Analiza matematyczna
Lista zadań nr 6 (Funkcje - wykresy, granica)

1. Narysuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ oraz $g(x) = \cos^2 x$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

2. Naszkicuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji
$$f_k(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin kx$$
dla $k = 1, 10, 100, 200$.

3. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji (korzystając z przeglądarki Google)
$$f(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2} - 1 \quad \text{oraz} \quad g(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2} - 1.$$

4. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji (korzystając z przeglądarki Google)
$$f(x) = \left(|x| + \sqrt{1 - x^2} - 1\right) \cos^2 200x \quad \text{oraz} \quad g(x) = \left(|x| - \sqrt{1 - x^2} - 1\right) \cos^2 200x.$$

5. Korzystając z definicji Heinego granicy jednostronnej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$, b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{|x^4 - 1|}{x - 1} = -4$, c) $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} \operatorname{sgn}(\sin x) = -1$.

6. Uzasadnić, że podane granice jednostronne funkcji nie istnieją:
a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos \frac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left\lfloor \sin \frac{1}{x} \right\rfloor$, c) $\lim\limits_{x \to 0^+} (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$.

7. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:
a) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sin x)^2$, b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

8. Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie uzasadnić podane równości
a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - e^{\frac{1}{|x|}}\right) = -\infty$, b) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1}{\sin^2 x} = \infty$.

9. Korzystając z definicji Heinego uzasadnić podane równości:
a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$, b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.

10. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oblicz granice:
a) $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{2x}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

11. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij równości:
a) $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \arctan \frac{1}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\lfloor x\sqrt{8} \rfloor}{\lfloor x\sqrt{2} \rfloor} = 2$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2^{-x} + \sin x}{2^{-x} + \cos x} = 1$.

12. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz następujące granice:
a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x}$; c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2^x - 1}{4^{\sqrt{x}} - 1}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \tan(2x))^{\cot x}$.

13. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji:
a) $y = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$; b) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$; c) $y = \frac{\sin^2 x}{x^3}$.