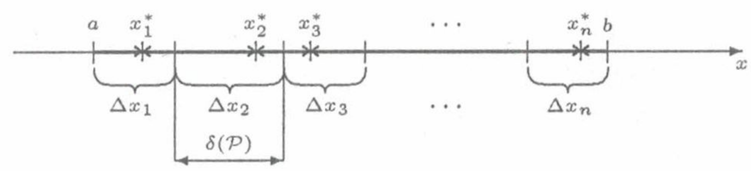
Analiza matematyczna 1
Wykład 15, całka oznaczona

1 Definicja całki oznaczonej

Stosowane oznaczenia:

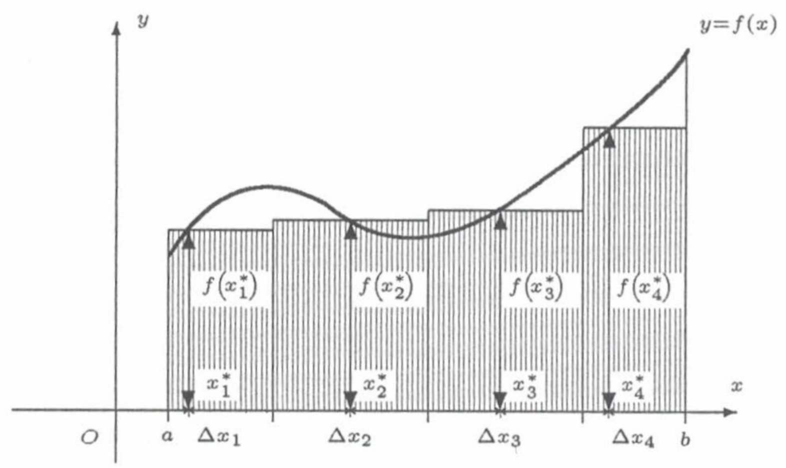
- P - podział odcinka $[a, b]$ na n części, $n \in \mathbb{N}$:
$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$
gdzie $x_0 = a, x_n = b$ oraz $x_0 < x_1 < \dots < x_n$;
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ - długość k-tego odcinka podziału P, $1 \leq k \leq n$;
- $\delta(P) = \max\{\Delta x_k : 1 \leq k \leq n\}$ - średnica podziału P;
- $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ - punkt pośredni k-tego odcinka podziału P, $1 \leq k \leq n$.



Definicja 1.(suma całkowa)
Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$ oraz niech P będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi P oraz punktom pośrednim x_k^*, nazywamy liczbę
$$\delta(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Suma całkowa jest w przybliżeniu polem obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f \geq 0$, osią Ox i prostymi $x = a$, $x = b$ przez sumę pól prostokątów o podstawach Δx_k i wysokościach $f(x_k^*)$, $1 \leq k \leq n$.

Ilustracja sumy całkowej poniżej:



Przykład 1. Napisać sumy całkowe dla podanych funkcji i ich podziałów oraz dla wskazanych sposobów wyboru punktów pośrednich podziału:

a) $f(x) = x, [0, 1]$, podział równomierny, x_k^* - lewy koniec k-tego odcinka podziału, gdzie $1 \leq k \leq n$:

Mamy zatem:

- $\Delta x_k = \frac{1}{n}$,
- $[x_{k-1}, x_k] = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], 1 \leq k \leq n$,
- $f(\frac{k-1}{n}) = \frac{k-1}{n}$.

Wówczas otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

b) $f(x) = x^2, [-1, 0]$, podział równomierny, $n = 10$, x_k^* - środek k-tego odcinka podziału, gdzie $1 \leq k \leq 10$:

Odp. $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{1}{10} \left(\frac{2k-1}{20} - 1\right)^2$.

Definicja 2.(całka oznaczona)

Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$. Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na $[a, b]$ definiujemy następująco:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

o ile granica ta istnieje, nie zależy od sposobu podziału P przedziału $[a, b]$, ani sposobu wyboru punktów pośrednich $x_k^*, 1 \leq k \leq n$.

Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

oraz

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{dla} \quad a < b.$$

Przykład 2. Z definicji oblicz całkę $\int\limits_0^2 f(x)dx$, jeżeli

a)

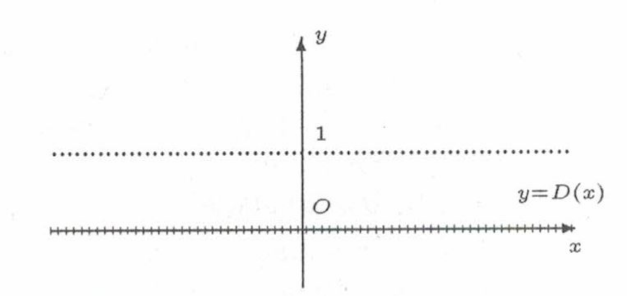
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [0, 1), \\ 0 & \text{dla} \quad x \in [1, 2). \end{cases}$$

UWAGA! Każda funkcja całkowalna jest ograniczona, ale nie każda funkcja ograniczona na przedziale jest na nim całkowalna. Np. funkcja Dirichleta na $[0, 1]$ nie jest całkowalna na tym przedziale, gdzie funkcja Dirichleta jest zdefiniowana następująco: $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Przykład 3. Uzasadnić, że podane funkcje nie są całkowalne na przedziale $[0, 1]$:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

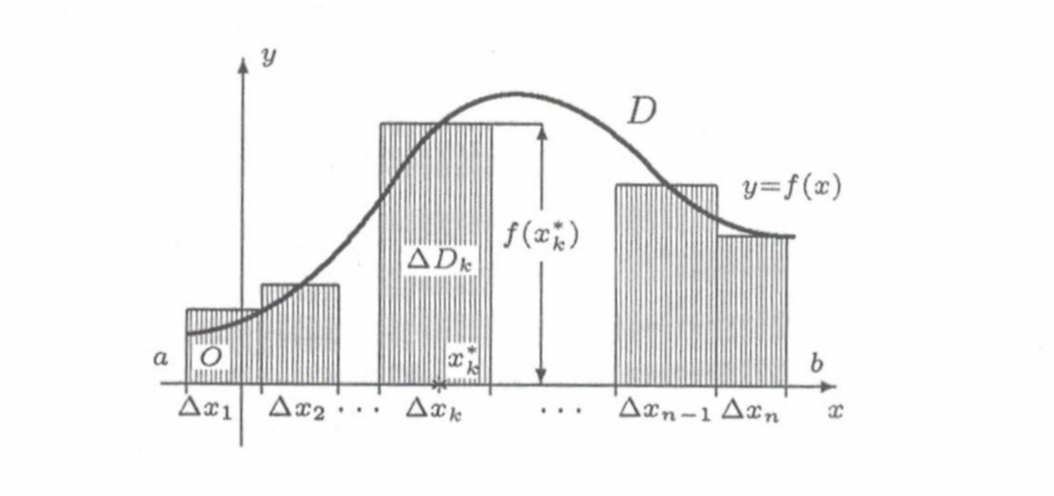
Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

1. Pole trapezu krzywoliniowego

   Niech D oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem ciągłej nieujemnej funkcji f, osią O oraz prostymi $x = a, x = b$. Wówczas $|D|$ oznacza pole tego trapezu krzywoliniowego oraz

$$|D| = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta D_k| = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

   czyli pole $|D|$ jest granicą sumy pól prostokątów ΔD_k aproksymujących ten trapez, gdy średnica podziału $\delta(P) \to 0$, co przedstawia poniższy rysunek:

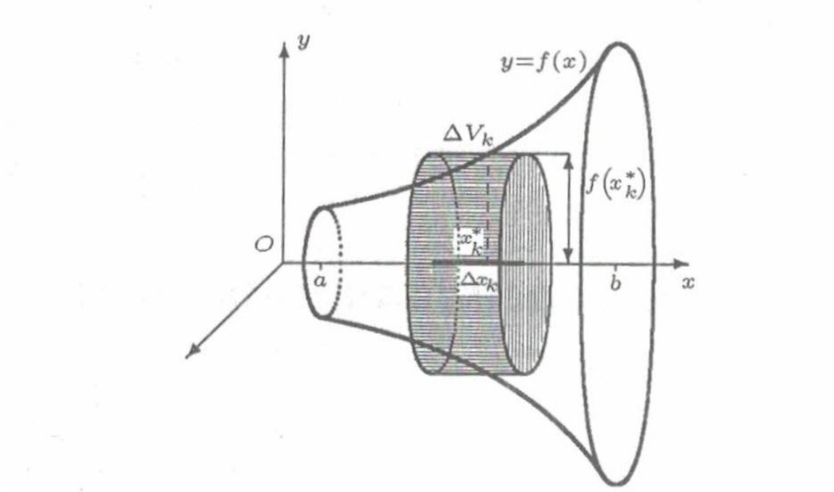


2. Objętość bryły obrotowej

   Niech V oznacza bryłę ograniczoną powierzchnią powstałą z obrotu wykresu ciągłej nieujemnej funkcji $y = f(x)$, gdzie $a \leq x \leq b$, wokół osi Ox oraz płaszczyznami $x = a, x = b$. Wówczas $|V|$ oznacza objętość tej bryły oraz

$$|V| = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\Delta V_k| = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k^*)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

   czyli objętość $|V|$ jest granicą sumy objętości walców ΔV_k aproksymujących tę bryłę, gdy średnica podziału $\delta(P) \to 0$, co przedstawia poniższy rysunek:



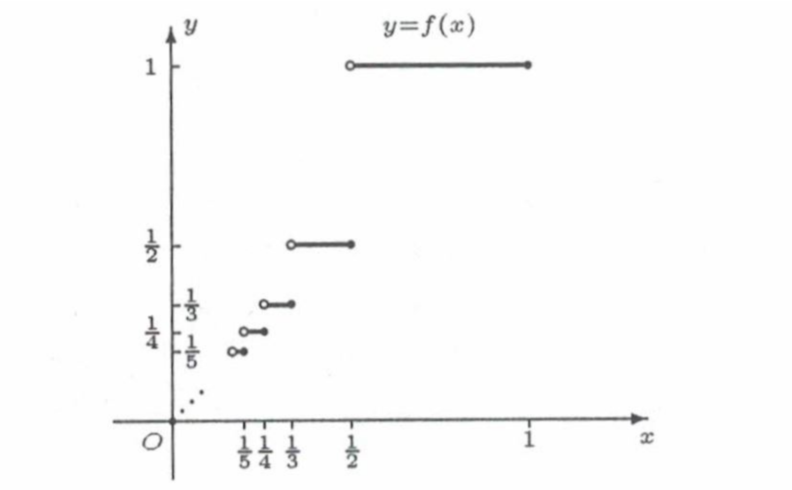
2 Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1.(warunek wystarczający całkowalności funkcji)
Jeżeli funkcja f jest ograniczona na $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości I rodzaju, to jest na nim całkowalna.

Wynika stąd, że funkcja ciągła na przedziale jest na nim całkowalna. Ale może też mieć nieskończenie wiele punktów nieciągłości, np.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor^{-1} & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Funkcja ta jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$, ale w punktach $x = \frac{1}{n}, n \ge 2$, jest nieciągła. Poniżej widzimy wykres tej funkcji.



Obliczanie całek przy pomocy sumy całkowej dla równomiernego podziału

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale a, b, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n} \right) \right].$$

Uwaga! Jeśli powyższa granica istnieje, to wcale jeszcze nie oznacza, że funkcja f jest całkowalna. Np. dla funkcji Dirichleta $D(x)$ na $[0,1]$ granica ta jest równa 0, ale funkcja nie jest całkowalna na tym przedziale.

Przykład 4. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć podane całki:

a) $\int_{-1}^{3} 2dx$; b) $\int_{1}^{4} (1-3x)dx$; c) $\int_{0}^{1} x^2 dx$.

Twierdzenie 2.(Newtona - Leibniza, I główne twierdzenie rachunku całkowego)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na przedziale I, tzn. F jest taką funkcją, że na I spełniony jest warunek:

$$\forall\, x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Przykład 5. Przykłady funkcji i ich przykładowe funkcje pierwotne:

a) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow F(x) = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \quad \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C, x \geq 0, C \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1) \quad \Rightarrow F_1(x) = 1 + \arcsin x$ lub $F_2(x) = 5 - \arccos x$;

d) $f(x) = \sin 2x \quad \Rightarrow F_1(x) = 3 - \cos^2 x$ lub $F_2(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Twierdzenie 3.(podstawowe o funkcji pierwotnej)
Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy

1. $G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I;
2. każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + D$, gdzie $D \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 4.(warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale, to f ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

Przykład funkcji, która nie ma funkcji pierwotnej: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na przedziale $(-1,1)$.

Przykład 6. Korzystając z twierdzenia Newtona- Leibniza obliczyć podane całki:

a) $\int_{0}^{1} (x^3 + 3x + 1)dx$; b) $\int_{-1}^{2} e^{-x}dx$; c) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$;

d) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$; e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Przykład 7. Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić równości:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5} = \frac{1}{5}$; b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+n}\right) = \ln\frac{3}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Twierdzenie 5.(o liniowości całki oznaczonej)

Niech funkcje f i g będą całkowalne na $[a,b]$ oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Przykład 8. Obliczyć podane całki:

a) $\int\limits_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; c) $\int\limits_0^8 (1-\sqrt[3]{x})^2 dx$.