

LISTA I
RACHUNEK WEKTOROWY; POCHODNA I CAŁKA; KINEMATYKA

1. Korzystając z definicji iloczynu wewnętrznego (skalarnego) i zewnętrznego (wektorowego) udowodnij podane zależności:
 - a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$,
 - b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.
 - c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$,
 - d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
2. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ oraz $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$. Wyznacz:
 - a) długość każdego wektora, b) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$, c) kąt pomiędzy wektorami $(\vec{a} - \vec{b})$ i $(\vec{a} + \vec{b})$
3. Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ oraz $\vec{b} = 6\vec{i} + 16\vec{j}$. Rozłóż wektor \vec{b} na składową równoległą do wektora \vec{a} oraz składową prostopadłą.
4. Dany jest wektor $\vec{a} = 7\vec{i} + 11\vec{j}$. Wyznacz wektor jednostkowy prostopadły do wektora \vec{a} .
5. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie ich przemieszczenia wynoszą: $\vec{r}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$. Znaleźć:
 - a) długość każdego wektora,
 - b) wektor przemieszczenia cząstki drugiej względem cząstki pierwszej,
 - c) kąty między wszystkimi parami tych trzech wektorów,
 - d) rzut wektora \vec{r}_2 na \vec{r}_1 ,
 - e) iloczyn wektorowy $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$
6. Wyznacz pierwsze i drugie pochodne następujących funkcji:
 - a) $y = Bt^2 + Ct$
 - b) $x = Ae^{-\alpha t}$
 - c) $x = A \cos(\omega t + \delta)$
 - d) $x = A \cos[\varphi(t)]$
7. Wyznacz całki nieoznaczone:
 - a) $F(t) = \int dt$
 - b) $F(t) = \int t dt$
 - c) $F(t) = \int (At + B) dt$
 - d) $F(t) = \int \frac{1}{a + bt} dt$
 - e) $F(t) = \int \exp(-\alpha t) dt$
 - f) $F(t) = \int \cos[\omega t] dt$
8. Prędkość łódki względem wody wynosi v . Jak należy skierować łódź, aby przepłynąć rzekę w kierunku prostopadłym do brzegu? Woda w rzece płynie z prędkością u .
9. Dwa samochody poruszają się po dwóch prostoliniowych i wzajemnie prostopadłych drogach w kierunku ich przecięcia ze stałymi szybkościami $v_1 = 50 \text{ km/h}$ i $v_2 = 100 \text{ km/h}$. Przed rozpoczęciem ruchu pierwszy samochód znajdował się w odległości $s_1 = 100 \text{ km}$ od skrzyżowania dróg, a drugi w odległości $s_2 = 50 \text{ km}$ od skrzyżowania. Po jakim czasie od rozpoczęcia ruchu odległość pomiędzy samochodami będzie najmniejsza?
10. Rybak płynie łodzią w górę rzeki. Przepływając pod mostem gubi jedną z wędek; po godzinie zauważa brak wędki. Zawraca i dogania wędkę sześć kilometrów poniżej mostu. Jaka jest prędkość prądu rzeki jeżeli rybak wkłada tyle samo wysiłku w wiosłowanie płynąc w górę i w dół rzeki?