"Курсовая работа по дискретной математике"

Иван Кочкожаров, студент группы М8О-108Б-22

8 мая 2023 г.

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

а) матрицу односторонней связности;

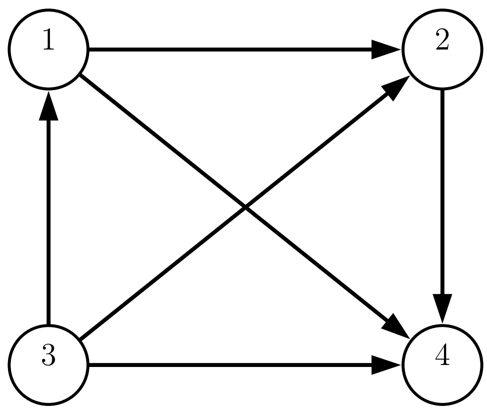
б) матрицу сильной связности;

в) компоненты сильной связности;

г) матрицу контуров.

Решение.

Изображение графа:



Матрица одностороней связности:

$A = A(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	0	0	0	1
v_3	1	1	0	1
v_4	0	0	0	0

.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee$$
$$\vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица двусторонней связности:

$$S(D) = T(D) \& [T(D)]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S(D) = E \Rightarrow$ в графе D нет контуров.

Компонентны сильной связности:

$S_2(D) = S(D) =$

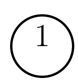
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0	0	0
v_2	0	1	0	0
v_3	0	0	1	0
v_4	0	0	0	1

$D_1 = (V_1, X_1), V_1 = \{v_1\}$

$A(D_1) =$

	v_1
v_1	0

$D_1:$



$S_2(D) =$

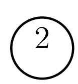
	v_2	v_3	v_4
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	1

$D_2 = (V_2, X_2), V_2 = \{v_2\}$

$A(D_2) =$

	v_2
v_2	0

$D_2:$



$S_3(D) =$

	v_3	v_4
v_3	1	0
v_4	0	1

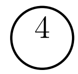
$D_3 = (V_3, X_3), V_3 = \{v_3\}$

$$A(D_3) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_3 \\ \hline v_3 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad D_3:$$

$$S_4(D) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_4 \\ \hline v_4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$D_4 = (V_4, X_4), V_4 = \{v_4\}$

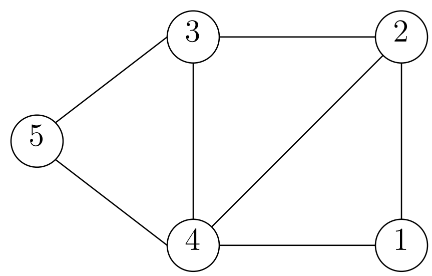
$$A(D_4) = \begin{array}{|c|c|} \hline & v_4 \\ \hline v_4 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad D_4:$$



Матрица контуров:

$$K(D) = A(D)\&S(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

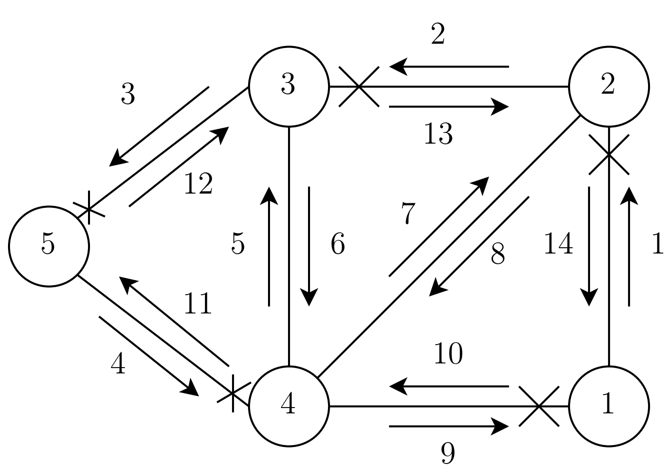
2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



<u>Решение.</u>

Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри. Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм дает следующий возможный маршрут:

$$v_1v_2v_3v_5v_4v_3v_4v_2v_4v_1v_4v_5v_3v_2v_1$$



3. Орграф $D = (V, X)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$ задан матрицей смежности $A(D)$. Найти все минимальные пути v_1 в v_8.

$A = A(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	1	0	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	1	1	0	0
v_3	1	0	0	0	0	1	0	0
v_4	1	1	1	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	1	0	0	1	1
v_6	0	0	1	1	0	0	0	0
v_7	1	0	1	1	1	1	1	0
v_8	1	0	1	1	0	0	1	0

.

<u>Решение.</u>

Действуя согласно алгоритму фронта волны, последовательно определяем:

$FW_0(v_1) = \{v_1\}, FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_3, v_6\},$
$FW_2(v_1) = D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_3, v_6\}) \setminus \{v_1, v_3, v_6\} =$
$= \{v_1, v_3, v_4, v_6\} \setminus \{v_1, v_3, v_6\} = \{v_4\}$
$FW_3(v_1) = D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\} \setminus$
$\setminus \{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2\}$
$FW_4(v_1) = D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) =$
$= \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_5\}$
$FW_5(v_1) = D(FW_4(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1) \cup FW_4(v_1)) =$
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{v_7, v_8\}$

Таким образом