

"Курсовая работа по дискретной математике"

Иван Кочкожаров, студент группы М8О-108Б-22

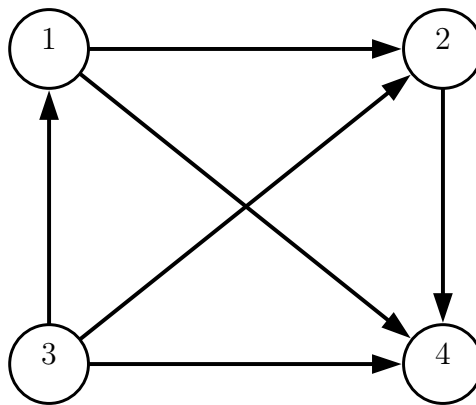
9 мая 2023 г.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- а) матрицу односторонней связности;
- б) матрицу сильной связности;
- в) компоненты сильной связности;
- г) матрицу контуров.

Решение.

Изображение графа:



Матрица односторонней связности:

$$A = A(D) = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица двусторонней связности:

$$S(D) = T(D) \& [T(D)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S(D) = E \Rightarrow$ в графе D нет контуров.

Компоненты сильной связности:

$$S_2(D) = S(D) = \begin{array}{c|c|c|c|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_1 = (V_1, X_1), V_1 = \{v_1\}$$

$$A(D_1) = \begin{array}{c|c} & v_1 \\ \hline v_1 & 0 \end{array} \quad D_1 : \quad \textcircled{1}$$

$$S_2(D) = \begin{array}{c|c|c|c} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_2 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_2 = (V_2, X_2), V_2 = \{v_2\}$$

$$A(D_2) = \begin{array}{c|c} & v_2 \\ \hline v_2 & 0 \end{array} \quad D_2 : \quad \textcircled{2}$$

$$S_3(D) = \begin{array}{c|c|c} & v_3 & v_4 \\ \hline v_3 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$D_3 = (V_3, X_3), V_3 = \{v_3\}$$

$$A(D_3) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_3 \\ \hline v_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_3 : \quad \textcircled{3}$$

$$S_4(D) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_4 \\ \hline v_4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$D_4 = (V_4, X_4), V_4 = \{v_4\}$$

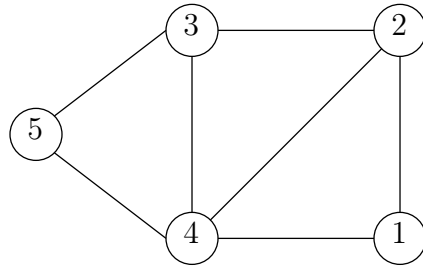
$$A(D_4) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_4 \\ \hline v_4 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D_4 : \quad \textcircled{4}$$

Матрица контуров:

$$K(D) = A(D) \& S(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

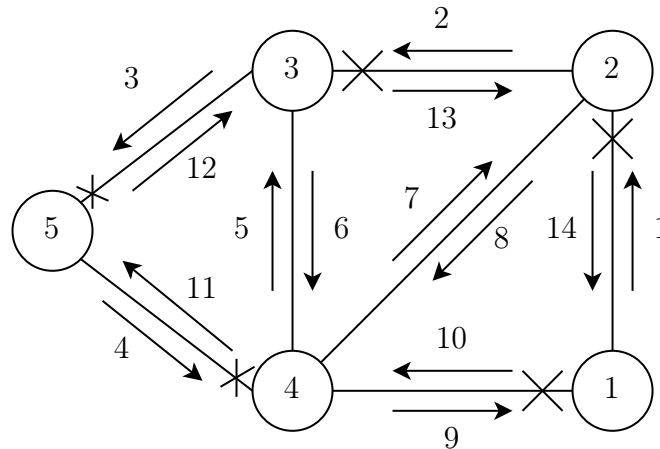
2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



Решение.

Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри. Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм дает следующий возможный маршрут:

$$v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_3 v_4 v_2 v_4 v_1 v_4 v_5 v_3 v_2 v_1$$



3. Орграф $D = (V, X)$, где $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$ задан матрицей смежности $A(D)$.
Найти все минимальные пути v_1 в v_8 .

$$A = A(D) =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	1	1	0	0
v_3	1	0	0	0	0	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	1	0	0	1	1
v_6	0	0	1	1	0	0	0	0
v_7	1	0	1	1	1	1	1	0
v_8	1	0	1	1	0	0	1	0

Решение.

Действуя согласно алгоритму фронта волны, последовательно определяем:

$$\begin{aligned}
 FW_0(v_1) &= \{v_1\}, FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_3, v_6\}, \\
 FW_2(v_1) &= D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_3, v_6\}) \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \\
 &= \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \{v_4\} \\
 FW_3(v_1) &= D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\} \setminus \\
 &\setminus \{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2\} \\
 FW_4(v_1) &= D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) = \\
 &= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_5\} \\
 FW_5(v_1) &= D(FW_4(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1) \cup FW_4(v_1)) = \\
 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_7, v_8\}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $v_8 \in FW_5(v_1)$, а следовательно, согласно алгоритму фронта волны существует минимальный путь в орграфе D из v_1 в v_8 длины 5. Найдём все эти пути.

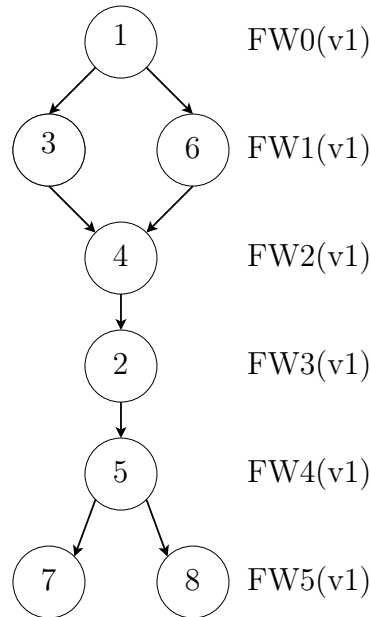


Рис. 1: График D'

На рисунке изображен подграф D' орграфа D , на котором последовательно изображены множества $FW_k(v_1), k = 1, 2, 3, 4, 5$, а так же дуги вида (v, v') , где для некоторого $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, v \in FW_k(v_1), v' \in FW_{k+1}(v_1)$, т.е. исходящие из вершин некоторого k -го фронта волны и заходящие в вершины следующего $(k + 1)$ -го фронта волны.

Используя изображение D' нетрудно выделить все минимальные пути из v_1 в v_8 в орграфе D . При этом, следуя алгоритму фронта волны, находим эти минимальные пути, используя орграф D' но двигаясь в D' в обратной последовательности (т.е. не из v_1 в v_8 а наоборот, из v_8 в v_1). Используя рисунок 1, получаем, что в любом минимальном пути из v_1 в v_8 соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине v_8 может быть v_5 . Вершиной, предшествующей вершине 5 может быть v_2 . Вершиной, предшествующей вершине v_2 – вершина v_4 . Вершиной, предшествующей вершине v_4 – любая из вершин v_3, v_6 . Вершинам, предшествующей вершине v_4 может предшествовать только v_1 . Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из v_1 в v_8 которое компактно изображено на рисунке 2. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути v_1 в v_8 . Для каждой из промежуточных вершин v показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих v и заходящие в v). Из рисунка 2 видно, что всего существует два минимальных пути из v_1 в v_8 : $v_1v_3v_4v_2v_5v_8, v_1v_6v_4v_2v_5v_8$.

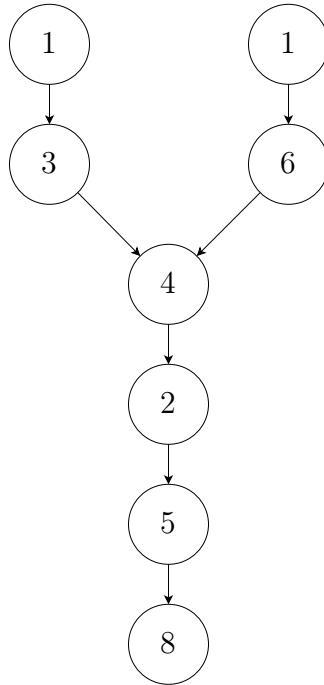


Рис. 2: График минимальных путей

4. Нагруженный орграф D задан матрицей длин дуг $C(D)$. Найти минимальные

пути из v_1 во все достижимые вершины.

$$C(D) = \begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 10 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 5 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & \infty & 3 & 11 & \infty \\ 4 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Решение.

Используем алгоритм Форда. Сначала определим таблицу величин $\lambda_i^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n-1$, где $n = 8$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$
v_1	∞	4	∞	∞	5	∞	∞	∞									
v_2	5	∞	7	10	2	∞	∞	∞									
v_3	∞	∞	∞	2	∞	2	∞	∞									
v_4	6	∞	∞	∞	∞	∞	3	5									
v_5	3	2	∞	∞	∞	3	11	∞									
v_6	4	∞	2	∞	∞	∞	7	∞									
v_7	8	∞	∞	3	∞	∞	∞	3									
v_8	∞	∞	∞	∞	17	∞	∞	∞									

$C(D)$

Таблица величин