Analiza matematyczna
Lista zadań nr 1

1. Niech p, q, r będą zmiennymi zdaniowymi. Znak $\models \phi$ oznacza, że ϕ jest tautologią. Pokaż, że:

   a) $\models (\neg(p \wedge \neg p))$,

   b) $\models (p \vee \neg p)$,

   c) $\models ((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (łączność spójników),

   d) $\models ((p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,

   e) $\models ((p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$,

   f) $\models (p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (prawo eliminacji implikacji),

   g) $\models (\neg(p \to q)) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

   Podaj interpretację dwóch pierwszych tautologii.

2. Pokaż, że jeśli Jan umie fizykę i Jan nie umie fizyki, to Jan umie biologię.

   a) Sformułuj odpowiednią tautologię. b) Podaj inne przykłady zastosowania tej tautologii.

3. Niech $\phi \equiv \psi$ oznacza, że $\models (\phi \Leftrightarrow \psi)$. Pokaż, że dla dowolnych zdań ϕ, ψ, η mamy

   a) $\phi \equiv \phi$ (zwrotność)

   b) Jeśli $\phi \equiv \psi$ to $\psi \equiv \phi$ (symetria)

   c) Jeśli $\phi \equiv \psi$ oraz $\psi \equiv \eta$ to $\phi \equiv \eta$ (przechodniość).

4. Pokaż, że spójniki $\to, \wedge, \Leftrightarrow$ można zdefiniować za pomocą spójników $\vee$ oraz $\neg$. Pokaz również, że spójniki $\to, \vee, \Leftrightarrow$ można zdefiniować za pomocą spójników $\wedge$ oraz $\neg$.

5. Zapisz, stosując notację matematyczną, następujące zdania i formuły:

   a) p jest liczbą pierwszą,

   b) istnieje najmniejsza liczba naturalna,

   c) nie istnieje największa liczba naturalna,

   d) nie istnieje najmniejsza liczba rzeczywista dodatnia.

   Zastosuj znane prawa logiki do uproszczenia tych wyrażeń.

6. Podaj interpretację następujących zdań

   a) $(\forall x \in (0, \infty))(\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x)$,

   b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$,

   c) $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \vee x = y \vee x > y)$,

   d) $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})(a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$,

   e) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \leq x)$.

7. Niech $R(x, y)$ oznacza, że "x jest rodzicem y". Niech $K(x)$ oznacza, ze "x jest kobietą". Zdefiniuj, korzystając z notacji matematycznej oraz predykatów R i K, następujące predykaty:

   a) "x jest dziadkiem y", b) "x jest siostrą y",

   c) "x jest bratem y", d) "x jest ciotką y".