Analiza matematyczna 1
Wykład 12, Pochodne funkcji cd. (własności cd.)

1 Twierdzenia o funkcjach z pochodnymi

● **Przykład 1 .** Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić nierówności:

a) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$; **b)** $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$.

Rozwiązanie.

a) Niech $f(x) = \ln(x+1)$, $[a, b] = [0, x]$, gdzie $x > 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na $[a, b]$. Wtedy mamy

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \Big[\ln(1+x)\Big]'_{x=c}, \text{ gdzie } 0 < c < x.$$

Stąd $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$, gdzie $0 < c < x$. Zatem

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < \frac{x}{1+0} = x.$$

b) Niech $f(x) = e^x$, $[a, b] = [0, x]$, gdzie $x > 0$. Łatwo sprawdzić, że funkcja f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na $[a, b]$. Wtedy mamy

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = \Big[e^x\Big]'_{x=c}, \text{ gdzie } 0 < c < x.$$

Stąd $e^x - 1 = xe^c$, gdzie $0 < c < x$. Zatem $e^x - 1 > xe^0 = x$, czyli $e^x > 1 + x$.

Twierdzenie 1. *(warunki wystarczające monotoniczności funkcji)*
Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek:

1. $f'(x) = 0$, to jest stała na I;
2. $f'(x) > 0$, to jest rosnąca na I;
3. $f'(x) \geq 0$, to jest niemalejąca na I;
4. $f'(x) < 0$, to jest malejąca na I;
5. $f'(x) \leq 0$, to jest nierosnąca na I.

Jeżeli $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in I$, ale równość $f'(x) = 0$ zachodzi tylko na skończonej liczbie punktów tego przedziału, to funkcja f jest rosnąca na I. Analogicznie jest dla funkcji nierosnącej.

● **Przykład 2** . Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

a) $k(x) = 4x^3 - 12x^2 + 5$; **b)** $l(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3}$; **c)** $m(x) = \dfrac{5\sin x}{2 + \cos x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$; **e)** $g(x) = x \ln x$; **f)** $h(x) = (x - 3)\sqrt{x}$;

g) $p(x) = x + \sin x$; **h)** $q(x) = \dfrac{x^3}{x - 2}$; **i)** $r(x) = xe^{-x^2}$;

j) $u(x) = \sqrt{9x - x^3}$; **k)** $v(x) = x - \arcsin \dfrac{x}{2}$; **l)** $w(x) = 4x + \operatorname{ctg} x$.

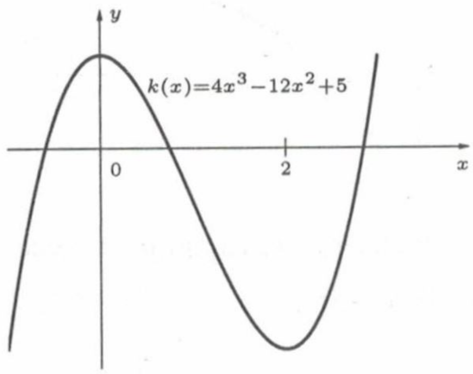
Rozwiązanie. Przedziały monotoniczności funkcji ustalamy badając znaki pochodnej.
a) Dziedziną funkcji k oraz jej pochodnej jest $\mathbb{R}$. Mamy $k'(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$. Szukamy przedziałów, na których pochodna jest dodatnia. Mamy

$$k'(x) > 0 \Longleftrightarrow 12x(x - 2) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \text{ lub } x \in (2, \infty).$$

Zatem funkcja k jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. Podobnie

$$k'(x) < 0 \iff x \in (0, 2).$$

Stąd wynika, że funkcja k jest malejąca na przedziale $(0, 2)$.



b) Dziedziną funkcji l oraz jej pochodnej jest $\mathbb{R}$. Mamy

$$l'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot 2x}{\left(x^2 + 3\right)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{\left(x^2 + 3\right)^2} = -\frac{(x + 1)(x - 3)}{\left(x^2 + 3\right)^2}.$$

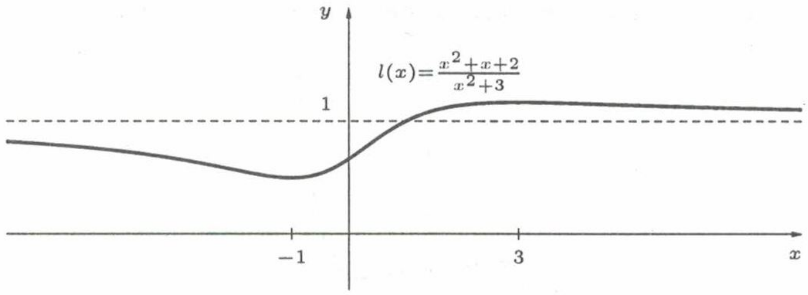
Zbadamy, na których przedziałach pochodna jest dodatnia. Mamy

$$l'(x) > 0 \iff -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} > 0 \iff (x+1)(x-3) < 0 \iff x \in (-1,3).$$

Zatem funkcja l jest rosnąca na przedziale $(-1,3)$. Podobnie

$$\begin{aligned} l'(x) < 0 &\iff -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2} < 0 \\ &\iff (x+1)(x-3) > 0 \iff x \in (-\infty,-1) \text{ lub } x \in (3,\infty). \end{aligned}$$

Stąd funkcja l jest malejąca na przedziałach $(-\infty,-1)$, $(3,\infty)$.



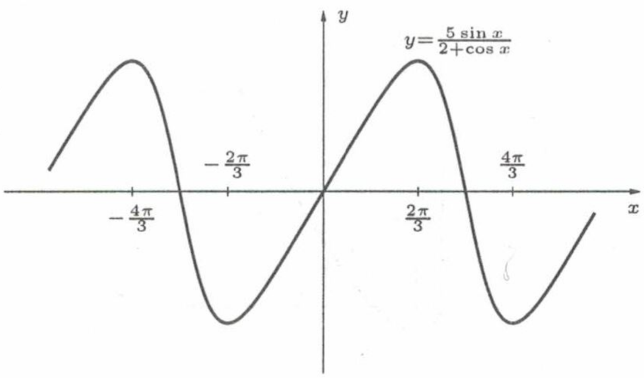
c) Dla funkcji $m(x) = \dfrac{5\sin x}{2+\cos x}$ mamy $m'(x) = \dfrac{5(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^2}$ oraz $D_m = D_{m'} = \mathbb{R}$. Ponieważ funkcja m jest okresowa ($T = 2\pi$), więc jej monotoniczność wystarczy ustalić na dowolnym przedziale o długości 2π, np. $[0, 2\pi)$. Zbadamy, na których przedziałach pochodna jest dodatnia. Mamy

$$m'(x) > 0 \iff \frac{5(2\cos x+1)}{(2+\cos x)^2} > 0 \iff \cos > -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ lub } x \in \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right).$$

Zatem funkcja m jest rosnąca na przedziałach $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$. Podobnie

$$m'(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Rozpatrując funkcję okresową m na $\mathbb{R}$ widzimy, że jest ona rosnąca na przedziałach postaci $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz malejąca na przedziałach postaci $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



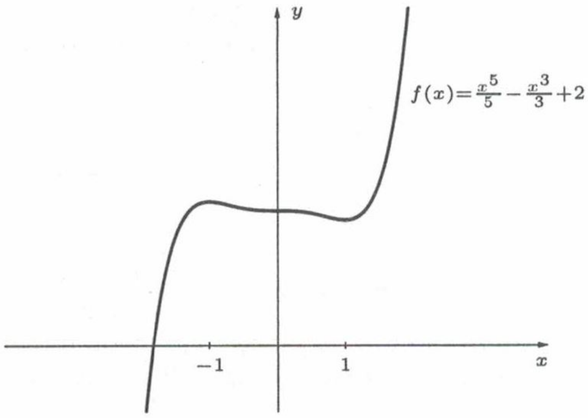
d) Mamy $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$, stąd $f'(x) = x^4 - x^2$ oraz $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Badamy na jakich przedziałach pochodna jest dodatnia. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^4 - x^2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2(x-1)(x+1) > 0 \Longleftrightarrow -\infty < x < -1 \text{ lub } 1 < x < \infty. \end{aligned}$$

Funkcja f jest zatem rosnąca na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Podobnie,

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 0 \text{ lub } 0 < x < 1.$$

Ponieważ w punkcie $x_0 = 0$ „sklejają" się dwa przedziały, w których pochodna jest ujemna, a funkcja jest ciągła, więc jest malejąca na całym przedziale $(-1, 1)$.



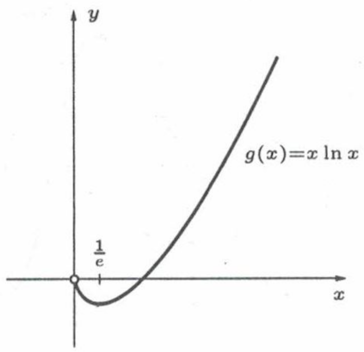
e) Dla funkcji $g(x) = x \ln x$ mamy $g'(x) = \ln x + 1$ oraz $D_g = D_{g'} = (0, \infty)$. Szukamy przedziałów, na których pochodna jest dodatnia. Mamy

$$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} < x < \infty.$$

Funkcja g jest zatem rosnąca na przedziale $\left(\dfrac{1}{e}, \infty\right)$. Podobnie,

$$g'(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}.$$

Funkcja g jest zatem malejąca na przedziale $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$.



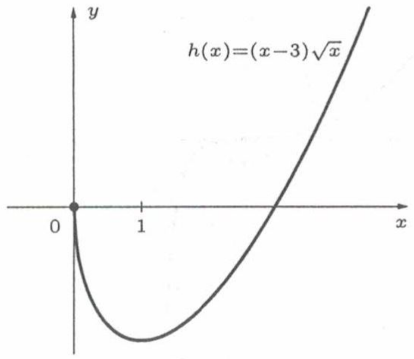
f) Dla funkcji $h(x) = (x-3)\sqrt{x}$ mamy $h'(x) = \sqrt{x} + (x-3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ oraz $D_h = [0,\infty)$, $D_{h'} = (0,\infty)$. Szukamy przedziałów, na których pochodna jest dodatnia. Mamy

$$h'(x) > 0 \iff \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} > 0 \iff 3(x-1) > 0 \iff 1 < x < \infty.$$

Zatem funkcja h jest rosnąca na przedziale $(1,\infty)$. Podobnie,

$$h'(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

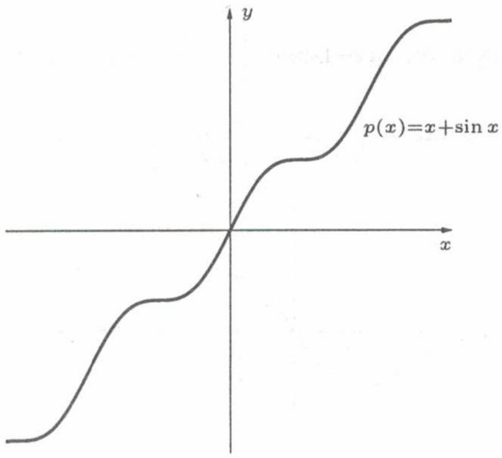
Zatem funkcja h jest malejąca na przedziale $(0,1)$.



g) Dla funkcji $p(x) = x + \sin x$ mamy $p'(x) = 1 + \cos x$ oraz $D_p = D_{p'} = \mathbb{R}$. Szukamy przedziałów, na których pochodna jest dodatnia. Mamy

$$p'(x) > 0 \iff 1 + \cos x > 0 \iff x \neq \pi + 2n\pi, \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ w punktach postaci $x = \pi + 2n\pi$ „sklejają" się przedziały, na których pochodna jest dodatnia, a funkcja jest tam ciągła, więc jest rosnąca na całej prostej.



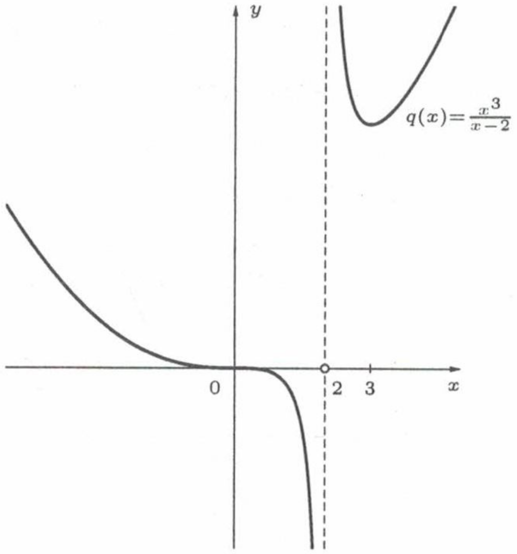
h) Dziedziną funkcji q jest $D_q = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Mamy

$$q'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2},$$

stąd $D_{q'} = D_q$. Badamy, na których przedziałach pochodna jest dodatnia. Dla $x \in D_q$ mamy

$$q'(x) > 0 \iff \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} > 0 \iff x^2(x-3) > 0 \iff 3 < x < \infty.$$

Zatem funkcja q jest rosnąca na przedziale $(3,\infty)$. Ponieważ w punkcie $x_0 = 0$ „sklejają" się przedziały, na których pochodna jest ujemna, a funkcja jest tam ciągła, więc jest malejąca na przedziałach $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$.



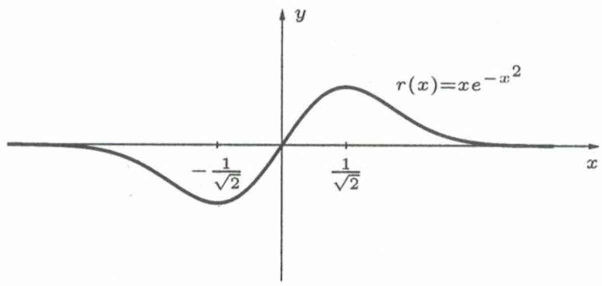
i) Dziedziną funkcji q i jej pochodnej jest $\mathbb{R}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$r'(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2}.$$

Badamy, na których przedziałach pochodna jest dodatnia. Mamy

$$r'(x) > 0 \iff \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2} > 0 \iff 1 - 2x^2 > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem funkcja r jest rosnąca na przedziale $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraz malejąca na pozostałej części dziedziny tj. na przedziałach $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(, \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.



j) Wyznaczymy najpierw dziedzinę funkcji u. Mamy

$$9x - x^3 \geqslant 0 \iff x(3-x)(3+x) \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, -3] \cup [0, 3].$$

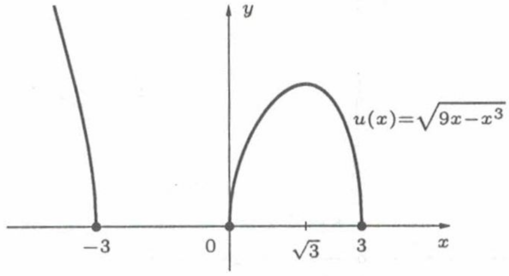
Zatem zbiór $D_u = (-\infty, -3] \cup [0, 3]$ jest dziedziną badanej funkcji. Obliczymy teraz jej pochodną. Mamy

$$u'(x) = \frac{9 - 3x^2}{2\sqrt{9x - x^3}}.$$

Dziedziną pochodnej jest zbiór $D_{u'} = (-\infty, -3) \cup (0, 3)$. Badamy obecnie, gdzie na zbiorze $D_{u'}$ pochodna jest dodatnia. Mamy

$$u' > 0 \iff \frac{9 - 3x^2}{2\sqrt{9x - x^3}} > 0 \iff 9 - 3x^2 > 0 \iff x \in \left(0, \sqrt{3}\right).$$

Zatem funkcja u jest rosnąca na przedziale $\left(0, \sqrt{3}\right)$. Podobnie możemy pokazać, że funkcja u jest malejąca na przedziałach $(-\infty, -3)$, $\left(\sqrt{3}, 3\right)$.



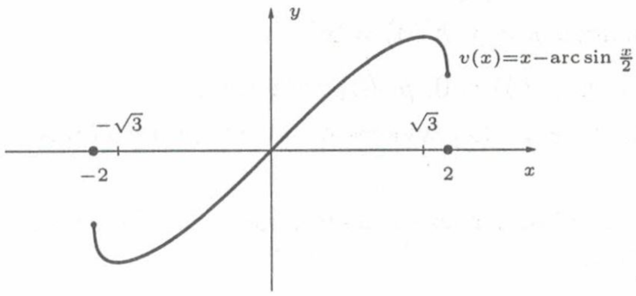
k) Dziedziną funkcji v jest przedział $[-2, 2]$. Pochodna tej funkcji ma postać

$$v'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

i dziedzinę $(-2, 2)$. Badamy, gdzie na przedziale $(-2, 2)$ pochodna jest dodatnia. Mamy

$$v'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} > 0 \iff \sqrt{4 - x^2} > 1 \iff x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right).$$

Zatem funkcja v jest rosnąca na przedziale $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. Postępując analogicznie otrzymamy, że funkcja v jest malejąca na przedziałach $\left(-2, -\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}, 2\right)$.



l) Dziedziną funkcji w jest zbiór

$$\ldots \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup \ldots .$$

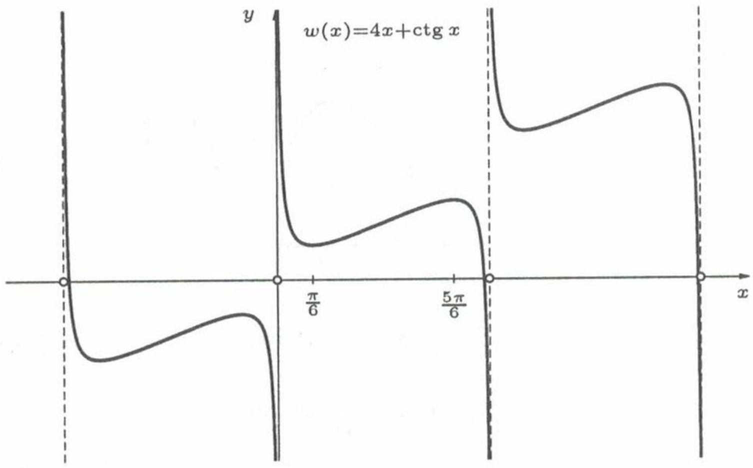
Pochodna tej funkcji ma postać

$$w'(x) = 4 - \frac{1}{\sin^2 x}$$

oraz tę samą dziedzinę co funkcja. Ponieważ pochodna jest funkcją okresową o okresie π, więc badanie monotoniczności funkcji w możemy ograniczyć do przedziału $(0, \pi)$. Zbadamy, gdzie w przedziale $(0, \pi)$ pochodna jest dodatnia. Mamy

$$w'(x) > 0 \iff 4 - \frac{1}{\sin^2 x} > 0 \iff \sin^2 x > \frac{1}{4} \iff \sin x > \frac{1}{2} \iff x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right).$$

Zatem funkcja w jest rosnąca na przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Rozumując podobnie otrzymamy, że funkcja ta jest malejąca na przedziałach $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$. Ostatecznie funkcja w jest rosnąca na przedziałach postaci $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$ oraz malejąca na przedziałach postaci $\left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + k\pi, \pi(k+1)\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Fakt 1. *(o tożsamościach)*

Niech funkcje f i g będą określone na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0 \in I$. Wtedy, jeżeli spełnione są warunki:

1. $f(x_0) = g(x_0)$,
2. $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in I$,

to $f \equiv g$ na I.

Przykład 3. Korzystając z powyższego faktu, uzasadnić podane tożsamości:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$;

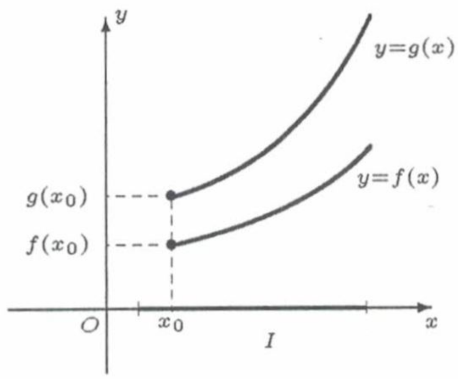
b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ dla każdego $x \in (-1, 1)$.

Fakt 2. *(o nierównościach)*

Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0 \in I$. Wtedy, jeżeli spełnione są warunki:

1. $f(x_0) \leq g(x_0)$,
2. $f'(x) \leq g'(x)$ dla każdego $x > x_0$,

to $f \leq g$ dla każdego $x > x_0$.



Przykład 4. Korzystając z powyższego faktu, uzasadnić podane nierówności:

a) $\sin x < x$ dla każdego $x > 0$;

b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. *(Cauchy'ego)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki

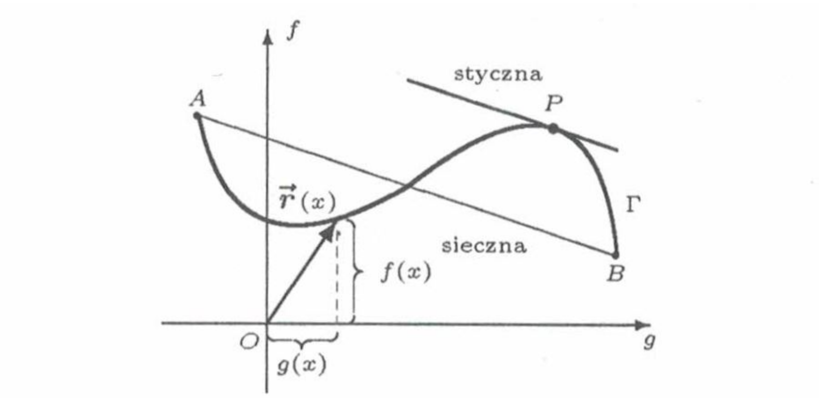
1. są ciągła na $[a, b]$,
2. mają pochodne właściwą lub niewłaściwą na (a, b),
3. $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$,

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Cauchy'ego

Niech $\vec{r}(x) = (g(x), f(x))$, gdzie $x \in [a, b]$, będzie przedstawieniem parametrycznym krzywej Γ na płaszczyźnie. Wtedy istnieje punkt $P \in \Gamma$, w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej łączącej jego końce A i B tej krzywej, co przedstawia poniższy rysunek.



2 Twierdzenia o granicach nieoznaczonych

Twierdzenie 3. *(Reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,
2. istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ właściwa lub niewłaściwa,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

UWAGA! Z tego, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nie wynika, że granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nie istnieje. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 5. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Twierdzenie 4. *(Reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$,
2. istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ właściwa lub niewłaściwa,

to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Przykład 6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x^3-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$.

Przykład 7. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+1}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{\ln x + x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$.

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności:

- Nieoznaczoność typu $0\cdot\infty$

  przez działanie $\boxed{f\cdot g = \dfrac{f}{1/g}}$ przechodzi na nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$

- Nieoznaczoność typu $\infty-\infty$

  przez działanie $\boxed{f-g = \dfrac{1/f-1/g}{1/(f\cdot g)}}$ przechodzi na nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$

- Nieoznaczoność typu $1^\infty, \infty^0, 0^0$

  przez działanie $\boxed{f^g = e^{g\ln f}}$ przechodzi na nieoznaczoność typu $0\cdot\infty$.

Przykład 8. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$; c) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\ln(x-1)}$;

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - x^2)$; e) $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x} \right)$.

Przykład 9. Czy w poniższych przykładach można zastosować regułę de L'Hospitala? Obliczyć te granice.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin^2 x}{x + \sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$.