

# "Курсовая работа по дискретной математике"

Иван Кочкожаров, студент группы М8О-108Б-22

10 мая 2023 г.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- а) матрицу односторонней связности;
- б) матрицу сильной связности;
- в) компоненты сильной связности;
- г) матрицу контуров.

**Решение.**

*Изображение графа:*

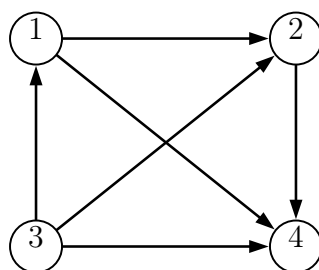


Рис. 1: Граф  $G$

*Матрица односторонней связности:*

$$A = A(D) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \\ &\vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица двусторонней связности:

$$S(D) = T(D) \& [T(D)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S(D) = E \Rightarrow$  в графе  $D$  нет контуров.

Компоненты сильной связности:

$$S_2(D) = S(D) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_1 = (V_1, X_1), V_1 = \{v_1\}$$

$$A(D_1) = \begin{array}{c|c} & v_1 \\ \hline v_1 & 0 \end{array} \quad D_1 : \quad \textcircled{1}$$

$$S_2(D) = \begin{array}{c|c|c|c} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_2 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_2 = (V_2, X_2), V_2 = \{v_2\}$$

$$A(D_2) = \begin{array}{c|c} & v_2 \\ \hline v_2 & 0 \end{array} \quad D_2 : \quad \textcircled{2}$$

$$S_3(D) = \begin{array}{c|c|c} & v_3 & v_4 \\ \hline v_3 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_3 = (V_3, X_3), V_3 = \{v_3\}$$

$$A(D_3) = \begin{array}{c|c} & v_3 \\ \hline v_3 & 0 \end{array} \quad D_3 : \quad \textcircled{3}$$

$$S_4(D) = \begin{array}{c|c} & v_4 \\ \hline v_4 & 1 \end{array}$$

$$D_4 = (V_4, X_4), V_4 = \{v_4\}$$

$$A(D_4) = \begin{array}{c|c} & v_4 \\ \hline v_4 & 0 \end{array} \quad D_4 : \quad \textcircled{4}$$

Матрица контуров:

$$K(D) = A(D) \& S(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.** Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.

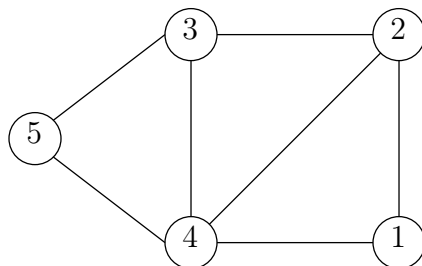


Рис. 2: Граф  $G$

Решение.

Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри. Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм дает следующий возможный маршрут:

$$v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_3 v_4 v_2 v_4 v_1 v_4 v_5 v_3 v_2 v_1$$

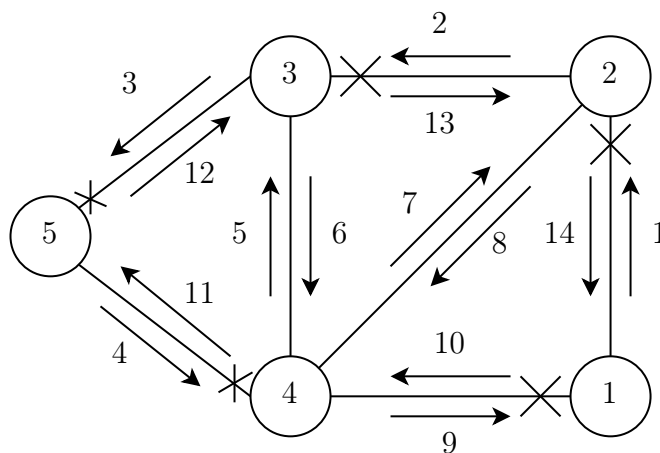


Рис. 3: Визуализация алгоритма Терри

3. Орграф  $D = (V, X)$ , где  $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$  задан матрицей смежности  $A(D)$ . Найти все минимальные пути  $v_1$  в  $v_8$ .

$$A = A(D) = \begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

### Решение.

Действуя согласно алгоритму фронта волны, последовательно определяем:

$$\begin{aligned} FW_0(v_1) &= \{v_1\}, FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_3, v_6\}, \\ FW_2(v_1) &= D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_3, v_6\}) \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \\ &= \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \{v_4\} \\ FW_3(v_1) &= D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\} \setminus \\ &\setminus \{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2\} \\ FW_4(v_1) &= D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) = \\ &= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_5\} \\ FW_5(v_1) &= D(FW_4(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1) \cup FW_4(v_1)) = \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_7, v_8\} \end{aligned}$$

Таким образом,  $v_8 \in FW_5(v_1)$ , а следовательно, согласно алгоритму фронта волны существует минимальный путь в орграфе  $D$  из  $v_1$  в  $v_8$  длины 5. Найдём все эти пути.

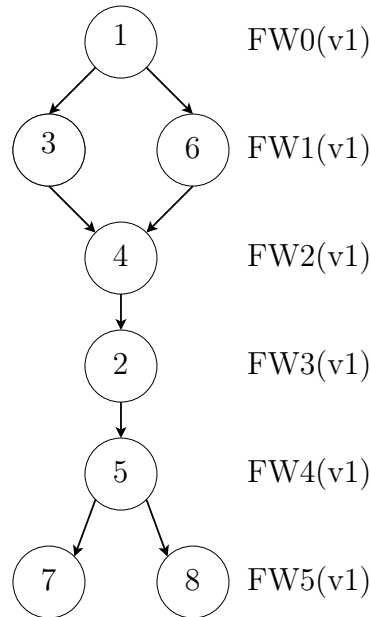


Рис. 4: Граф  $D'$

На рисунке изображен подграф  $D'$  орграфа  $D$ , на котором последовательно изображены множества  $FW_k(v_1)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , а так же дуги вида  $(v, v')$ , где для некоторого  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $v \in FW_k(v_1)$ ,  $v' \in FW_{k+1}(v_1)$ , т.е. исходящие из вершин некоторого  $k$ -го фронта волны и заходящие в вершины следующего  $(k + 1)$ -го фронта волны.

Используя изображение  $D'$  нетрудно выделить все минимальные пути из  $v_1$  в  $v_8$  в орграфе  $D$ . При этом, следуя алгоритму фронта волны, находим эти минимальные пути, используя оргграф  $D'$  но двигаясь в  $D'$  в обратной последовательности (т.е. не из  $v_1$  в  $v_8$  а наоборот, из  $v_8$  в  $v_1$ ). Используя рисунок 1, получаем, что в любом минимальном пути из  $v_1$  в  $v_8$  соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине  $v_8$  может быть  $v_5$ . Вершиной, предшествующей вершине 5 может быть  $v_2$ . Вершиной, предшествующей вершине  $v_2$  – вершина  $v_4$ . Вершиной, предшествующей вершине  $v_4$  – любая из вершин  $v_3, v_6$ . Вершинам, предшествующей вершине  $v_4$  может предшествовать только  $v_1$ . Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из  $v_1$  в  $v_8$  которое компактно изображено на рисунке 2. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути  $v_1$  в  $v_8$ . Для каждой из промежуточных вершин  $v$  показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих  $v$  и заходящие в  $v$ ). Из рисунка 2 видно, что всего существует два минимальных пути из  $v_1$  в  $v_8$ :  $v_1v_3v_4v_2v_5v_8$ ,  $v_1v_6v_4v_2v_5v_8$ .

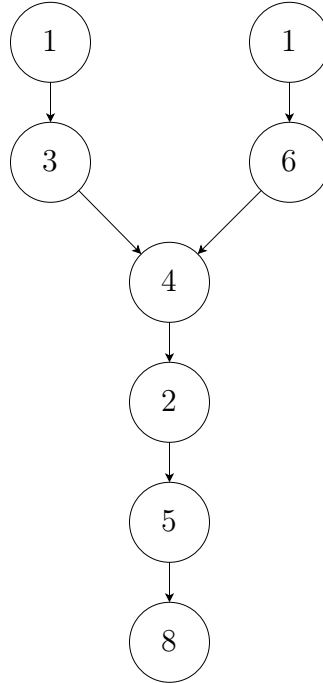


Рис. 5: Граф минимальных путей

4. Нагруженный оргграф  $D$  задан матрицей длин дуг  $C(D)$ . Найти минимальные пути из  $v_1$  во все достижимые вершины.

$$C(D) = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 10 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & 3 & 11 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

### Решение.

Воспользуемся алгоритмом Форда. Сначала определим таблицу величин  $\lambda_i^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ , где  $n = 8$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$
$v_1$	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$		<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0
$v_2$	5	$\infty$	7	10	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$		$\infty$	4	4	4	4	4	4	4
$v_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$		$\infty$	$\infty$	11	<b>10</b>	10	10	10	10
$v_4$	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	5		$\infty$	$\infty$	14	13	<b>12</b>	12	12	12
$v_5$	3	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	11	$\infty$		$\infty$	<b>5</b>	5	5	5	5	5	5
$v_6$	4	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$		$\infty$	$\infty$	<b>8</b>	8	8	8	8	8
$v_7$	8	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3		$\infty$	$\infty$	16	15	15	15	15	15
$v_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	17	$\infty$	$\infty$	$\infty$		$\infty$	$\infty$	$\infty$	19	18	<b>17</b>	17	17

$C(D)$

Таблица величин

Обозначим  $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_8^{(k)})^T$ , где  $k = 0, 1, \dots, 7$ . Это столбцы в таблице величин. Первая строка по таблице величин состоит из нулевых элементов ( $\lambda_1^{(k)} = 0, k = 0, 1, \dots, 7$ ), а первый столбец заполняем следующим образом:  $\lambda_i^{(0)} = \infty, i = 2, \dots, 8$ . Далее, используя формулу  $\lambda_j^{(k+1)} = \min_{1 \leq i \leq 8} \{\lambda_i^{(k)} + c_{ij}\}$  последовательно определяем элементы столбца  $\lambda^{(1)}$ , используя элементы столбца  $\lambda^{(0)}$  (а так же элементы матрицы  $C(D)$ ), затем находим элементы столбца  $\lambda^{(2)}$ , используя элементы столбца  $\lambda^{(1)}$  и т.д.

Длина минимального пути из  $v_1$  в  $v_8$  равна 17. Вершине  $v_8$  предшествует  $v_4$ , потому что  $\lambda_8^{(5)} = 17 = \lambda_4^{(4)} + c_{48} = 12 + 5$ . Вершине  $v_4$  предшествует  $v_3$  и т.д. В итоге получаем минимальный путь:  $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4 v_8$  (в таблице выделен жирным шрифтом). Соответственно,  $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4$ ,  $v_1 v_5 v_6 v_3$ ,  $v_1 v_5 v_6$ ,  $v_1 v_5$  - минимальные пути из  $v_1$  в соответствующие вершины. Минимальный путь из  $v_1$  в  $v_7$  находится аналогично. Получаем такой минимальный путь:  $v_1 v_5 v_6 v_7$ . Минимальный путь из  $v_1$  в  $v_2$ , очевидно,  $v_1 v_2$ .

5. Найти остовное дерево графа  $G$  с минимальной суммой длин входящих в него ребер.

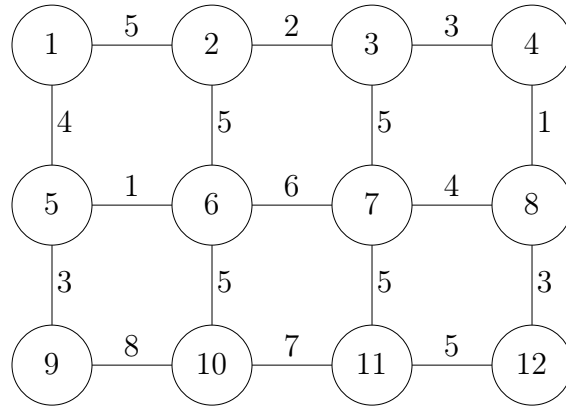


Рис. 6: Граф  $G$

**Решение.** Согласно алгоритму Краскала выбираем ребро  $\{v_5, v_6\}$  минимальной длины 1. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо  $v_5$  либо  $v_6$  с какой-нибудь новой (т.е. отличной от  $v_1, v_5$ ) вершиной графа  $G$  (т.е. выбираем среди ребер  $\{v_5, v_1\}, \{v_5, v_9\}, \{v_6, v_2\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_{10}\}$ ). Минимальную длину имеет ребро  $\{v_5, v_9\}$ . Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо  $v_5$ , либо  $v_6$ , либо  $v_9$  с какой-нибудь новой вершиной графа (выбираем между  $\{v_9, v_{10}\}, \{v_6, v_{10}\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_2\}, \{v_5, v_1\}$ ). Минимальную длину имеет ребро  $\{v_5, v_1\}$ . Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Следующим ребром минимальной длины (если таких несколько, можно выбрать любое) среди всех возможных является  $\{v_1, v_2\}$ , затем  $\{v_2, v_3\}$ , далее  $\{v_3, v_4\}$ , далее  $\{v_4, v_8\}$ , далее  $\{v_8, v_{12}\}$ , далее  $\{v_7, v_8\}$ , далее  $\{v_7, v_{11}\}$  и, наконец,  $\{v_6, v_{10}\}$ . Выделено  $11 = 12 - 1 = n(G) - 1$  ребер, алгоритм окончен, выделяем минимальное остовное дерево графа (см. на рис. 7 подграф графа  $G$ , ребра которого выделены жирными линиями).

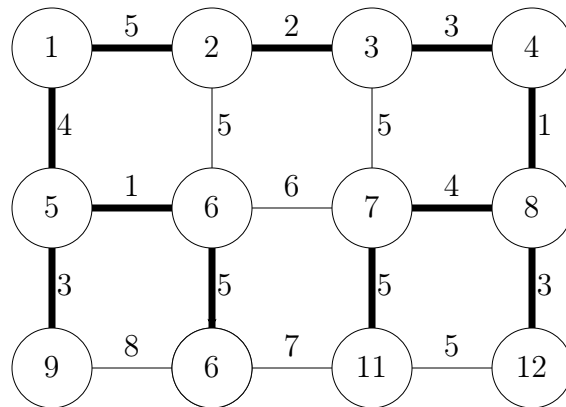


Рис. 7: Граф  $G$  с выделенным подграфом - минимальным остовным деревом