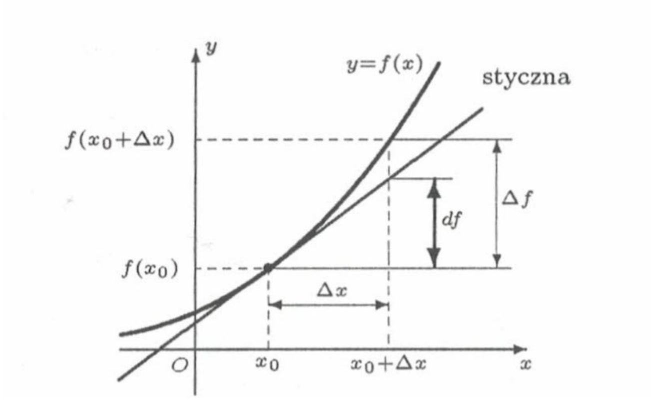
**Analiza matematyczna 1**
**Wykład 10, Pochodne funkcji cd. (różniczka funkcji, pochodne wyższych rzędów, pochodne funkcji wektorowych)**

# 1 Różniczka funkcji

**Definicja 1.** *(różniczka funkcji)*
Niech funkcja $f$ ma pochodną właściwą w punkcie $x_0$. Różniczką funkcji $f$ w punkcie $x_0$ nazywamy funkcję $df$ zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określonej wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$




- **Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych**
  Jeżeli funkcja $f$ ma pochodną właściwą w punkcie $x_0$, to
  $$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$
  Błąd jaki popełniamy to:
  $$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(\Delta x),$$
  czyli różniczka.

**Przykład 1.** Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:
a) $\sqrt[4]{15.96}$; b) $\operatorname{arctg} 1.05$; c) $\cos 0.03$.
Niech $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}, x_0 = 16, x = 15.96$. Stąd $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}$ oraz $\Delta x = x - x_0 = -0.04$. Zatem

$$f(15.96) = \sqrt[4]{15.96} \approx \sqrt[4]{16} + (\sqrt[4]{x})'(16) \cdot (-0.04),$$

czyli ostatecznie

$$\sqrt[4]{15.96} \approx 2 - \frac{1}{32} \cdot 0.04 = 1.99875.$$

(wartość "prawdziwa" $\approx 1.99874$.)

Odp. b) $\frac{\pi}{4} + 0.025 \approx 0.81$ (wartość "prawdziwa" - z kalkulatora: $\approx 0.809784$);
c) 1 (wartość "prawdziwa" $\approx 0.999549$).

- **Zastosowanie różniczki do znalezienia przybliżonych rozwiązań równań**

**Przykład 2.** Korzystając z różniczki funkcji oraz z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej znaleźć przybliżone rozwiązanie równania:

a) $x + e^x = 1.004$

Niech $f(x) = x + e^x = y$ i $f^{-1}(y)$ oznacza jej funkcję odwrotną. Nie znamy tej funkcji, ale umiemy obliczyc jej pochodną:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+e^x}.$$

Niech $x_0 = 0$. Stąd $y_0 = f(x_0) = 1$ oraz $y = 1.004$. Szukamy przybliżonej wartości $x$ takiej, że $x + e^x = 1.004$. Mamy zatem (zamieniamy $x$ z $y$ we wzorze na przybliżoną wartość funkcji)

$$f^{-1}(y) \approx f^{-1}(y_0) + (f^{-1}(y))'(y_0) \cdot \Delta y,$$

czyli

$$x \approx x_0 + \frac{1}{1+e^{x_0}} \cdot (y - y_0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0.004 = 0.002.$$

(wartość "prawdziwa" (program komp) $\approx 0.001990$.)

b) $x^7 + 2x^3 + x = 0.9972$ (odp. $x \approx 0.9998$);

c) $\arcsin x + \operatorname{arctg} x = 0.01$ (odp. 0.005).

## 2 Pochodne wyższych rzędów

**Definicja 2.** *(pochodna $n$-tego rzędu funkcji)*

Pochodną $n$-tego rzędu funkcji w punkcie $x_0$ definiujemy indukcyjnie:

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0) \quad \text{dla} \quad n \geq 2,$$

gdzie $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$. Przyjmujemy, że $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Przyjmujemy ponadto oznaczenia: $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$ oraz $f^{(4)} = f^{iv}$.

Zauważmy, że dla istnienia pochodnej $n$-tego rzędu funkcji $f$ w punkcie $x_0$ konieczne jest istnienie pochodnej rzędu $n-1$, a co za tym idzie - istnienie wszystkich poprzednich pochodnych na pewnym otoczeniu punktu $x_0$. Funkcja, która ma pochodną właściwą $n$-tego rzędu na przedziale, nazywamy funkcją $n$ - krotnie różniczkowalną na tym przedziale.

**Przykład 3.** Obliczyć pochodne $f', f'', f'''$ podanych funkcji:

a) $f(x) = e^{x^2}$:

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2},$$

$$f''(x) = (2xe^{x^2})' = 2(xe^{x^2})' = 2(e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2}) = 2e^{x^2}(1+2x^2),$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (2e^{x^2}(1+2x^2))' = 2(e^{x^2}(1+2x^2))' = 2((e^{x^2})' \cdot (1+2x^2) + e^{x^2} \cdot (1+2x^2)') \\ &= 2(2xe^{x^2} \cdot (1+2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x) = 4xe^{x^2}(3+2x^2). \end{aligned}$$

b) $f(x) = x \ln x$:

$$f'(x) = 1 + \ln x, \; f''(x) = \frac{1}{x}, \; f'''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

**Przykład 4.** Zbadać istnienie $f''(0)$ funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Najpierw zbadamy, czy funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, tzn. czy

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Mamy więc

$$\lim_{x \to 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

bo funkcja $\sin \frac{1}{x}$ jest ograniczona i $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$. Zatem funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągła w całej swojej dziedzinie.

Teraz sprawdzamy, czy istnieje pochodna w $x_0 = 0$ wraz z pewnym otoczeniem tego punktu. Jeśli $x \neq 0$, to $f'(x)$ obliczamy korzystając z reguł różniczkowania:

$$f'(x) = \left( x^3 \sin \frac{1}{x} \right)' = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \cos \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Pochodną w punkcie $x_0 = 0$ obliczamy z definicji:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Zatem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Następnie sprawdzamy, czy pochodna $f'$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, tzn. czy

$$\lim_{x \to 0} (3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}) = f'(0) = 0.$$

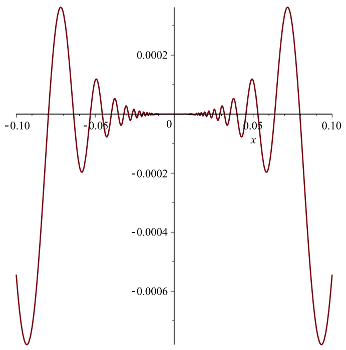
Oczywiście

$$\lim_{x \to 0} (3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0,$$

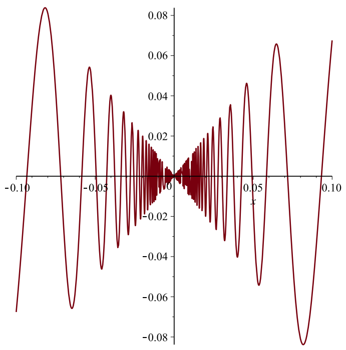
bo obie funkcje $\sin \frac{1}{x}$ i $\cos \frac{1}{x}$ są ograniczone. Może zatem przejść do obliczania $f''$ w punkcie $x_0 = 0$ (z definicji). Badamy istnienie granicy

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left( 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right).$$

Ta granica jednak nie istnieje, bo nie istnieje granica $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$. Stąd wniosek: $f''(0)$ nie istnieje. Na wykresach poniżej mamy przedstawioną funkcję $f$ w otoczeniu punktu $x = 0$




oraz funkcję $f'$ w otoczeniu punktu $x = 0$.




**Przykład 5.** Znaleźć ogólny wzór na pochodną $n$-tego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = \sin x$.

a) Mamy $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Obliczmy kilka pierwszych pochodnych:

$$f'(x) = -x^{-2},$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3} = 2!\, x^{-3},$$

$$f'''(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} = -3!\, x^{-4}.$$

Stawiamy hipotezę, że

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}.$$

Dowodzimy teraz indukcyjnie, że nasza hipoteza jest prawdziwa. Pierwszy krok indukcyjny: dla $n = 0$: $f^{(0)}(x) = (-1)^0 0! x^{-1} = \frac{1}{x}$, czyli wzór zachodzi. Następnie zakładamy, że nasz wzór jest prawdziwy dla dowolnego $n$ naturalnego i stąd ma wynikać prawdziwośc wzoru dla $n+1$ (drugi krok indukcyjny), czyli

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)} \implies f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, x^{-(n+2)}.$$

Mamy więc

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^n n!\, x^{-(n+1)}\right)' = (-1)^n n!\, \left(x^{-n-1}\right)'$$

$$= (-1)^n n!\, (-n-1)x^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!\, x^{-(n+2)}.$$

Zatem nasza hipoteza jest prawdziwa.

b) Mamy $f(x) = \sin x$. Obliczmy kilka pierwszych pochodnych:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Stawiamy hipotezę, że

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

dowodzimy indukcyjnie, że nasza teraz jest prawdziwa (jak wyżej).

- **Wzór Leibniza**

  Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają pochodne właściwe $n$-tego rzędu w punkcie $x_0$, to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

**Przykład 6.** Zastosować wzór Leibniza do znalezienia $n$-tej pochodnej funkcji:

a) $f(x) = xe^x$, b) $f(x) = e^x \sin x$

a) Niech $f_1(x) = x$ oraz $f_2(x) = e^x$. Stąd

$f_1'(x) = 1$ i $f_1^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 1$ oraz $f_2^{(n)}(x) = e^x$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Korzystając ze wzoru Leibniza mamy

$$(xe^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(n-k)}(x) \cdot f_2^{(k)}(x) = \binom{n}{0} xe^x + \binom{n}{1} e^x = xe^x + ne^x = e^x(x+n).$$

b) odp. $(e^x \sin x)^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. Korzystamy tutaj z faktu, że $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

## 3 Pochodne funkcji wektorowych

**Definicja 3.** *(pochodna funkcji wektorowej)*

Niech $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, gdzie $t \in [\alpha, \beta]$, będzie funkcją wektorową. Pochodną funkcji $\vec{r}$ w punkcie $t$ określamy wzorem:

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Podobnie określamy pochodną funkcji wektorowej $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a także pochodne wyższych rzędów takich funkcji.

- **Interpretacja fizyczna pochodnej funkcji wektorowej**

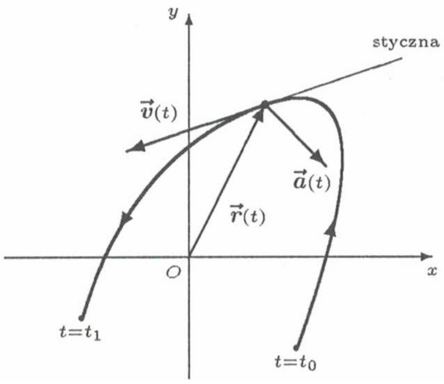
Niech $\vec{r}(t)$ oznacza wektor wodzący punktu materialnego w chwili $t \in [t_0, t_1]$. Wówczas prędkość tego punktu wyraża się wzorem

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t),$$

a przyspieszenie wzorem

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t).$$

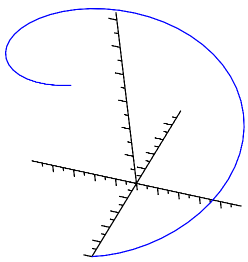
Poniżej na rysunku wektory prędkości i przyspieszenia. W każdej chwili wektor prędkości jest styczny do trajektorii punktu.




**Przykład 7.**

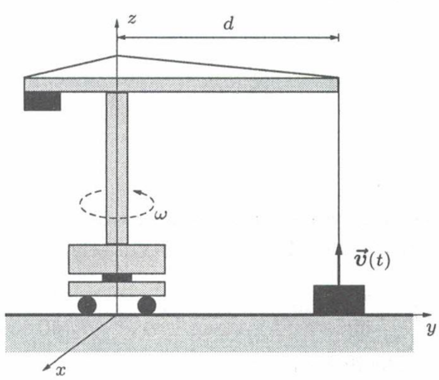
a) Jeśli wektor wodzący w chwili $t$ ma postać $\vec{r}(t) = (t+1, t^2)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, to wektor prędkości ma postać $\vec{v}(t) = (1, 2t)$ a wektor przyspieszenia $\vec{a}(t) = (0, 2)$. Punkt porusza się po paraboli $y = (x-1)^2$ (otrzymujemy to postawiając $x = t+1$, czyli $t = x-1$, a stąd mamy $y = t^2 = (x-1)^2$.

b) Jeśli $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$, to wektor prędkości ma postać $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ a wektor przyspieszenia $\vec{a}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$. Punkt porusza się po linii śrubowej.



**Przykład 8.**

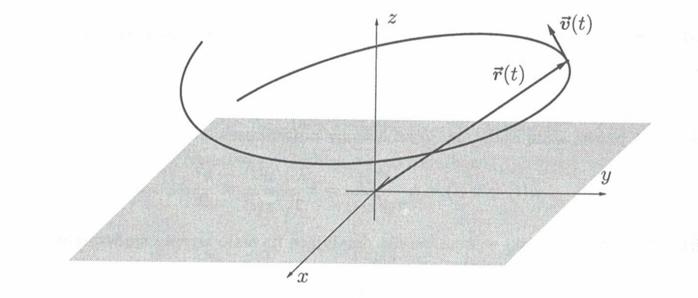
Rozważmy następujący problem. Żuraw budowlany, którego ramię ma długośc $d = 20m$, podnosi płytę z przyspieszeniem $a = 0.1m/s^2$. Jednocześnie dźwig obraca się wokół własnej osi z prędkością kątową $\omega = \frac{\pi}{50} 1/s$. Obliczyć prędkość płyty względem otoczenia w chwili $t = 5s$.



Jeżeli punkt porusza się w przestrzeni i jego wektor wodzący w chwili $t$ ma postać $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, to prędkość oraz przyspieszenie punktu wyrażają się wzorami

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \,.$$




W naszym przypadku mamy

$$x(t) = d\sin\omega t = 20\sin\frac{\pi t}{50}, \quad y(t) = d\cos\omega t = 20\cos\frac{\pi t}{50}, \quad z(t) = \frac{at^2}{2} = 0.05t^2.$$

Zatem prędkość płyty w chwili $t$ dana jest wzorem

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \left(\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi t}{50}, -\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi t}{50}, 0.1t\right).$$

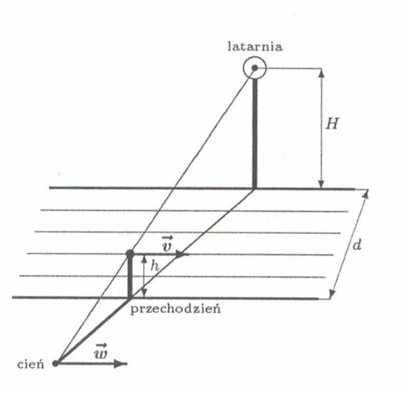
Zatem

$$\vec{v}(5) \approx (1.20, 0.38, 0.50)$$

oraz

$$v(5) = |\vec{v}(5)| = \sqrt{(1.20)^2 + (0.38)^2 + (0.50)^2} = 1.35[m/s].$$

**Przykład 9.** Latarnia ma wysokość $H = 6m$ i stoi w odległości $d = 3m$ od krawężnika. Przechodzień o wzroście $h = 2m$ idzie po krawężniku z prędkością $v = 2m/s$. Obliczyć prędkość, z jaką będzie się poruszał koniec cienia tego przechodnia w chwili, gdy będzie on mijał latarnię.




(Odp. $|\vec{v}| = 3[m/s]$.)