Logika i teoria mnogości/Wykład 3: Rachunek predykatów, przykład teorii w rachunku predykatów

From Studia Informatyczne

< Logika i teoria mnogości

Spis treści

Wprowadzenie

Na początku rozdziału o logice zdaniowej rozważaliśmy zdanie

Jeśli n jest liczbą pierwszą to n jest liczbą nieparzystą lub n jest równe **2**.

Opisaliśmy je wtedy formułą

$\mathrm{p} \Rightarrow (q \vee r).$

w której p, q, r odpowiadały odpowiednio zdaniom

1. n jest liczbą pierwszą,
2. n jest liczbą nieparzystą,
3. n jest równe **2**.

Podstawiając zamiast zdania n *jest liczbą pierwszą* zmienną zdaniową p ukrywamy jednak część informacji. Zdanie to mówi przecież o pewnej liczbie n, co więcej zdania p, q i r dotyczą tej samej liczby n. Zapiszmy więc $p(n)$ zamiast p aby podkreślić fakt że prawdziwość p zależy od tego jaką konkretną wartość przypiszemy zmiennej n. Zdanie $p(n)$ będzie prawdziwe jeśli za n podstawimy jakąś liczbę pierwszą i fałszywe w przeciwnym przypadku. Zgodnie z tą konwencją nasze zdanie przyjmie postać

$\mathrm{p}(\mathrm{n}) \Rightarrow (q(n) \vee r(n)).$

Zwróćmy uwagę jednak, że trudno ocenić prawdziwość zdania p dopóki nie podstawimy w miejsce n jakiejś konkretnej liczby. Z drugiej strony jednak zdanie jakąkolwiek liczbę nie postawimy w miejsce n zdanie będzie prawdziwe. Możemy więc przeformułować je jako

Dla każdej liczby naturalnej n, jeśli n jest liczbą pierwszą to n jest liczbą nieparzystą lub n jest równe **2**.

Aby móc formalnie zapisywać zdania takie jak powyższe wprowadzimy kwantyfikator $\forall$ który będzie oznaczał „dla każdego" oraz $\exists$ który będzie oznaczał „istnieje". Każde wystąpienie kwantyfikatora będzie dotyczyło pewnej zmiennej. W naszym przykładzie napiszemy

$\forall_n p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(n)). \quad (1.1)$

Możemy teraz powiedzieć, że powyższa formuła jest prawdziwa w zbiorze liczb naturalnych, gdzie $p(n), q(n), r(n)$ będą oznaczać odpowiednio n jest liczbą pierwszą, n jest liczbą nieparzystą, n jest równe **2**.

Przy tej samej interpretacji $p(n), q(n)$ moglibyśmy wyrazić zdanie

Istnieje parzysta liczba pierwsza.

jako

$\exists_n p(n) \wedge \neg q(n) \quad (1.2)$

Język rachunku predykatów

Podobnie jak dla rachunku zdań zaczniemy od zdefiniowania języka rachunku predykatów.

DEFINICJA 2.1.

Alfabet języka rachunku predykatów składa się z:

1. symboli stałych (a,b,c,)

2. symboli zmiennych (x,y,z,)

3. symboli funkcji $(f^1, f^2, f^3, \ldots, g^1, g^2, g^3, \ldots, h^1, h^2, h^3, \ldots)$

4. symboli predykatów $(p^1, p^2, p^3, \ldots, q^1, q^2, q^3, \ldots, r^1, r^2, r^3, \ldots)$
5. spójników logicznych: $\Rightarrow, \neg$
6. kwantyfikatorów: $\forall, \exists$
7. nawiasów i przecinków (niekonieczne)

Przyjmujemy, że cztery pierwsze alfabety są nieskończone, w tym sensie że nigdy nam nie braknie ich symboli. Z każdym symbolem funkcyjnym oraz predykatywnym jest związana liczba (którą zapisujemy w indeksie górnym) która będzie oznaczała liczbę jego argumetów.

Zwykle będą nam wystarczały symbole wymienione w nawiasach. Zanim przystąpimy do konstrukcji formuł zdefiniujemy tzw. termy.

Definicja 2.2. [Termy]

1. każdy symbol stałej jest termem
2. każdy symbol zmiennej jest termem
3. jeśli $t_1, .., t_n$ są termami, a α^n jest symbolem funkcyjnym, to $\alpha^n(t_1, .., t_n)$ jest termem
4. nic innego nie jest termem

Przykład 2.3.

Jeśli rozważymy język, w którym **1**,**2**,**3** są symbolami stałych, x, y są symbolami zmiennych a $+^2, \times^2, -^1, s^1$ są symbolami funkcji to poniższe napisy będą termami

1. $+^2(1, x)$
2. $-^1(3)$
3. $s^1(-^1(3))$
4. $\times^2(y, +^2(x, -^1(2)))$

Dla uproszczenia zapisu będziemy często pomijać liczby opisujące ilość argumentów symbolu. Symbole binarne będziemy czasem zapisywać w notacji infiksowej. Zgodnie z tą konwencją powyższe termy możemy zapisać jako

1. $1 + x$
2. -3
3. $s(-3)$
4. $y \times (x + (-3))$

Kiedy będziemy mówić o modelach zobaczymy, że termy będą interpretowane jako elementy rozważanej dziedziny, np. jeśli tą dziedziną będą liczby naturalne to termy będą interpretowane jako liczby naturalne. Formuły rachunku predykatów zdefiniujemy w dwóch krokach. Zaczniemy od formuł atomowych.

Definicja 2.4. [Formuły atomowe]

Jeśli $t_1, .., t_n$ są termami, a β^n jest symbolem predykatu, to $\beta^n(t_1, .., t_n)$ jest formułą atomową.

Przykład 2.5.

Kontynuując przykład dotyczący termów przyjmijmy dodatkowo, że w rozważanym języku $p^3, q^1, =^2$ są symbolami predykatów wtedy formułami atomowymi będą

1. $p^3(1 + x, -3, y \times (x + (-3)))$
2. $q^1(1)$
3. $=^2 (y \times (x + (-3)), 2)$

Stosując analogiczną konwencję jak dla termów powyższe formuły atomowe zapiszemy jako

1. $p(1 + x, -3, y \times (x + (-3)))$
2. $q(1)$
3. $y \times (x + (-3)) = 2$

Symbole predykatywne będą odpowiadały funkcjom, które elementom rozważanej dziedziny (lub parom, trójkom itd. elementów) przypisują wartość prawdy lub fałszu. Takie funkcje nazywamy predykatami. W przypadku liczb naturalnych możemy na przykład mówić o predykacie pierwszości $p(n)$, który przyjmuje wartość prawdy jeśli n jest liczbą pierwszą i fałszu w przeciwnym przypadku. Podobnie możemy mówić o binarnym predykacie równości (zwyczajowo oznaczanym przez $=$). Dla argumentów x, y przyjmuje on wartość prawdy wtedy kiedy x jest tą samą liczbą co y i fałszu w przeciwnym przypadku. Formuły atomowe będą opisywały proste zdania typu x jest liczbą pierwszą, x dzieli y, x jest równe y. Innymi słowy sprowadzają sie do stwierdzania czy dany zestaw argumentów ma pewną własność opisywaną predykatem.

Uwaga 2.6.

W oznaczeniach z poprzednich przykładów, napis $y \times (x + (-3)) = q(1)$ nie jest formułą atomową ani termem. Gdyby predykat q oznaczał np. bycie liczbą nieparzystą to powyższy napis powinniśmy przeczytać jako

$y \times (x + (-3))$ jest równe temu, że **1** jest liczbą nieparzystą.

Nie wolno porównywać elementów dziedziny (opisywanych przez termy) z wartościami prawdy i fałszu.

Z formuł atomowych będziemy budować bardziej złożone formuły zgodnie z poniższą definicją

DEFINICJA 2.7. [FORMUŁY RACHUNKU PREDYKATÓW]

1. Formuły atomowe są formułami.
2. Jeśli A i B są formułami, to $(A \Rightarrow B)$ oraz $\neg A$ są formułami.
3. Jeśli A jest formułą i x jest zmienną, to $\forall_x A$ jest formułą.
4. Nic innego nie jest formułą.

Przyjmujemy analogiczną konwencję dotyczącą nawiasowania jak dla rachunku zdań.

PRZYKŁAD 2.8.

W oznaczeniach z poprzednich przykładów poniższe napisy nie są formułami rachunku predykatów

- $x + 1$
- $(x = 1) \Rightarrow 2$
- $\forall_x (x + y)$
- $\forall_x (\neg x)$

Poniższe napisy są formułami rachunku predykatów

- $x = 1$
- $x = 1 \Rightarrow x = 2$
- $\forall_x q(x + y)$
- $\forall_x \neg (x = 0)$
- $\forall_x \forall_z \neg (x = 0)$
- $\forall_x \forall_y \neg (x = y)$

ĆWICZENIE 2.1

Z poniższych formuł wypisz wszytkie termy i formuły atomowe

1. $\forall_x \forall_y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\forall_x \neg s(x) = 0$
3. $\forall_x (\neg (x = 0) \Rightarrow (\exists_y s(y) = x))$
4. $\forall_x x + 0 = x$
5. $\forall_x \forall_y x + s(y) = s(x + y)$

Często będziemy używać dodatkowych spójników $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$. Ponieważ wszystkie dadzą się zdefiniować przy pomocy $\Rightarrow$ i $\neg$ nie włączamy ich do języka, a napisy w których występują będziemy traktować jako skróty. Ustalmy poniższe definicje

1. $\phi \vee \psi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \neg \phi \Rightarrow \psi$
2. $\phi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \neg (\phi \Rightarrow \neg \psi)$
3. $\phi \Leftrightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{\equiv} (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$

Kwantyfikator egzystencjalny

Wprowadzimy jeszcze jeden bardzo ważny skrót - kwantyfikator egzystencjalny, oznaczamy go przez $\exists$ i definiujemy w następujący sposób

$$\exists_x \phi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \neg (\forall_x \neg \phi)$$

Nieformalnie kwantyfikator egzystencjalny mówi o tym, że istnieje jakiś obiekt, który podstawiony w miejsce x uczyni formułę ϕ prawdziwą. Zdefiniowaliśmy go poprzez równoważne stwierdzenie które mówi że nieprawdą jest, że każdy obiekt podstawiony w miejsce x falsyfikuje ϕ. Zgodnie z powyższą konwencją formułę ze wstępu

$$\exists_n [p(n) \wedge \neg q(n)]$$

powinniśmy rozumieć jako

$\neg\forall_n \neg(p(n) \wedge \neg q(n))$.

Kwantyfikatory ograniczone

Kwantyfikatory ograniczone są skrótami które definujemy następująco

1. $\forall_{x:\phi}\psi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \forall_x \phi \Rightarrow \psi$
2. $\exists_{x:\phi}\psi \stackrel{\text{def}}{\equiv} \exists_x \phi \wedge \psi$

i czytamy

1. dla każdego x które spełnia ϕ spełnione jest ψ
2. istnieje x spełniające ϕ które spełnia ψ

Zgodnie z tą konwencją formułę 1.1 możemy zapisać następująco

$\forall_{n:p(n)} q(n) \vee r(n)$.

Podobnie formułę 1.2 zapiszemy jako

$\exists_{n:p(n)} \neg q(n)$

ĆWICZENIE 2.2

Wyeliminuj wszystkie skróty z napisu

$\exists_{x:\phi}\psi$

Zmienne wolne i związane

Jeśli x jest zmienną, a ϕ jest formułą to każda pozycję w napisie ϕ na której występuje symbol x i nie jest poprzedzony bezpośrednio kwantyfikatorem, nazywamy wystąpieniem zmiennej x. Wystąpienia dzielimy na *wolne* i *związanie*. Wystąpienie jest związane jeśli znajduje się „pod działaniem" jakiegoś kwantyfikatora.

DEFINICJA 2.9.

Rodzaj wystąpienia zmiennej w formule określamy zgodnie z poniższymi regułami:

1. Jeśli γ jest formułą atomową to wszystkie wystąpienia zmiennych w napisie γ są **wolne**.
2. Jeśli formuła jest postaci $\phi \Rightarrow \psi$ lub $\neg\phi$ to wystąpienia zmiennych pozostają takie same jak wystąpienia w w ϕ oraz ψ.
3. Jeśli formuła jest postaci $\forall_x\phi$ to wszystkie wystąpienia zmiennej x w $\forall_x\phi$ są **związane**, a wystąpienia innych zmiennych pozostają takie jak w ϕ.

PRZYKŁAD 2.10.

Rozważamy język z przykładu 2.5 (patrz przykład 2.5.)

1. w formule $y \times (x + (-3)) = x$ wszystkie wystąpienia zmiennych są wolne. Zmienna x ma dwa wystąpienia a zmienna y jedno.
2. w formule $\forall_x y \times (x + (-3)) = x$ wszystkie wystąpienia zmiennej y są wolne, i wszystkie wystąpienia zmiennej x są związane (nadal są tylko dwa wystąpienia x ponieważ zgodnie z definicją nie liczymy symbolu x w $\forall_x$)
3. w formule $\forall_x\exists_y y \times (x + (-3)) = x$ wszystkie wystąpienia zmiennych x oraz y są związane
4. w formule $x = 2 \Rightarrow \exists_x x = 2$ zmienna x ma jedno wystąpienie wolne (pierwsze) i jedno związane (drugie).
5. w formule $\forall_x(x = 2 \Rightarrow \exists_x x = 2)$ obydwa wystąpienia zmiennej x są związane.

ĆWICZENIE 2.3

W podanych poniżej formułach podkreśl wszystkie wolne wystąpienia zmiennych.

1. $p(z) \Rightarrow \exists_z p(z)$
2. $\forall_y((\exists_z q(y,z)) \Rightarrow q(y,z))$
3. $q(x,y) \Rightarrow \forall_x(q(x,y) \Rightarrow (\forall_y q(x,y)))$
4. $\forall_x\exists_y q(x,y) \Rightarrow \exists_x\forall_y q(x,y)$
5. $(\exists_z p(z)) \Rightarrow (\forall_z q(z,z) \vee \exists_x q(z,x))$

DEFINICJA 2.11.

Formułę ϕ nazywamy domkniętą jeśli żadna zmienna nie ma wolnych wystąpień w ϕ.

ĆWICZENIE 2.4

Które z formuł z ćwiczenia 2.3 są domknięte?

Podstawienia

Często będziemy w formułach zastępować wystąpienia zmiennych pewnymi termami. Częstym przykładem jest podstawienie w miejsce zmiennej pewnej stałej np. w formule $\forall_x x + y > x$, wstawiając w miejsce y stałą 1, otrzymamy $\forall_x x + 1 > x$.

DEFINICJA 2.10.

Przez $[x \leftarrow t]\phi$ będziemy oznaczać formułę powstałą przez zastąpienie wszystkich **wolnych** wystąpień zmiennej x w formule ϕ termem t. Pisząc $[x \leftarrow t]\phi$ zakładamy również, że w formule ϕ żadna ze zmiennych występujących w termie t nie ma związanych wystąpień w ϕ.

Aksjomatyka Rachunku Predykatów

Rachunek predykatów podobnie jak klasyczny rachunek zdań może być wprowadzony aksjomatycznie. Pierwsza grupa aksjomatów to aksjomaty klasycznego rachunku zdań. Druga dotyczy kwantyfikatora $\forall$ oraz jego interakcji z implikacją. Przypomnijmy, że kwantyfikator $\exists$ traktujemy jako pewien skrót zapisu.

DEFINICJA 3.1.

Schematy aksjomatów rachunku predykatów

1. (Aksjomaty logiki zdaniowej) Każda formuła pasująca do któregokolwiek z poniższych schematów jest tautologią
   (a) $(\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi))$
   (b) $(\phi \Rightarrow (\nu \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\phi \Rightarrow \nu) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \psi))$
   (c) $(\neg\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\neg\phi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow \phi)$
2. (Aksjomaty dotyczące kwantyfikatora)
   (a) Dla dowolnej formuły ϕ oraz termu t następująca formuła jest aksjomatem $\forall_x\phi \Rightarrow (\phi[x \leftarrow t])$ (uwaga na podstawienie)
   (b) Dla dowolnej formuły ϕ oraz zmiennej x, która nie ma wolnych wystąpień w ϕ następująca formuła jest aksjomatem $\phi \Rightarrow \forall_x\phi$
   (c) Dla dowolnych formuł ϕ i ψ aksjomatem jest formuła $\forall_x(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall_x\phi) \Rightarrow (\forall_x\psi))$

Poza tym do aksjomatów dorzucamy również wszystkie generalizacje formuł pasujących do powyższych schematów. Generalizacja formuły jest to ta sama formuła poprzedzona blokiem kwantyfikatorów ogólnych - dla dowolej formuły ϕ oraz dowolnych zmiennych $x_1, \ldots, x_k$ formuła $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_k} \phi$ jest generalizacją ϕ.

Podobnie jak w rachunku zdań dowodem formuły ϕ nazwiemy ciąg formuł $\phi_0, \ldots, \phi_n$ taki, że ϕ_n jest tym samym napisem co ϕ a każda formuła ϕ_i dla $i < n$ jest aksjomatem rachunku predykatów lub powstaje z dwóch formuł występujących wcześniej w dowodzie poprzez zastosowanie reguły Modus Ponens z Wykładu 2.

DEFINICJA 3.2.

Twierdzeniem rachunku predykatów nazywamy dowolną formułę którą da się dowieść z aksjomatów rachunku predykatów.

PRZYKŁAD 3.3.

Formalne dowody twierdzeń rachunku predykatów są zwykle skomplikowane. Dlatego w rozważanym przykładzie poczynimy kilka uproszczeń. Będziemy się zajmować formułą
$p(t) \Rightarrow \exists_x p(x)$.

Zamiast dowodzić dokładnie powyższą formułę, dowiedziemy podobny fakt, a mianowicie, że jeśli dołączymy do zbioru aksjomatów formułę $p(t)$, to będziemy w stanie udowodnić $\exists_x p(x)$. Twierdzenie o dedukcji, które można znaleźć w wykładzie Logika dla informatyków, mówi, że te podejścia są równoważne.

W poniższym dowodzie pominiemy również dowód formuły $\neg\neg\forall_x\neg p(x) \Rightarrow \forall_x\neg p(x)$. Formuła ta pasuje do schematu $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$. Łatwo więc sprawdzić, że formuła $\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań, a więc -- w myśl twierdzenia Posta (patrz Wykład 2, Twierdzenie 4.4) -- ma dowód. Po zastąpieniu w tym dowodzie zmiennej ϕ formułą $\forall_x\neg p(x)$, otrzymamy dowód formuły $\neg\neg\forall_x\neg p(x) \Rightarrow \forall_x\neg p(x)$.

Przestawiamy uproszczony dowód formuły $p(t) \Rightarrow \exists_x p(x)$:

1. $\neg\neg\forall_x\neg p(x) \Rightarrow \forall_x\neg p(x)$ (patrz komentarz powyżej)
2. $(\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)$ (aksjomat 2a)
3. $[(\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)] \Rightarrow ([\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow [(\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)])$ (aksjomat 1a)
4. $[\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow [(\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)]$ (MP z 2 i 3)
5. $([\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow [(\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)]) \Rightarrow [(\neg\neg\forall_x\neg p(x) \Rightarrow \forall_x\neg p(x)) \Rightarrow [(\neg\neg\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)]]$ (aksjomat 1b)
6. $(\neg\neg\forall_x\neg p(x) \Rightarrow \forall_x\neg p(x)) \Rightarrow [(\neg\neg\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)]$ (MP z 4 i 5)
7. $(\neg\neg\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)$ (MP z 6 i 1)
8. $p(t) \Rightarrow ([\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow p(t))$ (aksjomat 1a)
9. $p(t)$ (dołączyliśmy tę formułę jako aksjomat)
10. $[\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow p(t)$ (MP z 8 i 9)
11. $([\neg\neg\forall_x\neg p(x)] \Rightarrow p(t)) \Rightarrow [((\neg\neg\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)) \Rightarrow \neg\forall_x\neg p(x)]$ (aksjomat 1c)
12. $(\neg\neg\forall_x\neg p(x)) \Rightarrow \neg p(t)) \Rightarrow \neg\forall_x\neg p(x)$ (MP z 10 i 11)
13. $\neg\forall_x\neg p(x)$ (MP z 7 i 12)

Ostatnia formuła to dokładnie $\exists_x p(x)$ po rozpisaniu skrótu $\exists$.

Przykład teorii w rachunku predykatów

W oparciu o logikę predykatów możemy budować nowe teorie, dokładając inne, tzw. pozalogiczne aksjomaty. W językach wielu teorii pojawia się symbol predykatywny $=^2$, mający symbolizować równość. Ponieważ zwykle wymagamy aby te same własności były spełnione dla $=^2$, zostały wyodrębnione specjalne aksjomaty dla równości. Aksjomaty, te to wszystkie formuły oraz ich generalizacje odpowiadające poniższym schematom:

1. $t = t$, dla każdego termu t

2. $(t_1 = t_1' \wedge \ldots \wedge t_k = t_k') \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1', \ldots, t_k')$, dla dowolnego symbolu funkcyjnego f, oraz dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k, t_1', \ldots, t_k'$, gdzie k jest ilością argumentów symbolu f

3. $(t_1 = t_1' \wedge \ldots \wedge t_k = t_k') \Rightarrow (p(t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow p(t_1', \ldots, t_k'))$, dla dowolnego symbolu predykatywnego p, oraz dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k, t_1', \ldots, t_k'$, gdzie k jest ilością argumentów symbolu p

Rozważmy język, w którym mamy jeden binarny symbol predykatywny $=^2$, jeden symbol stałej 0 oraz symbole funkcyjne $s^1, +^2, \times^2$. Zgodnie z przyjętą konwencją termy i formuły będziemy zapisywać infixowo. Do aksjomatów logicznych, oraz aksjomatów dla równości, dokładamy następujące aksjomaty:

1. $\forall_x \forall_y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
2. $\forall_x \neg s(x) = 0$
3. $\forall_x (\neg(x = 0) \Rightarrow (\exists_y s(y) = x))$
4. $\forall_x x + 0 = x$
5. $\forall_x \forall_y x + s(y) = s(x + y)$
6. $\forall_x x \times 0 = 0$
7. $\forall_x \forall_y x \times s(y) = x \times y + y$

Teorią Q nazwiemy wszystkie formuły w ustalonym języku które da się udowodnić z aksjomatów logiki predykatów z dołączonymi aksjomatami równości oraz 1-7. Nietrudno się przekonać, że wszystkie twierdzenia teorii Q są prawdziwe w liczbach naturalnych, przy naturalnej interpretacji występujących symboli ($s(x)$ interpretujemy jako $x + 1$). W następnym wykładzie (patrz Wykład 4) przedstawiamy aksjomatyczną teorię w rachunku predykatów nazywaną teorią mnogości ZFC.

Modele

Dotychczas wprowadziliśmy rachunek predykatów aksjomatycznie. Zaletą takiego definiowania jest niewielka ilość potrzebnych pojęć. Z drugiej strony jednak dowody z aksjomatów są żmudne i nie sprzyjają budowaniu intuicji. W przypadku rachunku zdań widzieliśmy, że ten sam zbiór formuł można równoważnie zdefiniować za pomocą matrycy Boolowskiej z Wykładu 2 . Niestety w przypadku rachunku predykatów nie istnieje taka skończona struktura, która pozwalałaby nam stwierdzać czy formuła jest twierdzeniem. Zobaczymy jednak, że pewne struktury warto rozważać. Mówiąc o modelach będziemy musieli użyć naiwnej teorii zbiorów opisanej w pierwszym rozdziale. Decydujemy się na to nadużycie w celu zdobycia dobrych intuicji i sprawności w posługiwaniu się kwantyfikatorami.

PRZYKŁAD 4.1.

Rozważmy następujące zdanie

$\forall_x \exists_y x \prec y$

Sytuacja 1.

Przypuśćmy, że to zdanie mówi o liczbach naturalnych, a $x \prec y$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy gdy liczba x jest silnie mniejsza od liczby y. Wtedy zdanie to powinniśmy uznać za nieprawdziwe, gdyż dla liczby **0** nie istnieje silnie mniejsza liczba naturalna.

Sytuacja 2.

Przypuśćmy, że to zdanie mówi o liczbach całkowitych, a $x \prec y$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy gdy liczba x jest silnie mniejsza od liczby y. Wtedy zdanie to powinniśmy uznać prawdziwe. Istotnie, dla każdej liczby całkowitej x możemy dobrać liczbę y (na przykład równą $x - 1$) która jest od niej silnie mniejsza.

Sytuacja 3.

Przypuśćmy, że to zdanie mówi o liczbach naturalnych, a $x \prec y$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy gdy liczba x jest równa liczbie y. Wtedy zdanie to powinniśmy uznać prawdziwe (do każdej liczby x możemy dobrać liczbę y tak aby była równa x).

Powyższe przykłady pokazują różne interpretacje tej samej formuły. Wydaje się również że prawdziwość zdania zmienia się w zależności od interpretacji. Aby mówić o interpretacji danej formuły powinniśmy powiedzieć w jakim zbiorze będziemy interpretować zmienne i stałe (w naszym przykładzie były to kolejno zbiory N, Z, N) oraz jak interpretujemy symbole funkcyjne i predykatywne (w naszym przykładzie występował jedynie symbol predykatywny $\prec$ który był interpretowany kolejno jako silna mniejszość, silna mniejszość, równość). Poniżej definiujemy formalnie pojęcie modelu.

DEFINICJA 4.2. [MODEL]

Modelem języka rachunku predykatów nazywamy $M = (D, I)$, gdzie:

1. D - jest niepustym zbiorem (dziedziną).
2. $\mathbf{I}$ - jest interpretacją symboli języka taką, że:

   (a) dla symboli stałych: $I(c) \in D$ (symbole stałych są interpretowane jako elementy dziedziny)

   (b) dla symboli funkcyjnych: $I(f) : D^k \rightarrow D$, gdzie k jest ilością argumentów f (symbole funkcyjne są interpretowane jako funkcje z potęgi dziedziny w dziedzinę)

   (c) dla symboli predykatów: $I(p) : D^k \rightarrow 0, 1$, gdzie k jest ilością argumentów p (symbole predykatywne są interpretowane jako funkcje przekształcające ciągi elementów z dziedziny w prawdę lub fałsz)

Definicja 4.3.

Mówimy, że model M jest *odpowiedni* dla formuły ϕ jeśli są w nim zdefiniowane interpretacje wszystkich symboli stałych funkcji oraz predykatów występujących w formule ϕ.

Zanim ustalimy co to znaczy że formuła jest prawdziwa w modelu zdefiniujemy tzw. wartościowanie zmiennych

Definicja 4.4.

Wartościowanie zmiennych modelu $M = (D, I)$ to funkcja która zmiennym przypisuje wartości dziedziny.

Jeśli ustalimy już wartościowanie zmiennych w modelu to możemy też mówić o wartościach przyjmowanych przez termy.

Definicja 4.5. [Wartościowanie termów]

Przy ustalonym modelu $M = (D, I)$ wartościowanie zmiennych σ możemy rozszerzyć na wszytekie termy. Oznaczymy je przez $\hat{\sigma}$. Rozszerzenie definiujemy w następujący sposób

1. jeśli term t jest zmienną, $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)$
2. jeśli term t jest stałą, to $\hat{\sigma}(t) = I(t)$ (stałe wartościujemy zgodnie z interpretacją w modelu)
3. jeśli term t jest postaci $f(t_0, .., t_n)$, to

$$\hat{\sigma}(f(t_0, .., t_n)) = I(f)(\hat{\sigma}(t_0), .., \hat{\sigma}(t_n))$$

   czyli aby poznać wartość termu najpierw obliczamy wartości poddtermów a potem obliczamy wartość funkcji odpowiadającej w modelu M symbolowi f na wartościach poddtermów. Funkcję wartościującą termy będziemy często oznaczali tym samym symbolem co wartościowanie zmiennych.

Przykład 4.6.

Przypuśćmy, że w rozważanym języku symbol o jest symbolem stałej, symbole $s, +, \times$ są symbolami funkcji, symbole $<, =$ są symbolami predykatów, x, y, z są zmiennymi. Ustalmy model w którym dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, a symbole są interpretowane zgodnie z ich zwyczajowym znaczeniem (s będziemy interpretować jako jednoargumentową funkcję która każdej liczbie przypisuje liczbę większą o jeden, o interpretujemy jako **0**). Jeśli ustalimy ocenę zmiennych tak, że $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 3, \sigma(z) = 5$ to

1. term $x + y$ będzie wartościowany na **5**
2. term $s(x)$ będzie wartościowany na **3**
3. term o będzie wartościowany na **0** (zgodnie z interpretacją stałych)

4 term $s(o) \times s(z)$ będzie wartościowany na **6**

Definicja 4.7. [Waluacja formuł]

Zdefiniujemy teraz prawdziwość formuł w ustalonym modelu $M = (D, I)$ przy ustalonym wartościowaniu zmiennych σ.

1. Jeśli formuła jest postaci $p(t_0, .., t_n)$ (czyli jest formułą atomową), to jest ona prawdziwa wtedy i tylko wtedy jeśli wartością predykatu odpowiadającego w modelu M symbolowi p (czyli $I(p)$) na elementach dziedziny odpowiadających termom $t_0, \ldots, t_n$ jest prawdą.
2. Jeśli formuła jest postaci $A \Rightarrow B$, to jest ona prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy formuła A jest wartościowana na fałsz lub formuła B jest wartościowana na prawdę (zgodnie z tabelą dla implikacji)
3. Jeśli formuła jest postaci $\neg A$ to jest ona prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy formuła A jest wartościowana na fałsz (zgodnie z tabelą dla negacji)
4. Jeśli formuła jest postaci $\forall_x A$, to jest ona prawdziwa jeśli prawdziwe jest A i dla każdego wartościowania zmiennych różniącego się od σ co najwyżej interpretacją symbolu x prawdziwe jest A.
5. Jeśli formuła jest postaci $\exists_x A$, to jest ona prawdziwa jeśli istnieje ocena zmiennych różniąca się od σ co najwyżej interpretacją symbolu x taka, że przy tej ocenie prawdziwe jest A.

Interpretacje kwantyfikatorów, jest w gruncie rzeczy bardzo intuicyjna. Formuła $\forall_x A$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego elementu dziedziny „podstawionego" w miejsce x w formule A prawdziwa jest formuła A (uwaga! podstawiamy jedynie w miejsca wolnych wystąpień x). Analogicznie formuła $\exists_x A$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taki element dziedziny, który „podstawiony" w miejsce x w formule A uczyni ją prawdziwa. Dotąd rozważaliśmy kwantyfikator $\exists$ jako skrót pewnego napisu, jednak ze względu na jego naturalną interpretacje zdecydowaliśmy się dodać go do definicji waluacji formuł. W ćwiczeniu **4** pokażemy, że zdefiniowana powyżej waluacja formuł z kwantyfikatorem egzystencjalnym jest zgodna z waluacją zdefiniowanego wcześniej skrótu.

PRZYKŁAD 4.8.

Możemy teraz powiedzieć, że formuła

$$\forall_y (x < y \vee x = y)$$

jest prawdziwa w modelu z Przykładu 4.6 przy ocenie zmiennych σ_1 takiej, że $\sigma_1(x) = 0$, oraz że jest fałszywa w tym samym modelu dla przy ocenie zmiennej σ_2 takiej, że $\sigma_2(x) = 7$ (bo na przykład wartościując y na **3** formuła $x < y \vee x = y$ nie będzie prawdziwa).

Istnieją jednak formuły które są prawdziwe w modelu z Przykładu 4.6 niezależnie od oceny zmiennych. Przykładem może być

$$\forall_y (x < y + x \vee y = o).$$

DEFINICJA 4.9.

Formuła ϕ jest prawdziwa w modelu M jeśli jest prawdziwa w tym modelu przy każdej ocenie zmiennych. Mówimy wtedy, że model M jest **modelem formuły** ϕ.

Ciekawe, że istnieją również formuły które są prawdziwe we wszystkich modelach. Rozważmy formułę

$$(\forall_x p(x)) \Rightarrow (\exists_x p(x)). \quad (4.1)$$

Rozważmy dowolny model M odpowiedni dla powyższej formuły (odpowiedni to znaczy taki który ustala interpretację wszystkich symboli stałychm, funkcji i predykatów występujących w formule, w tym przypadku symbolu predykatywnego p). Jeśli w tym modelu nie jest prawdziwa formuła $(\forall_x p(x))$ to cała implikacja 4.1 jest prawdziwa a więc wszystkie te modele są modelami formuły 4.1. Pozostają więc do rozważenia te modele w których prawdziwe jest $(\forall_x p(x))$. Weźmy dowolny taki model i oznaczmy go przez M. Aby pokazać, że $(\exists_x p(x))$ jest prawdziwe w M wystarczy wskazać że istnieje w dziedzinie taka wartość, że podstawiona w miejsce x uczyni predykat oznaczony przez p prawdziwym. Formuła $(\forall_x p(x))$ jest prawdziwa w M więc każda wartość podstawiona pod x czyni predykat odpowiadający p prawdziwym. Ponieważ dziedzina modelu M zgodnie z definicją 4.2 nie może być pusta więc istnieje przynajmniej jeden element dziedziny. Ponieważ w dziedzinie istnieje przynajmniej jeden element, oraz że formuła $p(x)$ jest prawdziwy niezależnie od tego co podstawimy w miejsce x, to rzeczywiście istnieje taki element dziedziny, który podstawiony w miejsce x uczyni formułę $p(x)$ prawdziwą. A więc formuła $\exists_x p(x)$ również jest prawdziwa. Wobec tego cała implikacja 4.1 jest prawdziwa w M. Pokazaliśmy więc, że formuła 4.1 jest prawdziwa w każdym modelu.

DEFINICJA 4.10.

Formułę rachunku predykatów nazywamy *tautologią* rachunku predykatów jeśli jest prawdziwa w każdym odpowiednim dla niej modelu .

Podobnie jak klasycznym rachunku zdań, w rachunku predykatów również tautologie okazują się tym samym co twierdzenia. Mówi o tym następujące klasyczne twierdzenie udowodnione przez Kurta Gödela.

Kurt Goedel (1906-1978)
Zobacz biografię

TWIERDZENIE 4.11. [KURT GÖDEL]

Formuła rachunku predykatów jest tautologią rachunku predykatów wtedy i tylko wtedy gdy jest twierdzeniem rachunku predykatów.

Dowód powyższego twierdzenia jest przedstawiony na wykładzie Logika dla informatyków. Zauważmy, że zgodnie z powyższym twierdzeniem aby udowodnić, że formuła nie jest twierdzeniem rachunku predykatów wystarczy wskazać model w którym nie jest prawdziwa.

ĆWICZENIE 4.1

Rozważmy model M, którego dziedziną będą liczby naturalne, oraz w którym jest jeden predykat binarny oznaczony symbolem p, który przyjmuje wartość prawdy jeśli pierwszy z jego argumentów dzieli drugi. Napisz formuły które w modelu M są równoważne następującym zdaniom (w kolejnych formułach można wykorzystywać skróty dla formuł zdefiniowanych wcześniej)

1. x jest równe y
2. x jest zerem
3. x jest jedynką
4. x jest liczbą pierwszą
5. x jest kwadratem pewnej liczby pierwszej
6. x jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych
7. x jest iloczynem dwóch liczb pierwszych
8. x jest potęgą liczby pierwszej
9. dla każdych dwóch liczb istnieje ich największy wspólny dzielnik
10. dla każdych dwóch liczb istnieje ich najmniejsza wspólna wielokrotność

11 liczby x i y są względnie pierwsze

ĆWICZENIE 4.2

Rozważmy model $\mathcal{M}$, którego dziedziną będą wszytkie punkty, odcinki i okręgi płaszyczny, oraz w którym jest jeden predykat binarny oznaczony symbolem p, który przyjmuje wartość prawdy jeśli jego argumenty mają przynajmniej jeden punkt wspólny. Napisz formuły które w modelu $\mathcal{M}$ są równoważne następującym zdaniom (w kolejnych formułach można wykorzystywać skróty dla formuł zdefiniowanych wcześniej)

1. x jest równe y
2. x jest nadzbiorem y
3. x jest punktem
4. x jest odcinkiem
5. x jest okręgiem
6. x jest równoległe do y
7. x i y mają dokładenie jeden punkt wspólny
8. okręgi x i y są do siebie styczne
9. okręgi x i y są do siebie wewnętrznie styczne i okrąg x jest okręgiem wewnętrznym
10. okręgi x i y są do siebie zewnętrzenie styczne
11. punkt x jest końcem odcinka y
12. odcinek x jest styczny do okręgu y
13. okręgi x i y mają taką samą średnicę
14. okrąg x ma średnicę mniejszą niż okrąg y

ĆWICZENIE 4.3

Napisz formuły które mówią:

- każdy odcinek ma dokładnie dwa końce
- dla każdego okręgu wszystkie jego średnice przecinają się w dokładnie jednym punkcie
- dla dowolnego odcinka istnieje dłuższy odcinek, który go zawiera
- dla dowolnych trzech punktów niewspółliniowych istnieje okrąg który przechodzi przez wszystkie trzy punkty
- istnieją dwa okręgi, które przecinają się w dokładnie **5** punktach.

ĆWICZENIE 4.4

Dla każdej z poniższych formuł znajdź model w którym jest prawdziwa oraz model w którym jest fałszywa

1. $\forall_x \forall_y p(x,y) \Rightarrow p(y,x)$
2. $(\forall_x \exists_y p(x,y)) \Rightarrow \exists_y \forall_x p(x,y)$
3. $(\forall_x (p(x) \vee q(x))) \Rightarrow (\forall_x (p(x)) \vee \forall_x q(x))$
4. $\forall_y [(\forall_x (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge q(y)) \Rightarrow p(z)]$
5. $\forall_x \forall_y (p(x,y) \Rightarrow \exists_z (p(x,z) \wedge p(z,y))$

ĆWICZENIE 4.5

Udowodnij, że w dowolnym ustalonym modelu $\mathcal{M}$ prawdziwe są następujące formuły

1. $\forall_x p(x) \Rightarrow (p(c))$
2. $p(c) \Rightarrow \forall_x p(c)$
3. $\forall_x (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall_x p(x)) \Rightarrow (\forall_x q(x)))$
4. $\exists_x p(x) \Leftrightarrow \neg \forall_x \neg p(x)$
5. $\neg \forall_x p(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg p(x)$
6. $\forall_x r(x, f(x)) \Rightarrow \forall_x \exists_y r(x,y)$

ĆWICZENIE 4.6

Rozważmy formułę

$\forall_x (\neg g(x,x) \Leftrightarrow g(b,x))$

(golibroda b goli wszystkich tych i tylko tych, którzy nie golą się sami). Udowodnij, że nie istnieje model dla powyższej formuły.