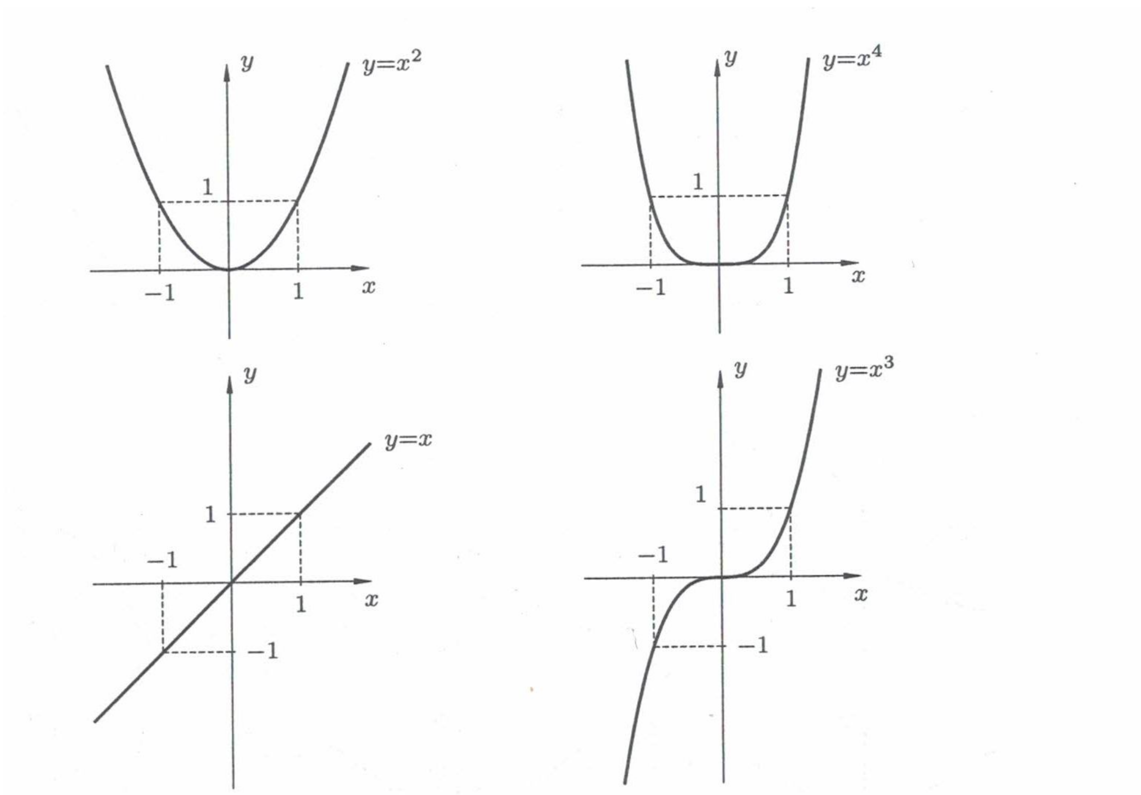
Analiza matematyczna 1 FT
Wykład 5, Funkcje elementarne (podstawowe własności)

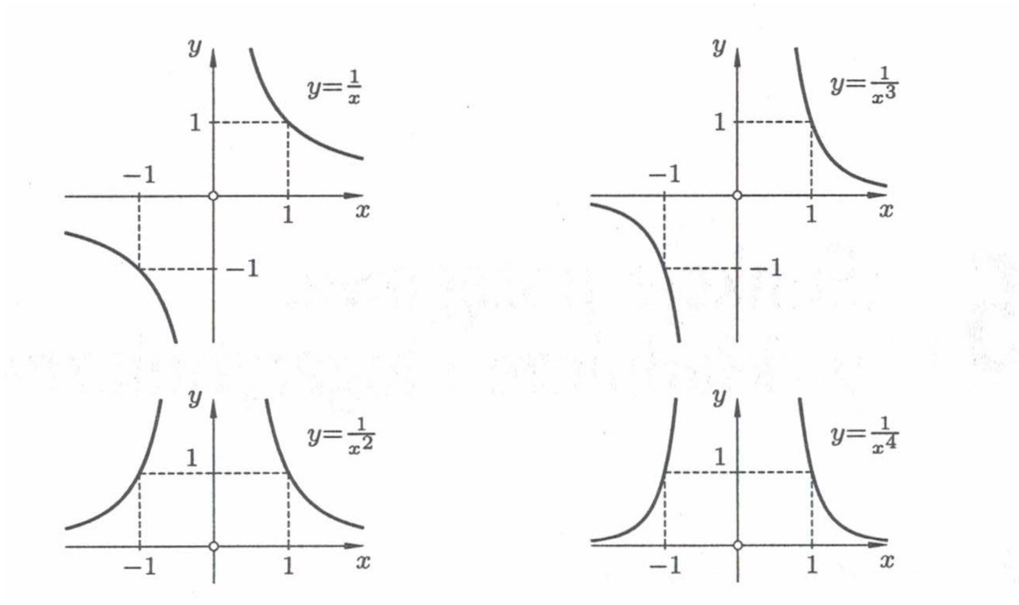
1 Funkcje potęgowe

Funkcję postaci $f(x) = x^{\alpha}$, gdzie α jest stałą rzeczywistą, nazywamy funkcją potęgowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji potęgowej zależą od wykładnika α. W szczególności:

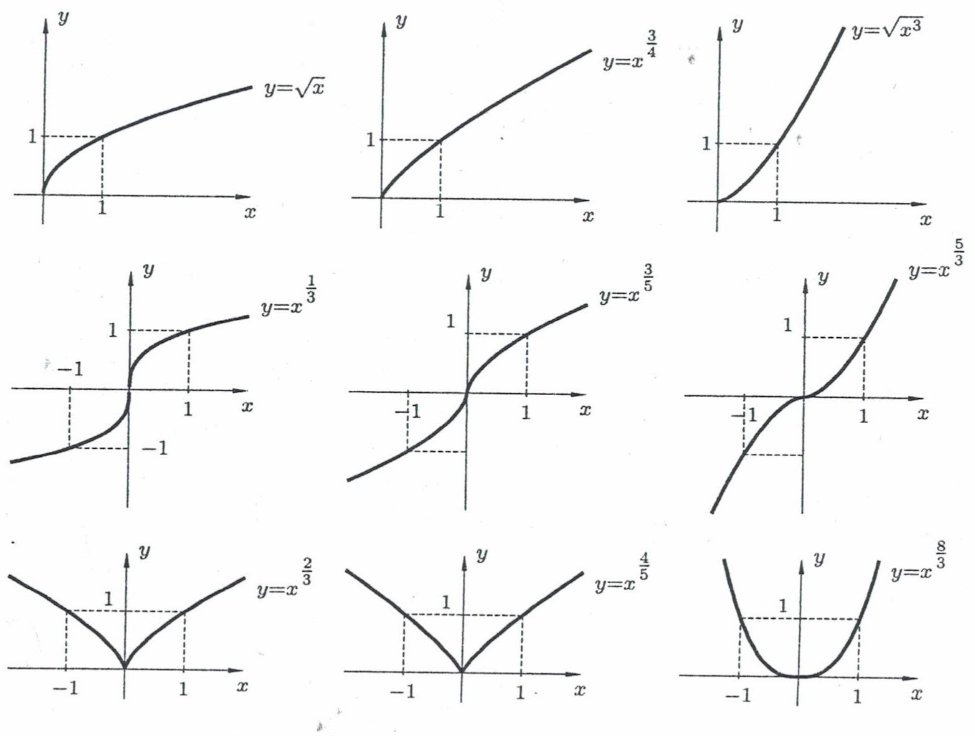
- Jeżeli α jest liczbą naturalną, to dziedziną jest $\mathbb{R}$. Zbiór wartości jest przedziałem $[0, \infty)$, gdy α jest liczbą parzystą, a $\mathbb{R}$ jest liczbą nieparzystą.



- Jeżeli α jest liczbą całkowitą ujemną, to dziedziną jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zbiór wartości to jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy α jest liczbą nieparzystą, a przedziałem $(0, \infty)$, gdy α jest liczbą parzystą.



- Jeżeli α jest dodatnią liczbą wymierną $\frac{p}{q}$ (ułamek nieskracalny), to dziedziną jest przedział $[0,\infty)$, gdy q jest liczbą parzystą, a $\mathbb{R}$, gdy q jest liczbą nieparzystą. Zbiorem wartości jest przedział $[0,\infty)$, gdy q jest liczbą parzystą albo, gdy q jest liczbą nieparzystą i p jest liczbą parzystą, a $\mathbb{R}$, gdy q i p są liczbami nieparzystymi.



Przykład 1. Wyznaczyć dziedziny funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} - 1$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$.

Przykład 2. Korzystając z wykresu funkcji $y=\sqrt{x}$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=\sqrt{x-2}$; b) $y=2\sqrt{x}$; c) $y=\sqrt{2-x}$;

d) $y=2-\sqrt{x}$; e) $y=1+\sqrt{x}$; f) $y=1-\sqrt{x+1}$.

2 Funkcje wykładnicze

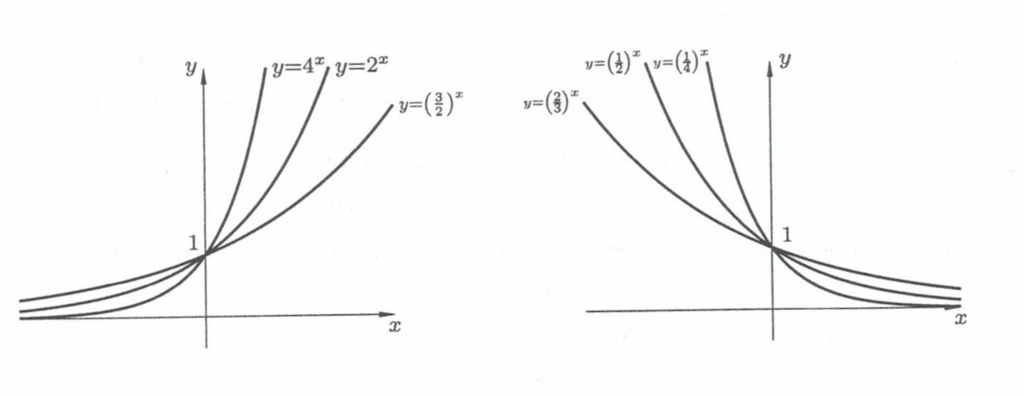
Funkcję postaci $f(x)=a^x$, gdzie $a\neq 1$ jest stałą dodatnią, nazywamy funkcją wykładniczą. Stałą a nazywamy podstawą, a zmienną x wykładnikiem funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości jest przedział $(0,\infty)$.

Przykładami funkcji wykładniczych są:

$$f(x)=4^x, \quad f(x)=2^x, \quad f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

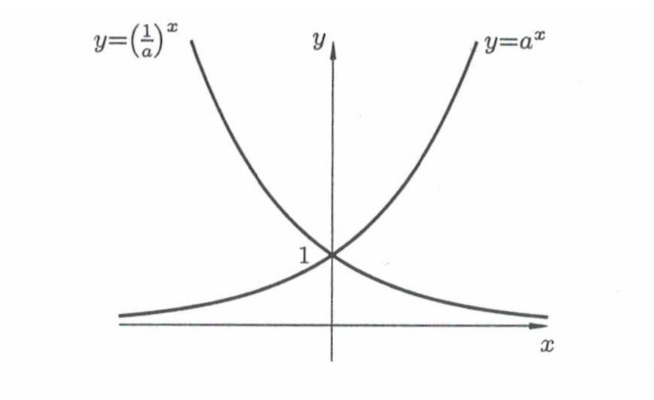
$$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x, \quad f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

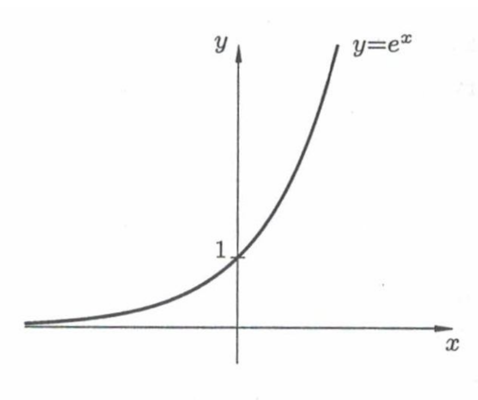
Wykres funkcji wykładniczej nazywamy krzywą wykładniczą. Wykresy przykładowych funkcji wykładniczych przedstawiamy poniżej:



Jeżeli $a > 1$, to funkcjia wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca, a jeżeli $0 < a < 1$ - malejąca. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = a^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ są symetryczne względem osi Oy. Wynika to z zależności $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Funkcją wykładniczą, której podstawą jest liczba $e \approx 2.7182$, tzn. funkcję $f(x) = e^x$ nazywamy exponent i oznaczamy $exp(x)$.





Przykład 3. Korzystając z wykresu funkcji $y = e^x$ naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = e^{-x}$; b) $y = e^{x+1}$; c) $y = 2e^x$;

d) $y = 1 + e^x$; e) $y = 2 - e^x$; f) $y = |e^x - 1|$.

3 Logarytmy

3.1 Własności logarytmów

Niech $0 < a \neq 1$ oraz niech x, y będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wtedy

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ - logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów;
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ - logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów;
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

  W szczególności mamy

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niech teraz $0 < a, b \neq 1$ oraz niech c będzie dowolną liczba dodatnią. Gdy chcemy zmienić podstawę logarytmu z a na b, to stosujemy wzór

- $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

Przykład 4. Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

a) $\log 20 + \log 50$; b) $\log_2 4^7$; c) $\log_4 \sqrt[4]{128}$;

d) $\dfrac{\log_5 256 - \log_5 16}{\log_5 8 - \log_5 2}$; e) $2\log_a 9 + \log_a \frac{1}{9} - 2\log_a 3$; f) $5\log_3 6 - 2\log_3 4 - \log_3 18$.

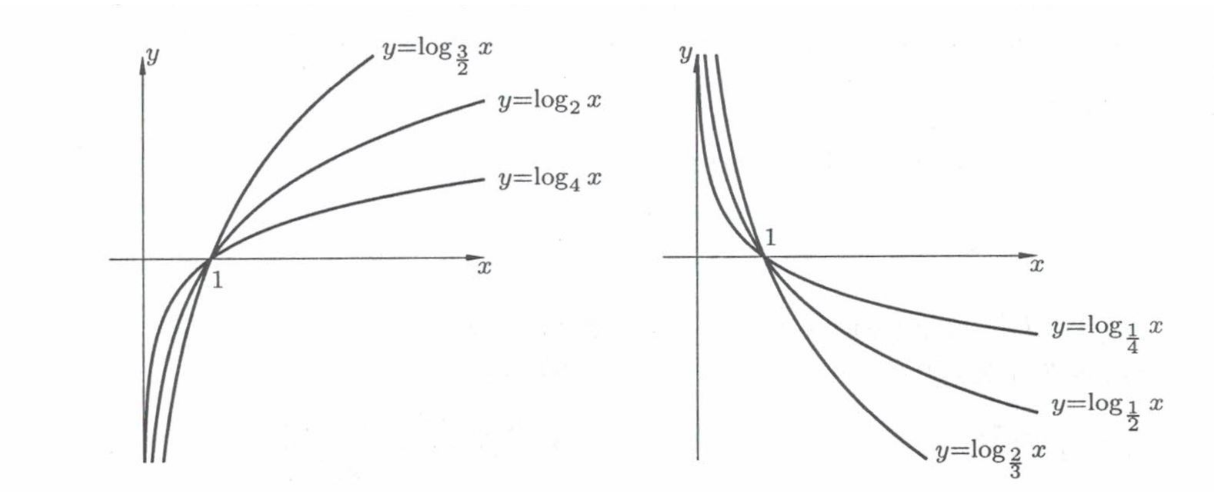
3.2 Funkcje logarytmiczne

Funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \neq 1$ jest stałą dodatnią, nazywamy funkcją logarytmiczną. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$. Funkcjami logarytmicznymi są np.

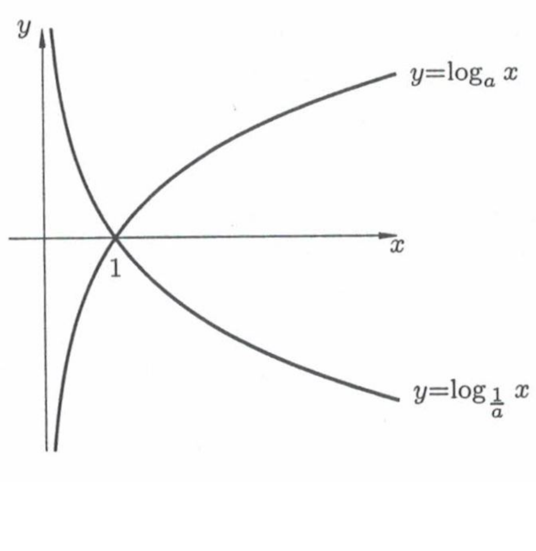
$$f(x) = \log_4 x, \quad f(x) = \log_2 x, \quad f(x) = \log x, \quad f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x,$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad f(x) = \ln x, \quad f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x.$$

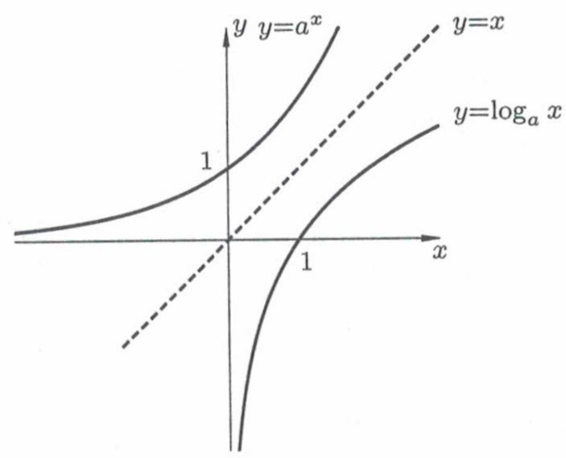
Wykres funkcji logarytmicznej nazywamy krzywą logarytmiczną. Wykresy przykladowych funkcji logarytmicznych przedstawiamy poniżej.



Funkcja logarytmiczna ma tylko jedno miejsce zerowe $x = 1$. Jeżeli podstawa logarytmu a jest większa od 1, to funkcja $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca, a jeżeli mniejsza od 1, to malejąca. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \log_a x$, $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ są symetryczne względem osi Ox. Wynika to z zależności $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$.



Ponadto z określenia logarytmu wynika, że funkcja $y = \log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $y = a^x$.



Przykład 5. Korzystając z wykresu funkcji $y = \log_2 x$ naszkicować wykresy funkcji:

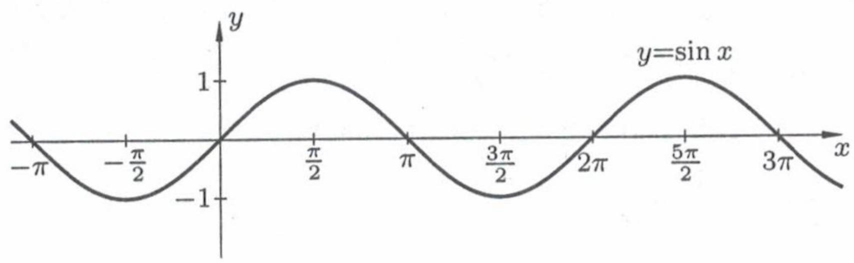
a) $y = \log_2 -x$; b) $y = \log_2 x + 2$; c) $y = \log_2 2x$;

d) $y = \log_2 \frac{2}{x}$; e) $y = \log_2 x^2$; f) $y = \log_2 \sqrt{x}$.

4 Funkcje trygonometryczne

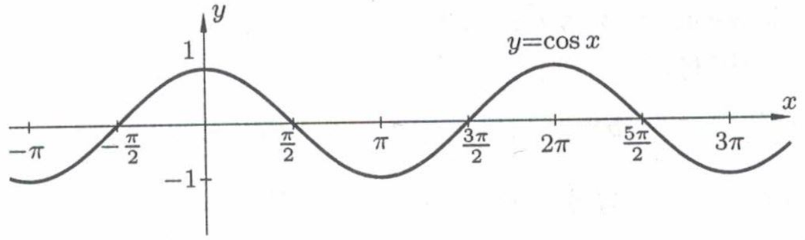
- **Sinus**

  Dziedziną funkcji $\sin x$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $[-1, 1]$. Sinus jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π oraz nieparzystą. Wykres funkcji $y = \sin x$ nazywamy sinosoidą.



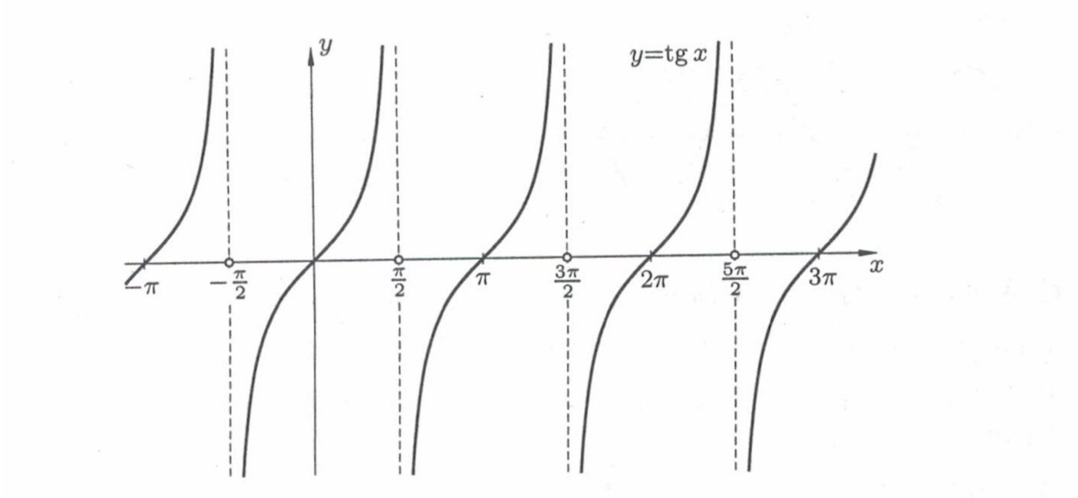
- **Cosinus**

  Dziedziną funkcji $\cos x$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $[-1, 1]$. Cosinus jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π oraz parzystą. Wykres funkcji $y = \cos x$ nazywamy cosinosoidą. Cosinusoida jest przesuniętą sinusoidą.



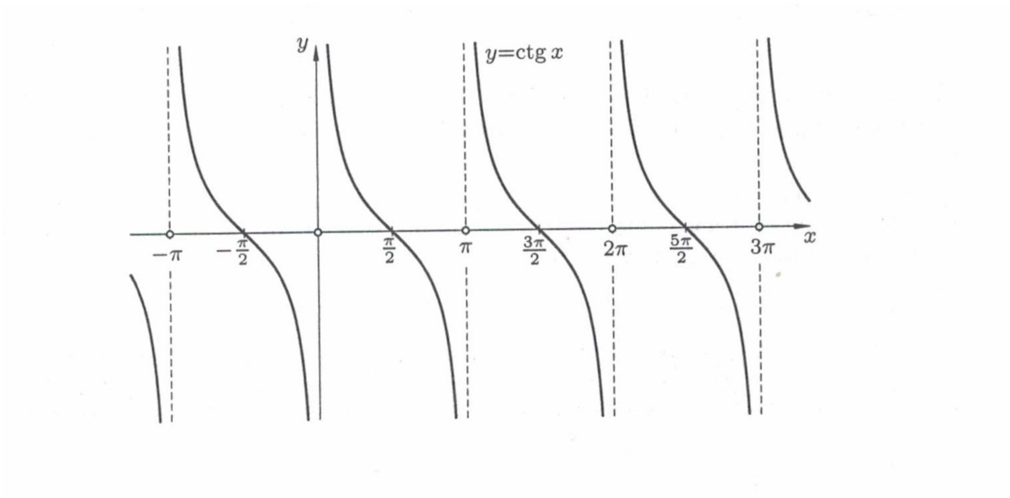
- **Tangens**

  Dziedziną funkcji $\operatorname{tg} x$ jest jest $\mathbb{R}$, z wyłączeniem liczb $\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zbiorem wartości funkcji $\operatorname{tg} x$ jest $\mathbb{R}$. Tangens jest funkcją okresową o okresie podstawowym π oraz nieparzystą. Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ nazywamy tangensoidą.



- **Cotangens**

  Dziedziną funkcji $\operatorname{ctg} x$ jest jest $\mathbb{R}$, z wyłączeniem liczb $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zbiorem wartości funkcji $\operatorname{ctg} x$ jest $\mathbb{R}$. Cotangens jest funkcją okresową o okresie podstawowym π oraz nieparzystą. Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ nazywamy cotangensoidą.



Przykład 6. Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

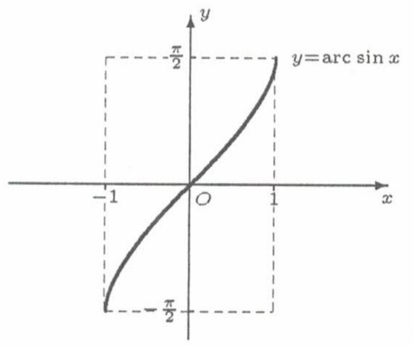
a) $y = \sin 2x$; b) $y = \sin \frac{x}{2}$; c) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

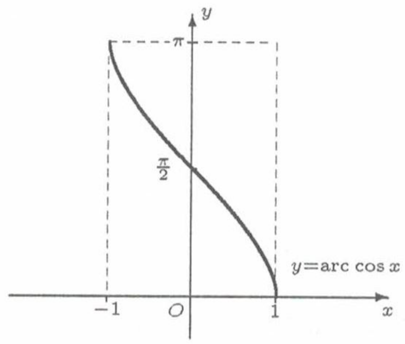
d) $y = 1 + \sin x$; e) $y = \sin |2x|$; f) $y = |\sin x|$.

5 Funkcje cyklometryczne

- Funkcją arcsin (arkus sinus) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji sinus obciętej do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dziedziną funkcji arcsin jest przedział $[-1, 1]$.
- Funkcją arccos (arkus cosinus) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji cosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$. Dziedziną funkcji arcsin jest przedział $[-1, 1]$.

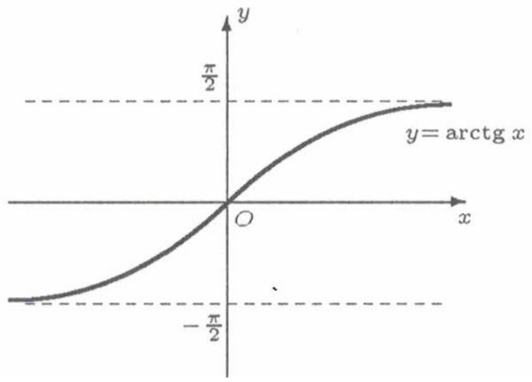
  Wykresy funkcji $y = \arcsin x$ oraz $y = \arccos x$ przedstawiamy poniżej.

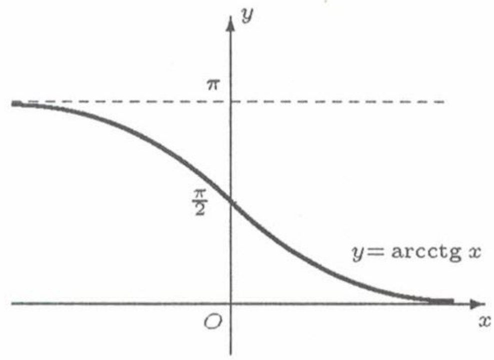




- Funkcją arctg (arkus tangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji tangens obciętej do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dziedziną funkcji arctg jest $\mathbb{R}$.
- Funkcją arcctg (arkus cotangens) nazywamy funkcję odwrotną do funkcji cotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$. Dziedziną funkcji arctg jest $\mathbb{R}$.

  Wykresy funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ oraz $y = \operatorname{arcctg} x$ przedstawiamy poniżej.





Podstawowe tożsamości funkcji cyklometrycznych

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla każdego} \quad x \in [-1, 1];$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla każdego} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Przykład 7. Obliczyć wartości podanych funkcji cyklometrycznych: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

Przykład 8. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych funkcji na zadanych przedziałach:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; b) $f(x) = \cos x$, $x \in [2\pi, 3\pi]$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; b) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (\pi, 2\pi)$.