Analiza matematyczna
Lista zadań nr 3 (Zbiory i ciągi)

1. Zbadaj, czy podane zbiory są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x < 0\}$; b) $B = \left\{\frac{2n}{3+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; $C = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, p < q\right\}$.
2. Zbadaj, czy podane zbiory mają elementy największe, najmniejsze. Znajdź kresy tych zbiorów:
   a) $A = (0, 1) \cup \{5\}$; b) $B = \left\{\frac{4n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$; c) $C = \left\{\frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
   d) $D = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; $E = [\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$.
3. Zbadaj, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:
   a) $a_n = \frac{2+\sin n}{3-2\cos n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{3n-1}$; c) $a_n = 2 - \sqrt{n}$;
   d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; e) $a_n = \frac{1}{4^1+1} + \frac{1}{4^2+2} + \ldots + \frac{1}{4^n+n}$.
4. Zbadaj, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:
   a) $a_n = 3^{n+1} - 2n$; b) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$; c) $a_n = \frac{7^n}{n!}$; d) $a_n = \sqrt{n^2 - 6n + 10}$;
   e) $a_n = \frac{4^n}{2^n+3^n}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
5. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnij równości:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n}{n+5} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty$.
6. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów oblicz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n^2-1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6-3n^4+2}{5-10n^6}$;
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{27}-\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}-4^n}{5^n-4^{n+2}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}\right)$.
7. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+(-1)^n}{5n+4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor n\sqrt{12}\rfloor}{\lfloor n\sqrt{3}\rfloor}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$;
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
8. Oblicz granice z liczbą e:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$.
9. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów oblicz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2^n - 3^n)$;
   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(n+1)!}{n!+2}$.
10. Znajdź zbiory punktów skupienia podanych ciągów:
    a) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$; b) $b_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4}$; c) $c_n = (1 + (-1)^n) \cdot 2^n$;
    d) $d_n = \left(1 + \frac{\cos \pi n}{n}\right)^n$; e) $e_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
11. Znajdź granice dolne i górne podanych ciągów:
    a) $a_n = \frac{(-2)^{n+1}}{2^n+1}$; b) $b_n = \tan \frac{(2n+1)\pi}{4}$; c) $c_n = (1 + \cos \pi n)\, n!$
    d) $d_n = 2 - (-1)^n$; e) $b_n = \sin \frac{n\pi}{4}$.