

**Analiza matematyczna**  
**Lista zadań nr 7 (Funkcje - ciągłość)**

1. Niech

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

a) Pokaż, że funkcja  $\operatorname{sgn}$  nie jest ciągła w punkcie 0.

b) Wyznacz punkty ciągłości funkcji  $\operatorname{sgn}$ .

2. Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji:  $f_1(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ ,  $f_2(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ ,  
 $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$ ,  $f_4(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ .

3. Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami:  $y = \frac{x}{x-1}$ ,  $y = x - \lfloor x \rfloor$ ,  $y = x \sin \frac{1}{x}$ ,  
 $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  oraz wyznacz ich granice w punkcie  $x = 0$ .

4. Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:  $y = \frac{1}{x^2-1}$ ,  $y = \frac{x}{x^2-1}$ ,  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ ,  
 $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ .

5. Załóżmy, że funkcja  $f$  jest ciągła. Pokaż, że funkcja  $g(x) = |f(x)|$  jest również ciągła. ( Wsk: złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.)

6. Załóżmy, że funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe. Niech  $h(x) = \max \{f(x), g(x)\}$ . Pokaż, że  $h$  jest funkcją ciągłą.

7. Oblicz granice wielomianu postaci  $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  w nieskonczoności oraz w minus nieskonczoności. (Wsk: Rozważ oddzielnie przypadek dla  $n$  parzystego oraz  $n$  nieparzystego.)

8. Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. (Wsk: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.)

9. Załóżmy, że  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie  $x \in [0, 1]$ , że  $f(x) = x$ . (Wsk: Przyjrzyj się funkcji  $g(x) = f(x) - x$ .)

10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja  $f$  nie jest ciągła w żadnym punkcie.