Analiza matematyczna
Lista zadań nr 2 (Zasada indukcji matematycznej)

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnij następujące tożsamości:
   a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$,
   c) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$,
   d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,
   e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
2. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnij następujące nierówności:
   a)$2^n > n^4$ dla każdego naturalnego $n \geq 17$,
   b) $3^n > n^3$ każdego naturalnego $n \geq 4$,
   c) $n! > 4^n$ dla każdego naturalnego $n \geq 9$,
   d) $n! > (\frac{n}{3})^n$ dla każdego naturalnego $n \geq 1$.
3. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 0$
   a) liczba $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ jest podzielna przez 43,
   b) liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ jest podzielna przez 133,
   c) liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 6.
4. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n zachodzi równość:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$
5. Udowodnij, że jeżeli $a_0 = 6$, $a_1 = 11$ oraz dla $n \geq 2$ wyrazy ciągu a_n są zadane rekurencyjnie: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$
$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1.$$
6. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n i każdej liczby rzeczywistej $x \geq -1$ zachodzi następujący wzór (uogólnienie nierówności Bernoulliego):
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3.$$
   Wsk. Dowód przez uogólnioną zasadę indukcji matematycznej.
7. Niech H_n oznacza średnią harmoniczną liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$, czyli
$$H_n = n : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$$
   oraz G_n– średnią geometryczną tych liczb. Pokaż, że $H_n \leq G_n$.
8. Wykorzystując dwumian Newtona oblicz następujące sumy:
   a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$,
   b) $\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}2 + \binom{n}{n}$,
   c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$.
9. Wykorzystując dwumian Newtona wykaż, że:
   a) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$,
   b) $\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\binom{n}{n-1} + (-1)^{n-1}n\binom{n}{n} = 0$.