Lista 2

Wielomiany

Zadanie 1 *Wyznacz pierwiastki całkowite następujących wielomianów:*

$$x^3 + 3x - 4,\quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12,\quad x^4 - x^2 - 1.$$

Zadanie 2 *Wyznacz pierwiastki wymierne następujących wielomianów:*

$$12x^3 + 8x^2 - 3x - 2,\quad 18x^3 - 9x^2 - 2x + 1,\quad 6x^4 + 7x^2 + 2.$$

.

Zadanie 3 *Wyznacz pierwiastki rzeczywiste lub zespolone oraz krotności pierwiastków dla następujących wielomianów:*

$$(x-1)(x+2)^3,\quad (2x+5)^3(1-3x)^4,\quad (x^2-1)(x^2+4)^3(x^2+1)^3.$$

Zadanie 4 *Nie wykonując dzielenia wielomianów, wyznacz reszty z dzielenia wielomianu f przez g:*

1. $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3x^4 + x^3 - x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$,
2. $f(x) = x^{33} + 4x^{11} - 12x^3 + 2x - 1$, $x^3 - x^2 + x - 1$.
3. $f(x) = x^{99} - 2x^{98} + 4x^{97}$, $g(x) = x^4 - 16$,
4.* $f(x) = x^{444} + x^{111} + x - 1$, $g(x) = (x^2+1)^2$.

Zadanie 5 *Wiedząc, że liczba $1+2i$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$, wyznacz pozostałe pierwiaski zespolone tego wielomianu.*

Zadanie 6 *Wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu f przez $x-1$ jest równa 3 a reszta dzielenia wielomianu f przez $x-4$ jest równa 5, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu f przez $(x-1)(x-4)$.*

Zadanie 7 *Wyznacz rozkład podanych wielomianów na wielomiany nierozkładalne o współczynnikach rzeczywiestych:*

$$x^3 - 27,\quad x^4 + 16,\quad x^4 + x^2 + 4,\quad x^6 + 1.$$

Zadanie 8 *Rozłóż podane funkcje wymierne na rzeczywiste ułamki proste:*

$$\frac{2x+5}{x^2-x-2},\quad \frac{x+9}{x(x+3)^3},\quad \frac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4},\quad \frac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}.$$

Zadanie 9 *Udowodnij, że jeżeli* $a \neq b$*, to reszta dzielenia wielomianu* f *przez wielomian* $(x-a)(x-b)$ *jest równa:*

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b-a}.$$

Zadanie 10 * *Wykaż, że reszta z dzielenia wielomianu* f *przez* $(x-a)^2$ *wynosi:*

$$f'(a)(x-a) + f(a),$$

gdzie $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$ *o ile* $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

Zadanie 11 *Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby* $n \in \mathbb{N}$*, wielomian*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Zadanie 12 *Dla jakich liczb całkowitych* p *wielomian* $x^{13} + x + 90$ *jest podzielny przez* $x^2 - x - p$.

Zadanie 13 *Miech* $\epsilon_{n,k} = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$*, wykaż, że*

$$x^{n-1} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \epsilon_{n,k})$$

Zadanie 14 * *Niech* $f(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ *i* $z_0 \in \mathbb{C}$ *będzie pierwiastkiem* f*. Udowodnij, że*

1. $|z_0| \leq \max\left\{1, \sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}$,
2. $|z_0| < 1 + \max\left\{|a_k| : k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$.

Zadanie 15 ** *Otoczką wypukłą skończonego zbioru* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ *nazywamy zbiór*

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k : \ \forall k \in \{1, \ldots n\} t_k \in [0,1] \subseteq \mathbb{R} \wedge \sum_{k=1}^{n} t_k = 1\right\}.$$

Niech $f \in \mathbb{C}[z]$ *i* $A = \{z \in \mathbb{C} : \ f(z) = 0\}$*. Udowodnij, że każdy pierwiastek wielomianu* f' *jest elementem otoczki wypukłej zbioru* A*. Tutaj* f' *jest pochodną wielomianu* f *i jest zdefiniowany tak jak w* Zadaniu $10^\star$.

Robert Rałowski