

Lista 5

Przestrzenie liniowe

Zadanie 1 Sprawdź, czy dane zbiory są przestrzeniami liniowymi nad ciałem \mathbb{R} ,

1. zbiór $C(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych z działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą jest przestrzenią liniową,
2. zbiór $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej z dodawaniem wielomianów i mnożeniem przez liczbę rzeczywistą,
3. $\mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \text{st}(f) = n\}$,
4. $\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \text{st}(f) \leq n\}$.

Zadanie 2 Zbadaj, czy dany podzbiór $W \subseteq \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni \mathbb{R}^n :

- $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$,
- $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z = 3y - t\}$,
- $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t - 1 + x = 2y + 5z\}$,
- $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \cdot y = z + t\}$.

Zadanie 3 Zbadaj liniową niezależność podanych podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^n :

1. $\{(1, 2), (1, 3)\}$,
2. $\{(1, 0, 1), (0, 2, 3), (3, 1, -1)\}$,
3. $\{(1, 2, 0, -1), (1, 1, 0, 1), (-1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -1)\}$.

Zadanie 4 Czy zbiór $\{1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$ jest liniowo niezależny w $C(\mathbb{R})$.

Zadanie 5 Sprawdź, czy dane zbiory tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^n :

- $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$,
- $\{(1, 1, 0), (2, 1, 3), (3, 1, 6)\}$,
- $\{(1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 2), (2, 2, 3, 1), (-1, 1, 3, 2)\}$,
- $\{(1, 0, 0, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, 0, \dots, 0), (1, 1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0), (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1)\}$.

Zadanie 6 Sprawdź, czy zbiór $\{1, x, x^2, x^3\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Zadanie 7 Wyznacz bazę rozwiązań podanych układów jednorodnych równań liniowych

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1z - 5t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z + t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 0 \\ x + y + 5z + 2t = 0 \\ 2x + y + 3z + 2t = 0 \end{cases}.$$

Zadanie 8 Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\begin{cases} x + y + pz + t = 0 \\ px - y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + pz + 2t = 0, \end{cases}$$

ma niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 9 Wyznacz rzędy zadanych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 11 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10 Rozwiąż układ równań z parametrem rzeczywistym p :

$$\begin{cases} x + py + z - t = 12 \\ -x - y + 2z + 2t = -1 \\ 2x + py + z + t = 3, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 11* Udowodnij, że zbiór $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$.

Robert Rałowski