Analiza matematyczna 1
Wykład 11, Pochodne funkcji cd. (własności)

1 Twierdzenia o funkcjach z pochodnymi

Twierdzenie 1. *(Rolle'a)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki

1. jest ciągła na $[a, b]$,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b),
3. $f(a) = f(b)$,

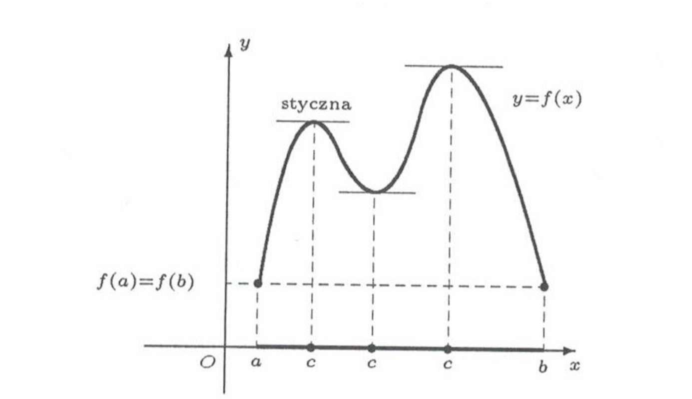
to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

UWAGA! Warunek 1. i 3. w powyższym twierdzeniu można osłabić zastępując je warunkiem

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną wewnętrz przedziału i przyjmującej jednakowe wartości na jego końcach, istnieje punkt, w którym styczna jest pozioma, co przedstawia poniższy rysunek.



- **Przykład 1.** Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$. Jeżeli spełniają, to wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna wskazanych funkcji zeruje się. Narysować wykresy tych funkcji:

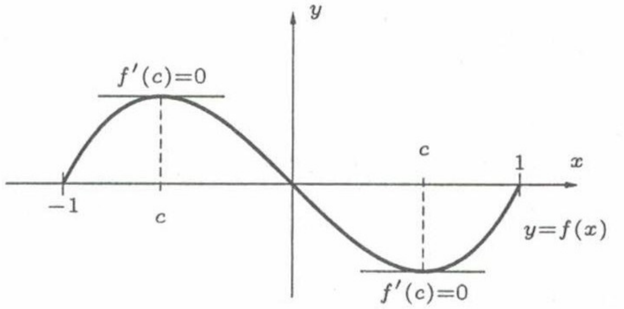
a) $f(x) = x\left(x^2 - 1\right)$; **b)** $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$;

c) $h(x) = (|x| - 1)^2$; **d)** $p(x) = \dfrac{1 - x^2}{x + 2}$.

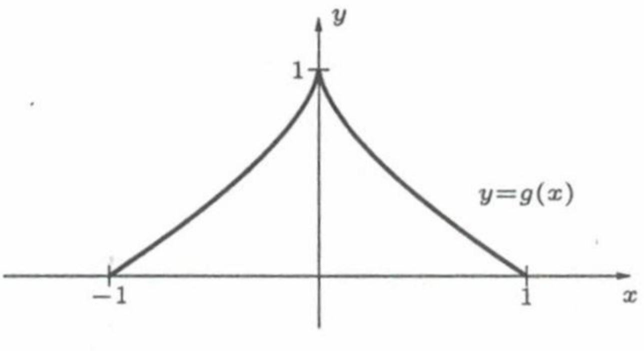
Rozwiązanie. Funkcja spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, gdy jest ciągła na przedziale domkniętym, ma pochodną we wnętrzu tego przedziału, a jej wartości na końcach przedziału są jednakowe. Przy tych założeniach istnieje punkt należący do wnętrza rozpatrywanego przedziału, w którym pochodna danej funkcji się zeruje.

a) Funkcja $f(x) = x\left(x^2 - 1\right)$ jest ciągła i ma pochodną właściwą na przedziale $[-1, 1]$, bo jest wielomianem. Ponadto $f(-1) = f(1) = 0$. Funkcja f spełnia zatem założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$. Ponadto

$$f'(c) = 3c^2 - 1 = 0 \iff c = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ lub } c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



b) Funkcja $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$. Nie ma jednak pochodnej na przedziale $(-1, 1)$, bo $g'(0)$ nie istnieje. Mamy bowiem $g'_+(0) = -\infty$, $g'_-(0) = \infty$. Z powyższych faktów wynika, że funkcja g nie spełnia założeń twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.



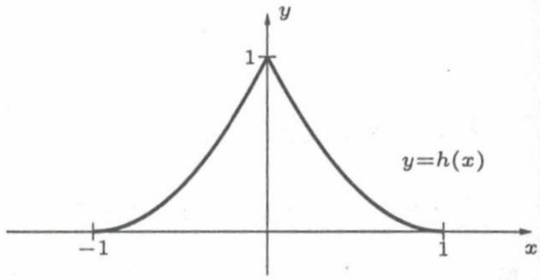
c) Funkcja

$$h(x) = (|x| - 1)^2 = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{dla } x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

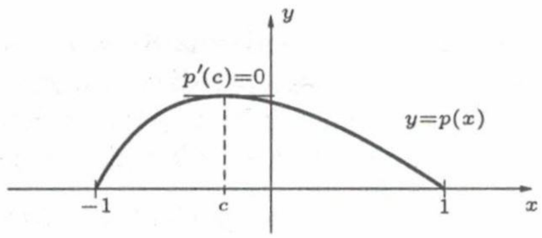
jest ciągła na przedziale $[-1, 1]$. Nie ma jednak pochodnej na przedziale $(-1, 1)$, bo $h'(0)$ nie istnieje. Mamy bowiem

$$h'_+(0) = 2(x-1)|_{x=0} = -2, \quad h'_-(0) = 2.$$

Zatem funkcja h nie spełnia założeń twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$.



d) Funkcja $p(x) = \dfrac{1-x^2}{x+2}$ jest ciągła i ma pochodną właściwą $p'(x) = -\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ na przedziale $[-1, 1]$. Ponadto jej wartości w punktach -1 i 1 są równe. Zatem funkcja p spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rolle'a.



Ponieważ

$$p'(c) = -\frac{c^2+4c+1}{(c+2)^2} = 0 \iff c = \sqrt{3} - 2 \text{ lub } c = -\sqrt{3} - 2,$$

więc jedynym punktem przedziału, w którym zeruje się pochodna jest $c = \sqrt{3} - 2$.

Twierdzenie 2. *(Lagrange'a)*

Jeżeli funkcja f spełnia warunki

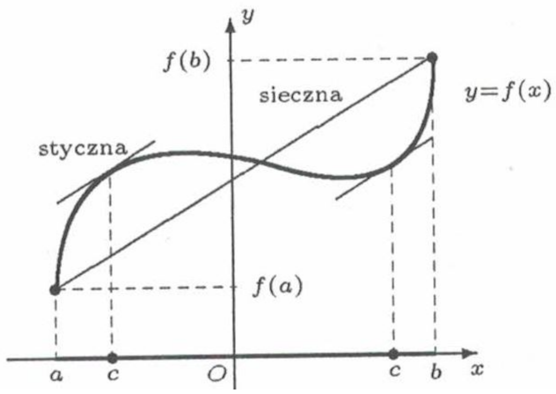
1. jest ciągła na $[a, b]$,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b),

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a

Na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną wewnętrz przedziału, istnieje punkt, w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej łączącej jego końce, co przedstawia poniższy rysunek.



● **Przykład 2.** Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty:

a) $f(x) = \arcsin x,\ [-1, 1]$; **b)** $g(x) = \ln x,\ [1, e]$.

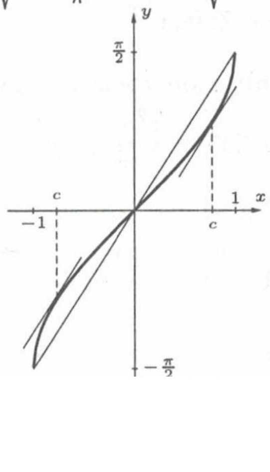
Rozwiązanie. Rozpoczniemy od sformułowania twierdzenia Lagrange'a: jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz ma pochodną na przedziale otwartym (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

a) Funkcja $f(x) = \arcsin x$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[-1, 1]$ oraz ma pochodną $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ na przedziale otwartym $(-1, 1)$, zatem spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a. Teza tego twierdzenia dla funkcji f ma postać

$$\bigvee_{c \in (-1,1)} \frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \left.(\arcsin x)'\right|_{x=c}.$$

Stąd $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - c^2}}$, czyli $c = -\sqrt{1 - \dfrac{4}{\pi^2}}$ lub $c = \sqrt{1 - \dfrac{4}{\pi^2}}$.



b) Funkcja $g(x) = \ln x$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[1, e]$ oraz ma pochodną $g'(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale otwartym $(1, e)$. Spełnia zatem założenia twierdzenia Lagrange'a. Teza tego twierdzenia dla funkcji g ma postać

$$\bigvee_{c\in(1,e)} \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = (\ln x)'\big|_{x=c}.$$

Stąd $\frac{1}{e-1} = \frac{1}{c}$, czyli $c = e - 1$.