Lista 3

Macierze

Zadanie 1 *Na podanych macierzach wykonaj działania:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 4 \\ -4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \\ 1 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T \right)$$

Zadanie 2 *Podaj przykład dwóch niezerowych macierzy kwadratowych A, B stopnia dwa, które spełniaja jeden z podanych warunków:*

$$A \cdot B = 0, \quad A^2 = 0.$$

Zadanie 3 *Wyznacz $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, dla których jest spełnione równanie macierzowe:*

$$3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & x+y \\ y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x+y & 3z \\ 3 & t \end{pmatrix}$$

Zadanie 4 *Uzasadnij następujące własności transpozycji: dla dowlonych macierzy kwadratowych $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
2. $(AB)^T = B^T A^T$,
3. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$,
4. $(A^T)^T = A$.

Zadanie 5 *Kwadratową macierz nazywamy symetryczną jeżeli $A^T = A$, natomiast antysymetryczną, jeżeli zachodzi warunek $A^T = -A$. Udowodnij, że każda macierz kwadratowa da się przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej z macierzą antysymetryczną.*

Zadanie 6 *Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy górnotrójkątnych tego samego stopnia jest macierzą górnotrójatną.*

Zadanie 7 *Czy istnieją (jeśli tak, to podaj przykład) macierze kwadratowe* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takie, że*

$$AB - BA = \mathbf{1}_n.$$

Zadanie 8 *Niech* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ *będzie dane w sposób następujący:*

$$\mathbb{C} \ni a + bi \mapsto f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Udowodnij, że

1. f *jest funkcją różnowartościową,*
2. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$,
3. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$,
4. $|z| = det(f(z))$.

Zadanie 9 *Oblicz wyznaczniki:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 10 *Stosując metodę Laplace'a, oblicz wyznaczniki względem podanych wierszy lub kolumn:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \textit{trzeci wiersz}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \textit{trzecia kolumna}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \textit{czwarta kolumna.}$$

Zadanie 11 *Wykonując operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy, oblicz ich wyznacznik:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

.

Zadanie 12 *Dla zadanych liczb* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *wykaż, że zachodzi równość:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Jest to wyznacznik Vandermonde'a.

Zadanie 13 *Dla dowolnych liczb* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, *oblicz*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & a_2 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & a_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 14 *Niech* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *będzie macierzą taką, że*

$$(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})\ (a_{ij} \in \{0, 2\}).$$

Udowodnij, że $det(A)$ *jest podzielną prze* 2^n.

Zadanie 15 *Niech* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *będzie macierzą taką, że*

$$(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\})\ (a_{ij} \in \{-1, 1\}).$$

Udowodnij, że $det(A)$ *jest podzielną prze* 2^{n-1}.

Zadanie 16 *Stosując twierdzenie o macierzy odwrotnej, wyznacz macierze odwrotne (o ile istnieją) do podanych macierzy:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Zadanie 17 *Do podanych macierzy w zadaniu poprzednim oblicz ich odwrotności stosując metodę dołączonej macierzy jednostkowej.*

Zadanie 18 *Rozwiąż równania macierzowe:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 19 *Niech* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *będzie nieosobliwą macierzą kwadratową. Uzasadnij, że*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Robert Rałowski