Analiza matematyczna
Lista zadań nr 4 (Funkcje - wykresy, granica, ciągłość)

1. Pokaż, że $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ oraz $\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\cot x$.
2. Korzystając ze wzorów
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x \quad \text{oraz} \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$
wyprowadź wzory na $\sin 2x, \sin 3x, \cos 2x, \cos 3x$.
3. Narysuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ oraz $g(x) = \cos^2 x$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.
4. Naszkicuj wykresy funkcji $f_k(x) = \sqrt{1-x^2}\cdot \sin kx$ dla $k = 1, 10, 100, 200$.
5. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1-x^2} - 1$.
6. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = \left(|x| + \sqrt{1-x^2} - 1\right)\cos^2 200x$ oraz $g(x) = \left(|x| - \sqrt{1-x^2} - 1\right)\cos^2 200x$.
7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.
a) Wyznacz następujące granice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
8. Niech
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x<0, \\ 0 & \text{dla} \quad x=0, \\ 1 & \text{dla} \quad x>0. \end{cases}$$
a) Pokaz, że funkcja sgn nie jest ciągła w punkcie 0.
b) Wyznacz punkty ciągłości funkcji sgn.
9. Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji: $f_1(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, $f_2(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$, $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_4(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
10. Niech
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$
Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.
11. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oblicz granice:
a) $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
12. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij równości:
a) $\lim\limits_{x\to0} x^3 \arctan\frac{1}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\lfloor x\sqrt{8}\rfloor}{\lfloor x\sqrt{2}\rfloor} = 2$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x} = 1$.
13. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz następujące granice:
a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}$; c) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1}$; d) $\lim\limits_{x\to0} \left(1+\tan(2x)\right)^{\cot x}$.

14. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji:
    a) $y = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}$; b) $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$; c) $y = \frac{\sin^2 x}{x^3}$.

15. Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami: $y = \frac{x}{x-1}$, $y = x - \lfloor x \rfloor$, $y = x \sin \frac{1}{x}$, $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ oraz wyznacz ich granice w punkcie $x = 0$.

16. Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami: $y = \frac{1}{x^2-1}$, $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = \frac{x^2}{x^2-1}$, $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

17. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. (Wsk: złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.)

18. Załóżmy, że funkcje f i g są ciagłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

19. Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ w nieskonczoności oraz w minus nieskonczoności. (Wsk: Rozważ oddzielnie przypadek dla n parzystego oraz n nieparzystego.)

20. Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. (Wsk: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własnosci Darboux funkcji ciągłych.)

21. Załóżmy, że $f : [0,1] \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0,1]$, że $f(x) = x$. (Wsk: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.)