Analiza matematyczna
Lista zadań nr 5 (pochodne)

1. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji:
   a) $f(x) = x^4$, $(x \in \mathbb{R})$; b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $(x \neq 1)$; c) $f(x) = \sqrt{x}$, $(x > 0)$; d) $f(x) = \sin 2x$, $(x \in \mathbb{R})$.

2. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnij, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:
   a) $f(x) = |x^2 - x|$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = \sin x \cdot \mathrm{sgn}(x)$, $x_0 = 0$;
   c) $f(x) = \min\{x^2, 4\}$, $x_0 = 2$.
   Naszkicuj wykresy tych funkcji.

3. Korzystając z reguł różniczkowania oblicz pochodne funkcji:
   a) $3\sin x + \cot x$; b) $e^x(x2 - x + 1)$; c) $\frac{x^2+2}{x-2}$; d) $e^{-x}(3x+1)^2$;
   e) $e^{1/x}\arctan(3-x)$; f) $\ln(x^2+1)\tan\sqrt{x}$; g) $\ln(\cos^2 x + 1)$; h) $\sqrt{\arccos(x^2)}$;
   i) $\dfrac{\sqrt{5}}{(x^2+1)^3}$; j) $\dfrac{3^{\sin^2 x}}{2^{\cos^2 x}}$.

4. Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:
   a) $f(x) = \arctan x$, $(1, f(1))$; b) $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $(0, f(0))$;

5. a) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.
   b) Wyznacz styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox.
   c) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.
   d) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\arctan\frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.
   e) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy.

6. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$, jeżeli:
   a) $f(x) = x + \ln x$, $y_0 = e + 1$; b) $f(x) = \cos x - 3x$, $y_0 = 1$;
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}$, $y_0 = 3$; d) $f(x) = x^3 + 3x$, $y_0 = 4$.

7. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz granice:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2^x+1)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + \arctan x}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln x}$;
   d) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\mathrm{arcctg}x$; e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; f) $\lim\limits_{x\to\pi^-}(\pi - x)\tan\frac{x}{2}$;
   g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$; i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)^x$.

8. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:
   a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; b) $f(x) = \sin x - \cos x$, $(0 \le x \le 2\pi)$;
   c) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$; e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; f) $f(x) = xe^{-3x}$;
   g) $f(x) = x\ln^2 x$; h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; i) $f(x) = 2^{x+1} - 4^x$.

9. Oblicz drugą pochodną funkcji:

a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; b) $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

d) $f(x) = \arctan x$; e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; f) $f(x) = x^3 \ln x$.

10. Znajdź ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2$; b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$;

d) $f(x) = (x+1)e^{-x}$; e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; f) $f(x) = \left|x^2 - 5x - 6\right|$;

g) $f(x) = x \ln x$; h) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; i) $f(x) = 2 \arctan x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

11. Znajdź wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach lub w ich dziedzinach naturalnych:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[1, 5]$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$, $[-2, 2]$;

c) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{9-x}$; d) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[-1, 4]$;

e) $f(x) = 1 - \left|9 - x^2\right|$, $[-5, 1]$; f) $f(x) = \sin^3 x - 6 \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$.

12. a) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych - 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

b) Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkata równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?

13. Zbadaj podane funkcje i następnie sporządź ich wykresy:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; c) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.