

Analiza matematyczna 1
Lista zadań nr 9 (całki)

1. Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny przedziału całkowania oblicz:

a) $\int_{-2}^1 (2x - 1) dx$; b) $\int_2^3 x^2 dx$.

2. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza oblicz całki:

a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$; b) $\int_{-1}^2 x(1 + x^3) dx$; c) $\int_0^2 \frac{x-1}{x+1} dx$; d) $\int_0^{\pi/3} (\tan x)^2 dx$.

3. Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcje ciągłe są całkowne uzasadnij równości:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n} \right) = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$.

4. Oblicz podane całki nieoznaczone:

a) $\int \left(x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x} \right) dx$; b) $\int e^{-x} \cdot 3^{2x} dx$; c) $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx$.

5. Metodą całkowania przez części oblicz całki nieoznaczone:

a) $\int x e^{-3x} dx$; b) $\int (x+1)^2 e^x dx$; c) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;
d) $\int x^2 \sin x dx$; e) $\int \ln(x+1) dx$; f) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}} dx$;
g) $\int e^{2x} \sin x dx$; h) $\int \sin x \sin 3x dx$; i) $\int \cos x \sin 3x dx$;
j) $\int x \ln x dx$; k) $\int x^2 \ln x dx$; l) $\int \sin^3 x dx$; m) $\int \cos^4 x dx$.

6. Stosując odpowiednie podstawienia oblicz całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x} dx$; c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$;
d) $\int x \sin(x^2 + 4) dx$; e) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3 + 1} dx$; f) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$;
g) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; h) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$; i) $\int \frac{5 \sin x}{3 - 2 \cos x} dx$.

7. Oblicz całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; b) $\int \frac{5dx}{(2-7x)^3}$; c) $\int \frac{8dx}{9x+20}$.

8. Oblicz całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$; b) $\int \frac{(6x+3)dx}{x^2 + x + 4}$; c) $\int \frac{(4x+2)dx}{x^2 - 10x + 29}$.

9. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; b) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; c) $\int \frac{(5-4x)dx}{x^2-4x+20}$; d) $\int \frac{xdx}{x^4-1}$.

10. Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \sin^3 x dx$; b) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$; c) $\int \sin^2 2x \sin^2 x dx$;

d) $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$; e) $\int \frac{1 + \tan x}{\cos x} dx$; f) $\int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}$;

g) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; h) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$; i) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

11. Metodą całkowania przez części oblicz całki oznaczone:

a) $\int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx$; b) $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; c) $\int_0^1 \arcsin x dx$.

12. Oblicz całki oznaczone dokonując odpowiednich podstawień:

a) $\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx$; b) $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$; c) $\int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$;

d) $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$; e) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$; f) $\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

13. Oblicz pola obszarów ograniczonych krzywymi:

a) $y = 2x - x^2, x+y = 0$; b) $y = x^2, y = x^2/2, y = 3x$; c) $y = 1/x^2, y = x, y = 4$;

d) $y = 1, y = \frac{4}{x^2+1}$; e) $y^2 = -x, y = x-6, y = -1, y = 4$;

f) $y = 2^x, y = 2, x = 0$; g) $y = \sin x, y = 1/2, (0 \leq x \leq \pi)$;

h) $yx^4 = 1, y = 1, y = 16$; i) $y = 2\sqrt{x}, y = \sqrt{5-x}, y = 0$.

14. Oblicz objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

a) $T : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2, Ox$; b) $T : 0 \leq x \leq \sqrt{5}, 0 \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}, Oy$;

c) $T : 0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \tan x, Ox$; d) $T : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, Oy$;

15. Oblicz długości krzywych:

a) $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}, 2 \leq x \leq 3$; b) $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$; c) $y = 2\sqrt{x^3}, 0 \leq x \leq 11$;

e) $y = e^x, \frac{\ln 2}{2} \leq x \leq \frac{\ln 3}{2}$; f) $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}, 1 \leq x \leq 2$;

g) $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \pi/4$.

16. Oblicz pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów funkcji f wokół wskazanych osi:

a) $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2, Ox$; b) $f(x) = \sqrt{4+x}, -4 \leq x \leq 2, Ox$;

c) $f(x) = \ln x, 1 \leq x \leq \sqrt{3}, Oy$; d) $f(x) = |x-1| + 1, 0 \leq x \leq 2, Oy$.