

Analiza matematyczna 1
Lista zadań nr 4 (Funkcje - podstawowe pojęcia)

1. Dla par zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c , B^c :
a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$; b) $A = (-\infty, 3)$, $B = [-1, \infty)$;
c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.
2. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:
a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x - 5}$; b) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + 1}$; c) $f(x) = \sqrt{81 - x^4}$;
d) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$.
3. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są parzyste lub nieparzyste:
a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; b) $f(x) = |x^3 + x|$; c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$.
4. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = 2 + 5x$, $(-\infty, \infty)$; b) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$.
5. Niech f będzie funkcją monotoniczną i dodatnią na danym przedziale. Uzasadnić, że wtedy funkcje $(-f)$, f^2 , $1/f$ też są monotoniczne. Naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $(-\infty, 0)$; b) $f(x) = \frac{-1}{1+2^x}$, $(-\infty, \infty)$;
c) $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)^2}$, $(0, \pi)$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$, $(4, \infty)$.
6. Podać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:
a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 2$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.
7. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych przedziałach:
a) $f(x) = x + x^3$, $(-\infty, \infty)$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$.
8. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:
a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; b) $f(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$, $(-2 \leq x \leq 0)$; c) $f(x) = 3^{x+1}$;
d) $f(x) = \log(x+3)$; e) $f(x) = -x^4$, $(x \leq 0)$; f) $f(x) = x^2 - 4x$, $(x \leq 2)$.