Analiza matematyczna 1
Wykład 6, Granice funkcji

1 Granica funkcji w punkcie

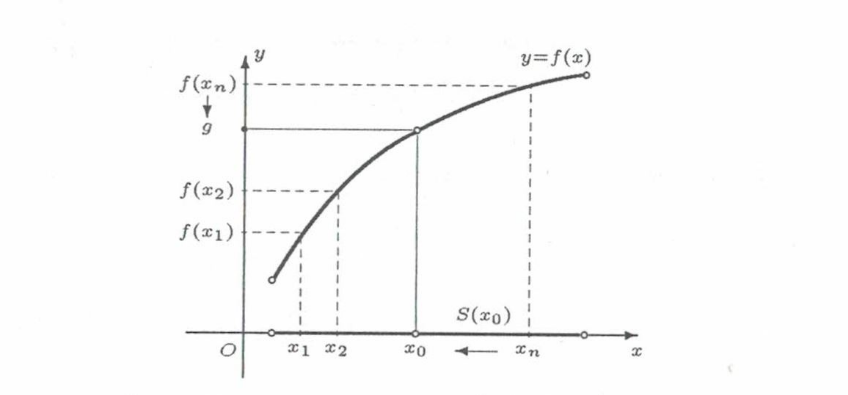
Definicja 1. *(Heinego granicy funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn. w zbiorze $S(x_0) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(x_0) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right) \right],$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0 (i różnym od tego punktu), dążą do liczby g.



Przykład 1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie uzasadnić podane równości

a) $\lim_{x\to 4}(2x - 7) = 1$
Mamy pokazać, że

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(4) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 4 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} (2x_n - 7) = 1 \right) \right].$$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki: $\{x_n\} \subset S(4)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} (2x_n - 7) = 2 \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n \right) - \lim_{n\to\infty} 7 = 2 \cdot 4 - 7 = 1.$$

b) $\lim_{x\to \pi} \sin x = 0$
Mamy pokazać, że

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(\pi) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \pi \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0 \right) \right].$$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki: $\{x_n\} \subset S(\pi)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi$. Korzystamy z następującej nierówności

$$0 \le |\sin x| \le |x|,$$

która jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz tożsamości

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

prawdziwej dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mamy

$$0 \leq |\sin x_n| = |\sin x_n - \sin\pi| = \left|2\sin\frac{x_n-\pi}{2}\cos\frac{x_n+\pi}{2}\right| \leq 2\cdot\frac{|x_n-\pi|}{2}\cdot 1 = |x_n-\pi|\,.$$

Korzystamy teraz z twierdzenia o trzech ciągach. Ciągi ograniczające ciąg $(|\sin x_n|)$: ciąg stały (0) oraz $(|x_n-\pi|)$ mają wspólną granicę 0, a więc także

$$\lim_{n\to\infty}|\sin x_n| = 0.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = 0$.

Uwaga! Nie istnieje (właściwa ani niewłaściwa) granica funkcji f w punkcie x_0, jeżeli istnieją ciągi (x_n'), (x_n'') spełniające warunki:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0$, przy czym $x_n' \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$, przy czym $x_n'' \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$.

Przykład 2. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją: a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, b) $\lim\limits_{x\to4}\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

a) Niech $x_n' = \frac{1}{n}$ oraz $x_n'' = -\frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x'_n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^n} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x''_n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+e^{-n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Otrzymaliśmy różne wartości, zatem granica $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ nie istnieje.

b) Niech $x_n' = \left(2-\frac{1}{n+1}\right)^2$ oraz $x_n'' = \left(2+\frac{1}{n+1}\right)^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej zachodzą nierówności $x_n' < 4$ oraz $x_n'' > 4$. Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = 4$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 4$. Obliczając granice wartości funkcji $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ dla tych ciągów otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty}\left\lfloor\sqrt{x_n'}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\left\lfloor\sqrt{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^2}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\left\lfloor 2-\frac{1}{n+1}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\left\lfloor\sqrt{x_n''}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\left\lfloor\sqrt{\left(2+\frac{1}{n+1}\right)^2}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\left\lfloor 2+\frac{1}{n+1}\right\rfloor = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Ponieważ otrzymaliśmy różne wartości, więc granica $\lim\limits_{x\to4}\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ nie istnieje.

1.1 Granice jednostronne funkcji w punkcie

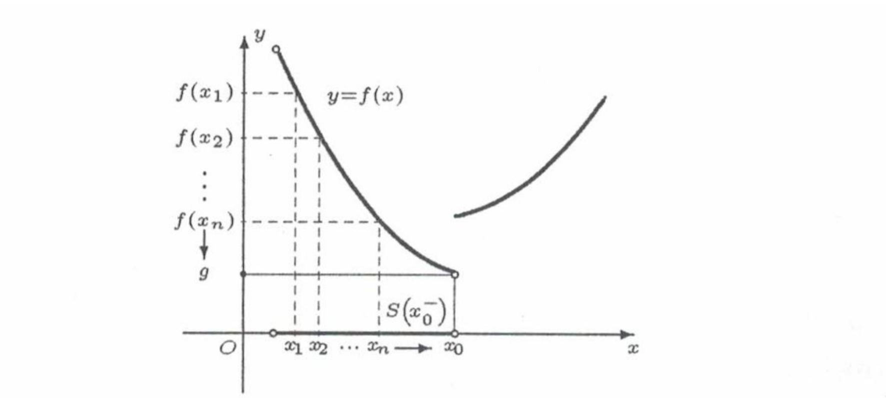
Definicja 2. *(Heinego granicy lewostronnej funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie lewostronnym punktu x_0, tzn. w zbiorze $S(x_0^-) = (x_0 - r, x_0)$ dla pewnego $r > 0$. Liczba g jest lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(x_0^-) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\right)\right],$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0 przez wartości mniejsze od x_0, dążą do liczby g.



Analogicznie definiuje się granicę prawostronną funkcji f w punkcie x_0 co oznaczamy symbolem

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g.$$

(Inaczej: $f(x_0^+), f(x_0^-)$ - granice jednostronne funkcji w punkcie.)

Przykład 3. Korzystając z definicji Heinego granicy jednostronnej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x^4-1|}{x-1} = -4$, c) $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} \operatorname{sgn}(\sin x) = -1$.

Przykład 4. Uzasadnić, że podane granice jednostronne funkcji nie istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos\frac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left\lfloor \sin\frac{1}{x} \right\rfloor$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$.

1.2 Granice niewłaściwe funkcji w punkcie

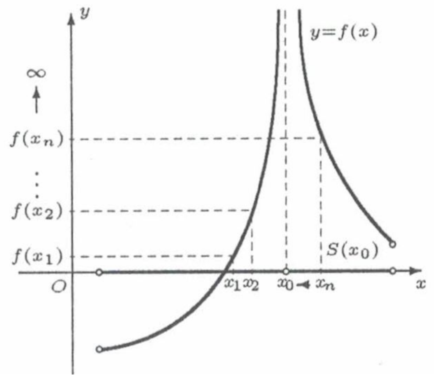
Definicja 3. *(Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)*
Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(x_0) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty\right)\right],$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f odpowiadające argumentom dążącym do punktu x_0 (i różnym od tego punktu), dążą do liczby ∞.



Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$ funkcji w punkcie. Wprowadza się również pojęcia granic jednostronnych niewłaściwych funkcji w punkcie. Definicje te są analogiczne do odpowiednich definicji granic jednostronnych. Do oznaczenia tych granic stosuje się symbole:

$$f(x_0^-) = \infty, \quad f(x_0^-) = -\infty, \quad f(x_0^+) = \infty, \quad f(x_0^+) = -\infty.$$

1.3 Granica funkcji w nieskończoności

Definicja 4. *(Heinego granicy funkcji w nieskończoności)*

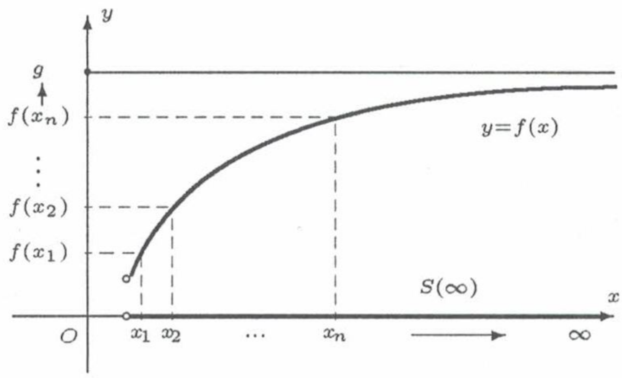
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(\infty)$. Liczba g jest granicą funkcji f w nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(\infty) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right) \right],$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f odpowiadające argumentom dążącym do ∞ dążą do granicy g.



Definicja Heinego granicy funkcji w $-\infty$ jest analogiczna.

Uwaga! Nie istnieje granica (właściwa ani niewłaściwa) funkcji w nieskończoności, jeżeli istnieją ciągi (x'_n), (x''_n) spełniające warunki:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$.

Przykład 5. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin x)^2$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

a) Niech $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ oraz $x''_n = \sqrt{2n\pi}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \infty$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(x'_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(x''_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \cos 2n\pi = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Otrzymaliśmy różne wartości, zatem granica $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x^2$ nie istnieje.

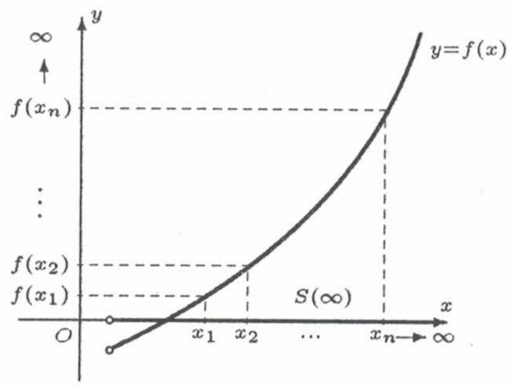
Definicja 5. *(Heinego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności)*
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w pewnym sąsiedztwie $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\ (x_n), \{x_n\} \subset S(\infty) \quad \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty\right)\right],$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Oznacza to, że wartości funkcji f odpowiadające argumentom dążącym do ∞ dążą do ∞.



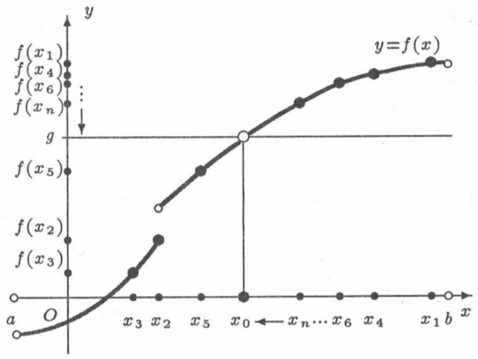
Analogicznie można określić granicę funkcji ∞ dla argumentów dążących do $-\infty$ lub granicę funkcji $-\infty$ dla argumentów dążących do ∞ lub do $-\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Przykład 6. Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości
a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 - e^{\frac{1}{|x|}}\right) = -\infty$, b) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1}{\sin^2 x} = \infty$.

Przykład 7. Korzystając z definicji Heinego uzasadnić podane równości:
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$, b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

Zwróćmy uwagę na to, że wartość funkcji w punkcie x_0 (o ile istnieje) nie ma wpływu na jej granicę w tym punkcie.



Wyrażenia nieoznaczone dla granic (ciągów, funkcji):

$$\infty-\infty, \quad \infty\cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}.$$

Tabela symbolicznych równości dla granic (ciągów, funkcji):

$p+\infty=\infty$ dla $-\infty<p\leqslant\infty$	$p\cdot\infty=\infty$ dla $0<p\leqslant\infty$
$\frac{p}{\infty}=0$ dla $-\infty<p<\infty$	$\frac{p}{0^+}=\infty$ dla $0<p\leqslant\infty$
$p^{\infty}=0$ dla $0^+\leqslant p<1$	$p^{\infty}=\infty$ dla $1<p\leqslant\infty$
$\infty^q=0$ dla $-\infty\leqslant q<0$	$\infty^q=\infty$ dla $0<q\leqslant\infty$

Przykład 8. Zbadać istnienie następujących granic: (tutaj $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, czyli podłogę)

$$a)\ \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x};\qquad b)\ \lim_{x\to 1}2^{\frac{1}{1-x}};\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\left(1+2^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right)^{-1};\qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{[x]}{x-1}.$$

R o z w i ą z a n i e. a) Rozważmy ciąg o wyrazach $x_n = (n\pi)^{-1}$ dla $n \geqslant 1$. Mamy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ przy czym $x_n \neq 0$ dla $n \geqslant 1$, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0.$$

Natomiast dla ciągu o wyrazach $x_n' = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$, który również zmierza do 0, nie osiągając nigdy tej wartości, zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.$$

Zatem $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nie istnieje.

b) Rozważmy jakikolwiek ciąg (x_n) zmierzający do 1 od strony lewej. Wówczas widzimy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n} = \infty,$$

więc po zastosowaniu równości z ostatniej tabelki otrzymujemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty.$$

Natomiast dla dowolnego ciągu (x_n') dążącego do 1 od strony prawej mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n'} = -\infty$$

i z tych samych powodów

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 0.$$

Granica lewostronna różna jest w tym przypadku od granicy prawostronnej, więc granica funkcji $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$ w punkcie $x_0 = 1$ nie istnieje.

c) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zmierzającym do 0 od strony prawej. Wówczas mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \infty,$$

więc również

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\right] = \infty.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\left[\frac{1}{x_n}\right]} = \infty.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0+} \left(1 + 2^{\left[\frac{1}{x_n}\right]}\right)^{-1} = 0.$$

Natomiast dla dowolnego ciągu $\left(x_n'\right)$ zmierzającego do 0 od strony lewej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n'} = -\infty,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{x_n'}\right] = -\infty.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\left[\frac{1}{x_n'}\right]} = 0$$

i stąd

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1 + 2^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right)^{-1} = 1.$$

I znowu granica lewostronna różna jest od granicy prawostronnej, więc granica funkcji $f(x) = \left(1 + 2^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right)^{-1}$ w punkcie $x = 0$ nie istnieje.

d) Jeżeli (x_n) jest jakimkolwiek ciągiem zmierzającym do 1 od strony lewej, to od pewnego n_0 począwszy wszystkie punkty x_n są w przedziale $(0, 1)$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x_n]}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

czyli $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$. Natomiast dla dowolnego ciągu (x_n') dążącego do 1 od strony prawej mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n' - 1} = \frac{1}{0+} = \infty$$

i z tych samych powodów $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \infty$. Granica lewostronna jest różna od granicy prawostronnej (w tym przypadku — niewłaściwej), więc granica funkcji $f(x) = \dfrac{[x]}{x-1}$ w punkcie $x_0 = 1$ nie istnieje.