Lista 1

Liczby zespolone

Zadanie 1 *Wykonaj działania i sprowadź do postaci algebraicznej:*

$$2+3i+\sqrt{2}+5i,\ (1+3i)\cdot(\sqrt{3}+7i),\ (2+5i)\cdot\frac{2+i}{1+2i}.$$

Zadanie 2 *Porównując części rzeczywiste i urojone, rozwiąż równanie:*

$$\bar{z}=(3+i)z,\ \ z^2+8=0,\ \ (2_3i)\bar{z}=(4-2i)z,\ \ z^3=1.$$

.

Zadanie 3 *Narysuj następujace zbiory:*

$$\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1+3i|<1\},\ \ \{z\in\mathbb{C}:\ |z+2-4i|\geq|z+3-i|\},\ \ \{z\in\mathbb{C}:\ |i\bar{z}+2-i|\leq|z+7-i|\},$$

$$\left\{z\in\mathbb{C}:\ \left|\frac{z+i}{z+2-4i}\right|<1\right\},\ \ \{z\in\mathbb{C}:\ |z-i|\leq|z+2-i|\leq 5\}.$$

Zadanie 4 *Stosując wzór de'Moivre'a sprowadź do postaci algebraicznej dane wyrażenie:*

$$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7,\ (-2+\sqrt{12})^8,\ \ (-1+\sqrt{3}i)^{12},\ \ \left(\frac{i-\sqrt{3}}{1+i}\right)^{33}.$$

.

Zadanie 5 *Wyznacz i narysuj zbiory pierwiastków z podanych liczb:*

$$\sqrt[4]{-16},\ \ \sqrt[3]{27i},\ \ \sqrt[4]{(2-i)^8},\ \ \sqrt[6]{8}.$$

Zadanie 6 *Wyznacz rozwiązania podanych równań w zbiorze liczb zespolonych:*

$$2z^2-10z+1=0,\ \ z^2+3iz-4=0,\ \ z^4+3z^2-1=0,\ \ z^6=(1-i)^{12},\ \ (z+i)^4=(z-i)^4.$$

Zadanie 7 *Stosując wzór de Moivre'a zapisz podane niżej wyrażenie za pomocą* $\sin\alpha$ *oraz* $\cos\alpha$*:*

$$\sin(3\alpha),\ \ \cos(3\alpha),\ \ \sin(n\alpha),\ \ \cos(n\alpha).$$

dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej.

Zadanie 8 *Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraź* $\cos(4t)$ *poprzez* $\cos(t)$*. Wywnioskuj, że:*

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

Zadanie 9 *Wyznacz następujące pierwiastki:*

$$\sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{8(\sqrt{3}-i)}, \quad \sqrt[3]{i}, \quad \sqrt{1+i}.$$

Zadanie 10 *Dla podanych liczb zespolonych, wyznacz moduły i argumenty główne:*

$$\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}, \quad \frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{(1-i)^8}.$$

Zadanie 11 *Wyznacz zbiór*

$$\{z \in \mathbb{C}: \ z^5 = 1 \wedge z^7 = 1\}.$$

Zadanie 12 *Oblicz sumę:*

$$1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{10}.$$

Zadanie 13 *Dla liczb zespolonych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ udowodnij, że:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3. $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$.

Zadanie 14 *Pokaż, że jeśli $|z| = 1$, to $z^{-1} = \overline{z}$.*

Zadanie 15 *Pokaż, że jeśli $|z| = 1$, to $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.*

Zadanie 16 *Wyznacz następujące zbiory:*

1. $\{z \in \mathbb{C}: \ Im(z^4) < 0\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C}: \ Re(z^3) > 0\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C}: \ z^2 \in \mathbb{R}\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C}: \ Re(z) \cdot Im(z) > 0\}$.

Zadanie 17 *Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi równość:*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Zadanie 18 *Załóżmy, że $|z| = 1$ i $z \notin \mathbb{R}$. Udowodnij, że liczba $\frac{z-1}{z+1}$ jest czysto urojona.*

Zadanie 19 ** Na wszystkich bokach równoległoboku zbudowano zewnętrzne kwadraty. Udowodnij, że środki tych kwadratów tworzą kwadrat.*

Robert Rałowski