Logika i teoria mnogości/Wykład 1: Po co nam teoria mnogości? Naiwna teoria mnogości, naiwna indukcja, naiwne dowody niewprost

From Studia Informatyczne

< Logika i teoria mnogości

"Naiwna" teoria mnogości

Teoria zbiorów, zwana również teorią mnogości, została stworzona około połowy XIX wieku, przez niemieckiego matematyka Georga Cantora. Teoria mnogości to gałąź matematyki zajmująca się zbiorami - kolekcja obiektów. Skończone zbiory można definiować, wypisując kolejno wszystkie ich elementy. Georg Cantor był pierwszą osobą, która podjęła się przeniesienia na ścisły grunt matematyczny pojęcia zbioru nieskończonego. Według Georga Cantora zbiór może być dowolną kolekcją obiektów zwanych elementami. Według tego podejścia zbiór jest pojęciem podstawowym i niedefiniowalnym. Niestety podejście do teorii zbiorów w ten sposób rodzi paradoksy i dlatego teoria mnogości prezentowana w ten sposób jest często nazywana "naiwną" teorią mnogości.

Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965)
Zobacz biografię

Teoria matematyczna nie może dopuszczać istnienia paradoksów i dlatego na początku XX wieku zmieniono podejście do teorii mnogości. Zaproponowany przez Ernsta Zermelo i uzupełniony przez Adolfa Abrahama Halevi Fraenkela system aksjomatów wyklucza paradoksy, które spowodowały, że naiwna teoria zbiorów musiała zostać porzucona. Aksjomaty te nakładają pewne ograniczenia na konstrukcje zaproponowane przez Georga Cantora. W większości przypadków jednak intuicje związane z naiwną teorią mnogości sprawdzają się również w aksjomatycznej teorii zbiorów. Zaprezentowane poniżej, skrótowe przedstawienie "naiwnej teorii mnogości" ma na celu wyrobienie intuicji niezbędnych przy dalszej pracy nad formalną wersją tych teorii. Aksjomatyczna teoria zbiorów zostanie przedstawiona w Wykładzie 4.

W podejściu zaproponowanym przez Georga Cantora zbiory skończone można łatwo wskazywać poprzez wyliczenie ich elementów. Definiowanie zbiorów nieskończonych wymaga bardziej rozwiniętego języka, niemniej jednak, według Georga Cantora, każda kolekcja obiektów jest zbiorem. Podstawowym symbolem używanym przy definiowaniu i opisywaniu zbiorów jest

$\in$

oznaczający, że dany byt jest "elementem" pewnego zbioru. Napis

"Kraków" $\in$ "zbiór wszystkich miast Polski"

ilustruje zastosowanie tego symbolu.

Aby zdefiniować zbiór należy określić definitywny sposób na rozpoznawania, czy dany byt jest elementem zbioru, czy nie. Najczęściej używanym symbolem przy definiowaniu zbioru są nawiasy klamrowe. Definicja skończonego zbioru może być bardzo łatwa. Zbiór

$\{2, 3, \text{Kraków}\}$

posiada trzy elementy. Liczba **2** jest elementem tego zbioru $2 \in \{2, 3, \text{Kraków}\}$, ale również
Kraków $\in \{2, 3, \text{Kraków}\}$.

Dwa zbiory są sobie równe (takie same), jeśli posiadają dokładnie te same elementy. Jedynymi elementami zbioru $\{2, 3\}$ są liczby naturalne **2** i **3** - ten sam fakt jest prawdziwy dla zbioru $\{2, 2, 3\}$, a więc

$\{2, 3\} = \{2, 3, 3\}$.

Podobnie $\{2, 3\} = \{3, 2\}$ i

$$\{2, 3\} = \text{"zbiór liczb naturalnych ściśle pomiędzy } \mathbf{1} \text{ a } \mathbf{4}\text{"}.$$

W definicji zbioru nie ma znaczenia kolejność, w jakiej wymienione są jego elementy, ani krotność w jakiej dany element pojawia się w zbiorze.

Zbiory można definiować na wiele sposobów. Najprostszym sposobem zdefiniowania zbioru jest wyliczenie jego elementów. Strategia ta zawodzi jednak w odniesieniu do zbiorów nieskończonych -- nie jesteśmy w stanie wypisać wszystkich liczb naturalnych. Zgodnie z postulatami Georga Cantora możemy przyjąć, że istnieje zbiór wszystkich liczb naturalnych. Czasami, na określenie zbiorów nieskończonych używamy nieformalnego zapisu - zbiór wszystkich liczb naturalnych może być zapisany jako
$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)
Zobacz biografię

W podejściu zaproponowanym przez Georga Cantora równoważna definicja tego zbioru brzmi

"zbiór wszystkich liczb naturalnych"

Bardzo często tworzymy zbiory składające się z obiektów spełniających daną własność. Zbiór liczb parzystych możemy zdefiniować w sposób następujący

$\{x \mid x \text{ jest liczbą parzystą}\}$.

Bardziej ogólnie

$\{x \mid \text{warunek.}\}$

W skład powyżej zdefiniowanego zbioru wchodzą te elementy, które spełniają warunek występujący po znaku $|$. Żeby zakwalifikować element do powyższego zbioru, wstawiamy go w miejsce x w warunku występującym po $|$ i sprawdzamy, czy jest on prawdziwy. Żeby pokazać, że

$2 \in \{x \mid x \text{ jest liczbą parzystą}\}$,

musimy dowieść, że warunek "**2** jest liczbą parzystą" jest prawdziwy.

Pomiędzy zbiorem liczb parzystych a zbiorem wszystkich liczb naturalnych występuje oczywista zależność. Każda liczba parzysta jest liczbą naturalną, co, ujęte w języku zbiorów, oznacza, że każdy element zbioru liczb parzystych jest elementem zbioru liczb naturalnych. Zbiór liczb parzystych jest *podzbiorem* zbioru liczb naturalnych (a zbiór liczb naturalnych *nadzbiorem* zbioru liczb parzystych). Zapisujemy to w następujący sposób

$$\{x \mid x \text{ jest liczbą parzystą}\} \subseteq \text{"zbiór liczb naturalnych"}.$$

Ogólniej, jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B i piszemy

$A \subseteq B$.

W takim przypadku mówimy, że pomiędzy zbiorami A i B zachodzi inkluzja.

W szczególności, dla dowolnego zbioru A zachodzi $A \subseteq A$. Wspomnieliśmy wcześniej, że dwa zbiory są sobie równe wtedy i tylko wtedy, kiedy posiadają dokładnie takie same elementy. Fakt ten możemy zapisać formalnie w następujący sposób

$A = B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Często zależy nam na określeniu znaczącym, że jeden zbiór jest podzbiorem drugiego i że zbiory te nie są sobie równe. Używamy wtedy symbolu $\subsetneq$ w następujący sposób

$A \subsetneq B$ wtedy i tylko wtedy, kiedy ($A \subseteq B$ i nieprawda, że $A = B$).

ĆWICZENIE 1.1

Dla każdej pary zbiorów poniżej określ, czy są sobie równe oraz czy jeden z nich jest nadzbiorem drugiego

1. $\{2,3\}, \{x \mid x$ dzieli liczbę $6\}$,
2. "zbiór liczb naturalnych" , $\{x \mid 2$ dzieli $x^2\}$,
3. $\{x \mid x^2 = 1\}, \{x \mid x^3 = 1\}$.

Najczęstszymi operacjami wykonywanymi na zbiorach są operacje *sumy*, *przecięcia* i *różnicy*. Sumą dwóch zbiorów A i B jest zbiór oznaczony przez $A \cup B$ w skład którego wchodzą wszystkie elementy zbioru A, wszystkie elementy zbioru B i żadne elementy spoza tych zbiorów

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ lub $x \in B\}$.

Unia zbiorów.

Podobnie definiujemy przecięcie zbiorów

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ i $x \in B\}$.

Standardowy obrazek ilustrujący przecięcie zbiorów oraz różnicę zbiorów.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ i $x \notin B\}$.

Standardowy obrazek ilustrujący różnicę zbiorów.

ĆWICZENIE 1.2

Dla następujących par zbiorów ustal zawieranie lub równość

1. $A =$ "zbiór liczb naturalnych" $\setminus \{x \mid$ liczba nieparzysta, większa niż **2** dzieli $x\}$
   i drugi zbiór $B = \{2^n \mid$ gdzie n jest liczbą naturalną $\}$,
2. $A = \{x \mid$ liczba **2** dzieli $x\} \cup \{x \mid$ liczba **3** dzieli $x\}$ i zbiór $B = \{x \mid$ liczba **6** dzieli $x\}$.

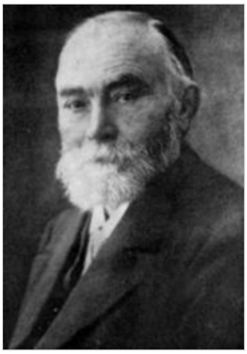
Dla dowolnego zbioru A zachodzi $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$. Zbiór, który otrzymujemy jako wynik operacji $A \setminus A$ jest *zbiorem pustym*. Na mocy definicji różnicy zbiorów elementami zbioru $A \setminus A$ są wyłącznie te elementy A, które nie należą do A. Takie elementy nie istnieją - żaden element ze zbioru A nie należy do $A \setminus A$ i żaden element spoza A nie należy do tego zbioru. Zbiór pusty jest oznaczany przez $\emptyset$. Odejmowanie zbiorów od samych siebie nie jest jedynym sposobem na otrzymanie zbioru pustego.

$\{1, 2, 2006\} \setminus$ "zbiór liczb naturalnych" $=$ "zbiór psów" $\setminus$ "zbiór wszystkich zwierząt"

Zbiór po lewej stronie nierówności jest równy zbiorowi po prawej stronie nierówności. Każdy element zbioru po prawej stronie jest również elementem zbioru po lewej stronie nierówności i vice versa, dlatego że żaden z tych zbiorów nie posiada elementów.

Niestety, podejście zaproponowane przez Georga Cantora i uściślone przez Friedricha Frege posiada błędy. Jedną z pierwszych osób które zwróciły uwagę na niedociągnięcia tej teorii jest Bertrand Russell. Zgodnie z zasadami zaproponowanymi przez [Biografia_Cantor|Georga Cantora]] można zdefiniować dowolny zbiór. Zdefiniujmy, więc zbiór $Z = \{A \mid A \notin A\}$.

Zbiór Z składa się ze zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Paradoks zaproponowany przez Bertranda Russella polega na tym, że pytanie czy Z jest swoim własnym elementem prowadzi do sprzeczności. Jeśli $Z \in Z$ to, zgodnie z definicją zbioru Z otrzymujemy $Z \notin Z$, co jest sprzecznością z założeniem. Jeśli $Z \notin Z$, to Z spełnia warunek na przynależność do Z i w związku z tym $Z \in Z$, co jest kolejną sprzecznością. Definicja zbioru zaproponowana przez Georga Cantora prowadzi do powstania logicznych paradoksów. Okazuje się, że pytanie: co jest zbiorem, jest trudniejsze niż wydawało się matematykom końca XIX wieku.


Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925)
Zobacz biografię

W dalszej części wykładu przedstawimy właściwe podejście do teorii mnogości. Podejście to jest oparte o część logiki zwaną rachunkiem predykatów. Podejście to zostało zaproponowane przez Ernsta Zermelo na początku XX wieku i ma na celu dostarczenie spójnej teorii zbiorów o mocy podobnej do naiwnej teorii, przy równoczesnym uniknięciu paradoksów. Aksjomatyczna teoria mocy definiuje bardzo dokładnie, które kolekcje obiektów są zbiorami. W szczególności paradoks zaproponowany przez Bertranda Russella nie pojawia się w aksjomatycznej teorii zbiorów, ponieważ zbiór zdefiniowany powyżej jako Z w niej nie istnieje.

"Naiwna" indukcja

Zasada indukcji matematycznej jest o prawie trzysta lat starsza niż teoria mnogości. Pierwszy dowód indukcyjny pojawił się w pracy


Francesco Maurolico (1494-1575)
Zobacz biografię

Francesco Maurolico w 1575 roku. W pracy tej autor wykazał, że suma n pierwszych liczb nieparzystych równa się n^2.

Aby zastosować zasadę indukcji matematycznej, należy wykazać dwa fakty:

- hipoteza jest prawdziwa dla $n = 1$,
- jeśli hipoteza jest prawdziwa dla n, to jest również prawdziwa dla $n + 1$.

Drugi z powyższych punktów musi być prawdą dla wszystkich $n \geq 1$. Jeśli oba fakty są prawdą, to hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych większych od **1**. Rozumowanie, które stoi za tym wnioskiem wygląda następująco:

1. hipoteza jest prawdziwa dla $n = 1$ na podstawie podstawy indukcji,
2. hipoteza jest prawdziwa dla $n = 2$, ponieważ jest prawdziwa dla **1** i po zastosowaniu kroku indukcyjnego również dla **2**,
3. hipoteza jest prawdziwa dla $n = 3$; w poprzednim punkcie pokazaliśmy, że jest prawdziwa dla **2** i na podstawie kroku indukcyjnego jest również prawdziwa **3**,
4. i tak dalej.

Zasadę indukcji matematycznej można porównać do domina. Aby mieć pewność, że przewrócone zostaną wszystkie klocki wystarczy wykazać, że przewrócony zostanie pierwszy klocek i że każdy klocek pociąga za sobą następny.


Nieskonczone domino ponumerowanych liczbami naturalnymi klocków w trakcie przewracania

Dowód indukcyjny przedstawiony przez Francesco Maurolico pokazuje, że suma pierwszych n liczb nieparzystych jest równa n^2.

- Jeśli $n = 1$ to pierwsza liczba nieparzysta **1** jest równa 1^2.
- Jeśli hipoteza jest prawdą dla n, to znaczy że suma pierwszych n liczb nieparzystych równa się n^2. Bardziej formalnie

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

tak więc suma pierwszych $n + 1$ liczb nieparzystych $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1)$, przy użyciu założenia powyżej może być zapisana jako

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n + 1)^2.$$

Krok indukcyjny został dowiedziony.

Ćwiczenie 2.1

Wykaż, że suma pierwszych n liczb naturalnych jest równa $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

Ćwiczenie 2.2

Wykaż, że suma kwadratów pierwszych n liczb naturalnych jest równa $\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

Ćwiczenie 2.3

Wykaż, że dla $n \geq 1$ zachodzi $4 | 3^{2n-1} + 1$.

Często bardzo niepraktyczne jest używanie indukcji w jej podstawowej formie. Używa się wtedy indukcji, która w pierwszym kroku nie zaczyna się od $n = 1$, ale $n = 0$, $n = 2$ lub dowolnej innej liczby naturalnej. W takim przypadku drugi krok indukcyjny nie musi działać dla wszystkich n, a wystarczy, by działał dla n większych lub równych od liczby, którą wybraliśmy w pierwszym kroku. Końcowy dowód indukcyjny pokaże, że dana hipoteza nie jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych, a jedynie dla liczb większych od tej wybranej na pierwszy krok indukcyjny.

Jako przykład pokażemy, że $n! > 2^n$. Po pierwsze nierówność ta nie zachodzi dla $1, 2, 3$, więc nie można rozpocząć kroku indukcyjnego od $n = 1$. Indukcja będzie wyglądać następująco:

- Hipoteza jest prawdą dla $n = 4$, ponieważ $4! = 24 > 16 = 2^4$.
- Jeśli hipoteza jest prawdą dla n i jeśli $n \geq 4$ to

$$(n + 1)! = n! \cdot (n + 1) > 2^n \cdot (n + 1) > 2^{n+1},$$

gdzie pierwsza nierówność pochodzi z założenia indukcyjnego, a druga z faktu, że dowodzimy krok indukcyjny dla liczb większych niż **4**.

Ćwiczenie 2.4

W tym ćwiczeniu dowodzimy wariant nierówności Bernoulliego. Dla dowolnego x takiego, że $x > -1$ i $x \neq 0$ i dla dowolnego $n \geq 2$ zachodzi $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Ćwiczenie 2.5

Liczby Fibonacciego zdefiniowane są następująco:

$f_1 = 1, f_2 = 1$ oraz $f_i = f_{i-2} + f_{i-1}$ dla $i > 3$.

Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 2$ liczby f_n i f_{n-1} są względnie pierwsze.

Kolejnym uogólnieniem zasady indukcji matematycznej jest indukcja, w której w drugim kroku indukcyjnym zakładamy, że hipoteza jest prawdą dla wszystkich liczb mniejszych niż n i dowodzimy, że jest również prawdziwa dla $n+1$.

Jako przykład udowodnimy, że każda liczba naturalna większa niż **2** jest produktem jednej, lub więcej liczb pierwszych.

- Hipoteza jest prawdą dla $n = 2$, ponieważ **2** jest liczbą pierwszą.
- Zakładamy, że hipoteza jest prawdziwa dla liczb od **2** do n. Weźmy liczbę $n+1$, jeśli $n+1$ jest liczbą pierwszą, to hipoteza jest udowodniona. Jeśli $n+1$ nie jest liczbą pierwszą, to $n+1 = k \cdot l$, gdzie $2 \leq k, l \leq n$. Założenie indukcyjne gwarantuje, że

$k = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_i$ i $l = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_j$,

gdzie $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_j$ są liczbami pierwszymi. W związku z tym

$n+1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_j$

i krok indukcyjny jest udowodniony.

Ćwiczenie 2.6

Udowodnij, że każda liczba naturalna większa niż **1** może być przedstawiona jako suma liczb Fibonacciego tak, że żadna liczba nie występuje w tej sumie więcej niż raz.

Ćwiczenie 2.7

Znajdź błąd w poniższym dowodzie indukcyjnym. Dowodzimy indukcyjnie twierdzenia, że wszystkie liczby są parzyste.

- Twierdzenie jest prawdą dla $n = 0$ ponieważ **0** jest liczbą parzystą.
- Zakładamy, że twierdzenie jest prawdą dla wszystkich liczb mniejszych lub równych n. Liczba $n+1$ jest niewątpliwie sumą dwóch liczb silnie mniejszych od siebie $n+1 = k + l$. Liczby k i l, na podstawie założenia indukcyjnego, są parzyste, zatem ich suma równa $n+1$ jest parzysta. Krok indukcyjny został dowiedziony.

Na zasadzie indukcji matematycznej wszystkie liczby są parzyste.

Ćwiczenie 2.8

W trójwymiarowej przestrzeni znajduje się n punktów. Ilość punktów w rzutowaniu na płaszczyznę O_x, O_y oznaczamy przez n_{xy}. Podobnie ilość punktów w rzutowaniu na O_x, O_z przez n_{xz} i ilość punktów w rzutowaniu na O_y, O_z przez n_{yz}. Wykaż, że dla dowolnego rozkładu punktów w przestrzeni zachodzi nierówność

$$n^2 \leq n_{xy} n_{xz} n_{yz}.$$

Zasada indukcji matematycznej jest bardzo potężnym narzędziem. Intuicyjnie wydaje się jasne, że dowody przeprowadzone przy jej pomocy są poprawne. Niemniej jednak, żeby uzasadnić poprawność samej zasady, należy sięgnąć do teorii mnogości i definicji zbioru liczb naturalnych. Wiemy już, że "naiwna teoria mnogości" nie daje nam poprawnych zbiorów, na których można oprzeć ściśle rozumowanie. W dalszej części wykładu wyprowadzimy zasadę indukcji matematycznej w oparciu o aksjomaty i aksjomatycznie zdefiniowany zbiór liczb naturalnych. Takie podejście gwarantuje nam poprawność rozumowania -- podejście naiwne zapewnia intuicje niezbędne do budowania poprawnych teorii.

"Naiwne" dowody niewprost

Częstą metodą dowodzenia twierdzeń matematycznych jest dowodzenie niewprost. Dowód niewprost polega na założeniu zaprzeczenia twierdzenia, które chcemy udowodnić i doprowadzeniu do sprzeczności. Wykazujemy, że jeśli twierdzenie nasze jest nieprawdziwe, jesteśmy w stanie udowodnić jakąś tezę, która jest w sposób oczywisty fałszywa.

Jednym z najbardziej znanych dowodów niewprost jest dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. Dowód ten został zaproponowany przez Euklidesa z Aleksandrii, a my prezentujemy go w wersji podanej przez Ernsta Kummera.


Euklides (365-300 p.n.e.)
Zobacz biografię

Twierdzenie 3.1

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód

Załóżmy, że istnieje jedynie skończenie wiele liczb pierwszych $p_0, \ldots, p_n$. Zdefiniujmy liczbę

$k = p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_n$

i rozważmy $k+1$. Liczba $k+1$ posiada dzielnik pierwszy, a ponieważ jedynymi pierwszymi liczbami są liczby $p_0, \ldots, p_n$, wnioskujemy, że p_i dzieli $k+1$ dla pewnego i. Liczba p_i dzieli również k, a więc p_i dzieli $(k+1) - k = 1$ co jest sprzecznością.

❑

Ćwiczenie 3.1

Wykaż, że nie istnieje największa liczba naturalna.

Ćwiczenie 3.2

Wykaż, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Ścisłe uzasadnienie poprawności dowodów niewprost leży na gruncie logiki, której poświęcony jest następny wykład.

- Tę stronę ostatnio zmodyfikowano o 17:47, 30 wrz 2009;