Расчётно-графическая работа по функциональному анализу
Задание I, Вариант №1

Кочкожаров Иван Вячеславович

6 апреля 2025 г.

1 Задание

Докажите, что приведённое ниже отображение $T : C[0;1] \to C[0;1]$ (либо его степень) является сжимающим. Определите число итераций, необходимое для поиска неподвижной точки этого отображения с точностью $\varepsilon \in \{10^1, 10^2, 10^3\}$ с помощью метода сжимающих отображений. С помощью вычислительной техники постройте график функции, являющейся неподвиж- ной точкой отображения T. Проверьте результаты при различных значениях ε и различных начальных приближениях в методе сжимающих отображений. Продемонстрируйте несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.

$(C[0,1], \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|)$

$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(3t) - \frac{15}{2} & 0 \le t \le \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3};, \\ \frac{1}{9}x(3t-2) + \frac{15}{2} & \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$ где $f(t)$ – аффинная функция такая, что $T(x)$ – непрерывная функция.

2 Доказательство

Покажем, что $T(x)$ является сжатием в $C[0;1]$:

$\rho(T(x), T(y)) = \max\{\max\limits_{t\in[0,\frac{1}{3}]} |\dfrac{1}{9}x(3t) - \dfrac{15}{2} - \dfrac{1}{9}y(3t) + \dfrac{15}{2}|, \max\limits_{t\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} |f_x(t) - f_y(t)|, \max\limits_{t\in[\frac{2}{3},1]} |\dfrac{1}{9}x(3t-2) + \dfrac{15}{2} - \dfrac{1}{9}y(3t-2) - \dfrac{15}{2}|\}$

- $3t = s, t \in [0; \frac{1}{3}] \Rightarrow s \in [0; 1]$
- $3t - 2 = s, t \in [\frac{2}{3}; 1] \Rightarrow s \in [0; 1]$
- $f(t)$ – аффинная функция такая, что $T(x)$ – непрерывная функция $\Rightarrow$ в точках $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ нет разрывов.

Следовательно: $\rho(T(x), T(y)) = \max\limits_{s \in [0,1]} |\dfrac{1}{9}x(s) - \dfrac{1}{9}y(s)| = \dfrac{1}{9} \max\limits_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)|, \alpha = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \alpha \in [0; 1] \Rightarrow$ отображение $T(x)$ – сжимающее.

3 Дополнительные вычисления

$T(x)(t) = f(t) = at + b$ если $t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$a = \frac{T(x)(\frac{2}{3}) - T(x)(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3(T(x)(\frac{2}{3}) - T(x)(\frac{1}{3})) = 3(\frac{1}{9}x(3 \times \frac{2}{3} - 2) + \frac{15}{2} - \frac{1}{9}x(3 \times \frac{1}{3}) + \frac{15}{2}) = \frac{1}{3}x(0) - \frac{1}{3}x(1) + 45$ – угловой коэффициент

$b = T(x)(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}a = \frac{1}{9}x(1) - \frac{15}{2} - \frac{1}{9}x(0) + \frac{1}{9}x(1) - \frac{45}{3} = \frac{2}{9}x(1) - \frac{1}{9}x(0) - \frac{135}{6}$

$f(t) = \frac{1}{3}(x(0) - x(1) + 13)t + \frac{2}{9}x(1) - \frac{1}{9}x(0) - \frac{135}{6}$

$n > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x^1, x^0)}}{\ln \alpha}$ – оценка количества итераций

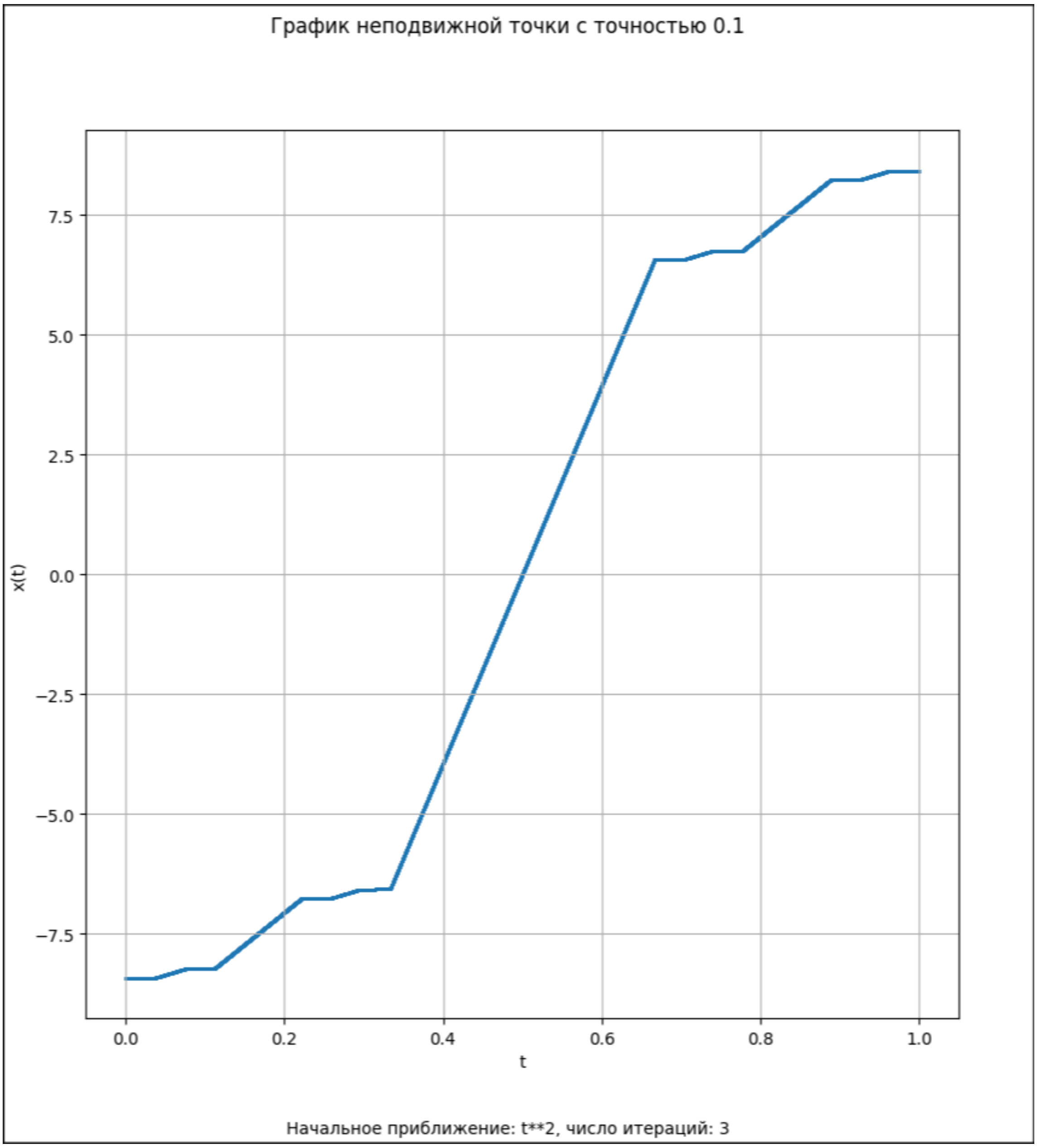
4 Программа

```
import inspect
import numpy as np
from numpy import exp, sin, cos
import matplotlib.pyplot as plt

def T(x):
    def new_x(t):
        if t >= 0 and t <= 1/3:
            return (1/9)*x(3*t)-15/2
        if t > 1/3 and t < 2/3:
            return (1/3)*(x(0)-x(1)+135)*t
            +(2/9)*x(1)-(1/9)*x(0)-135/6
        if t >= 2/3 and t <= 1:
            return (1/9)*x(3*t-2)+15/2
        raise ValueError("t must be in [0,1]")
    return new_x
```

```python
def n_iters(alpha, eps, initial_rho):
    return np.log(eps*(1-alpha)/initial_rho)/np.log(alpha)

def C01_metric(f, g, n_samples=1000):
    x = np.linspace(0, 1, n_samples)
    f_vec = np.vectorize(f)
    g_vec = np.vectorize(g)
    return np.max(np.abs(f_vec(x) - g_vec(x)))

def main():
    eps=1e-3
    alpha=1/9
    f = lambda t: sin(t)
    lambda_source = inspect.getsource(f)
    lambda_body = lambda_source.split(":", 1)[1].strip()
    f_1 = T(f)
    initial_rho = C01_metric(f, f_1)
    iters = int(np.ceil(n_iters(alpha, eps, initial_rho)))
    for i in range(0, iters):
        f = T(f)
    f = np.vectorize(f)
    x = np.linspace(0, 1, 10000)

    y = f(x)

    plt.scatter(x, y, s=1)
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x(t)')
    plt.grid(True)
    plt.suptitle(f'График неподвижной точки с точностью {eps}')
    plt.figtext(0.5, 0.01,
    f'Начальное приближение: {lambda_body}, число итераций: {iters}',
    ha='center')
    plt.show()
    return

if __name__ == "__main__":
    main()
```

5 Скриншоты

Здесь приведены графики неподвижных точек с заданным ε и необходимым числом итераций:



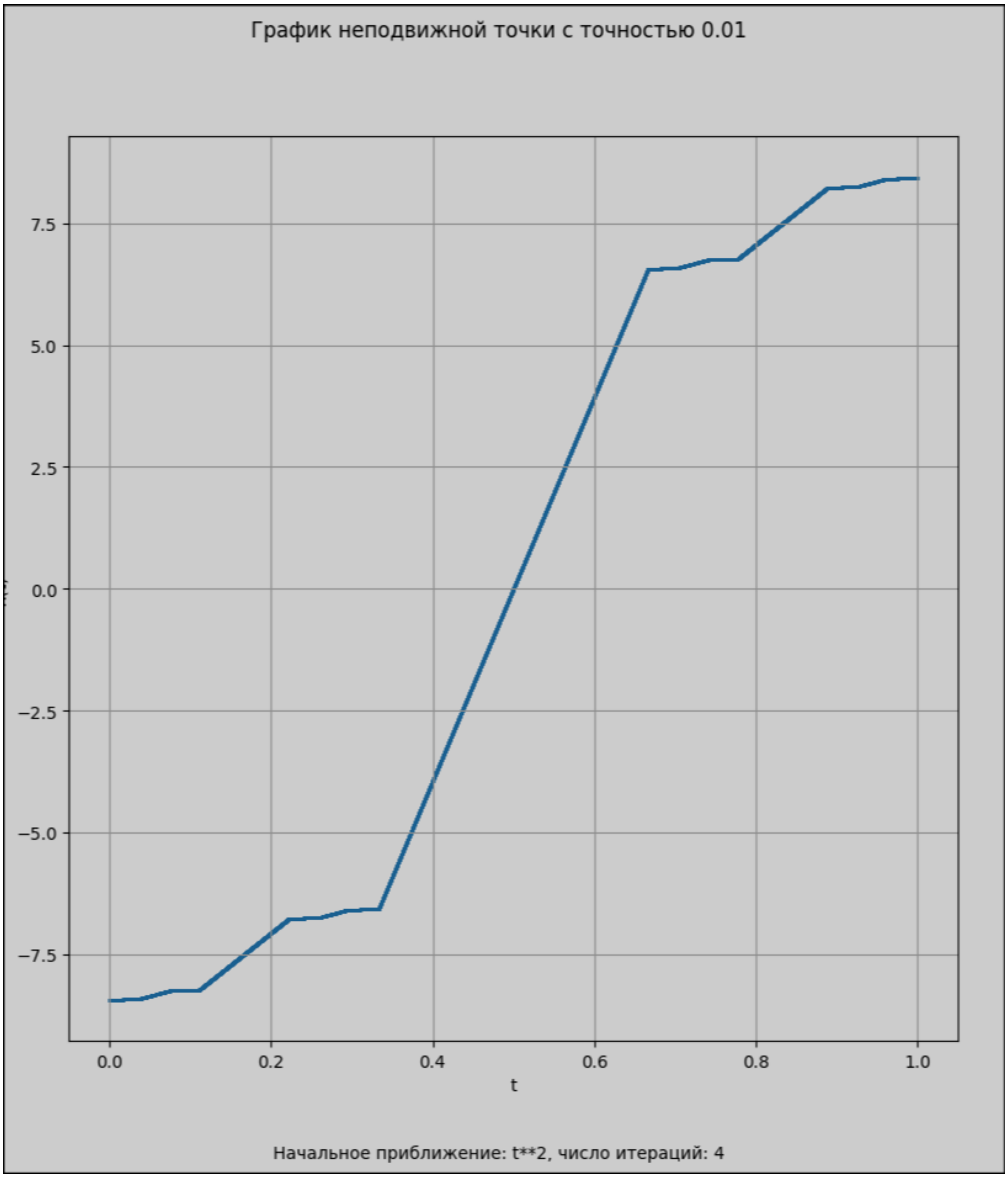


График неподвижной точки с точностью 0.01
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: t**2, число итераций: 4

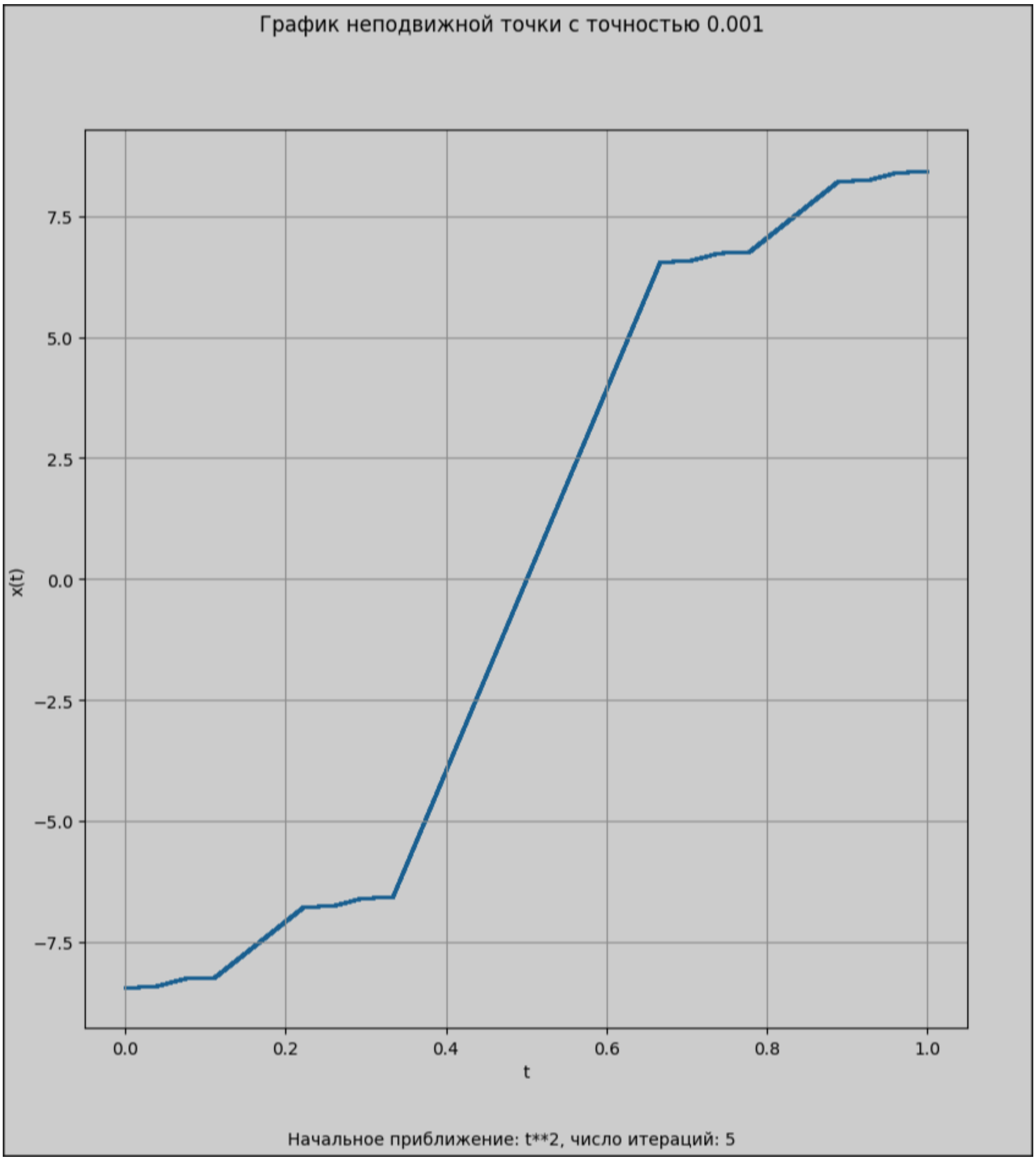


График неподвижной точки с точностью 0.001
x(t)
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: t**2, число итераций: 5

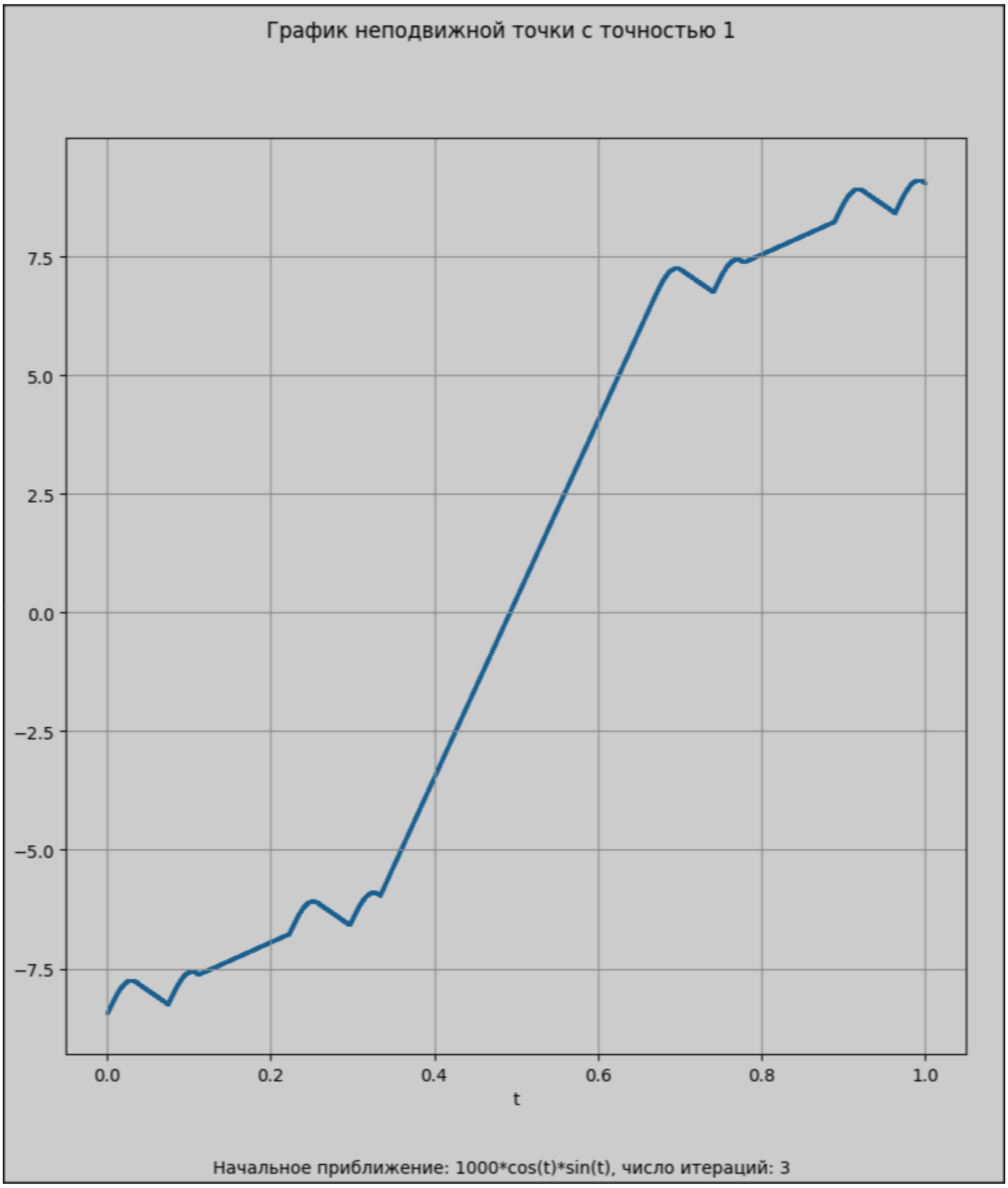


График неподвижной точки с точностью 1
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: 1000*cos(t)*sin(t), число итераций: 3

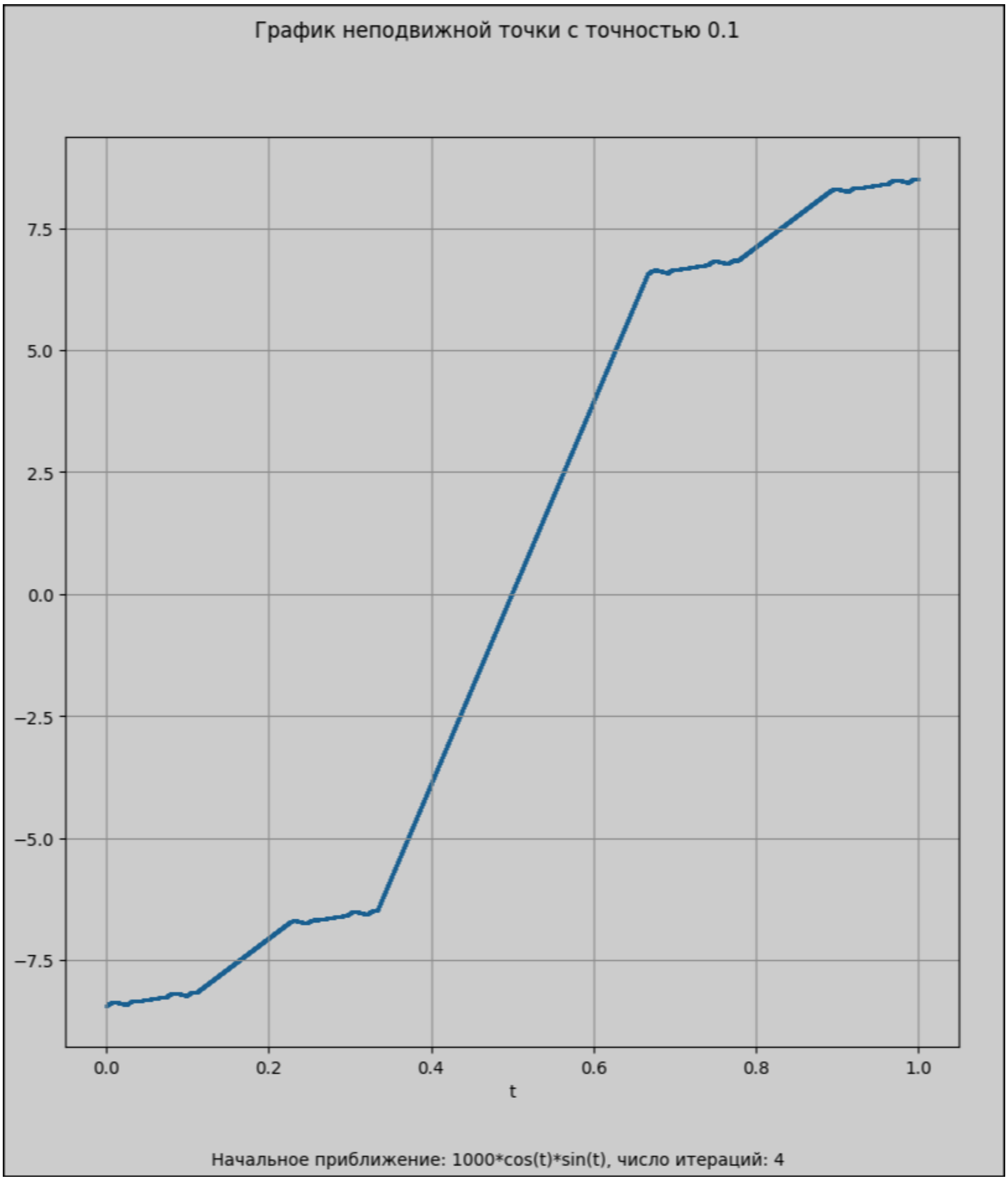


График неподвижной точки с точностью 0.1
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: 1000*cos(t)*sin(t), число итераций: 4

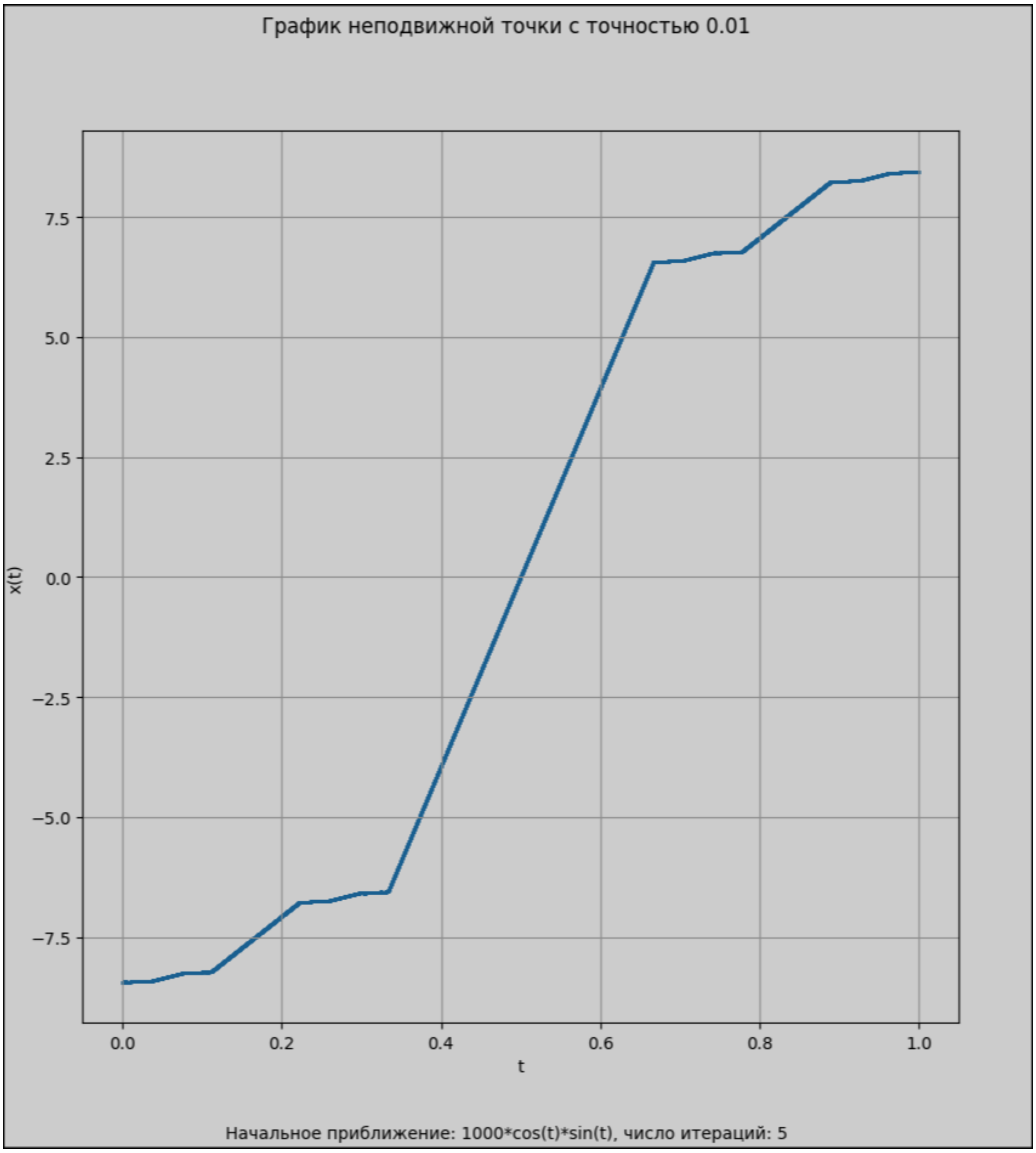


График неподвижной точки с точностью 0.01
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
x(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: 1000*cos(t)*sin(t), число итераций: 5

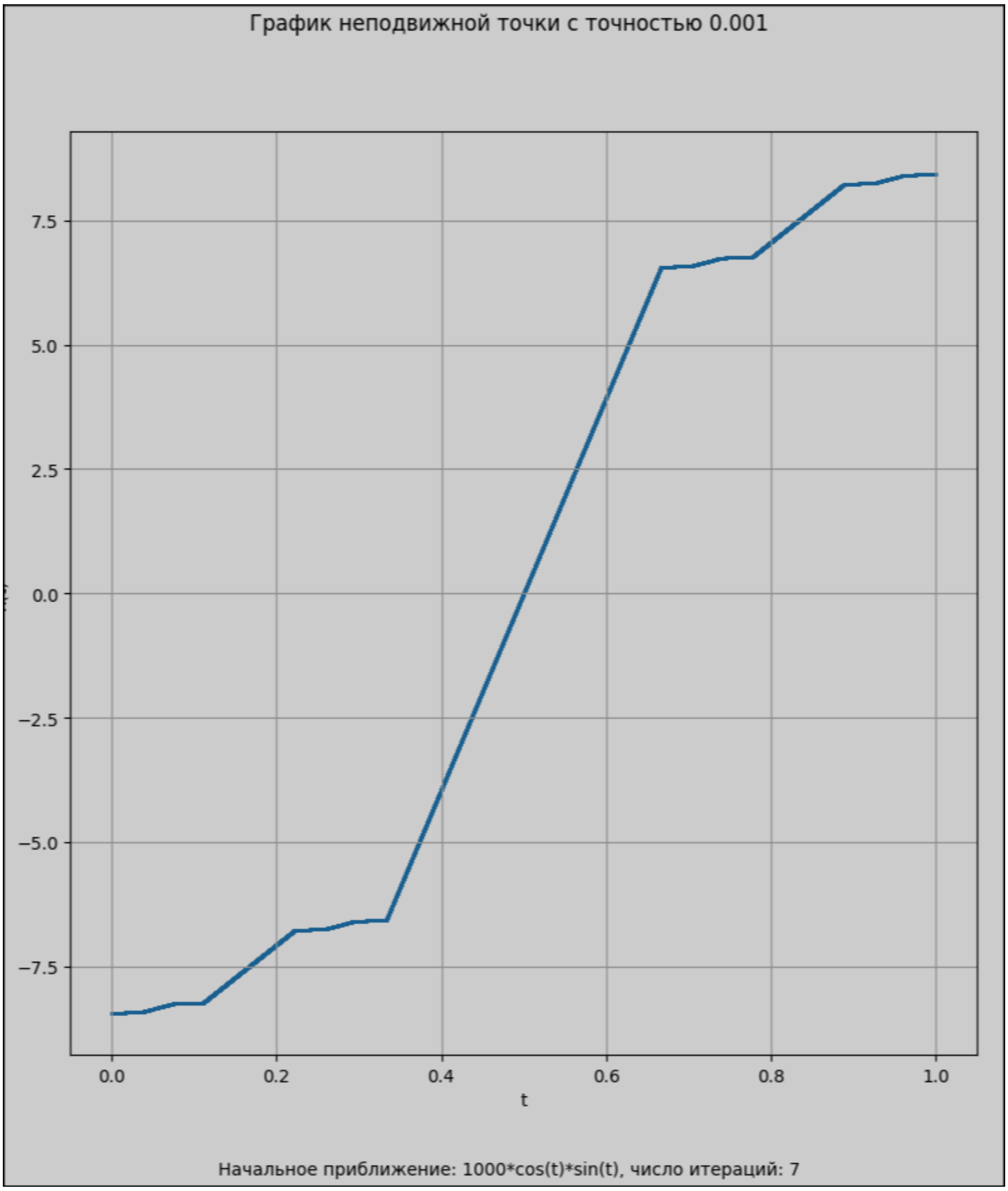
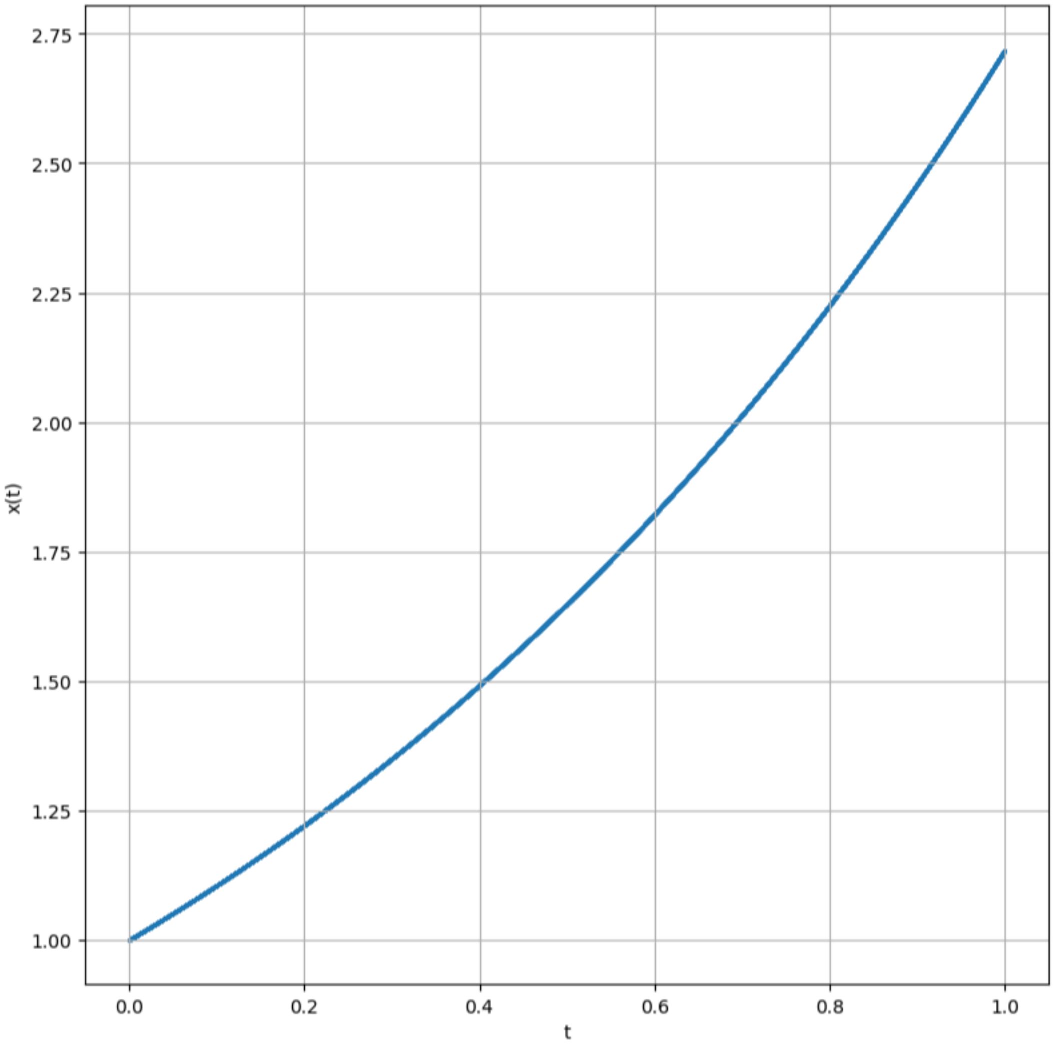
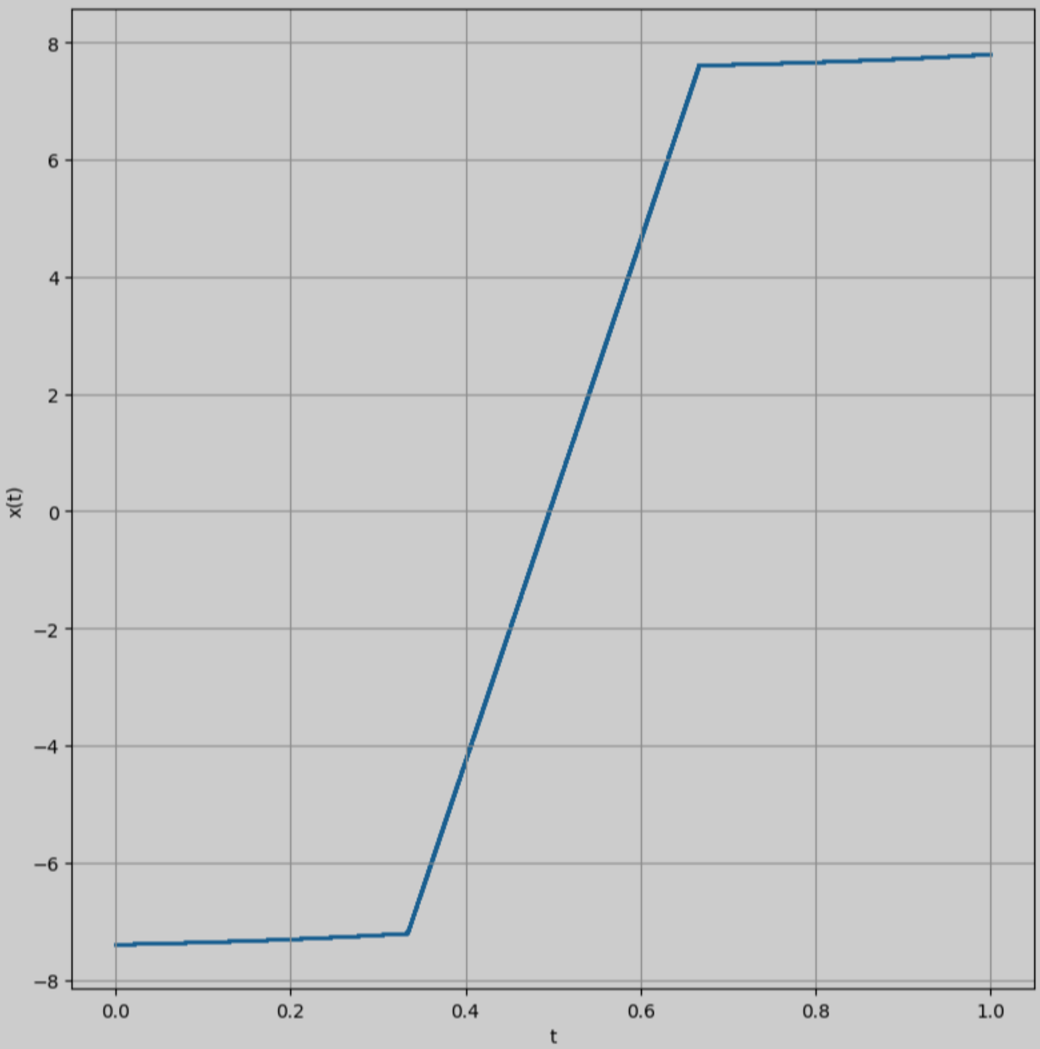


График неподвижной точки с точностью 0.001
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
Начальное приближение: 1000*cos(t)*sin(t), число итераций: 7

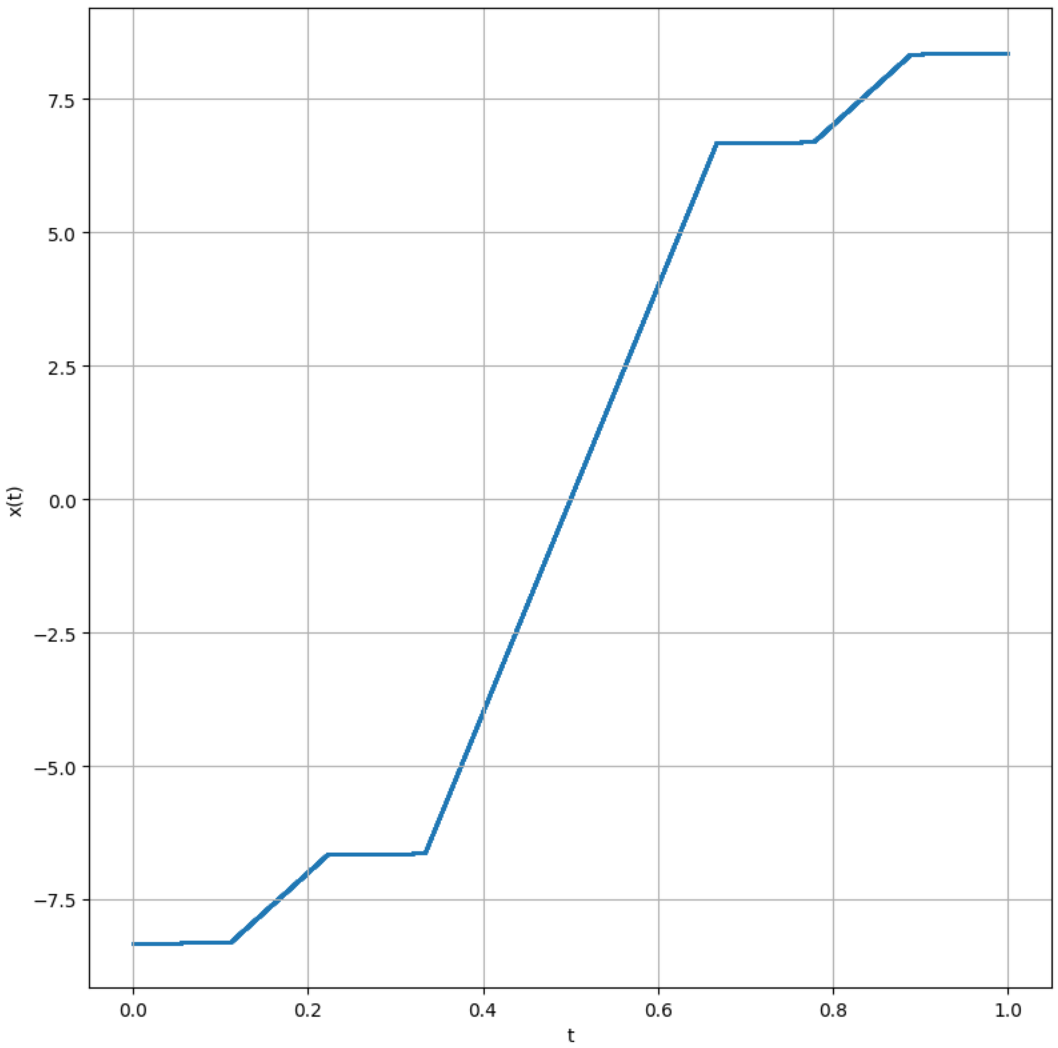
Здесь приведены несколько первых итераций метода сжимающих отображений для начального приближения e^x:



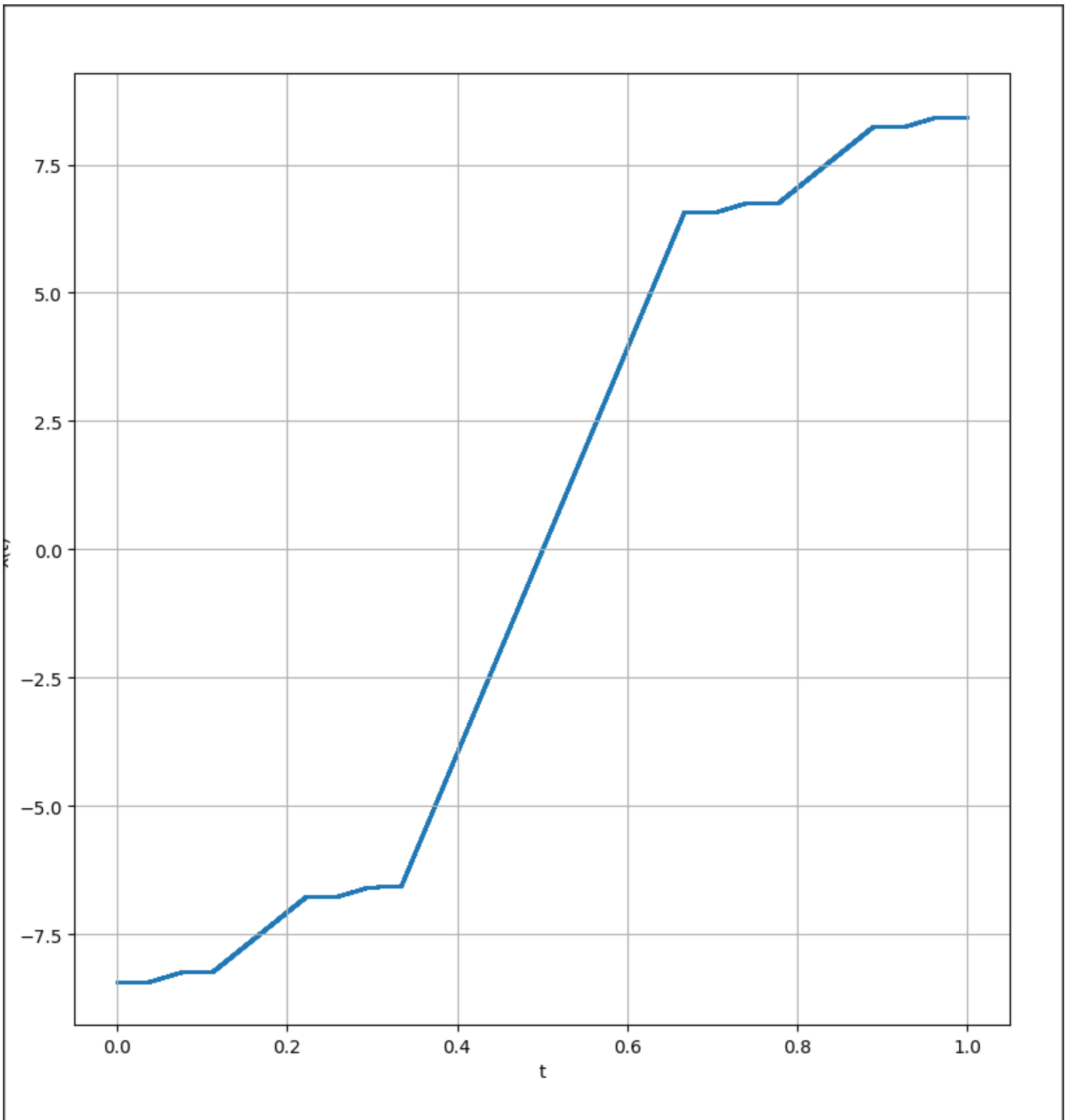
Начальное приближение: exp(t), число итераций: 0



Начальное приближение: exp(t), число итераций: 1



Начальное приближение: exp(t), число итераций: 2



Начальное приближение: exp(t), число итераций: 3