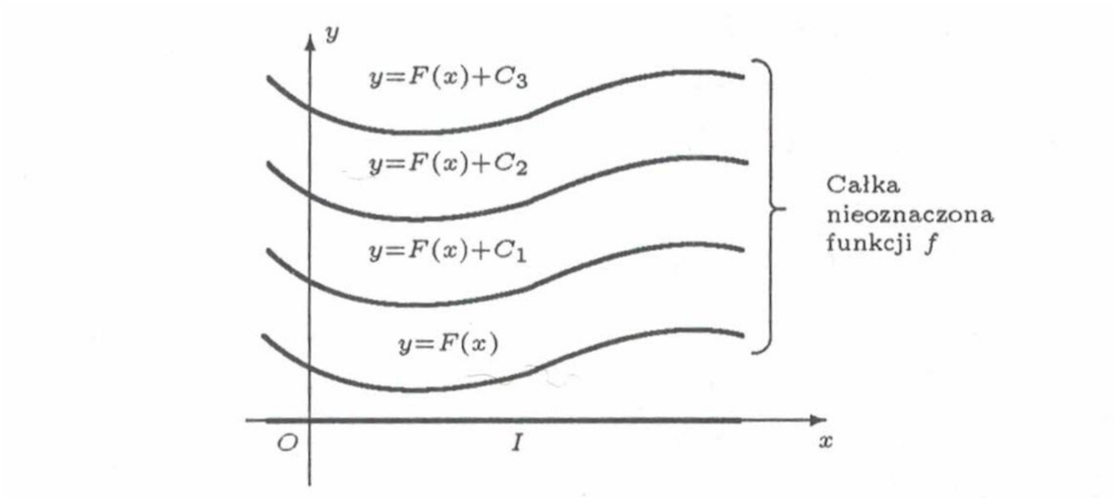
Analiza matematyczna 1
Wykład 16, całka nieoznaczona

1 Całki nieoznaczona

Definicja 1.(całka nieoznaczona)
Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całkę nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$



Fakt 1.(pochodna całki nieoznaczonej, całka nieoznaczona pochodnej)

- Niech f ma funkcję pierwotną na I. Wtedy
$$\forall\, x \in I \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$
- Niech f ma pochodną na przedziale I. Wtedy
$$\forall\, x \in I \qquad \int f'(x)dx = f(x) + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

$$\int 0\,dx = C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ oraz } x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad \text{dla } p \in \{-2,-3,-4,\ldots\},\ x \in (-\infty,0) \text{ lub } x \in (0,\infty)$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{dla } x \in (-\infty,0) \text{ lub } x \in (0,\infty)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{dla } 0 < a \neq 1 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \text{dla } x \in (k\pi,(k+1)\pi),\ \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{dla } x \in (-1,1)$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad \text{dla } x \in (-\infty,0) \text{ lub } x \in (0,\infty)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Przykład 1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int x^5 dx$; b) $\int \sqrt[3]{x} dx$; c) $\int \frac{dx}{x^4}$;

d) $\int 4^x dx$; e) $\int \frac{dx}{3^x}$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Twierdzenie 1.(o liniowości całki nieoznaczonej)
Niech funkcje f i g mają funkcje pierwotne oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

Przykład 2. Korzystając powyższe twierdzenie obliczyć podane całki:

a) $\int (x - 2e^x)\, dx$; b) $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x} dx$; c) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

d) $\int 3^x 5^{2-x} dx$; e) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; f) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

Przykład 3. Obliczyć podane całki:

a) $\int |x-3|\, dx$; b) $\int \sin |x| dx$; c) $\int \max(1, x^2) dx$;

d) $\int |\sin x|\, dx$.

d) Zauważmy najpierw, że funkcja $|\sin x|$ jest ciągła na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, zatem istnieje całka nieoznaczona tej funkcji na powyższym przedziale. Jedynym miejscem zerowym funkcji $\sin x$ na przedziale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jest $x_0 = 0$. Dlatego całkę obliczymy osobno na każdym z przedziałów $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i otrzymane funkcje odpowiednio „skleimy". Dla $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ mamy

$$\int |\sin x|\, dx = -\int \sin x\, dx = \cos x + C_1,$$

a dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int |\sin x|\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + C_2.$$

Stałe C_1, C_2 wystarczy dobrać w ten sposób, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} \cos x + C_1 & \text{dla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ -\cos x + C_2 & \text{dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 0$, co w tym przypadku zagwarantuje również, że będzie różniczkowalna. Zauważmy, że z jednej strony $F(0) = 1 + C_1$, a z drugiej $F(0) = -1 + C_2$, zatem $C_2 = C_1 + 2$. Ostatecznie kładąc $C_1 = C$ otrzymamy

$$\int |\sin x|\, dx = \begin{cases} \cos x + C & \text{dla } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \\ -\cos x + 2 + C & \text{dla } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Twierdzenie 2.(całkowanie przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 4. Obliczyć podane całki przez części:

a) $\int x\sin x dx$; b) $\int x^2 e^{-x}dx$; c) $\int \ln^2 x dx$.

Twierdzenie 3.(całkowanie przez podstawienie)

Jeżeli funkcja $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągła na I, a funkcja $\varphi : J \to I$ jest ciągła na J, to

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, $C \in \mathbb{R}$.

Przykład 4. Obliczyć podane całki przez podstawienie:

a) $\int (2x-7)^7 dx$, podst. $x = \frac{t+5}{2}, t \in \mathbb{R}$; b) $\int \sqrt{4-x^2}dx$, podst. $x = 2\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$;

c) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$, podst. $x = (t-2)^2, t \geq 2$; d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, podst. $t = \sqrt{e^x+1}, t \geq 1$.

Fakt 2.(wzory rekurencyjne)

- $$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2;$$
- $$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx, \quad n \geq 2;$$
- $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Przykładowe zadania z rozwiązaniami

Przykład 5. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{x^5 - 2x^3 + 4x}{x^2}dx$; b) $\int e^{x+3}dx$; c) $\int (x^2-3)\sqrt{x}dx$;

d) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$; e) $\int \sqrt[4]{3^x}dx$; f) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$;

g) $\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$; h) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$; i) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$.

Rozwiązania:

a) Mamy

$$\int \frac{x^5 - 2x^3 + 4x}{x^2}\,dx = \int \left(x^3 - 2x + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$\stackrel{(L)}{=} \int x^3\,dx - 2\int x\,dx + 4\int \frac{dx}{x} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{x^4}{4} - x^2 + 4\ln|x| + C.$$

b) Mamy

$$\int e^{x+3}\,dx = \int e^3 \cdot e^x\,dx \stackrel{(L)}{=} e^3 \int e^x\,dx \stackrel{(3)}{=} e^3 \cdot e^x + C = e^{x+3} + C.$$

c) Mamy

$$\int \left(x^2 - 3\right)\sqrt{x}\,dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$\stackrel{(L)}{=} \int x^{\frac{5}{2}}\,dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + C = 2x\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{7} - 1\right) + C.$$

d) Mamy

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{6}}\right) dx$$

$$\stackrel{(1)}{=} \int x^{\frac{5}{3}}\,dx - \int x^{\frac{1}{6}}\,dx$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C = \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C.$$

e) Mamy

$$\int \sqrt[4]{3^x}\,dx = \int \left(\sqrt[4]{3}\right)^x dx \stackrel{(3)}{=} \frac{\left(\sqrt[4]{3}\right)^x}{\ln\sqrt[4]{3}} + C = \frac{4\sqrt[4]{3^x}}{\ln 3} + C.$$

f) Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych, liniowości całki oraz wzorów (**1**) i (**5**) otrzymamy

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx \stackrel{(L)}{=} \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx \stackrel{(5,1)}{=} -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

g) Mamy

$$\int \frac{2x^2\,dx}{x^2+1} = \int \frac{2\left(x^2 + 1 - 1\right)dx}{x^2+1}$$

$$= \int 2\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \stackrel{(L)}{=} 2\int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} \stackrel{(1,6)}{=} 2x - \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

h) Wykorzystamy tożsamość $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, liniowość całki nieoznaczonej oraz wzory (**1**) i (**4**). Mamy

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1 - \cos x}{2}\,dx \stackrel{(L)}{=} \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \cos x\,dx\right) \stackrel{(1,4)}{=} \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$$

i) Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^6\cdot x}}} = x^{\frac{7}{8}}.$$

Zatem

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx \stackrel{(1)}{=} \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}} + C = \frac{8}{15}x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + C.$$

W powyższych rozwiązaniach L oznacza, że w danym miejscu korzystamy liniowości całki nieoznaczonej oraz z następujących wzorów:

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ gdzie $\alpha \neq -1$,
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ w szczególności $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C,$
4. $\displaystyle\int \cos\,dx = \sin x + C,$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Przykład 6. Obliczyć podane całki nieoznaczone (przez części):

a) $\displaystyle\int xe^x dx$; b) $\displaystyle\int x\sin x\cos x dx$; c) $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;

d) $\displaystyle\int \ln x dx$; e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx$; f) $\displaystyle\int \arcsin x dx$;

g) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$; h) $\displaystyle\int x\ln^2 x dx$; i) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$;

j) $\displaystyle\int \sin 4x\cos 2x dx$; k) $\displaystyle\int \cos x\cos 3x dx$; l) $\displaystyle\int \sin 3x\sin 4x dx$.

Rozwiązania:

a) $$\int xe^x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x)=x & g'(x)=e^x \\ f'(x)=1 & g(x)=e^x \end{array} \quad = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

b) $$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x)=x & g'(x)=\sin 2x \\ f'(x)=1 & g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x +$$

c) $$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x)=\ln x & g'(x)=\frac{1}{x^2} \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=-\frac{1}{x} \end{array} \quad = -\frac{1}{x}\ln x - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.$$

d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\ln x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=x \end{array}}$ $\displaystyle = x\ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{arc\,tg} x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2} & g(x)=x \end{array}}$ $\displaystyle = x\operatorname{arc\,tg} x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$= x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

f) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\arcsin x & g'(x)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g(x)=x \end{array}}$ $\displaystyle = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\overset{\bullet}{=} x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

W miejscu oznaczonym • dokonano podstawienia $t = 1 - x^2$.

g) $\displaystyle\int x^2\operatorname{arc\,tg} x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{arc\,tg} x & g'(x)=x^2 \\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2} & g(x)=\frac{x^3}{3} \end{array}}$ $\displaystyle = \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\int \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

h) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\ln^2 x & g'(x)=x \\ f'(x)=\frac{2\ln x}{x} & g(x)=\frac{x^2}{2} \end{array}}$ $\displaystyle = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{2\ln x}{x}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx$ $\boxed{\begin{array}{ll} f(x)=\ln x & g'(x)=x \\ f'(x)=\frac{1}{x} & g(x)=\frac{x^2}{2} \end{array}}$ $=$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + C.$$

i) Ponieważ

$$\int e^x\cos x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \cos x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = -\sin x & g(x) = e^x \end{array} \quad = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx$$
$$= e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \sin x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = \cos x & g(x) = e^x \end{array}$$
$$= e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx,$$

więc

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

Stąd

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + \frac{C}{2} = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C_1.$$

j) Ponieważ

$$\int \sin 4x\cos 2x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \sin 4x & g'(x) = \cos 2x \\ f'(x) = 4\cos 4x & g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 4x\sin 2x - 2\int \cos 4x\sin 2x\,dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \cos 4x & g'(x) = \sin 2x \\ f'(x) = -4\sin 4x & g(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 4x\sin 2x - 2\left(-\frac{1}{2}\cos 4x\cos 2x - 2\int \sin 4x\cos 2x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 4x\sin 2x + \cos 4x\cos 2x + 4\int \sin 4x\cos 2x\,dx,$$

więc

$$-3\int \sin 4x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 4x\sin 2x + \cos 4x\cos 2x + C.$$

Zatem

$$\int \sin 4x\cos 2x\,dx = -\frac{1}{6}\sin 4x\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 4x\cos 2x + \frac{C}{-3}$$
$$= -\frac{1}{6}\sin 4x\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 4x\cos 2x + C_1.$$

k)

$$\int \cos x \cos 3x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \cos x & g'(x) = \cos 3x \\ f'(x) = -\sin x & g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\cos x \sin 3x + \frac{1}{3}\int \sin x \sin 3x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \sin x & g'(x) = \sin 3x \\ f'(x) = \cos x & g(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}$$

$$= \frac{1}{3}\cos x \sin 3x + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\sin x \cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos x \cos 3x \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cos x \sin 3x - \frac{1}{9}\sin x \cos 3x + \frac{1}{9}\int \cos x \cos 3x \, dx.$$

więc

$$\frac{8}{9}\int \cos x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\cos x \sin 3x - \frac{1}{9}\sin x \cos 3x + C.$$

Zatem

$$\int \cos x \cos 3x \, dx = \frac{3}{8}\cos x \sin 3x - \frac{1}{8}\sin x \cos 3x + \frac{9}{8}C = \frac{3}{8}\cos x \sin 3x - \frac{1}{8}\sin x \cos 3x + C_1.$$

l) Ponieważ

$$\int \sin 3x \sin 4x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \sin 3x & g'(x) = \sin 4x \\ f'(x) = 3\cos 3x & g(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{4}\int \cos 3x \cos 4x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} f(x) = \cos 3x & g'(x) = \cos 4x \\ f'(x) = -3\sin 3x & g(x) = \frac{1}{4}\sin 4x \end{array}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 3x \sin 4x + \frac{3}{4}\int \sin 3x \sin 4x \, dx\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{16}\cos 3x \sin 4x + \frac{9}{16}\int \sin 3x \sin 4x \, dx.$$

więc

$$\frac{7}{16}\int \sin 3x \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{16}\cos 3x \sin 4x + C.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \sin 4x \, dx &= -\frac{4}{7}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{7}\cos 3x \sin 4x + \frac{16}{7}C \\ &= -\frac{4}{7}\sin 3x \cos 4x + \frac{3}{7}\cos 3x \sin 4x + C_1. \end{aligned}$$

Przykład 7. Obliczyć podane całki nieoznaczone (przez podstawienie):

a) $\int \cos(3-2x)dx$; b) $\int \frac{x}{(4+x^2)^5}dx$; c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$;

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}dx$; e) $\int x\sqrt{x-3}dx$; f) $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

g) $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$; h) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$; i) $\int \frac{\sin x dx}{3+2\cos x}$;

j) $\int \frac{e^{-4x}}{\sqrt{4+e^{-4x}}}dx$; k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$; l) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; n) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; o) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$.

Rozwiązania:

a) $\int \cos(3-2x)\,dx \;\begin{vmatrix} 3-2x=t \\ -2dx=dt \end{vmatrix} = \int \cos t\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$

$= -\frac{1}{2}\int \cos t\,dt = -\frac{1}{2}\sin t + C = -\frac{1}{2}\sin(3-2x)+C.$

b) $\int \frac{x\,dx}{(4+x^2)^5} \;\begin{vmatrix} 4+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^5}$

$= \frac{1}{2}\int t^{-5}\,dt = -\frac{1}{8}t^{-4}+C = -\frac{1}{8}\left(4+x^2\right)^{-4}+C = -\frac{1}{8(4+x^2)^4}+C.$

c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}} \;\begin{vmatrix} \sqrt{x}=t,\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{\sin t\cdot 2t\,dt}{t}$

$= 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x}+C.$

d) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{6x}} \;\begin{vmatrix} e^{3x}=t,\ e^{6x}=t^2 \\ 3e^{3x}dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} e^{3x}+C.$

e) $\int x\sqrt{x-3}\,dx \;\boxed{\begin{array}{c} x-3=t \\ dx=dt \end{array}} = \int (t+3)\sqrt{t}\,dt$

$$= \int t\sqrt{t}\,dt + 3\int \sqrt{t}\,dt$$

$$= \int t^{\frac{3}{2}}\,dt + 3\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^2\sqrt{x-3} + 2(x-3)\sqrt{x-3} + C.$$

f) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \;\boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t,\ x^2=1-t \\ -2x\,dx=dt \end{array}} = \int \frac{(1-t)\left(-\frac{1}{2}\right)dt}{\sqrt{t^3}}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} + \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^3}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}(-2)t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

g) $\int \frac{\cos \ln x}{x}\,dx \;\boxed{\begin{array}{c} \ln x=t \\ \frac{1}{x}dx=dt \end{array}} = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin \ln x + C.$

h) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \;\boxed{\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2x\,dx=dt \end{array}} = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + C.$$

i) $\int \frac{\sin x\,dx}{3+2\cos x} \;\boxed{\begin{array}{c} 3+2\cos x=t \\ -2\sin x\,dx=dt \end{array}} = \int \frac{-\frac{1}{2}\,dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C$

$$= -\frac{1}{2}\ln(3+2\cos x) + C, \qquad \text{bo } 3+2\cos x \geqslant 1 > 0 \text{ dla } x\in\mathbb{R}.$$

j) $\int \frac{e^{-4x}\,dx}{\sqrt{4+e^{-4x}}} \;\boxed{\begin{array}{c} \sqrt{4+e^{-4x}}=t \\ \frac{-2e^{-4x}\,dx}{\sqrt{4+e^{-4x}}}=dt \end{array}} = -\frac{1}{2}\int dt = -\frac{t}{2} + C = -\frac{\sqrt{4+e^{-4x}}}{2} + C.$

k) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2}=t \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}dx=dt \end{array}} = \int \frac{dt}{t^2+2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+C.$$

l) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}} \quad \boxed{\begin{array}{l} x^4=t \\ x^3dx=\frac{1}{4}dt \end{array}} = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + C = \frac{1}{4}\arcsin x^4 + C.$$

m) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6 \\ dx=6t^5\,dt \end{array}} = \int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int\frac{t^3\,dt}{t+1} \quad \boxed{\begin{array}{l} v=t+1,\ t=v-1 \\ dt=dv \end{array}} = 6\int\frac{(v-1)^3}{v}\,dv$$

$$= 6\int\frac{\left(v^3-3v^2+3v-1\right)}{v}\,dv$$

$$= 6\int\left(v^2-3v+3-\frac{1}{v}\right)\,dv$$

$$= 2v^3-9v^2+18v+6\ln|v|+C$$

$$= 2(t+1)^3-9(t+1)^2+18(t+1)+6\ln|t+1|+C$$

$$= 2\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^3-9\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2+18\left(\sqrt[6]{x}+1\right)-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$$

Po uproszczeniu otrzymamy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = -6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+C_1,$$

gdzie $C_1 = 11 + C$.

n) $$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \quad \boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x}=t,\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{array}} = 2\int te^t\,dt \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{całkowanie} \\ \text{przez części} \end{array}}$$

$$= 2e^t(t-1)+C = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$$

o) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$ $\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}}$ $= 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2-1}$

$$= 2\left(\int dt + \int \frac{dt}{t^2-1}\right) \quad \boxed{\text{rozkład na ułamki proste}}$$

$$= 2\left(\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}\right)$$

$$= 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.$$