

Algorytmy optymalizacji dyskretnej

LISTA 4

Zadania na tej liście zaczerpnięte są z podręczników [AMO93, Wag80].

Zadanie 0. Przeczytaj rozdział 4.2 (Shortest Paths: Label-Setting Algorithms \rightarrow Applications) z podręcznika [AMO93] omawiający kilka przykładów wykorzystania wariantów problemu najkrótszej ścieżki do rozwiązywania wybranych problemów optymalizacyjnych.

Zadanie 1. Problem wydawania reszty polega na wydaniu reszty $p \in \mathbb{N}$ przy użyciu monet (banknotów) o zadanych nominałach a_1, \dots, a_k . Na przykład, jeśli $k = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, to reszty 8, 12 i 54 mogą być wydane przy użyciu takich nominałów, natomiast reszta $p = 4$ nie może być wydana.

- (a) Dla zadanego przedziału $[l, u]$, $l, u \in \mathbb{N}$, i nominałów a_1, \dots, a_k zaproponuj metodę wyznaczania wszystkich liczb należących do $[l, u]$, które mogą być wydane przy użyciu nominałów a_1, \dots, a_k . Sprowadź ten problem do problemu osiągalności wierzchołków z pewnego ustalonego wierzchołka w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.
- (b) Dla zadanej reszty p i nominałów a_1, \dots, a_k zaproponuj metodę wydawania reszty p przy użyciu minimalnej liczby nominałów – o ile resztę p da się wydać. Sprowadź ten problem do problemu najkrótszej ścieżki w nieważonym skierowanym grafie acyklicznym.
- (c) Sformułuj problem z podpunktu (b) za pomocą programowania całkowitoliczbowego.

Zadanie 2. System składu tekstu \TeX używa procedury do podziału akapitu na wiersze w taki sposób, że kiedy wiersze są wyrównywane do lewego i prawego marginesu (justowane), wygląd akapitu jest atrakcyjny. Przypuśćmy, że akapit składa się z n słów i każde słowo ma przyporządkowany numer $i \in \{1, \dots, n\}$ odpowiadający kolejności słowa w akapicie. Niech a_{ij} odpowiada atrakcyjności wiersza, jeżeli ten zaczyna się od słowa o numerze i , a kończy się na słowie o numerze $j - 1$. System \TeX korzysta z pewnej procedury do obliczania każdej wartości a_{ij} . Mając obliczone a_{ij} , zaproponuj metodę rozwiązywania problemu podziału akapitu na wiersze tak, aby zmaksymalizować całkowitą atrakcyjność akapitu. Sformułuj problem jako zagadnienie najdłuższej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 3. Firma transportowa przygotowuje plan wypożyczania środków transportu z określonego źródła na okres pięciu lat. Firma może wypełniać swoje zobowiązania wypożyczając nowy środek transportu na początku roku 1 i korzystając z niego do rozpoczęcia j -tego roku, $j \in \{2, \dots, 6\}$. Jeżeli $j < 6$, to firma zwraca dany środek transportu na początku roku j , korzystając z nowo wypożyczonego środka transportu do rozpoczęcia k -tego roku, $k \in \{j + 1, \dots, 6\}$. Koszty eksploatacji środków transportu w latach 1, 2, 3, 4, 5 są odpowiednio równe 1, 3, 6, 10 i 15 jednostek. Ponadto, jeżeli na początku roku 1 firma wypożycza dany środek transportu na okres jednego, dwóch, trzech, czterech lub pięciu lat, to opłaty za wypożyczenie wynoszą odpowiednio 5, 9, 13, 16 i 19 jednostek. Opłaty te wzrastają z roku na rok o jedną jednostkę. Dla przykładu, jeżeli na początku roku 3 środek transportu zostaje wypożyczony na okres jednego, dwóch lub trzech lat, to związane z tym opłaty wynoszą odpowiednio 7, 11 lub 15 jednostek. Wyznacz optymalną strategię firmy, tj. plan wypożyczania o najtańszym koszcie. Sformułuj ten problem jako problem wyznaczania najkrótszej ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 4. Zapoznaj się z metodą ścieżki krytycznej (ang. *Critical Path Method*, CPM) – zobacz np. [SDK99, RW12]. Rozważ model czynności na łuku. Przeanalizuj sposób wyznaczania charakterystyk projektowych (najwcześniejszy moment zakończenia projektu, wyznaczenie dróg i czynności krytycznych, momentów rozpoczęcia czynności itp.) w kontekście problemu najkrótszej (najdłuższej) ścieżki w ważonym acyklicznym grafie skierowanym.

Zadanie 5. Rozważmy skierowaną sieć z dodatnimi długościami łuków i ustalonym węzłem s . Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe, a które fałszywe? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

- (a) Jeśli wszystkie łuki w sieci mają różne długości, to istnieje tylko jedno drzewo najkrótszych ścieżek od węzła s .
- (b) Jeśli pominiemy skierowanie łuków w sieci (łuki staną się krawędziami nieskierowanymi), to najkrótsze odległości od s nie zmieniają się.
- (c) Spośród wszystkich najkrótszych ścieżek algorytm Dijkstry znajdzie ścieżkę o najmniejszej liczbie łuków.

Zadanie 6. Łuk w sieci nazywamy *najbardziej istotnym*, jeśli jego usunięcie powoduje największy wzrost długości najkrótszej ścieżki między dwoma ustalonymi wierzchołkami s i t . Rozważmy sieć z dodatnimi długościami łuków. Skonstruuj algorytm wyznaczania łuku najbardziej istotnego. Jaki jest czas działania zaproponowanego algorytmu?

Zadanie 7. (*Przyspieszenie algorytmu Diala*) Niech $c_{\min} = \min\{c_{ij} \mid (i, j) \in A\}$ i $w = \max\{1, c_{\min}\}$. Rozważmy implementację algorytmu Diala, w której kubelki mają szerokość w (w klasycznej implementacji szerokość kubelków wynosi $w = 1$). Pokaż, że zmodyfikowany algorytm nigdy nie zmniejszy etykiet wierzchołków, które znajdują się w pierwszym napotkanym niepustym kubelku (niepusty kubek o najmniejszym indeksie). W konsekwencji każdy wierzchołek z tego kubelka można zaetykietować na stałe (permanently). Jaki jest czas działania tak zmodyfikowanego algorytmu Diala?

Literatura

- [AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.
- [RW12] Kenneth A. Ross and Charles R.B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2012.
- [SDK99] Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, and Janusz S. Kowalik. *Algorytmy optymalizacji dyskretniej z programami w języku Pascal*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.
- [Wag80] Harvey M. Wagner. *Badania operacyjne*. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1980.