Analiza matematyczna 1
Wykład 7, Granice funkcji cd.

1 Definicja Cauchy'ego granicy funkcji

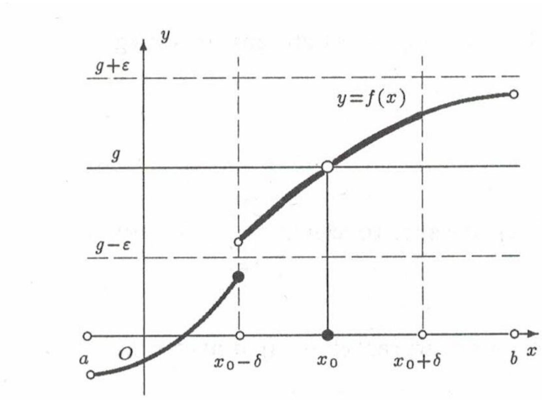
Definicja 1. *(Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn. w zbiorze $S(x_0) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0) \quad [(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - g| < \epsilon)]\,,$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f różnią się dowolnie mało od granicy g, jeśli tylko jej argumenty leżą dostatecznie blisko punktu x_0 i są od niego różne.



Analogicznie można przedstawić definicję Cauchy'ego granicy jednostronnej funkcji w punkcie (bierzemy wtedy tylko otoczenie odpowiednio prawostronne lub lewostronne punktu x_0).
Przykład 1. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie uzasadnić

$$\lim_{x \to 2} (5 - 3x) = -1.$$

Mamy pokazać, że

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(2) \quad [(|x - 2| < \delta) \Rightarrow (|5 - 3x - (-1)| < \epsilon)]\,.$$

Niech zatem ϵ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zauważmy, że

$$|f(x) - g| = |5 - 3x - (-1)| = 3\,|2 - x|\,.$$

Stąd wynika, że δ jest dowolną liczbą spełniającą warunek: $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{3}$, ponieważ zachodzi wtedy implikacja

$$(|x - 2| < \delta) \Rightarrow \left(|5 - 3x - (-1)| = 3\,|x - 2| < 3 \cdot \delta \leq 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\right).$$

Definicja 2. *(Cauchy'ego granicy funkcji w nieskończoności)*

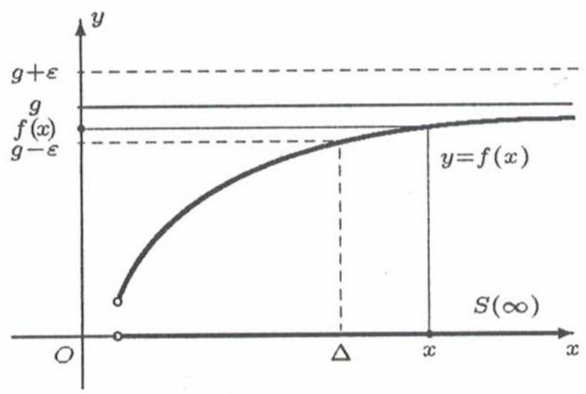
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(\infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w ∞, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \Delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(\infty) \quad [(x > \Delta) \Rightarrow (|f(x) - g| < \epsilon)]\,,$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f różnią się dowolnie mało od granicy g, jeśli tylko jej argumenty są dostatecznie duże.



Definicja 3. *(Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)*

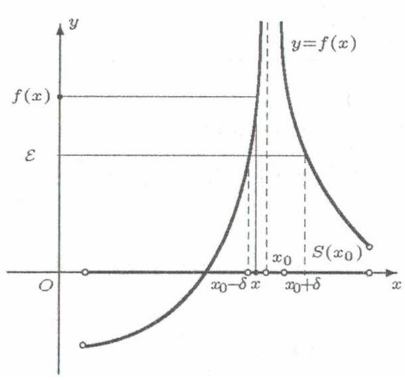
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, \mathcal{E} > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(x_0) \quad [(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (f(x) > \mathcal{E})]\,,$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f są dowolnie duże, jeśli tylko jej argumenty leżą dostatecznie blisko punktu x_0 i są od niego różne.



Definicja 4. *(Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności)*

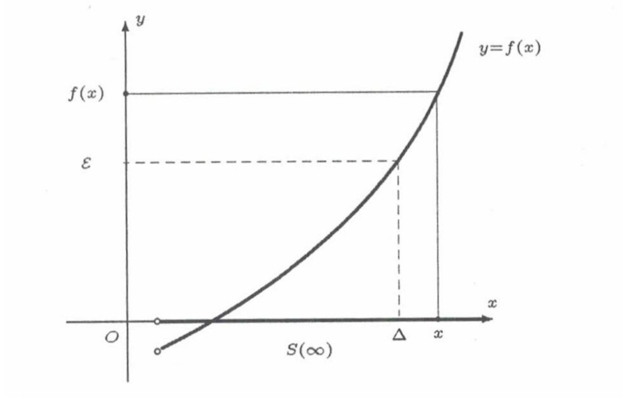
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, \mathcal{E} > 0 \;\; \exists\, \Delta > 0 \;\; \forall\, x \in S(\infty) \quad [(x > \Delta) \Rightarrow (f(x) > \mathcal{E})]\,,$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f są dowolnie duże, jeśli tylko jej argumenty są dostatecznie duże.



Twierdzenie 1. *(o równoważności definicji granic)*
Odpowiadające sobie granice Heinego i Cauchy'ego granic funkcji są równoważne.

2 Podstawowe twierdzenia dotyczące granic funkcji

Twierdzenie 2. *(warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)*
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę (właściwą lub niewłaściwą)wtedy i tylko wtedy, gdy

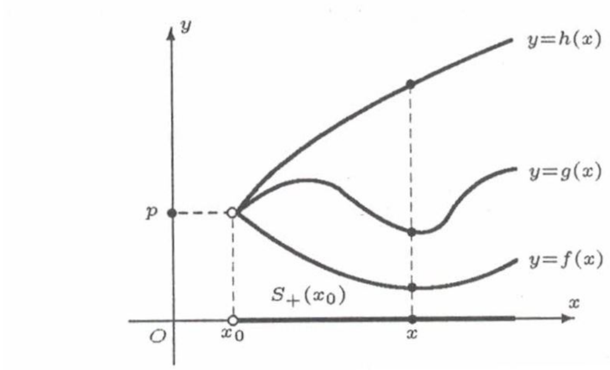
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Twierdzenie 3. *(o trzech funkcjach)*
Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego x z pewnego przedziału zawierającego punkt x_0, z wyjątkiem być może samego punktu x_0,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = p$,

to $\lim_{x\to x_0} g(x) = p$.



Przykład 2. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right).$$

Dla każdego $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zachodzi nierówność

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1.$$

Mamy zatem nierówność

$$1 \leq 2+\cos\frac{1}{x} \leq 3,$$

a stąd, po wymnożeniu obustornnie przez x^2 (zawsze dodatnie), otrzymujemy

$$x^2 \leq x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \leq 3x^2.$$

Funkcje ograniczające spełniają warunki:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0} 3x^2 = 0.$$

Zatem z twierdzenia o trzech funkcjach wynika,że

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Twierdzenie 4._(o granicy funkcji złożonej)_
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$,
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego x z pewnego przedziału zawierającego punkt x_0, z wyjątkiem być może samego punktu x_0,
3. $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = q$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = q$.

Przykład 3. Korzystając z twierdzenia o granicy funkcji złożonej obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{8-\sqrt{x}}.$$

Niech $\sqrt[6]{x} = t$. Wówczas

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{8-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{8-t^3} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{(2-t)(t^2+2t+4)} = -\frac{1}{3}.$$

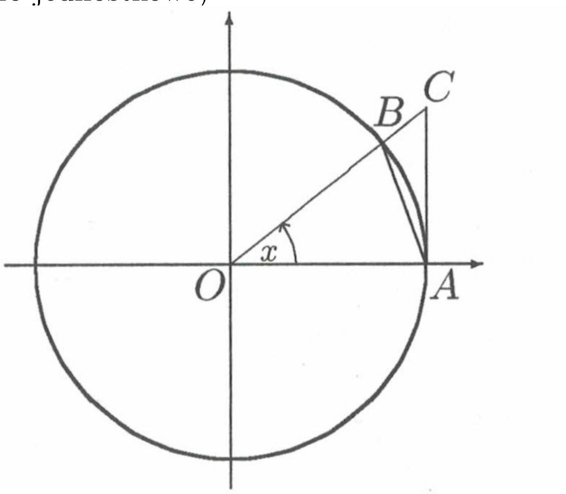
Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad$ gdzie $a>0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a},\quad$ gdzie $0<a\neq 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a,\quad$ gdzie $a\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a,\quad$ gdzie $a\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Przykład 4. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Spójrzmy na rysunek (koło jednostkowe)



Pole trójkąta OAB jest niewiększe niż pole wycinka kołowego OAB o mierze łukowej x z przedziału $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, a to pole z kolei jest niewiększe niż pole trójkąta OAC. Po obliczeniu pól odpowiednich figur widzimy, że prawdziwe są następujące nierówności

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x\leq\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\leq\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg} x,$$

skąd wynika

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Dzieląc stronami pierwszą z nierówności przez x i mnożąc drugą stronami przez $\frac{\cos x}{x} > 0$ otrzymujemy oszacowanie

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ponieważ

$$0 \leq |\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

więc

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

i z twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Twierdzenie 5. *(o arytmetyce granic funkcji)*

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to prawdziwe są następujące równości:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $g(x_0) \neq 0$,
6. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile wyrażenia po obu stronach równości mają sens.*

Przykład 5.

Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; *b)* $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$; *c)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{3+x}-1}{x+2}$; *d)* $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3-x}}$.

R o z w i ą z a n i e. W każdym z przykładów mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0}\right]$.

a) Przede wszystkim uprośćmy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie skorzystajmy z twierdzenia o arytmetyce granic.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+4)=12.$$

b) W tym przypadku postąpimy przeciwnie niż w poprzednim przykładzie. Funkcję, której granicę liczymy, zapiszemy w bardziej skomplikowanej postaci, ale dzięki temu uda nam się pozbyć kłopotliwych czynników $(1+\sqrt[3]{x})$ oraz $(1+\sqrt[5]{x})$. Wykorzystując tożsamości

$$1+x=(1+\sqrt[3]{x})\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$$

oraz

$$1+x=(1+\sqrt[5]{x})\left(1-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}&=\lim_{x\to-1}\frac{(1+\sqrt[3]{x})\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(1-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)}{(1+\sqrt[5]{x})\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(1-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(1-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)}{(x+1)\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{1-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}}{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

c) Zróbmy podobnie. Rozszerzmy ułamek występujący pod znakiem granicy tak, by pozbyć się kłopotliwego czynnika $x+2$. Dostajemy w wyniku

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{3+x}-1}{x+2}&=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{3+x}-1\right)\left(\sqrt{3+x}+1\right)}{(x+2)\left(\sqrt{3+x}+1\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)\left(\sqrt{3+x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\sqrt{3+x}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

d) Teraz $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3-x}}=-\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{(3-x)(x+3)}{\sqrt{3-x}}=-\lim\limits_{x\to3^-}(x+3)\sqrt{3-x}=0.$

W powyższych przykładach mieliśmy do czynienia z wyrażeniami nieoznaczonymi typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, a nieoznaczoność udało się usunąć, dokonując zupełnie elementarnych przekształceń. Przy obliczaniu kolejnych granic posłużymy się twierdzeniem o trzech funkcjach.

Przykład 6.

Obliczyć następujące granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(3-\sin\frac{1}{x^2}\right)$; *b)* $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \sin x$; *c)* $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

R o z w i ą z a n i e. a) Z własności funkcji $\sin x$ wynika, że dla dowolnego $x \neq 0$ prawdziwe są nierówności

$$-4|x| \leqslant x\left(3-\sin\frac{1}{x^2}\right) \leqslant 4|x|,$$

a ponieważ $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, więc z twierdzenia o trzech funkcjach mamy

$$\lim_{x\to 0} x\left(3-\sin\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

b) Dla $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są nierówności

$$-e^x \leqslant e^x \sin x \leqslant e^x,$$

a $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{x\to -\infty} e^x \sin x = 0.$$

c) Dla każdego $x \neq 0$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x},$$

więc otrzymujemy

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant x\frac{1}{x} \text{ dla } x > 0 \quad \text{oraz} \quad x\frac{1}{x} \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < x\left(\frac{1}{x}-1\right) \text{ dla } x < 0.$$

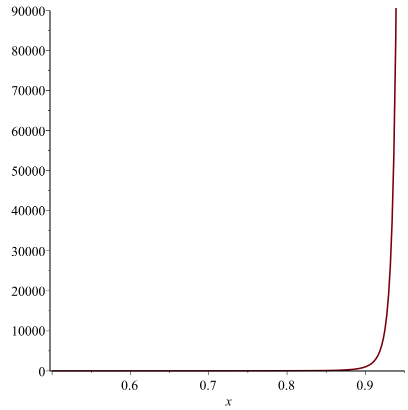
Ponieważ

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}-1\right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x} = 1,$$

więc równość wynika z twierdzenia o trzech funkcjach.

3 Asymptoty

W kilku rozważanych wcześniej przykładach granica funkcji w punkcie była nieskończona. Np. lewostronna granica funkcji $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ w punkcie $x_0 = 1$ jest nieskończona. Z lewej strony wykres funkcji zbliża się nieograniczenie do prostej $x = x_0$. Mówimy wówczas, że prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną wykresu.



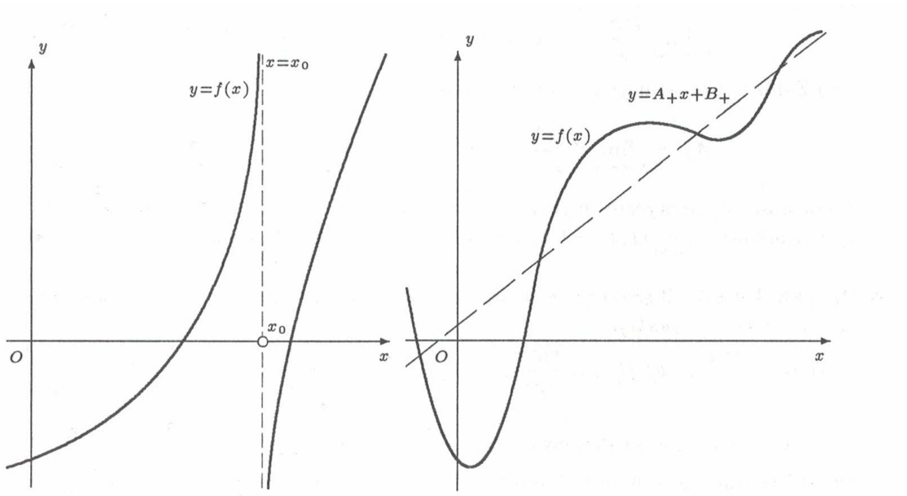
Definicja 5. *(Asymptota pionowa)*
Asymptotą pionową lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$ nazywamy prostą $x = x_0$ taką, że

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definicja 6. *(Asymptota ukośna)*
Asymptotą ukośną w $-\infty$ lub asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$ nazywamy prostą $y = A_-x + B_-$ taką, że

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (A_-x + B_-)] = 0.$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną oraz asymptotę ukośną $y = A_+x + B_+$ w $+\infty$ (asymptotą ukośną prawostronną). Gdy $A_+ = 0$ lub $A_- = 0$, wówczas mówimy o odpowiedniej asymptocie poziomej.



Współczynniki A_+, B_+ lub A_-, B_- występujące w równaniach asymptot ukośnych, odpowiednio w $+\infty$ lub w $-\infty$, można obliczyć dzięki następującemu twierdzeniu.

● **Twierdzenie 6** *Prosta $y = A_+x + B_+$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f w $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \textit{oraz} \quad B_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - A_+x\big).$$

Analogiczne wzory są prawdziwe dla asymptoty ukośnej $y = A_-x + B_-$ wykresu funkcji f w $-\infty$.

D o w ó d (tylko w przypadku asymptoty wykresu funkcji w $+\infty$).
($\Rightarrow$) Jeżeli $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (A_+x + B_+)] = 0$ dla pewnych stałych A_+ i B_+, to oczywiście $B_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - A_+x\big)$, a ponadto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (A_+x + B_+)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (A_+x + B_+)]}{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (A_+x + B_+)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A_+ - \frac{B_+}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - A_+.$$

Zatem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A_+ \quad \text{oraz} \quad B_+ = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - A_+x].$$

($\Leftarrow$) Załóżmy, że istnieją skończone granice

$$A_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad B_+ = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - A_+x].$$

Z własności arytmetycznych granicy wynika, że ostatnie dwie równości równoważne są warunkowi $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (A_+x + B_+)] = 0$, co należało wykazać. ■

● **Przykład 7** *Wyznaczyć asymptoty pionowe w punkcie $x_0 = 0$ oraz asymptoty ukośne wykresów funkcji:*
a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; *b)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$; *c)* $f(x) = \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$; *d)* $f(x) = x + \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

R o z w i ą z a n i e. a) Ponieważ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, więc wykres funkcji $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ nie ma asymptoty pionowej w punkcie $x_0 = 0$. Ponieważ

$$-\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\sin x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$A_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

Podobnie

$$B_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \text{oraz} \quad B_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

więc prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu zarówno w $-\infty$ jak i w ∞.

b) Ponieważ

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{0^-}\cdot 1 = -\infty,$$

oraz

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\sin x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{0^+}\cdot 1 = +\infty,$$

więc prosta $x = 0$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji. Licząc podobnie, jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy

$$A_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0, \qquad A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^3} = 0,$$

oraz

$$B_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0, \qquad B_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0,$$

więc prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu w $-\infty$ i w ∞.

c) Oczywiście, ze względu na dziedzinę funkcji, tzn. zbiór $(0,\infty)$, w punkcie $x_0 = 0$ szukamy tylko asymptoty pionowej prawostronnej. Ponieważ

$$-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leqslant \sqrt{x},$$

więc z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$. Zatem wykres funkcji nie posiada asymptoty pionowej w punkcie $x = 0$. Poszukajmy asymptoty ukośnej w ∞. Mamy

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

oraz

$$B_+ = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0\cdot 1 = 0,$$

więc prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu w ∞.

d) Pamiętając o rachunkach z poprzedniego przykładu widzimy, że

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$

więc wykres funkcji nie ma asymptoty pionowej w punkcie $x = 0$. Poszukajmy, jak poprzednio, asymptoty ukośnej w ∞. Otrzymujemy

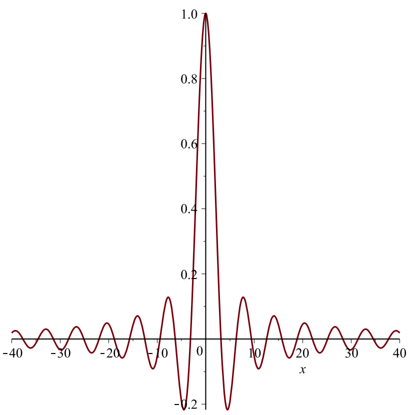
$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{0}{\infty} = 1$$

oraz

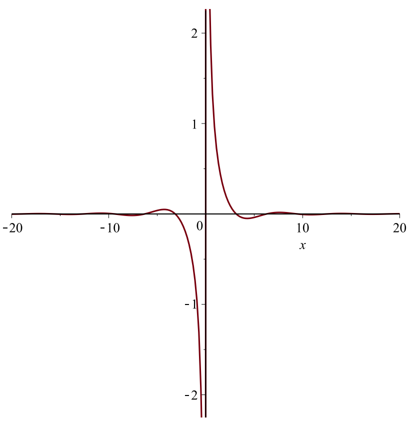
$$B_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

Poniżej przedstawiamy wykresy funkcji z zadania:

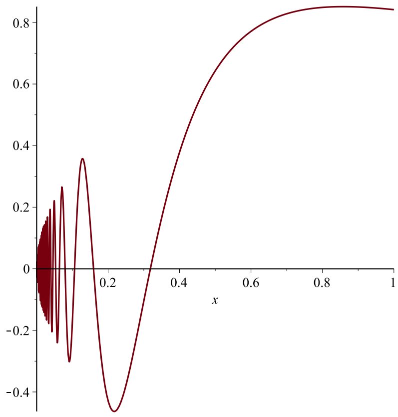
a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$



c) $f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$



d) $f(x) = x + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$