Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2022/23

LISTA 1

Zadania na tej liście zaczerpnięte są z podręczników [AMO93, DPV06].

Zadanie 0. Przeczytaj rozdział 1.3 (Applications) z podręcznika [AMO93] omawiający przykładowe zastosowania przepływów w sieciach do modelowania i rozwiązywania problemów optymalizacyjnych z różnych dziedzin. Zajrzyj także do rozdziału 19.10, gdzie zaprezentowana jest dużo obszerniejsza lista praktycznych zastosowań[1] (część z nich omawiana jest nieco dokładniej w rozdziale 19).

Zadanie 1. Podaj egzemplarze, zbiór rozwiązań dopuszczalnych F i funkcję kosztu (celu) c następujących problemów optymalizacyjnych:

(a) problem minimalnego drzewa Steinera (MINIMUM STEINER TREE),

(b) problem najkrótszej ścieżki z ograniczeniem (SHORTEST WEIGHT-CONSTRAINED PATH),

(c) problem minimalnej sumy kwadratów (MINIMUM SUM OF SQUARES).

Definicje powyższych problemów oraz podstawowe informacje o nich możesz znaleźć m.in. na stronie `https://www.csc.kth.se/~viggo/problemlist/compendium.html`.

Zadanie 2. Ferdek zastanawia się, ile piwa Mocne i ile piwa Mocne Full powinien tygodniowo zamawiać. Mocne kosztuje go 1 zł za puszkę, sprzedaje je po 2 zł za puszkę. Za Mocne Full musi zapłacić 1,50 zł za puszkę, a sprzedaje je po 3 zł za puszkę. Jednak z powodu skomplikowanej polityki marketingowej firma piwowarska Mocne sprzedaje tylko jedną puszkę Mocnego Full na każde dwie puszki zwykłego Mocnego kupionego przez Ferdka. Ponadto ze względu na przykre doświadczenia z przeszłości, o których lepiej nie opowiadać, firma nie sprzeda Ferdkowi więcej niż 3000 puszek na tydzień. Ferdek wie, że może sprzedać tyle piwa, ile tylko będzie miał. Sformułuj zadanie jako problem programowania liniowego w celu obliczenia, ile Mocnego i ile Mocnego Full powinien kupować Ferdek, tak aby zmaksymalizować swój zysk. Rozwiąż ten problem (program) graficznie.

Zadanie 3. Sałatka jest dowolną kombinacją następujących składników: (1) pomidorów, (2) sałaty, (3) szpinaku, (4) marchewki i (5) oleju. Każda sałatka musi zawierać: (A) co najmniej 15 gramów białek, (B) co najmniej 2 gramy i co najwyżej 6 gramów tłuszczu, (C) co najmniej 4 gramy węglowodanów, (D) co najwyżej 100 miligramów sodu. Ponadto (E) nie chcemy, aby więcej niż 50 % masy sałatki stanowiła zielenina (sałata lub szpinak). Zawartość składników odżywczych (na 100 gramów) przedstawia poniższa tabela.

Składnik	Energia (kcal)	Białka (gramy)	Tłuszcz (gramy)	Węglowodany (gramy)	Sód (miligramy)
Pomidor	21	0,85	0,33	4,64	9,00
Sałata	16	1,62	0,20	2,37	8,00
Szpinak	371	12,78	1,58	74,69	7,00
Marchewka	346	8,39	1,39	80,70	508,20
Olej	884	0,00	100,00	0,00	0,00

Chcemy sporządzić sałatkę o najmniejszej liczbie kalorii z zachowaniem ograniczeń na składniki odżywcze. Sformułuj ten problem jako problem programowania liniowego.

[1] Na kursie *Algorytmy optymalizacji dyskretnej* będziemy się zajmować jedynie wybranymi spośród zagadnień omówionych w tej książce.

Zadanie 4. (*Redukcja problemu* CIRCUIT VALUE *do* LINEAR PROGRAMMING)
Siecią boolowską (siecią logiczną) $C = C(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy rodzinę połączonych bramek logicznych, składającą się z n bramek wejściowych odpowiadających zmiennym boolowskim $x_1, \ldots, x_n$ oraz m bramek logicznych AND, OR oraz NOT (jedna z nich jest bramką wyjściową z sieci). Bramka NOT ma jedno wejście i jedno wyjście, a bramki OR i AND mają dwa wejścia i jedno wyjście[2].

W problemie CIRCUIT VALUE dana jest sieć logiczna $C = C(x_1, \ldots, x_n)$ oraz wartościowanie zmiennych wejściowych $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \{0,1\}^n$ i pytamy się, czy wartością na wyjściu sieci C dla wejścia π będzie 1 (jest to równoważne obliczeniu wartości na wyjściu sieci $C(\pi)$).

Pokaż, że dla każdej instancji $\langle C, \pi \rangle$ problemu CIRCUIT VALUE możemy skonstruować w czasie wielomianowym względem jej rozmiaru egzemplarz problemu programowania liniowego, z rozwiązania którego można odczytać wartość na wyjściu sieci $C(\pi)$.

Podaj przykład takiego egzemplarza problemu programowania liniowego dla sieci $C(x_1, x_2, x_3)$ odpowiadającej formule logicznej $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)$ i wejścia $\pi = (0, 1, 1)$.

HINT: Dla każdej bramki sieci g stwórz zmienną decyzyjną o dziedzinie ciągłej $0 \leqslant x_g \leqslant 1$ reprezentującą jej wyjście i – w zależności od typu bramki – dodaj odpowiednie ograniczenia na wartość x_g w zależności od wartości wejściowych (równania i nierówności liniowe; bramki wejściowe mają ustaloną wartość zależną od podanego wejścia π). Sformułuj ograniczenia tak, żeby w rozwiązaniu dopuszczalnym zmienne decyzyjne mogły przyjmować tylko wartości 0 lub 1, będące poprawnym wyjściem bramek logicznych. W przypadku dalszych wątpliwości możesz zajrzeć do rozdziału 7.7 w [DPV06].

Zadanie 5. Sformułuj zadanie znajdowania najkrótszych ścieżek w sieci $G = (N, A)$ z wyróżnionego wierzchołka $s \in N$ do wszystkich wierzchołków sieci $i \in N \setminus \{s\}$ jako zagadnienie najtańszego przepływu.

Zadanie 6. Sformułuj następujące problemy jako problem cyrkulacji (por. rozdział 1.2 w [AMO93]):

(a) problem najkrótszej ścieżki,

(b) problem przydziału,

(c) problem transportowy.

Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[DPV06] Sanjoy Dasgupta, Christos H. Papadimitriou, and Umesh Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1st edition, 2006.

[2] O takiej sieci możemy myśleć jako o skierowanym grafie acyklicznym, którego wierzchołki odpowiadają bramkom, a krawędzie – połączeniom między nimi.