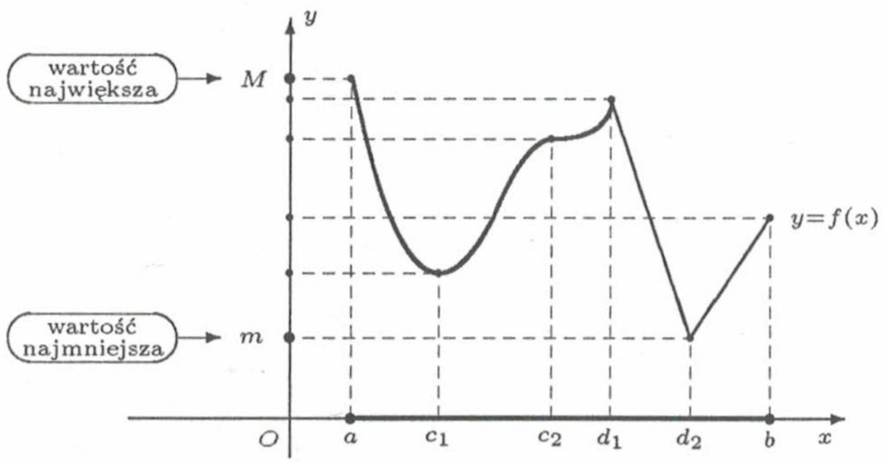
Analiza matematyczna 1
Wykład 14, wartości ekstremalne na przedziale domkniętym

1 Algorytm szukania wartości ekstremalnych funkcji na przedziale domkniętym

Neich funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ i niech ma pochodną właściwą lub niewłaściwą poza skończoną liczbą tego przedziału. Wartości najmniejszej i największej tej funkcji na tym przedziale szukamy postępując według następującego algorytmu:

1. znajdujemy punkty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zerowania się pochodnej funkcji f na przedziale (a, b) oraz punkty $d_1, d_2, \ldots, d_m$, w których pochodna właściwa tej funkcji nie istnieje;
2. obliczamy wartości funkcji f w punktach końcowych a i b, w punktach zerowania się pierwszej pochodnej $c_1, c_2, \ldots, c_n$ oraz w punktach bez pochodnej właściwej $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
3. spośród liczb $f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(d_1), f(d_2), \ldots, f(d_m)$ wybieramy najmniejszą i największą. Będą to odpowiednio wartości najmniejsza m i największa M funkcji f na przedziale $[a, b]$.



● **Przykład 1.** Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [-2, 2]$; **b)** $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{2}, \quad [0, 2]$;

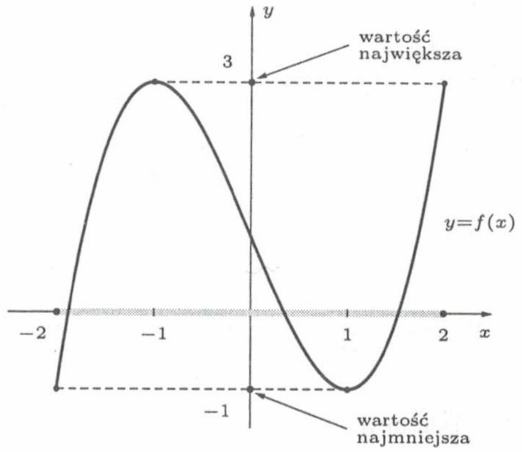
c) $g(x) = x^2 \ln x, \quad [1, e]$; **d)** $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|, \quad [-2, 3]$.

Rozwiązanie. Wartość największa (najmniejsza) funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, która ewentualnie nie ma pochodnej w skończonej liczbie punktów, jest osiągnięta w miejscu zerowania się pochodnej lub punkcie nieróżniczkowalności lub też na końcu przedziału.

a) Dla $f(x) = x^3 - 3x + 1$ mamy $f'(x) = 3x^2 - 3$. Zatem

$$\left(f'(x) = 0 \text{ i } x \in [-2, 2]\right) \iff \left(3x^2 - 3 = 0 \text{ i } x \in [-2, 2]\right) \iff x = -1 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$

Ponadto $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ oraz $f(-2) = -1$, $f(2) = 3$. Zatem funkcja f osiąga najmniejszą wartość $m = -1$ w punktach $x = -2$ i $x = 1$ oraz największą wartość $M = 3$ w punktach $x = -1$ i $x = 2$.



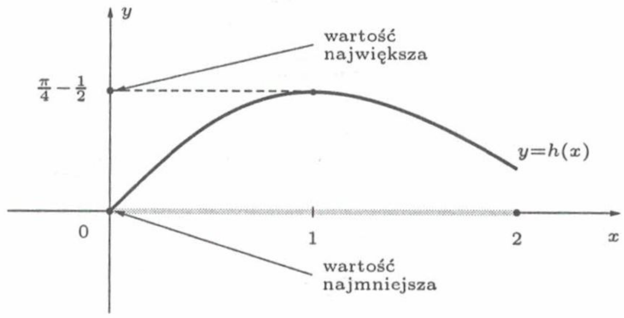
b) Dla $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{x}{2}$ mamy

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-x^2}{2\,(1+x^2)}.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej w przedziale $[0,2]$. Mamy

$$\big(h'(x) = 0 \text{ i } x \in [0,2]\big) \iff \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)} = 0 \text{ i } x \in [0,2]\right)$$
$$\iff \big(1 - x^2 = 0 \text{ i } x \in [0,2]\big) \iff x = 1.$$

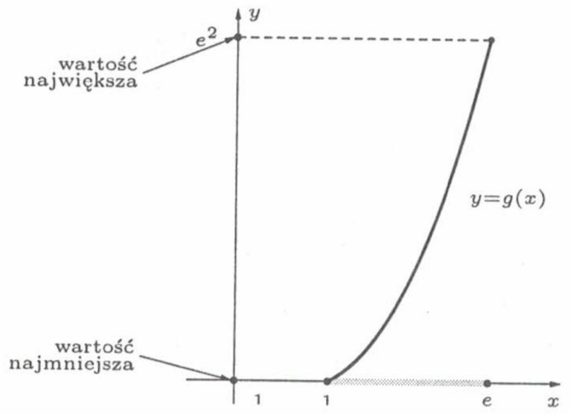
Porównując wartości funkcji h na końcach przedziału oraz w miejscu zerowania się pochodnej otrzymamy, że najmniejszą wartość $m = 0$ funkcja h przyjmuje w punkcie $x = 0$, a największą $M = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ w punkcie $x = 1$.



c) Dla $g(x) = x^2 \ln x$ mamy

$$g'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Zauważmy teraz, że $g'(x) > 0$ dla $[1,e]$. Zatem funkcja g jest rosnąca na przedziale $[1,e]$. Rozważana funkcja przyjmuje najmniejszą wartość $m = 0$ w punkcie 1 oraz największą wartość $M = e^2$ w punkcie e.



d) Dla funkcji $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|$ mamy

$$p'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x & \text{dla} \quad |x| > 1, \\ -4x^3 + 2x & \text{dla} \quad |x| < 1. \end{cases}$$

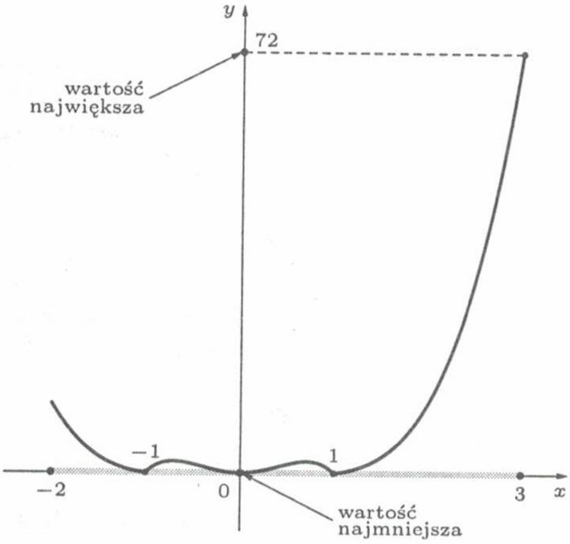
Łatwo można sprawdzić, że pochodne $p'(-1)$ oraz $p'(1)$ nie istnieją. Wyznaczymy teraz miejsca zerowe pochodnej należące do przedziału $[-2, 3]$. Mamy

$$p'(x) = 0 \Longleftrightarrow \pm 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Obliczymy teraz wartości funkcji w punktach zerowanie się pochodnej, w punktach, w których pochodna nie istnieje oraz na końcach przedziału. Mamy

$$p(0) = 0, \ p\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}, \ p(-1) = p(1) = 0, \ p(-2) = 12, \ p(3) = 72.$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji $p(x) = x^2 \left|x^2 - 1\right|$ jest $m = 0$, a największą $M = 72$.



Przykład 2. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

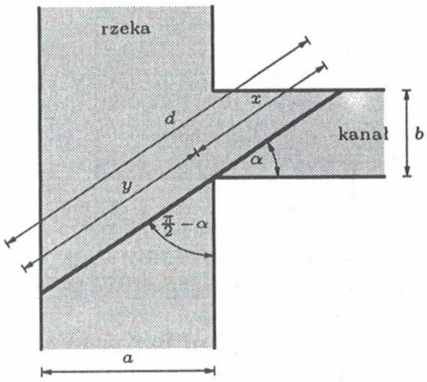
a) $f(x) = |x-1|\,,\ \ [0,3]$ b) $f(x) = x^3\,|x+2|\,,\ \ [-4,1]$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ \ [-1,2]$;

d) $f(x) = 1 + |\mathrm{arctg}(x-1)|\,,\ \ [-2,2]$; e) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x,\ \ [0, \frac{\pi}{2}]$;

f) $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|},\ \ [-1,2]$.

Przykład 3. Do rzeki o szerokości $a = 15\,\mathrm{m}$ dochodzi pod kątem prostym kanał o szerokości $b = 4\,\mathrm{m}$. Znaleźć długość największej kłody drewna, którą można spławić tym kanałem do rzeki.

Rozwiązanie. Oznaczenia stosowane w rozwiązaniu podajemy na rysunku.



Wyznaczymy długość kłody d, jako funkcję kąta α jej nachylenia do brzegu kanału. Mamy

$$x = \frac{b}{\sin\alpha},\ y = \frac{a}{\cos\alpha},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Zatem

$$d = d(\alpha) = x + y = \frac{b}{\sin\alpha} + \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Szukamy wartości najmniejszej funkcji d na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (dlaczego najmniejszej?).

I. Warunek konieczny istnienia ekstremum. Mamy

$$d'(\alpha) = \frac{-b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Stąd

$$d'(\alpha)=0 \iff \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \iff \operatorname{tg}^3\alpha=\frac{b}{a} \iff \alpha=\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

II. Warunek wystarczający istnienia ekstremum. Badamy znak pochodnej funkcji d w sąsiedztwie punktu α_0. Mamy

$$d'(\alpha)=\frac{-b\cos^3\alpha+a\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{a\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\alpha-\frac{b}{a}\right).$$

Ze wzoru określającego pochodną wynika, że

$$d'(\alpha)>0 \iff \operatorname{tg}\alpha>\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \text{ oraz } d'(\alpha)<0 \iff 0<\operatorname{tg}\alpha<\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

To oznacza, że funkcja d ma w punkcie $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ minimum lokalne właściwe. Ponieważ funkcja d jest malejąca na przedziale $\left(0,\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$ oraz rosnąca na przedziale $\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}},\frac{\pi}{2}\right)$, więc funkcja d przyjmuje w punkcie $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ wartość najmniejszą. Obliczymy teraz tę wartość. Z trygonometrii wiadomo, że dla $0<x<\frac{\pi}{2}$ mamy $\sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$ oraz $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$. Zatem

$$d(\alpha_0)=\frac{b}{\sin\alpha_0}+\frac{a}{\cos\alpha_0}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_0}\left(\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha_0}+a\right).$$

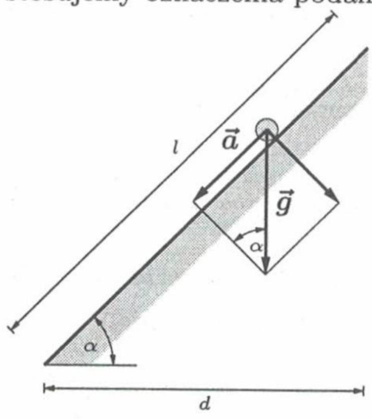
Stąd

$$d_{\min}=d\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}\left(\frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}+a\right)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Przyjmując teraz $a=15$ m i $b=4$ m otrzymamy $d_{\min}\approx 25.22$ m. Największa kłoda, którą można spławiać tym kanałem ma długość około 25.22 m.

- **Przykład 4.** Pod jakim kątem powinien być nachylony płaski dach przykrywający dom o ustalonej szerokości, aby krople deszczu spływały po nim najszybciej?

Rozwiązanie. W rozwiązanie stosujemy oznaczenia podane na rysunku.

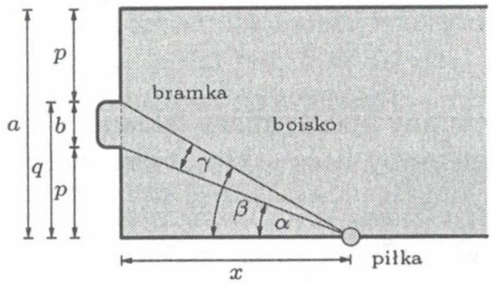


Ruch kropli deszczu po dachu odbywa się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a oraz z prędkością początkową $v_0 = 0$. Czas spływania kropli deszczu po dachu długości l wyraża się wzorem $t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$. Ponadto $l = \frac{d}{\cos\alpha}$ oraz $a = g\sin\alpha$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Zatem

$$t(\alpha) = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\alpha\sin\alpha}} = 2\sqrt{\frac{d}{g\sin 2\alpha}},$$

gdzie $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Z postaci funkcji t widać, że czas ruchu kropli będzie najmniejszy, gdy mianownik, tj. $\sin 2\alpha$ będzie miał nawiększą wartość na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że funkcja $\sin 2\alpha$ przyjmuje największą wartość na tym przedziale dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Zatem krople deszczu będą spływały najszybciej po dachu, gdy będzie on nachylony pod kątem $\frac{\pi}{4}$.

Przykład 5. W którym miejscu na linii bocznej boiska trzeba ustawić piłkę, aby szansa trafienia nią do bramki była największa? Przyjąć, że szansa trafienia jest największa, gdy kąt widzenia bramki jest największy. Szerokość boiska wynosi $a = 64\,\mathrm{m}$, a szerokość bramki $b = 7\,\mathrm{m}$.



Rozwiązanie. W rozwiązaniu przyjmujemy oznaczenia podane na rysunku. Mamy

$$\gamma = \beta - \alpha \qquad \text{oraz} \qquad p = \frac{a-b}{2},\ q = p + b = \frac{a+b}{2}.$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{q}{x} = \frac{a+b}{2x}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{x} = \frac{a-b}{2x}.$$

Stąd

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a+b}{2x} - \frac{a-b}{2x}}{1 + \frac{a-b}{2x}\cdot\frac{a+b}{2x}} = \frac{4xb}{4x^2 + a^2 - b^2},$$

gdzie $x > 0$. Zauważmy teraz, że kąt γ będzie największy, gdy jego tangens będzie największy. Wystarczy zatem znaleźć wartość największą funkcji

$$f(x) = \frac{4bx}{4x^2 + a^2 - b^2}$$

na przedziale $(0,\infty)$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja f może mieć ekstrema (funkcja f ma wszystkie pochodne na przedziale $(0,\infty)$). Mamy

$$f'(x) = \frac{4b\left(4x^2+a^2-b^2\right)-4bx(8x)}{\left(4x^2+a^2-b^2\right)^2} = \frac{4b\left(a^2-b^2\right)-16bx^2}{\left(4x^2+a^2-b^2\right)^2}.$$

Stąd

$$f'(x)=0 \iff 4b\left(a^2-b^2\right)-16bx^2=0 \iff x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$f'(x)>0 \text{ dla } 0<x<\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \text{ oraz } f'(x)<0 \text{ dla } \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}<x<\infty.$$

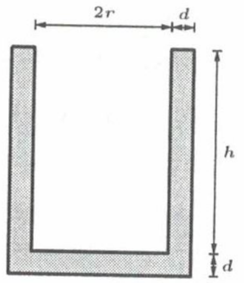
To oznacza, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $\left(0,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)$ i malejąca na przedziale $\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2},\infty\right)$. Z rozważań tych wynika, że funkcja f osiąga w punkcie $x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ maksimum lokalne właściwe równe $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ i jest to jednocześnie wartość największa tej funkcji na przedziale $(0,\infty)$. Przyjmując teraz $a=64$ m i $b=7$ m otrzymamy, że piłkę należy ustawić w odległości

$$x_{\max}=\frac{\sqrt{4047}}{2}\approx 31.8\,\mathrm{m}$$

od linii bramkowej boiska.

Przykład 6. Jakie powinny być wymiary szklanki o grubości ścianek $d=2\,\mathrm{mm}$ i pojemności $V=0.2\ \mathrm{dm}^3$, aby ilość szkła potrzebnego do jej wytworzenia była najmniejsza?

Rozwiązanie. Oznaczenia w rozwiązaniu przyjmujemy jak na rysunku.



Ponadto niech W oznacza objętość szkła potrzebnego do wytworzenia szklanki. Wtedy $W=\pi(r+d)^2(h+d)-V$. Przyjmując teraz $r>0$ jako zmienną niezależną oraz korzystając z zależności $V=\pi r^2 h$ otrzymamy

$$W(r)=\pi(r+d)^2\left(\frac{V}{\pi r^2}+d\right)-V,$$

gdzie $r>0$. Z warunku koniecznego szukamy punktów, w których funkcja W może mieć ekstrema (funkcja W ma pochodną na przedziale $(0,\infty)$). Mamy

$$W'(r)=2\pi(r+d)\left(\frac{V}{\pi r^2}+d\right)+\pi(r+d)^2\left(\frac{-2V}{\pi r^3}\right)=\frac{2d(r+d)\left(\pi r^3-V\right)}{r^3}.$$

Stąd

$$W'(r) = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

(pierwiastek $r = -d$ odrzucamy, bo r ma być dodatnie). Zauważmy jeszcze, że

$$W'(r) > 0 \text{ dla } r > \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ oraz } W'(r) < 0 \text{ dla } 0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

To oznacza, że funkcja W jest rosnąca na przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}, \infty\right)$ oraz malejąca na przedziale $\left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$. Z rozważań tych wynika, że funkcja W osiąga w punkcie $r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ minimum lokalne właściwe i jest to jednocześnie punkt, w którym funkcja W osiąga najmniejszą wartość na przedziale $(0, \infty)$. Wielkość $h_{\min}$ odpowiadająca wartości $r_{\min}$ równa się $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Przyjmując teraz $V = 0.2\,\mathrm{dm}^3 = 200000\,\mathrm{mm}^3$ otrzymamy

$$r_{\min} = 10\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 40 \text{ mm}, \quad h_{\min} = 10\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 40 \text{ mm}.$$