения линейной независимости системы уравнений Кирхгофа для токов необходимо исключить из системы любое уравнение, например, второе. В результате система линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

$$\begin{cases} i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 + i_7 = 0 \\ -i_1 - i_{10} = 0 \\ -i_7 - i_8 - i_9 + i_{10} = 0 \\ -i_5 + i_6 + i_9 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, общей системой уравнений для токов является объединение систем. Заметим, что полученная объединенная система уравнений состоит из девяти уравнений относительно девяти неизвестных i_1, i_2, \dots, i_{10} : после нахождения которых нетрудно определить u_1, u_2, \dots, u_{10} .

7. Построить максимальный поток по транспортной сети.

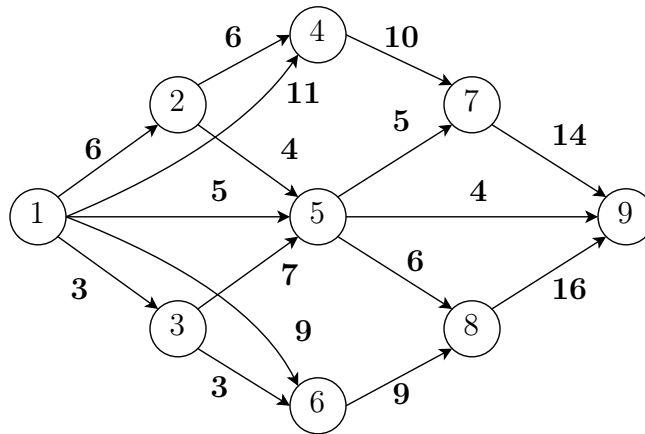


Рис. 11: Граф транспортной сети D

Решение. Начинаем с нулевого потока ϕ_0 . Каждой новой цепи из v_1 в $v_n = v_9$ будем ставить в соответствие ее очередной номер, т.е. будем обозначать эти цепи через η_1, η_2 и т.д. Соответственно, после нахождения цепи η_1 поток ϕ_0 изменится на поток ϕ_1 . После нахождения цепи η_2 поток ϕ_1 изменится на ϕ_2 и т.д. Числа, на которые увеличиваем потоки по дугам из η_i обозначаем через α_i . Насыщенные дуги при изображении транспортной сети D с очередным потоком ϕ_i помечаем символом \times . На рис. 12 приведены изображения орграфа D с потоком ϕ_0 , а так же вспомогательного орграфа D' , который на этом этапе совпадает с D .

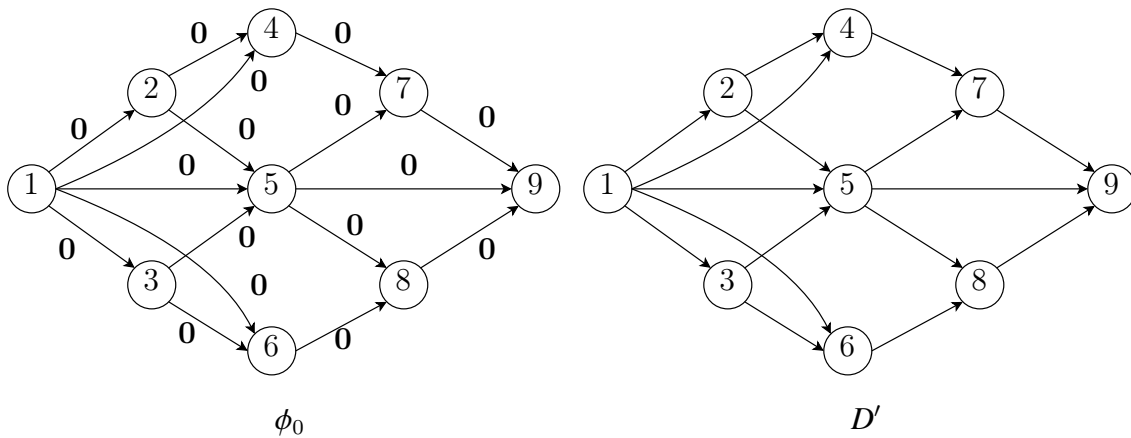


Рис. 12

Выделяем в D' простую цепь $\eta_1 = v_1 v_2 v_4 v_7 v_9$ из v_1 в v_9 . Увеличиваем поток $\phi(x)$ по каждой дуге x из η_1 на одинаковую величину $\alpha_1 = 6$ до насыщения дуг $(v_1 v_2)$ и $(v_2 v_4)$. На рис. 13 приведены изображения орграфа D с потоком ϕ_1 , а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D' .

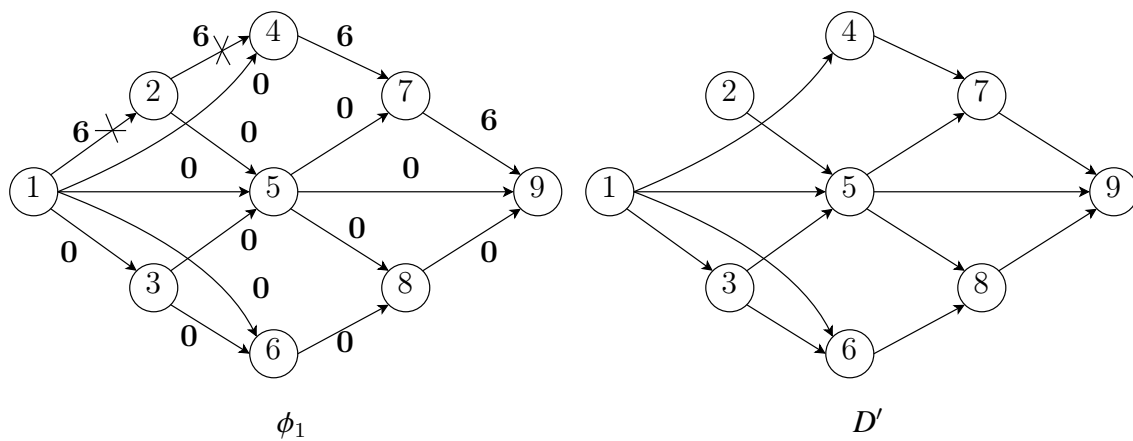


Рис. 13

Продолжаем выделять произвольные простые цепи и максимально увеличивать поток на них, а затем удалять насыщенные дуги, пока сток перестанет быть доступным из истока.

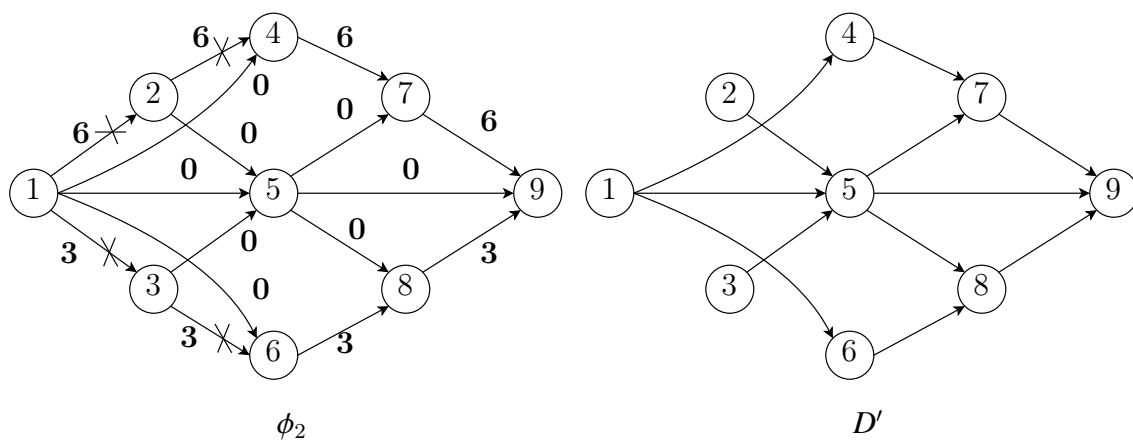


Рис. 14

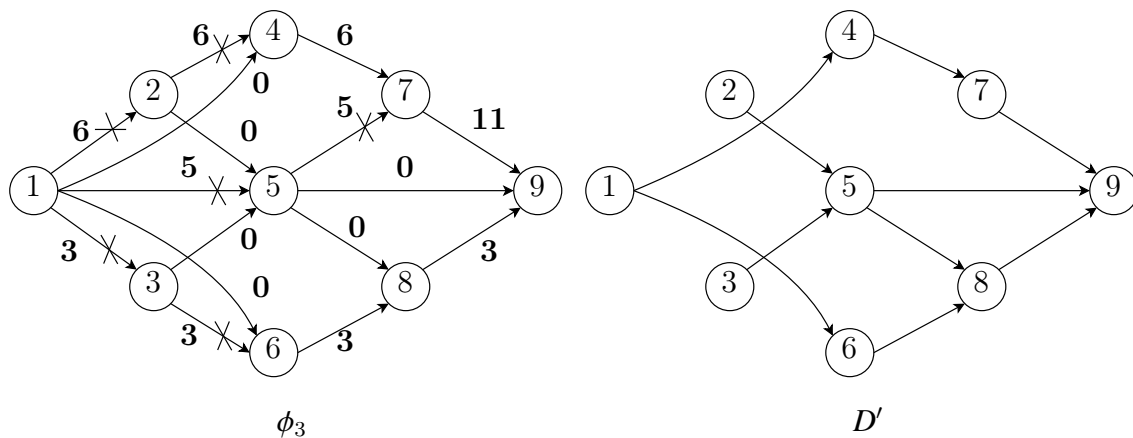


Рис. 15

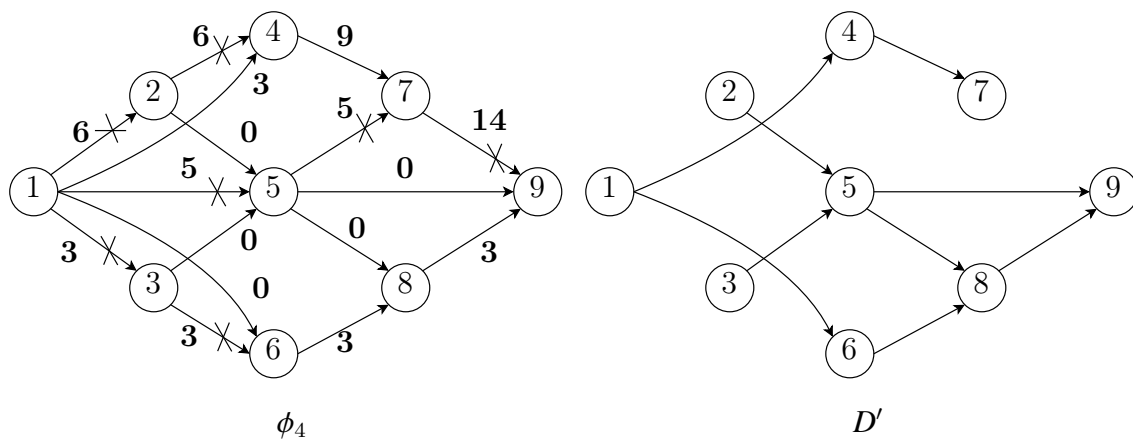


Рис. 16

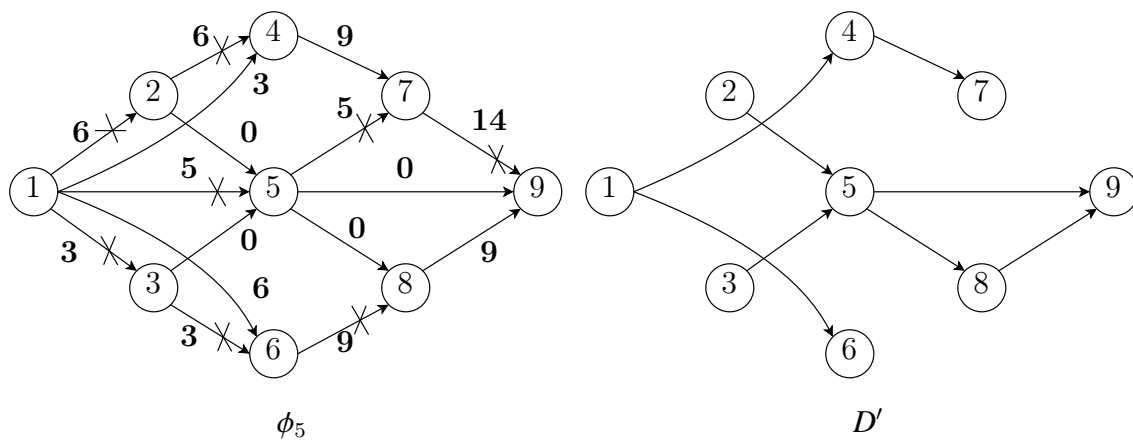


Рис. 17: Орграф приращений $I(D, \phi)$ и модифицированный орграф

Мы видим, что для орграфа D' , соответствующего потоку ϕ_2 не существует пути из источника в сток, а следовательно, ϕ_3 – полный поток. Для увеличения полного потока до максимального нужно построить орграф приращений.

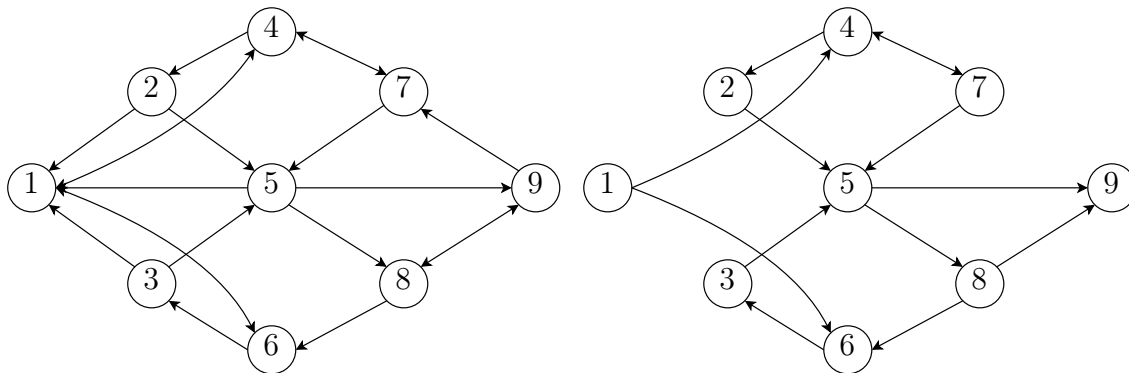


Рис. 18

Для построения максимального потока воспользуемся алгоритмом Форда-Фалкерсона. Начинаем с ранее построенного потока ϕ_5 . Выделяем в $I(D, \phi)$ простую цепь $\eta_6 =$

$v_1v_6v_3v_5v_9$. Увеличиваем потоки по дугам из η_4 на одинаковую величину, равную 3, до насыщения (v_1, v_6) , при этом поток по дугам (v_3, v_5) , (v_5, v_9) не превышает пропускной способности, а по дуге (v_3, v_6) уменьшается на 3. В результате поток ϕ_5 меняется на поток ϕ_6 . Далее строим модифицированный орграф приращений.

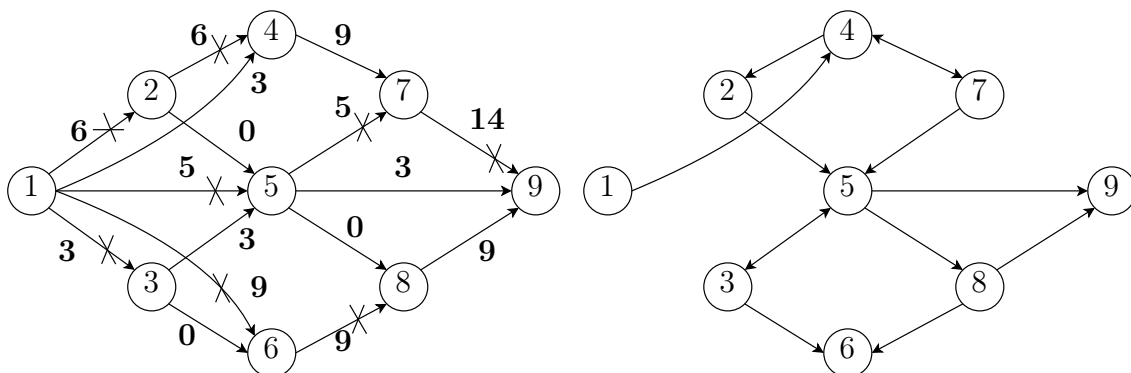


Рис. 19

Выполняем те же самые действия для цепи $v_1v_4v_2v_5v_8v_9$ (увеличиваем поток по ней на 4, получаем ϕ_7)

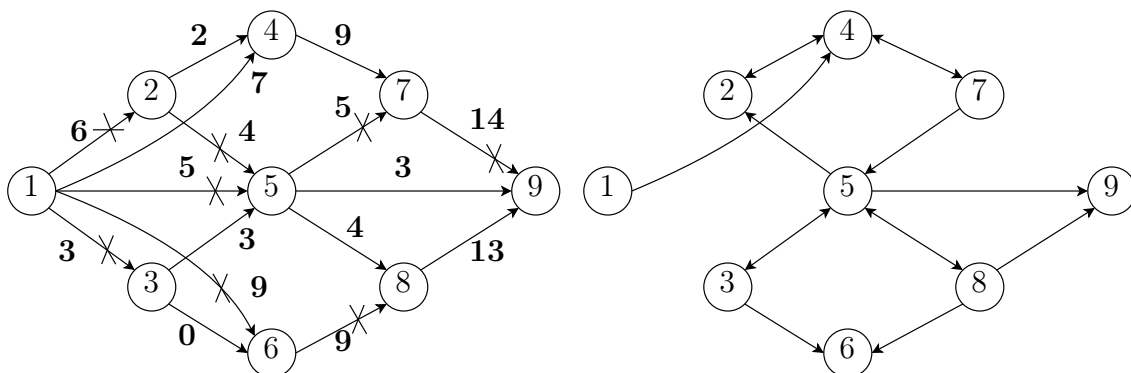


Рис. 20

Выполняем те же самые действия для цепи $v_1v_4v_7v_5v_9$ (увеличиваем поток на 1 по ней на 1, получаем ϕ_8)

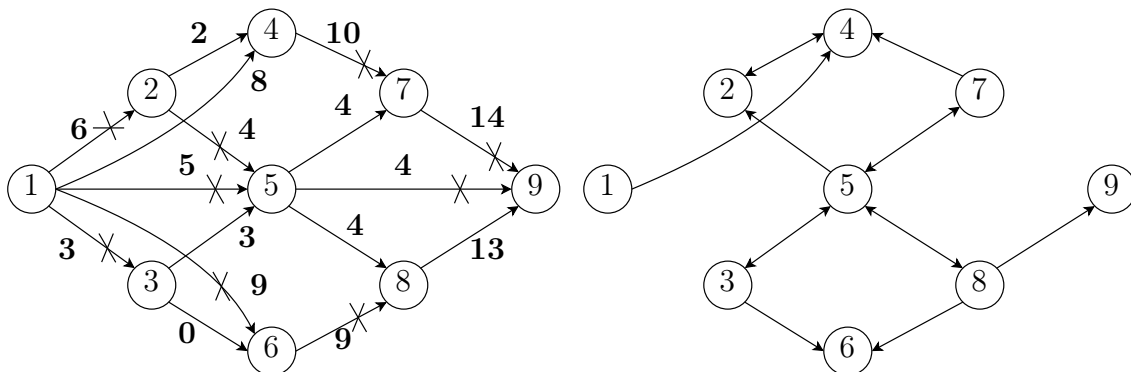


Рис. 21

Поскольку в $I(D, \phi_8)$ вершина v_9 не достижима из v_1 , то согласно алгоритму - ϕ_8 - искомый максимальный поток, при этом $\bar{\phi}_8 = 31$.