# Algorytmy optymalizacji dyskretnej

# LISTA 3

Zadania na tej liście zaczerpnięte są z podręczników [AMO93, BHM77].

**Zadanie 1.** Trzy różne elementy obrabiane są kolejno na trzech maszynach. Każdy element musi być najpierw przetworzony na maszynie 1, następnie na maszynie 2, a na końcu na maszynie 3. Kolejność, w której poszczególne elementy są przetwarzane, może być różna dla każdej z maszyn. Załóżmy, że znane są czasy $t_{ij}$ wymagane do przetworzenia elementu $i$ na maszynie $j$ dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Celem jest zminimalizowanie całkowitego czasu potrzebnego do przetworzenia wszystkich elementów.

(a) Sformułuj powyższy problem jako zagadnienie ILP. Zaproponowany model musi uwzględniać następujące ograniczenia: (1) dwa elementy nie mogą być przetwarzane na jednej maszynie w tym samym czasie oraz (2) nie można rozpocząć przetwarzania elementu $i \in \{1, 2, 3\}$ na maszynie $j + 1$, dopóki nie zakończyło się jego przetwarzanie na maszynie $j$, $j \in \{1, 2\}$. HINT: Możesz zdefiniować zmienne decyzyjne $x_{ij}$ jako czas rozpoczęcia przetwarzania elementu $i$ na maszynie $j$.

(b) Załóżmy, że poszczególne elementy muszą być przetwarzane w tej samej kolejności na każdej z maszyn. Zmodyfikuj model ILP z podpunktu (a) tak, aby uwzględniał to dodatkowe ograniczenie.

**Zadanie 2.** Rozważmy następujące zagadnienie programowania całkowitoliczbowego.

$$\begin{aligned}
\text{maximize } z = {} & x_1 + 5x_2 \\
\text{subject to: } & -4x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ and integer}
\end{aligned}$$

(a) Przedstaw graficzną interpretację powyższego zagadnienia ILP.

(b) Zastosuj omówioną na wykładzie metodę *branch & bound* do znalezienia rozwiązania optymalnego. Zagadnienia LP, które pojawią się w trakcie przeglądania przestrzeni rozwiązań, możesz rozwiązać graficznie lub zapisać modele w wybranym języku (np. `GNU MathProg`) i rozwiązać przy pomocy solvera (np. `GLPK`).

**Zadanie 3.** Rozwiąż następujące zagadnienie programowania całkowitoliczbowego przy użyciu metody przeglądu dla zmiennych decyzyjnych 0–1.

$$\begin{aligned}
\text{maximize } z = {} & 2x_1 - x_2 - x_3 + 10 \\
\text{subject to: } & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 7 \\
& 2x_2 + x_3 \geqslant 2 \\
& 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

**Zadanie 4.** (*Dyskretny problem plecakowy*)

(a) Przedstaw działanie podanego na wykładzie algorytmu opartego o programowanie dynamiczne dla następującej instancji problemu: $n = 4$, $W = 5$, $\overline{w} = (2, 3, 1, 4)$, $\overline{v} = (4, 5, 3, 7)$.

(b) Pokaż, że strategia zachłanna dla dyskretnego problemu plecakowego nie gwarantuje uzyskania rozwiązania o wartości $\geqslant \varepsilon \cdot V_{OPT}$ dla żadnej stałej $0 < \varepsilon < 1$, gdzie $V_{OPT}$ to wartość rozwiązania optymalnego. HINT: W konstrukcji kontrprzykładu wystarczy użyć dwóch przedmiotów.

(c) Pokaż, jak zmodyfikować ten algorytm, żeby wartość zwróconego rozwiązania była nie mniejsza niż połowa wartości rozwiązania optymalnego.

**Zadanie 5.** (*Redukcja problemu* 3SAT *do* INTEGER LINEAR PROGRAMMING)
W problemie 3SAT dana jest formuła logiczna $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ w postaci koniunkcji klauzul zawierających alternatywę co najwyżej 3 literałów (czyli zmiennych lub ich negacji) i pytamy się, czy jest ona spełnialna, tj. czy istnieje[1] wartościowanie $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_n) \in \{0,1\}^n$, dla którego $\varphi(\pi) = 1$.

Przykładowo, w wersji z dokładnie trzema literałami w każdej klauzuli, formułę 3SAT możemy zapisać następująco:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} (l_{i_1} \vee l_{i_2} \vee l_{i_3}), \quad \text{gdzie } l_{i_j} \in \{x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n\}.$$

Zredukuj problem 3SAT do decyzyjnej wersji problemu INTEGER LINEAR PROGRAMMING, tj. pokaż, że dla każdej formuły logicznej $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ w postaci 3SAT możemy w czasie wielomianowym względem jej rozmiaru skonstruować egzemplarz problemu programowania liniowego całkowitoliczbowego, dla którego istnieje rozwiązanie dopuszczalne wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\varphi$ jest spełnialna.

Podaj przykład takiego zagadnienia ILP dla poniższej formuły.

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$$

**Zadanie 6.** Sformułuj problem komiwojażera (TRAVELLING SALESMAN PROBLEM) jako zagadnienie ILP. HINT: Możesz poszukać wskazówek np. w rozdziale 9.1 w [BHM77] lub w przykładzie Application 16.2 w [AMO93] (patrz także zadanie 16.20 w [AMO93]).

# Literatura

[AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., USA, 1993.

[BHM77] S.P. Bradley, A.C. Hax, and T.L. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

[1] W zadaniu rozważamy wersję decyzyjną problemu 3SAT, tj. rozwiązaniem jest odpowiedź TAK lub NIE, a nie wartościowanie spełniające formułę.