Analiza matematyczna 1
Wykład 8, Ciągłość funkcji

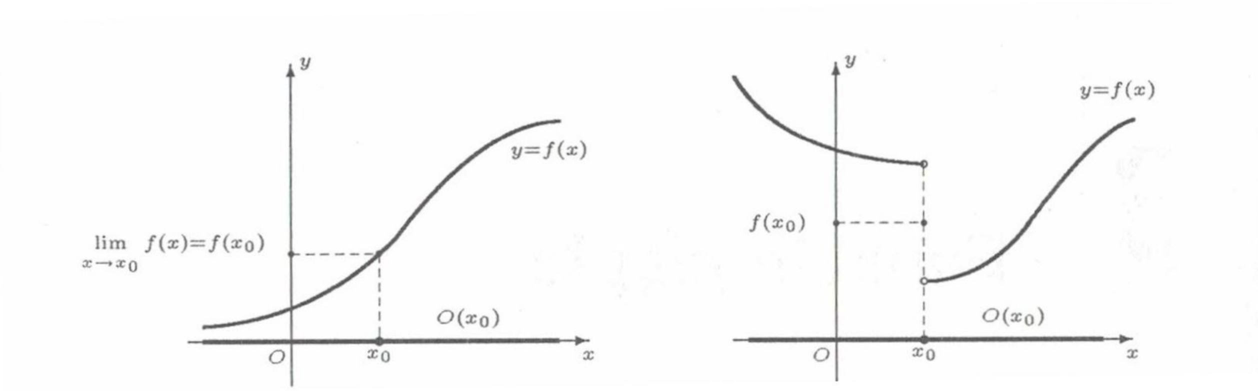
1 Ciągłość funkcji w punkcie

Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$ jest określona w otoczeniu $(x_0 - r, x_0 + r)$ punktu x_0 dla pewnego $r > 0$.

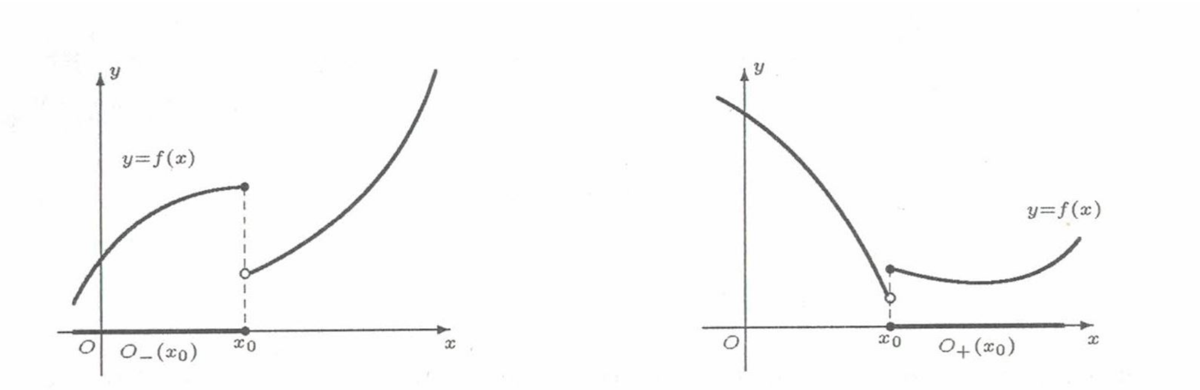
Definicja 1._(ciągłości funkcji w punkcie)_
Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Poniżej widzimy wykresy funkcji: po lewej - ciągłej w punkcie x_0, po prawej - nieciągłej w punkcie x_0:



Rozważając jedynie otoczenie lewostronne $(x_0 - r, x_0]$ (analogicznie - prawostronne: $[x_0, x_0 + r)$) punktu x_0 oraz odpowiednio granice lewostronne i prawostronne otrzymujemy pojęcie funkcji lewo - i prawostronnie ciągłej w punkcie x_0.



Zgodnie z definicją Heinego granicy funkcji w punkcie, ciągłość funkcji f w punkcie x_0 oznacza, że dla dowolnego ciągu argumentów (x_n) dążącego do x_0 zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Z kolei definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie daje lokalne zachowanie znaku przez funkcję ciągłą w punkcie x_0. Mianowicie, jeżeli funkcja f jest funkcją ciągłą w punkcie x_0 i $f(x_0) > 0$, to f przyjmuje wartości dodatnie na pewnym przedziale zawierającym x_0. Jest tak dlatego, że wystarczy w definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie x_0 dla $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ dobrać $\delta > 0$ takie, aby dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodziła nierówność

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}.$$

Przykład 1. Zbadać ciągłość funkcji $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ w punktach $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.

1) Dla $x \in [-1, 0)$ mamy $f(x) = -x$, więc

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

Dla $x \in [0, 1)$ mamy $f(x) = 0$, więc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0,$$

a ponieważ$f(0) = 0$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie $x_1 = 0$.

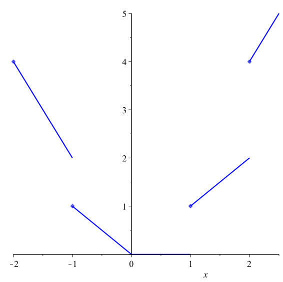
2) Dla $x \in [0, 1)$ mamy $f(x) = 0$, więc

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0.$$

Dla $x \in [1, 2)$ mamy $f(x) = x$, więc

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1,$$

a ponieważ $f(1) = 1$, więc funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_2 = 1$.



Przykład 2. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x - 1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

Mamy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} - 1 = 0,$$

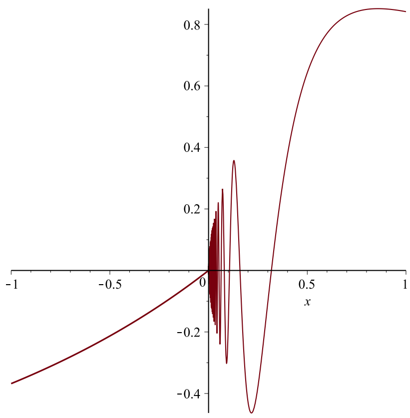
a z nierówności

$$\left| \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{x}$$

wynika, że

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$$

oraz $f(0) = 0$. Więc funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.



Nieciągłość funkcji f w punkcie x_0 może powstać tylko w dwóch powodów:

- gdy nie istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

  albo

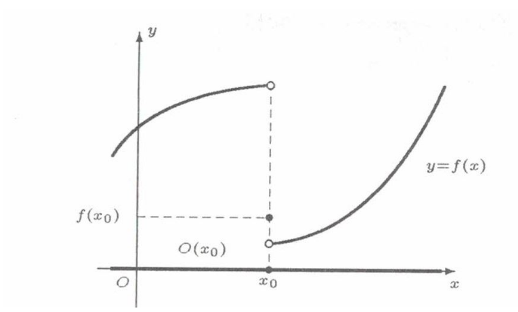
- gdy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Definicja 2.

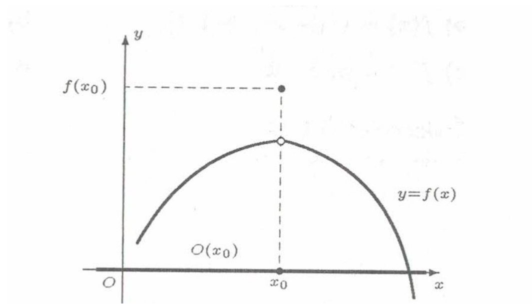
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość pierwszego rodzaju, jeżeli istnieją skończone granice jednostronne: lewostronna $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ i prawostronna $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, ale

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0).$$

Nieciągłość I rodzaju typu "skok":



Nieciągłość I rodzaju typu "luka":

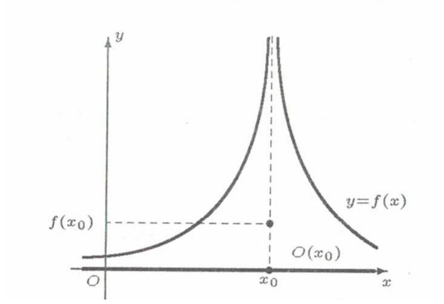


Definicja 3.
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 nieciągłość drugiego rodzaju, jeżeli co najmniej jedna z granic jednostronnych

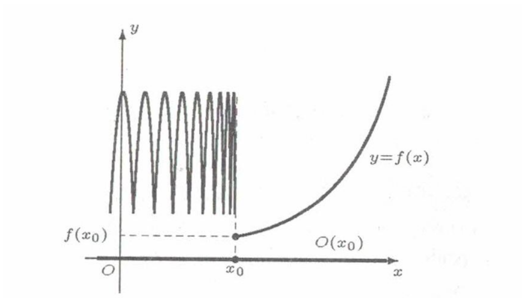
$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_{0+}} f(x)$$

nie istnieje lub jest niewłaściwa.

Nieciągłość II rodzaju (granice jednostronne są niewłaściwe):



Nieciągłość II rodzaju (granica jednostronna nie istnieje):



Przeanalizujemy kilka przykładów.

Przykład 3. Zbadać rodzaj nieciągłości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \frac{2^x - 1}{x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

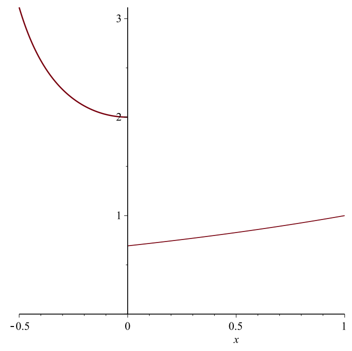
Mamy

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos 2x} \right) = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

oraz

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$$

i $f(0) = 0$. Więc f ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość I rodzaju.



Przykład 4. Zbadać rodzaj nieciągłości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

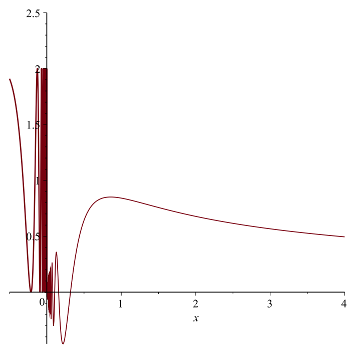
Mamy

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

a jednocześnie granica lewostronna

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1 - \sin\frac{1}{x}\right)$$

nie istnieje. Więc funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość II rodzaju.



Przykład 5. Zbadać rodzaj nieciągłości funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

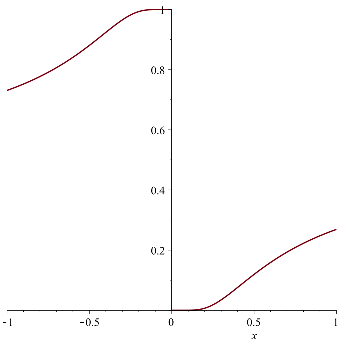
Mamy

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

oraz

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = 0 = f(0).$$

Więc funkcja f ma w punkcie $x_0 = 0$ nieciągłość I rodzaju.



2 Działania na funkcjach ciągłych

Twierdzenie 1.(*o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji*)
Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to:

1. funkcja $f+g$ jest ciągła w punkcie x_0;
2. funkcja $f-g$ jest ciągła w punkcie x_0;
3. funkcja $f\cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0;
4. funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0)\neq 0$.

Twierdzenie 2. (*o ciągłości funkcji złożonej*) Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w punkcie x_0,
2. funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$,

to funkcja złożona $g\circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

3 Ciągłość funkcji elementarnych

- Ciągłość dowolnego wielomianu w dowolnym punkcie prostej rzeczywistej wynika z twierdzenia o ciągłości w punkcie sumy i iloczynu funkcji.
- Każda funkcja wymierna (tzn. iloraz dwóch wielomianów) jest ciągła - na mocy twierdzenia o ciągłości ilorazu funkcji ciągłych - w dowolnym punkcie prostej rzeczywistej, oprócz punktów w których zeruje się jej mianownik.
- Ciągłość funkcji wykładniczej w dowolnym punkcie prostej rzeczywistej (z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie)

- Funkcja logarytmiczna jest ciągła na przedziale $(0, \infty)$, ponieważ dla dowolnego $x_0 \in (0, \infty)$ mamy

$$\lim_{x \to x_0} (\ln x - \ln x_0) = \lim_{x \to x_0} \ln \frac{x}{x_0} = \lim_{x \to x_0} \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) = 0,$$

ponieważ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x_0} = 0.$$

- Ciągłość funkcji potęgowej na dodatniej części osi Ox wynika z ciągłości funkcji logarytmicznej, wykładniczej i twierdzenia o ciągłości funkcji złożonej, ponieważ dla dowolnego α oraz dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest tożsamość $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

- Ciągłość funkcji trygonometrycznych - na przykładzie sinusa:

$$\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = \lim_{x \to x_0} 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} = 0,$$

ponieważ

$$0 \leq \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| \, .$$

Dla cosinusa mamy:

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

a tangens i cotanges są ciągłe, jako iloraz sinusa i cosinusa.

Przykład 6. Obliczyć następujące granice:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + \sin x)}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin (2^x - 1)}{\ln (1 + x)}$, c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

R o z w i ą z a n i e. a) Dokonujmy przekształcenia

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}.$$

Wiemy już, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = 1.$$

Zauważmy jednak, że funkcja

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

jest złożeniem $f = h \circ g$, gdzie

$$g(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

więc żądana równość wynika z twierdzenia o granicy funkcji złożonej. Zatem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Znowu zróbmy przekształcenie

$$\frac{\sin(2^x-1)}{\ln(1+x)} = \frac{\sin(2^x-1)}{2^x-1} \cdot \frac{2^x-1}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Funkcja $f(x) = \dfrac{\sin(2^x-1)}{2^x-1}$ jest złożeniem $f = h \circ g$, gdzie $g(x) = 2^x - 1$, $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Zatem potrzebna równość

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^x-1)}{2^x-1} = 1$$

wynika z twierdzenia o granicy funkcji złożonej. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^x-1)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^x-1)}{2^x-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \cdot \ln 2 \cdot 1 = \ln 2.$$

c) Zapiszmy tak

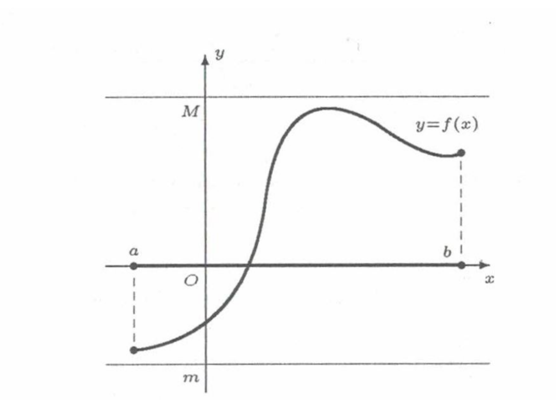
$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \left((\sin x)^{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

Funkcja $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ jest złożeniem $f = h \circ g$, gdzie $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^x$, więc $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^{\sin x} = 1$, a ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, więc, zgodnie z twierdzeniem o arytmetyce granic, mamy

$$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0+} \left((\sin x)^{\sin x}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1.$$

4 Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie 3. (*Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej*)
Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.



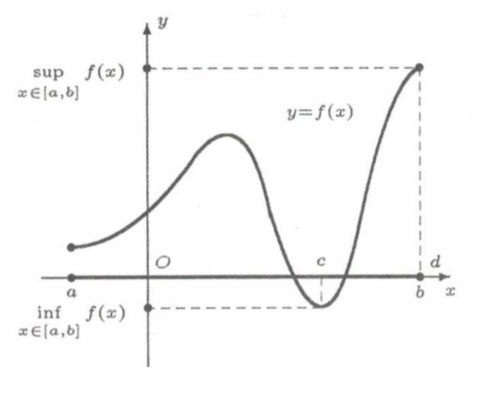
Założenie domkniętości przedziału jest istotne, bo np. funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest ciągła na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, ale nie jest na nim ograniczona. Także założenie ograniczoności przedziału jest istotne, bo np. funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na przedziale $[0, \infty)$, ale nie jest na nim ograniczona. Podobnie założenie ciągłości funkcji jest istotne, bo np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{dla} \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

nie jest ograniczona na przedziale domkniętym $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Twierdzenie 4. (*Weierstrassa o osiąganiu kresów*)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to

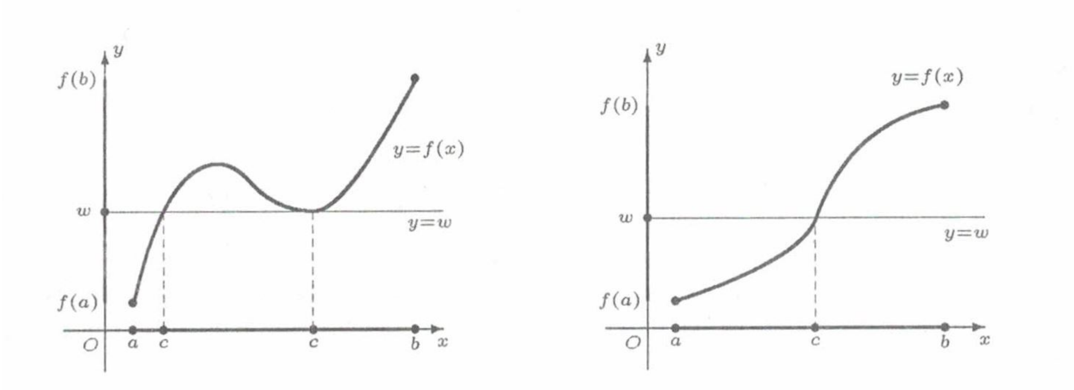
$$\exists\, c \in [a, b] \;\; f(c) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{oraz} \quad \exists\, d \in [a, b] \;\; f(d) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$



Z powyższego twierdzenia wynika np. że wśród trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu R istnieje taki, który ma największe pole i taki, który ma największy obwód.

Twierdzenie 5. (*Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich*)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$, to

$$\forall\, w \in (f(a), f(b)) \;\; \exists\, c \in (a, b) \;\; f(c) = w.$$



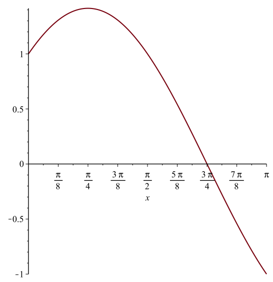
Przykład 7. Uzasadnić, że podana funkcja przyjmuje określoną wartość na wskazanym przedziale:

a) $f(x) = \sin x + \cos x, w = \frac{1}{3},\ [0, \pi]$.

Zauważmy, że

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sin x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

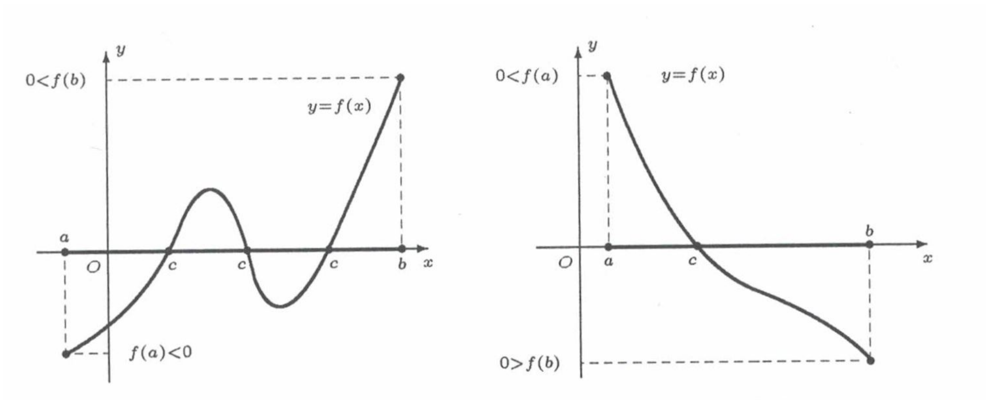
oraz $f(0) = 1$ i $f(\pi) = -1$. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[0, \pi]$. Zatem przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między -1 a 1, czyli w szczególności wartość $\frac{1}{3}$.



b) $f(x) = 2^x - x^2, w = \frac{1}{10},\ [1, 3]$.

Twierdzenie 5. (*Darboux o miejscach zerowych funkcji*)

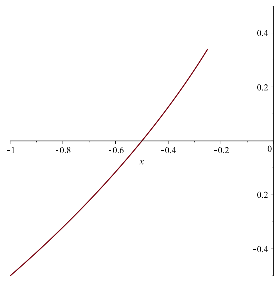
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.



Rozważmy równanie

$$2^x = \sqrt{|x|}$$

w przedziale $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$. Funkcje $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = \sqrt{|x|}$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Tworzymy funkcję $h(x) = f(x) - g(x) = 2^x - \sqrt{|x|}$, która też jest ciągła na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że $h(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ i $h\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{2} > 0$. Więc z twierdzenia Darboux o miejscach zerowych funkcji wynika, że w przedziale $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$ znajduje się punkt x_0, w którym funkcja h przyjmuje wartość 0, tzn. $2^{x_0} = \sqrt{|x_0|}$. Ponieważ funkcja f jest funkcją ściśle rosnącą, a funkcja g jest funkcją ściśle malejącą na $(-\infty, 0)$, więc h jest funkcją ściśle rosnącą na $(-\infty, 0)$, czyli jest dokładnie jeden taki punkt w $(-\infty, 0)$.



Przykład 8. Uzasadnić, że podane równania mają jedno rozwiązanie we wskazanym przedziale:

a) $x^4 = 4^x$, $(-\infty, 0]$, b) $\ln x = 2 - x$, $[1, 2]$, c) $x^4 + x - 1 = 0$, $(0, \infty)$.