Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2022/23

LISTA 2

Zadania na tej liście zaczerpnięte są z podręczników [AMO93, DPV06].

Zadanie 1. Rozważmy wariant problemu transportowego, w którym suma zapotrzebowań odbiorców (d_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$) jest większa od podaży dostawców (s_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$), tj. $\sum_{j \in \{1,\ldots,n\}} d_j > \sum_{i \in \{1,\ldots,m\}} s_i$ – jest to tzw. problem niezrównoważony. Wprowadźmy karę p_j za każdą jednostkę niezrealizowanego popytu na towar u j-tego odbiorcy. Sformułuj problem jako standardowy problem transportowy, tj. problem, w którym suma zapotrzebowań u odbiorców jest równa sumie podaży u dostawców.

Zadanie 2. Kilka rodzin planuje pójść na wspólną kolację. Aby zwiększyć możliwość bliższego poznania się postanowili, że przy jednym stole będą siedzieli tylko członkowie różnych rodzin. Załóżmy, że mamy p rodzin, gdzie i-ta rodzina, $i \in \{1, \ldots, p\}$, składa się z a_i członków. Ponadto załóżmy, że dostępnych jest q stołów, gdzie j-ty stół, $j \in \{1, \ldots, q\}$, ma b_j miejsc. Znajdź rozmieszczenie członków rodzin przy stołach, aby osiągnąć cel bliższego poznania – o ile takie rozmieszczenie istnieje dla zadanych danych. Sformułuj problem jako zagadnienie najtańszego przepływu.

Zadanie 3. Policja w małym miasteczku posiada w swoim zasięgu trzy dzielnice oznaczone jako p_1, p_2 i p_3. Każda dzielnica ma przypisaną pewną liczbę radiowozów wyposażonych w radiotelefony i sprzęt pierwszej pomocy. Policja pracuje w systemie trzyzmianowym. W tabelach 1 i 2 podane są minimalne i maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany.

Tabela 1: Minimalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielinicy

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p_1	2	4	3
p_2	3	6	5
p_3	5	7	6

Tabela 2: Maksymalne liczby radiowozów dla każdej zmiany i dzielinicy

	zmiana 1	zmiana 2	zmiana 3
p_1	3	7	5
p_2	5	7	10
p_3	8	12	10

Aktualne przepisy wymuszają, że dla zmiany 1, 2 i 3 powinno być dostępnych, odpowiednio, co najmniej 10, 20 i 18 radiowozów. Ponadto dzielnice p_1, p_2 i p_3 powinny mieć przypisane, odpowiednio, co najmniej 10, 14 i 13 radiowozów. Policja chce wyznaczyć przydział radiowozów spełniający powyższe wymagania i minimalizujący ich całkowitą liczbę. Sformułuj ten problem jako problem cyrkulacji.

Zadanie 4. Cyklicznie powtarzającym się problemem w amerykańskich siłach zbrojnych jest problem dystrybucji i wykorzystania wykwalifikowanych pracowników. Każdego miesiąca tysiące pracowników zwalnia swoje miejsca pracy, które wymagają obsadzenia. Natomiast tysiące kolejnych pracowników jest gotowych, aby zająć zwolnione miejsca pracy. Każde miejsce pracy wymaga pewnych umiejętności. Każda osoba gotowa podjąć pracę ma również pewne umiejętności i preferencje dotyczące pracy. Załóżmy, że używamy tych informacji do obliczenia użyteczności d_{ij} przydziału każdego pracownika i do każdego nowego miejsca pracy j. Problem decyzyjny polega na przydziale pracowników do nowych miejsc pracy w taki sposób, aby zmaksymalizować całkowitą użyteczność przydziału pracowników do miejsc pracy. W jaki sposób można sformułować ten problem jako problem przepływu w sieci?

Zadanie 5. Rozważmy wariant problemu MIN COST FLOW, w którym suma zasobów jest nie mniejsza niż suma zapotrzebowań w sieci $G = (N, A)$, tj. $\sum_{i \in N} b(i) = B \geqslant 0$. Zredukuj ten problem do „standardowego" wariantu problemu MIN COST FLOW podanego na wykładzie, w którym suma zasobów jest równa sumie zapotrzebowań, tj. $\sum_{i \in N} b(i) = 0$.

Zadanie 6. W problemie BIPARTITE MAXIMUM CARDINALITY MATCHING celem jest wyznaczenie skojarzenia o największym rozmiarze (czyli o największej liczbie krawędzi) dla danego nieskierowanego grafu dwudzielnego $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Zredukuj tej problem do problemu maksymalnego przepływu (MAXIMUM FLOW). HINT: Najpierw spróbuj samodzielnie znaleźć redukcję, a dopiero potem ewentualnie zajrzyj do rozdziału 12.3 w [AMO93].

★ **Zadanie 7.** (*Eliminacja przepustowości łuków*) Rozważmy problem UNCAPACITATED MIN COST FLOW, będący szczególnym przypadkiem problemu MIN COST FLOW, w którym łuki w sieci zadanej grafem skierowanym $G = (N, A)$ nie mają ograniczeń na przepustowość, tj. $l_{ij} = 0$, $u_{ij} = \infty$ dla wszystkich $(i, j) \in A$. Pokaż, jak zredukować „standardowy" wariant problemu MIN COST FLOW z podanymi ograniczeniami na przepustowość u_{ij} (możemy przyjąć $l_{ij} = 0$) do problemu UNCAPACITATED MIN COST FLOW. HINT: Najpierw spróbuj samodzielnie znaleźć redukcję, a dopiero potem ewentualnie zajrzyj do rozdziału 2.4 w [AMO93].

Wskazówka do zadań W pewnych przypadkach wygodniej jest przejść z zadania, w którym minimalizujemy funkcję celu, do zadania, w którym maksymalizujemy funkcję celu. Warto tutaj zauważyć, że zbiory rozwiązań optymalnych następujących problemów optymalizacyjnych:

$$\min_{x \in F} c(x) \qquad \text{oraz} \qquad \max_{x \in F} -c(x)$$

są identyczne (F oznacza tu – jak zwykle – zbiór rozwiązań dopuszczalnych).

Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.