"Курсовая работа по дискретной математике"

Иван Кочкожаров, студент группы М8О-108Б-22

10 мая 2023 г.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

а) матрицу односторонней связности;

б) матрицу сильной связности;

в) компоненты сильной связности;

г) матрицу контуров.

Решение.

Изображение графа:

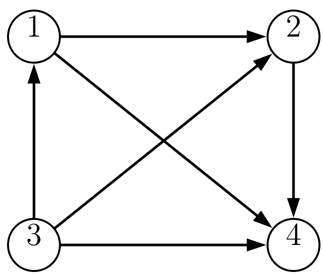


Рис. 1: Граф G

Матрица одностoрнней связности:

$A = A(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	0	0	0	1
v_3	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0

.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee$$

$$\vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица двусторонней связности:

$$S(D) = T(D)\&[T(D)]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S(D) = E \Rightarrow$ в графе D нет контуров.

Компоненты сильной связности:

$S_2(D) = S(D) =$

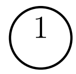
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	0
v_2	0	1	0	0
v_3	0	0	1	0
v_4	0	0	0	1

$D_1 = (V_1, X_1), V_1 = \{v_1\}$

$A(D_1) =$

	v_1
v_1	0

D_1 :



$S_2(D) =$

	v_2	v_3	v_4
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	1

$D_2 = (V_2, X_2), V_2 = \{v_2\}$

$A(D_2) =$

	v_2
v_2	0

D_2 :

$S_3(D) =$

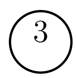
	v_3	v_4
v_3	1	0
v_4	0	1

$D_3 = (V_3, X_3), V_3 = \{v_3\}$

$A(D_3) =$

	v_3
v_3	0

D_3 :



$S_4(D) =$

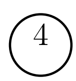
	v_4
v_4	1

$D_4 = (V_4, X_4), V_4 = \{v_4\}$

$A(D_4) =$

	v_4
v_4	0

D_4 :



Матрица контуров:

$$K(D) = A(D) \& S(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.

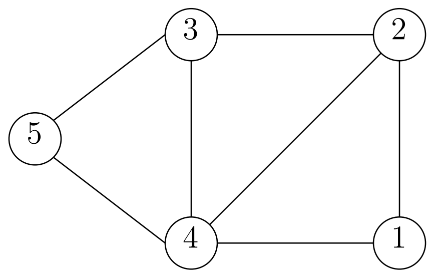


Рис. 2: Граф G

<u>Решение.</u>

Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри. Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм дает следующий возможный маршрут:

$$v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_3 v_4 v_2 v_4 v_1 v_4 v_5 v_3 v_2 v_1$$

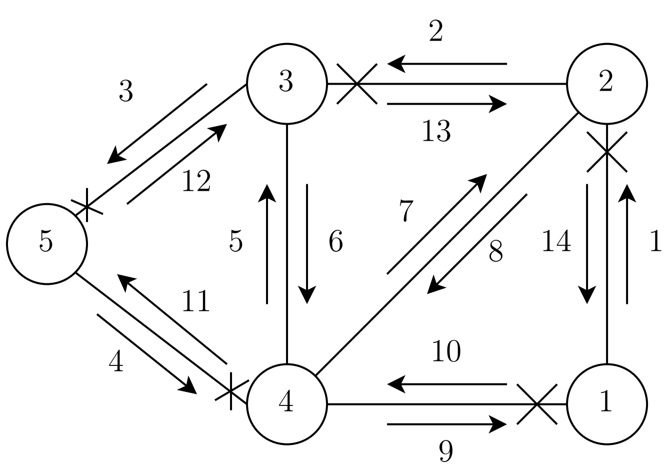


Рис. 3: Визуализация алгоритма Терри

3. Орграф $D = (V, X)$, где $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$ задан матрицей смежности $A(D)$. Найти все минимальные пути v_1 в v_8.

$A = A(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	1	1	0	0
v_3	1	0	0	0	0	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	1	0	0	1	1
v_6	0	0	1	1	0	0	0	0
v_7	1	0	1	1	1	1	1	0
v_8	1	0	1	1	0	0	1	0

.

<u>Решение.</u>

Действуя согласно алгоритму фронта волны, последовательно определяем:

$FW_0(v_1) = \{v_1\}, FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_3, v_6\},$
$FW_2(v_1) = D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_3, v_6\}) \setminus \{v_1, v_3, v_6\} =$
$= \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \{v_4\}$
$FW_3(v_1) = D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}\setminus$
$\setminus\{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2\}$
$FW_4(v_1) = D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) =$
$= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_5\}$
$FW_5(v_1) = D(FW_4(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1) \cup FW_4(v_1)) =$
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_7, v_8\}$

Таким образом, $v_8 \in FW_5(v_1)$, а следовательно, согласно алгоритму фронта волны существует минимальный путь в орграфе D из v_1 в v_8 длины 5. Найдём все эти пути.

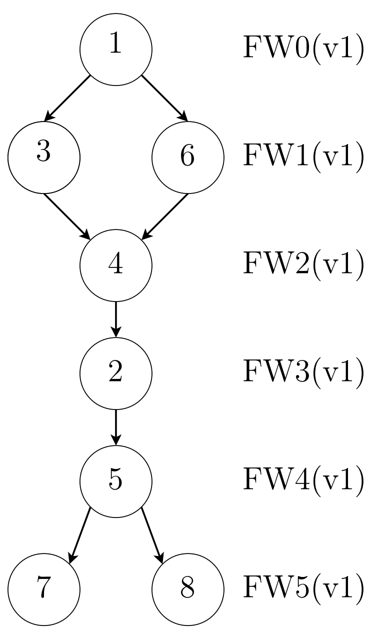


Рис. 4: Граф D'

На рисунке 4 изображен подграф D' орграфа D, на котором последовательно изображены множества $FW_k(v_1), k = 1, 2, 3, 4, 5$, а так же дуги вида (v, v'), где для некоторого $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, v \in FW_k(v_1), v' \in FW_{k+1}(v_1)$, т.е. исходящие из вершин некоторого k-го фронта волны и заходящие в вершины следующего $(k+1)$-го фронта волны.

Используя изображение D' нетрудно выделить все минимальные пути из v_1 в v_8 в орграфеD. При этом, следуя алгоритму фронта волны, находим эти минимальные пути, используя орграф D' но двигаясь в D' в обратной последовательности (т.е. не из $v1$ в v_8 а наоборот, из v_8 в v_1). Используя рисунок 4, получаем, что в любом минимальном пути из v_1 в v_8 соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине v_8 может быть v_5. Вершиной, предшествующей вершине 5 может быть v_2. Вершиной, предшествующей вершине v_2 – вершина v_4. Вершиной, предшествующей вершине v_4 – любая из вершин v_3, v_6. Вершиной, предшествующей вершинам v_3 и v_6 может быть только v_1. Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из v_1 в v_8 которое компактно изображено на рисунке 5. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути v_1 в v_8 Для каждой из промежуточных вершин v показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих v и заходящие в v). Из рисунка 5 видно, что всего существует два минимальных пути из v_1 в v_8: $v_1v_3v_4v_2v_5v_8$, $v_1v_6v_4v_2v_5v_8$.

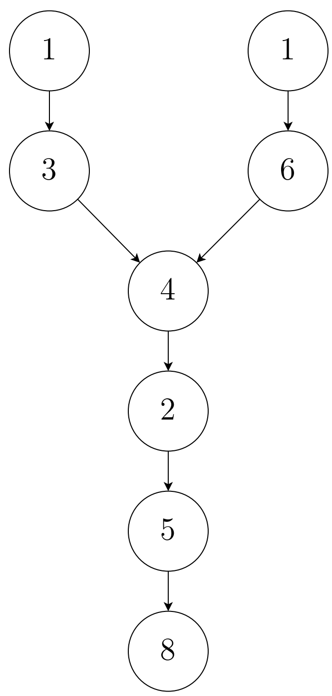


Рис. 5: Граф минимальных путей

4. Нагруженный орграф D задан матрицей длин дуг $C(D)$. Найти минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины.

$$C(D) = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 10 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & 3 & 11 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

__Решение.__

Воспользуемся алгоритмом Форда. Сначала определим таблицу величин $\lambda_i^{(i)}, i = 1, 2, \ldots, n-1$, где $n = 8$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$
v_1	∞	4	∞	∞	5	∞	∞	∞		**0**	0	0	0	0	0	0	0
v_2	5	∞	7	10	2	∞	∞	∞		∞	4	4	4	4	4	4	4
v_3	∞	∞	∞	2	∞	2	∞	∞		∞	∞	11	**10**	10	10	10	10
v_4	6	∞	∞	∞	∞	∞	3	5		∞	∞	14	13	**12**	12	12	12
v_5	3	2	∞	∞	∞	3	11	∞		∞	**5**	5	5	5	5	5	5
v_6	4	∞	2	∞	∞	∞	7	∞		∞	∞	**8**	8	8	8	8	8
v_7	8	∞	∞	3	∞	∞	∞	3		∞	∞	16	15	15	15	15	15
v_8	∞	∞	∞	∞	17	∞	∞	∞		∞	∞	∞	19	18	**17**	17	17

$C(D)$ Таблица величин

Обозначим $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_8^{(k)})^{\mathrm{T}}$, где $k = 0, 1, \ldots, 7$. Это столбцы в таблице величин. Первая строка по таблицы величин состоит из нулевых элементов ($\lambda_1^{(k)} = 0, k = 0, 1, \ldots, 7$), а первый столбец заполняем следующим образом: $\lambda_i^{(0)} = \infty, i = 2, \ldots, 8$. Далее, используя формулу $\lambda_j^{(k+1)} = \min\limits_{1 \le i \le 8} \{\lambda_i^{(k)} + c_{ij}\}$ последовательно определяем элементы столбца $\lambda^{(1)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(0)}$ (а так же элементы матрицы $C(D)$), затем находим элементы столбца $\lambda^{(2)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(1)}$ и т.д.

Длина минимального пути из v_1 в v_8 равна 17. Вершине v_8 предшествует v_4, потому что $\lambda_8^{(5)} = 17 = \lambda_4^{(4)} + c_{48} = 12 + 5$. Вершине v_4 предшествует v_3 и т.д. В итоге получаем минимальный путь: $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4 v_8$ (в таблице выделен жирным шрифтом). Соответственно, $v_1 v_5 v_6 v_3 v_4$, $v_1 v_5 v_6 v_3$, $v_1 v_5 v_6$, $v_1 v_5$ - минимальные пути из v_1 в соответствующие вершины. Минимальный путь из v_1 в v_7 находится аналогично. Получаем такой минимальный путь: $v_1 v_5 v_6 v_7$. Минимальный путь из v_1 в v_2, очевидно, $v_1 v_2$.

5. Найти остовное дерево графа G с минимальной суммой длин входящих в него ребер.

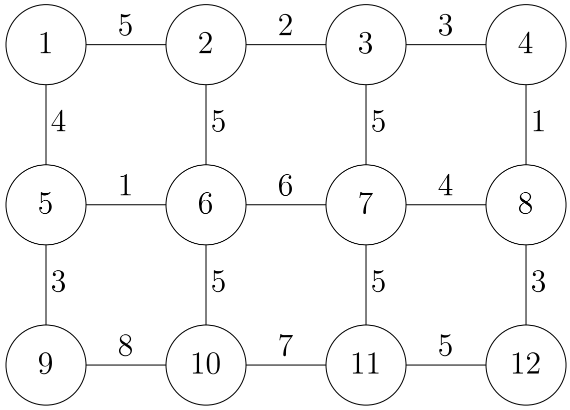


Рис. 6: Граф G

<u>Решение.</u> Согласно алгоритму Краскала выбираем ребро $\{v_5, v_6\}$ минимальной длины 1. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_5 либо v_6 с какой-нибудь новой (т.е. отличной от v_1, v_5) вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_5, v_1\}$,$\{v_5, v_9\}$,$\{v_6, v_2\}$, $\{v_6, v_7\}$,$\{v_6, v_{10}\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_5, v_9\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_5, либо v_6, либо v_9 с какой-нибудь новой вершиной графа (выбираем между $\{v_9, v_{10}\}$,$\{v_6, v_{10}\}$,$\{v_6, v_7\}$,$\{v_6, v_2\}$,$\{v_5, v_1\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_5, v_1\}$ Выделяем его жирной линией (см. рис. 7). Следующим ребром минимальной длины (если таких несколько, можно выбрать любое) среди всех возможных является $\{v_1, v_2\}$, затем $\{v_2, v_3\}$, далее $\{v_3, v_4\}$, далее $\{v_4, v_8\}$, далее $\{v_8, v_{12}\}$, далее $\{v_7, v_8\}$, далее $\{v_7, v_{11}\}$ и, наконец, $\{v_6, v_{10}\}$. Выделено $11 = 12 - 1 = n(G) - 1$ ребер, алгоритм окончен, выделяем минимальное остовное дерево графа (см. на рис. 7 подграф графа G, ребра которого выделены жирными линиями).

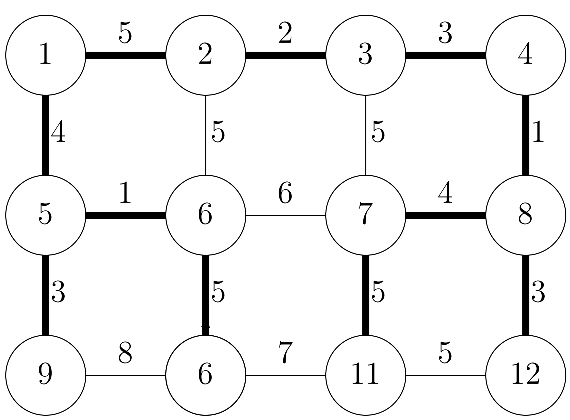


Рис. 7: Граф G с выделенным подграфом - минимальным остовным деревом