Analiza matematyczna 1
Wykład 9, Pochodne funkcji

1 Pochodna funkcji - podstawowe pojęcia

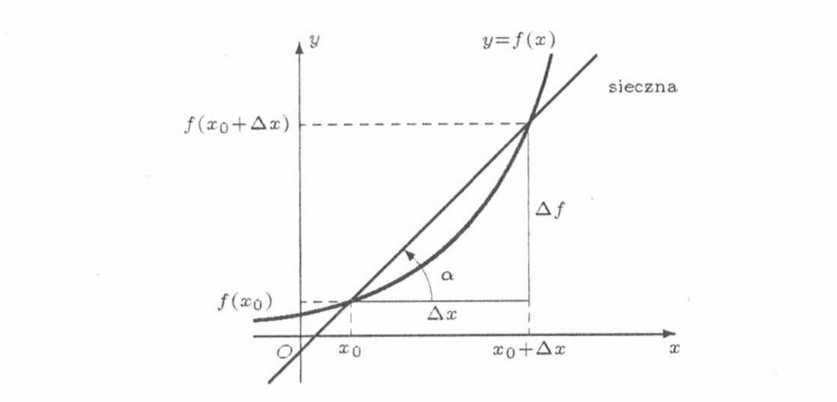
Definicja 1. *(iloraz różnicowy)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu x_0: $O(x_0, r), r > 0$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi Δx, gdzie $0 < |\Delta x| < r$, zmiennej niezależnej nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Interpretacja gemetryczna ilorazu różnicowego:

Iloraz różnicowy jest tangensem kąta nachylenia siecznej wykresu funkcji f, przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0)), (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, do dodatniej części osi Ox:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



Np. Dla $f(x) = x^2, x_0 = -1, \Delta x = 0.1$ mamy

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-1 + 0.1) - f(-1)}{0.1} = \frac{(-0.9)^2 - 1}{0.1} = -\frac{0.19}{0.1} = -1.9.$$

Definicja 2. *(pochodna właściwa funkcji)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu x_0. Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy właściwą granicę

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Inne oznaczenia na pochodną funkcji f w punkcie x_0: $Df(x_0), \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Zatem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Przykład 1. Z definicji obliczyć pochodne zadanych funkcji w określonych punktach:
a) $f(x) = x^2, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

b) $f(x) = \sin x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0.$$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 \neq 1$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(1-x_0)-(1-x)}{(1-x)(1-x_0)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{1}{(1-x_0)^2}.$$

Przykład 2. Sprawdzić, czy podane funkcje mają pochodne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x-3|, x_0 = 3$:

Badamy istnienie granicy

$$\lim_{x\to 3} \frac{|x-3| - 0}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Granica ta nie istnieje, ponieważ

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1.$$

b) $f(x) = \sin^3 \sqrt[3]{x}, x_0 = 0$:

Badamy istnienie granicy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 1.$$

Zatem pochodna funkcji w $x_0 = 0$ istnieje i jest równa 1.

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = 0 = f'(0).$$

Granicę tę można otrzymać w następujący sposób. Załóżmy, że $x > 0$ (dla $x < 0$ analogicznie). Wówczas mamy (z poprzednich wykładów)

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

a stąd

$$\cos x - 1 < \frac{\sin x}{x} - 1 < 0$$

oraz dalej (dzielimy przez $x > 0$)

$$\frac{\cos x - 1}{x} < \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} < 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że wystarczy pokazać, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{x}{2} = -1 \cdot 0 = 0.$$

Pochodne ważniejszych funkcji

$(c)' = 0, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$(x^p)' = px^{p-1}$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$, gdzie $p \in \{-1, -2, -3, \ldots\}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$

$(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ dla $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ dla $0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$

$(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ dla $0 < a \neq 1$ oraz $x \in (0, \infty)$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$

Przykład 3. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w $x_0 = 0$ oraz

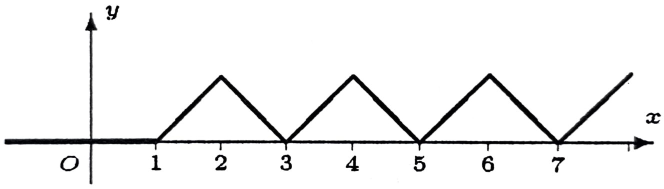
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Czy z tego wynika, że $f'(0) = 1$? NIE! Dla przykładu weźmiemy funkcję $f(x) = |x|$. Funkcja ta spełnia podane wyżej warunki, ponieważ jest ciągła w $x_0 = 0$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pochodna jednak w punkcie $x_0 = 0$ tej funkcji nie istnieje. (Sprawdzamy to z definicji pochodnej - otrzymujemy różne granice jednostronne).

Przykład 4. Funkcja określona na całej prostej $\mathbb{R}$, która nie ma pochodnej tylko w punktach postaci $x = n, n \in \mathbb{N}$:



Przykład 5. Przykład funkcji, która ma pochodną tylko w jednym punkcie: $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

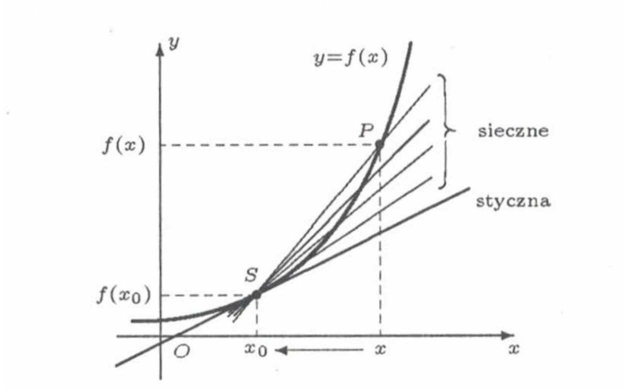
Przykład 6. Przykład funkcji, która ma pochodną tylko w punktach $x = k, k \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2 Styczna do wykresu funkcji

Definicja 3. *(styczna do wykresu funkcji)*

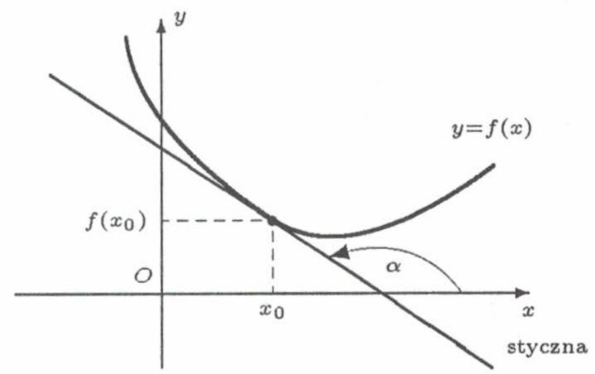
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie ciągła, określona przynajmniej na otoczeniu punktu x_0. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych wykresu funkcji f przechodzących przez punkty $S = (x_0, f(x_0))$ i $P = (x, f(x))$, gdy $x \to x_0$.



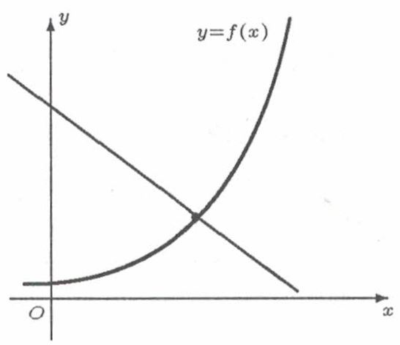
- **Interpretacja geometryczna pochodnej**

Niech α oznacza kąt między styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią częścią osi Ox. Wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$



Nie jest prawdą, że każda prosta, która ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji jest do niego styczna, co widać na poniszym rysunku.



- **Równanie stycznej do wykresu funkcji f**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

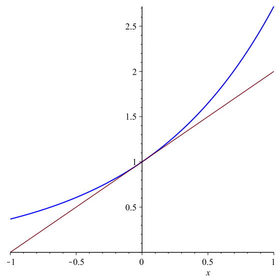
w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Przykład 7. Napisać równiania stycznych do wykresów funkcji f w podanych punktach.

a) $f(x) = e^x, (0, 1)$;   b) $f(x) = \sin x, (\pi, 0)$

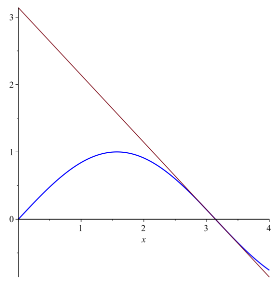
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, (8, 2)$;   d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, (0, -1)$.

W przykładzie a) odpowiedź to $y = x + 1$, ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f'(x) = e^x$ i stąd $f'(0) = 1$. Podstawiając do wzoru na równanie stycznej otrzymujemy prostą $y = x + 1$.

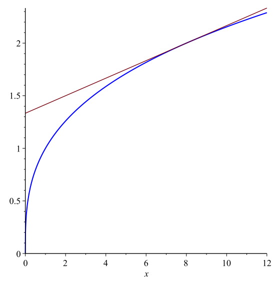


W pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie i otrzymujemy odpowiedzi b) $y = \pi - x$, c) $y = \frac{x}{12} + \frac{4}{3}$, d) $y = -2x - 1$.

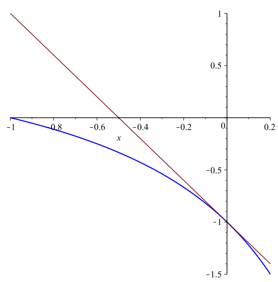
b)



c)

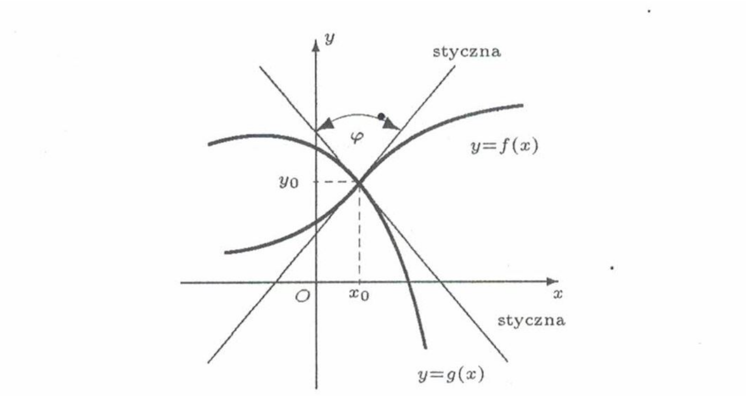


d)



- **Kąt przecięcia wykresów funkcji**

Załóżmy, że wykresy funkcji f i g mają punkt wspólny (x_0, y_0) oraz obie funkcje mają pochodne właściwe w punkcie x_0. Kątem przecięcia wykresów funkcji f i g nazywamy kąt ostry φ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie ich przecięcia.



- **Miara kąta przecięcia wykresów funkcji f i g wyraża się wzorem**

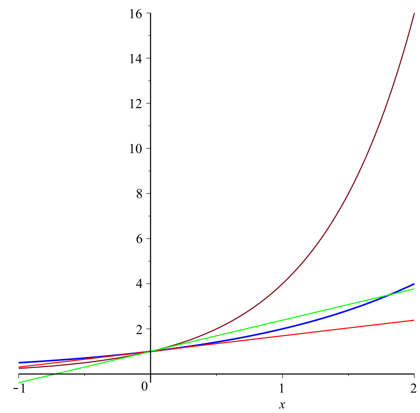
$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|,$$

jeśli $f'(x_0)g'(x_0) \neq -1$ oraz $\varphi = \frac{\pi}{2}$, jeśli $f'(x_0)g'(x_0) = -1$, gdzie x_0 jest rzędną punktu przecięcia wykresów.

Przykład 8. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy funkcji:

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$; b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

W przykładzie a) mamy $\operatorname{arctg} \frac{\ln 2}{1+2(\ln 2)^2}$, punkt przecięcia to $(0, 1)$. (Na rysunku to kąt między prostą zieloną a czerwoną.)



Twierdzenie 1. *(warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji)*

Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

UWAGA! Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale $f'(0)$ nie istnieje.

2.1 Pochodne jednostronne i pochodne niewłaściwe

Definicja 4. *(pochodne jednostronne funkcji)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na lewostronnym otoczeniu punktu x_0. Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę

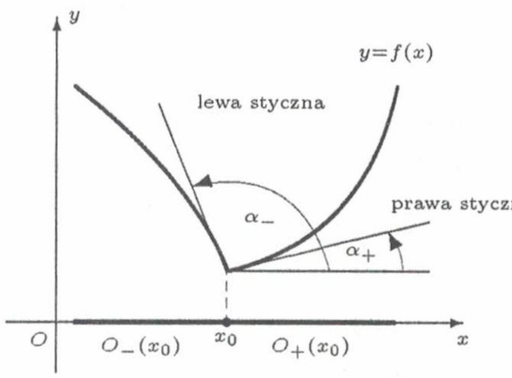
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogicznie definiuje się pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0, którą oznaczamy przez $f'_+(x_0)$.

- **Interpretacja geometryczna pochodnych jednostronnych**

Niech α_+ i α_- oznaczają odpowiednio kąty nachylenia prawej i lewej stycznej wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ do dodatniej częścią osi Ox. Wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha_+ = f'_+(x_0), \quad \operatorname{tg}\alpha_- = f'_-(x_0).$$



Przykład 9. Obliczyć pochodne jednostronne funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x|^3, x_0 = 0$; b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dla} \quad x \geq 1, \\ 2 - x & \text{dla} \quad x < 1 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Odp. a) $f'_-(0) = 0, f'_+(0) = 0$, b) $f'_-(1) = -1, f'_+(1) = 4$.

Twierdzenie 2. *(warunek konieczny istnienia pochodnej funkcji)*
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Wspólna wartość pochodnych jednostronnych jest wtedy równa wartości pochodnej w danym punkcie.

Przykład 10. Zbadać istnienie pochodnych podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \left|\sin^3 x\right|, x_0 = 0$; b) $f(x) = |\pi - x| \sin x, x_0 = \pi$;

c) $f(x) = \max\left\{x^2, x + 2\right\}, x_0 = 2$.

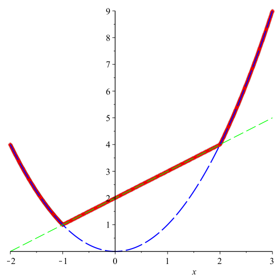
Odp. a) $f'(0) = 0$, b) $f'(\pi) = 0$, c) $f'(2)$ nie istnieje, ponieważ

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x + 2 - 4}{x - 2} = 1$$

oraz

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4.$$

Poniżej wykres funkcji z przykładu c)



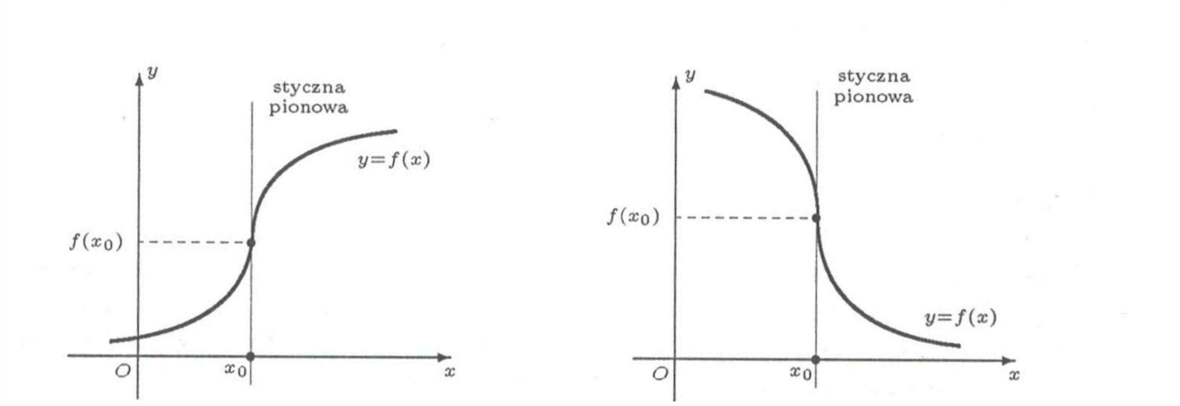
Definicja 5. *(pochodna funkcji na przedziale, funkcja różniczkowalna)*
Funkcja ma pochodną na przedzialeotwartym (a, b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jeżeli ma taką pochodną w każdym punkcie tego przedziału. Analogicznie jest dla przedziału domkniętego $[a, b]$. Wtedy muszą istnieć pochodne lewostronna i prawostronnaw punkcie a i b, odpowiednio. O funkcji, która ma pochodną właściwą w każdym punkcie przedziału, mówimy, że jest różniczkowalna na nim.

Rozważmy dla przykładu funkcję $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$. Funkcja ma pochodną właściwą dla każdego $x \in (-1, 1)$. Natomiast w punktach $x = -1$ i $x = 1$ pochodna właściwa tej funkcji nie istnieje.

Definicja 6. *(pochodna niewłaściwa funkcji)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie w punkcie x_0. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochoną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \quad \text{albo} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

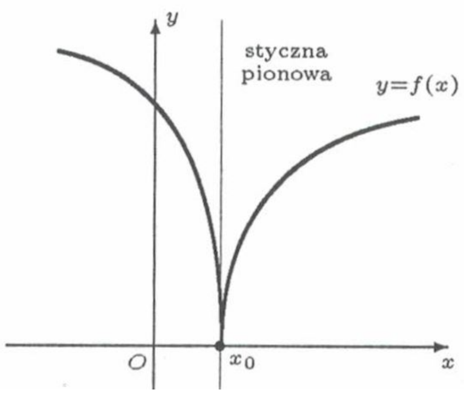
Zapisujemy to wtedy: $f'(x_0) = \infty$ lub $f'(x_0) = -\infty$. Na rysunku poniżej po lewej stronie mamy ilustrację przypadku, gdy $f'(x_0) = \infty$, a po prawej, gdy $f'(x_0) = -\infty$.



W podobny sposób definiuje się pochodne niewłaściwe jednostronne, które oznacza się następująco:

$$f'_+(x_0) = \infty, \quad f'_+(x_0) = -\infty, \quad f'_-(x_0) = \infty, \quad f'_-(x_0) = -\infty.$$

Na rysunku poniżej przedstawiona jest sytuacja, gdy $f'_-(x_0) = -\infty$ oraz $f'_+(x_0) = \infty$.



Przykład 11. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}, x_0 = 1$; b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}, x_0$.

3 Twierdzenia o pochodnej funkcji

Twierdzenie 3. *(o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji)*
Jeżeli funkcje f i g mają pochone właściwe w punkcie x_0, to

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
2. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
3. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$;
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Przykład 12. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}, x > 0$; b) $f(x) = \sin x \operatorname{ctg} x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{e^x + 4}, x \in \mathbb{R}$.

Odp. a) $4x^3 + 6x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, b) $-\sin x$, c) $\frac{e^x(4 + \cos x - \sin x) + 4\cos x}{(e^x + 4)^2}$.

Twierdzenie 4. *(o pochodnej funkcji złożonej)*
Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0,
2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Przykład 13. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = \sin^2 x$; b) $f(x) = (3x^2 + 1)^3$;

c) $f(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$.

Twierdzenie 5. *(o pochodnej funkcji odwrotnej)*

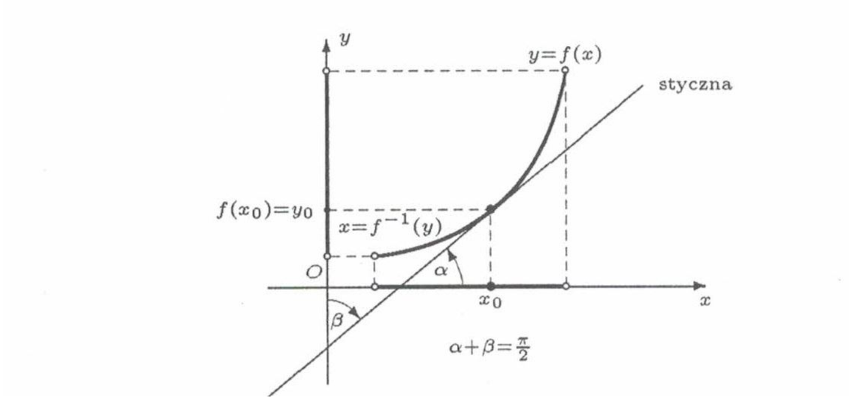
Jeżeli funkcja f spełnia następujące warunki:

1. jest ciągła na otoczeniu punktu x_0,
2. jest ściśle monotoniczna na otoczeniu punktu x_0,
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$,

to

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie} \quad y_0 = f(x_0).$$

Poniżej ilustracja twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej.



Przykład 14. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = \arccos x, -1 < x < 1$; b) $f(x) = \ln x, x > 0$.

a) Wiemy, że jeśli $f(x) = \cos x$, to $f'(x) = -\sin x$. Niech zatem $y = \cos x$. Stąd (z powyższego twierdzenia)

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = (\arccos y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x}.$$

Skoro $y = \cos x$, to $y^2 = \cos^2 x$. Z jedynki trygonometrycznej mamy $\sin^2 x = 1 - y^2$, czyli $|\sin x| = \sqrt{1-y^2}$. Pamiętamy, że funkcja odwrotna od funkcji $\cos x$ jest zdefiniowana dla $x \in [0, \pi]$, wtedy $\sin x \geq 0$. Zatem $|\sin x| = \sin x = \sqrt{1-y^2}$. Stąd mamy

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = (\arccos y)' = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}.$$

Zamieniając y na x, mamy

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Zauważmy jeszcze, że szukamy pochodnej funkcji $\arccos x$ dla $-1 < x < 1$, czyli $x \in (-1, 1)$ i w mianowniku nie mamy zera, czyli pochodna jest dobrze określona.

b) Wiemy, że jeśli $f(x) = e^x$, to $f'(x) = e^x$. Niech zatem $y = e^x$. Stąd

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Zamieniając y na x, mamy

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Zauważmy jeszcze, że $y = e^x$, czyli jest dodatni. Zatem po zamianie zmiennych mamy $x > 0$, co jest zgodne z dziedziną funkcji $\ln x$ i dziedziną pochonej tej funkcji.