Analiza matematyczna 1
Wykład 13, Badanie funkcji

1 Maksima i minima

Definicja 1.
Mówimy, że funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 ma w punkcie x_0 maksimum lokalne lub krócej maksimum, jeśli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Maksimum jest właściwe, jeżeli

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Analogicznie funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne lub krócej minimum, jeśli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Minimum właściwe określamy analogicznie.

Maksimum i minimum, właściwe lub nie, nazywamy krótko ekstremum.

Przykład 1. Uzasadnić z definicji, że funkcja

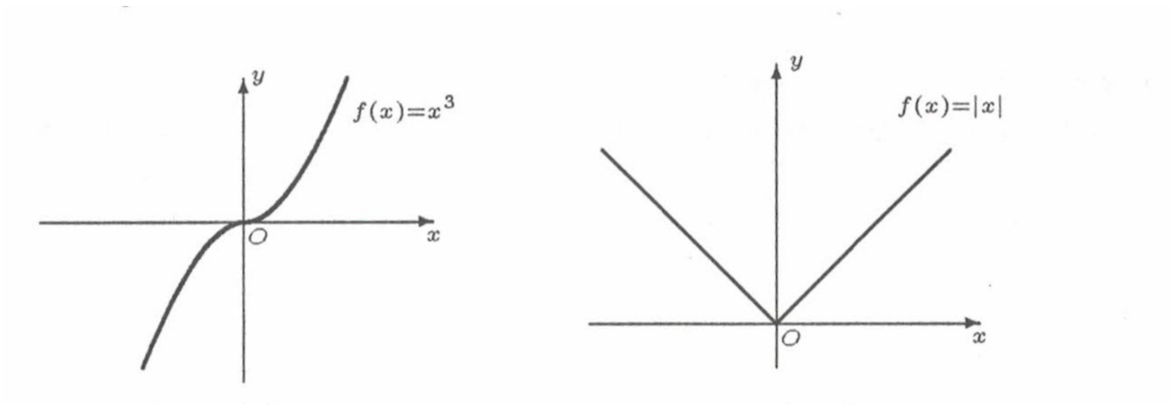
a) $f(x) = |x| + x$ ma ekstremum w punkcie $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ma ekstremum w punkcie $x_0 = k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Twierdzenie 1.(warunek konieczny na istnienie ekstremum)
Funkcja różniczkowalna w przedziale otwartym może mieć ekstremum tylko w takim punkcie x_0, w którym

$$f'(x_0) = 0.$$

Warunek $f'(x_0) = 0$ nie jest jednak wystarczający do istnienia ekstremum, bo np. funkcja $y = x^3$ nie ma ekstremum, chociaż jej pochodna $y' = 3x^2$ równa się zeru w punkcie $x = 0$. Rozważmy funkcję $f(x) = |x|$. Funkcja ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum lokalne właściwe, ale pochodna $f'(0)$ nie istnieje. W tym przypadku pokazujemy, że dla $x_0 = 0$ funkcja ma minimum lokalne właściwe z definicji.

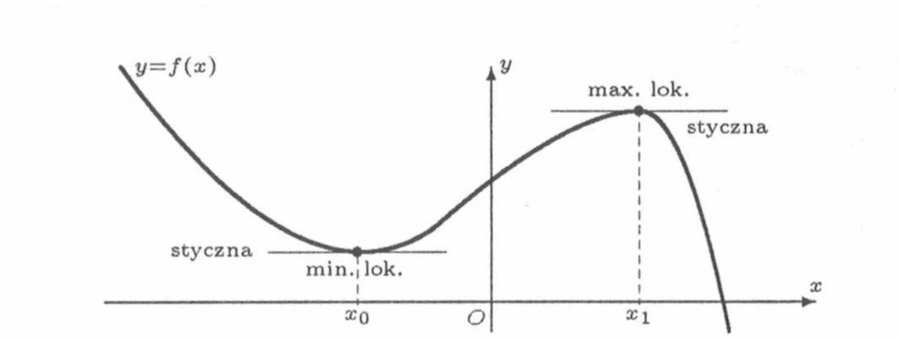


UWAGA! Funkcja może mieć ektrema lokalne tylko w punktach, w których jej pochodna równa się zero lub w punktach, w których jej pochodna nie istnieje.

I warunek wystarczający na istnienie ekstremum - zmiana znaku pochodnej wokół punktu, w którym pochodna się zeruje:

Warunek $f'(x_0) = 0$ staje się wystarczający do istnienia ekstremum, gdy pochodna funkcji f jest dodatnia z jednej i ujemna z drugiej strony punktu x_0. Jest tak, ponieważ gdy na lewo od punktu x_0 jest $f'(x) > 0$, a na prawo $f'(x) < 0$, to funkcja f jest na lewo rosnąca, a na prawo malejąca, więc w punkcie x_0 istnieje maksimum. Minimum istnieje wtedy, gdy $f'(x) < 0$ dla $x < x_0$, $f'(x) > 0$ dla $x > x_0$.

Geometrycznie: jeżeli funkcja ma ekstremum lokalne wpunkcie x_0 oraz jeżeli w tym punkcie wykres funkcji ma styczną, to jest ona pozioma.



Przykład 2. Korzystając z powyższego faktu znaleźć wszystkie ektrema lokalne podanych funkcji.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$; b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Twierdzenie 2.(II warunek wystarczający na istnienie ekstremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) < 0$,
3. n jest liczbą parzystą, gdzie $n \geq 2$,

to w punkcie x_0 funkcja ma maksimum lokalne właściwe.

Jeżeli założenie 2. w powyższym twierdzeniu ma postać "$f^{(n)}(x_0) > 0$", to w punkcie x_0 funkcja ma minimum lokalne właściwe. Natomiast, jeżeli warunek 3. ma postać "n jest liczbą nieparzystą" oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to w punkcie x_0 funkcja nie ma ekstremum lokalnego.

Przykład 3. Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć wszystkie ektrema lokalne podanych funkcji.

a) $f(x) = x^{100} + 2x^{50}$; b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; c) $f(x) = (x-5)e^x$.

2 Funkcje wypukłe i wklęsłe

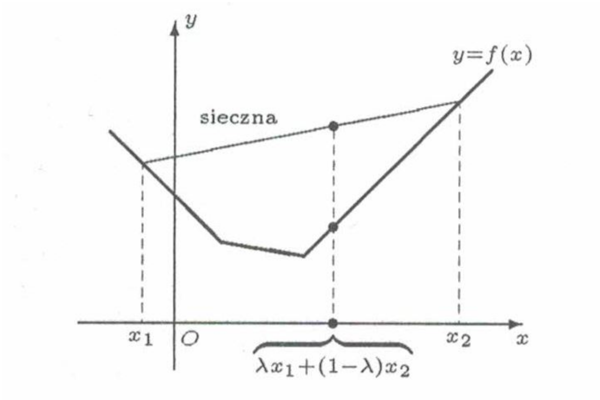
Definicja 3.*(funkcja wypukła)*

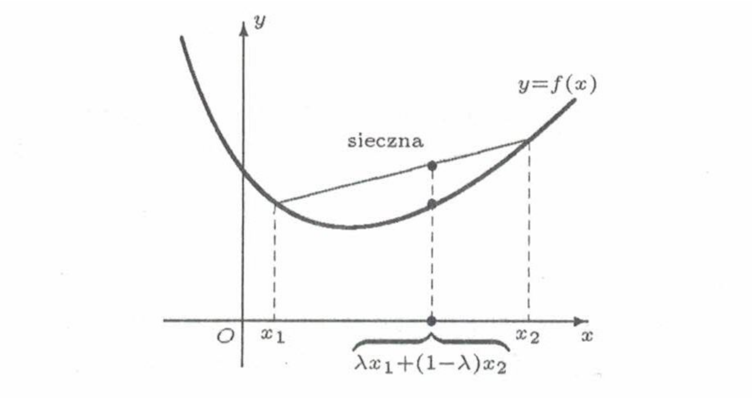
Funkcja f jest wypukła na przedziale I, jeżeli

$$\forall\, [x_1, x_2] \subset I \;\; \forall\, 0 < \lambda < 1 \;\; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Jeżeli w powyższej nierówności jest znak ostry, to funkcja f jest ściśle wypukła. Geometrycznie wypukłość funkcji oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży wyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Poniżej ilustracja funkcji wypukłej i ściśle wypukłej:





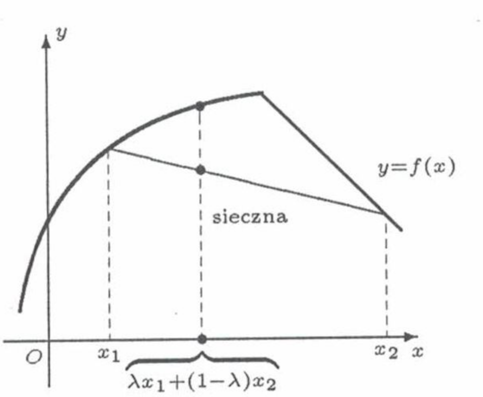
Definicja 4. *(funkcja wklęsła)*

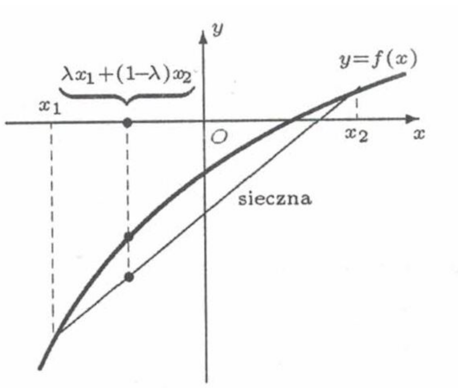
Funkcja f jest wklęsła na przedziale I, jeżeli

$$\forall\,[x_1, x_2] \subset I \;\; \forall\, 0 < \lambda < 1 \;\; f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Jeżeli w powyższej nierówności jest znak ostry, to funkcja f jest ściśle wklęsła. Geometrycznie wklęsłość funkcji oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży niżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Poniżej ilustracja funkcji wklęsłej i ściśle wklęsłej:





Twierdzenie 3. *(warunek wystarczający wypukłości)*

Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek:

1. $f''(x) > 0$, to jest ściśle wypukła na I;
2. $f''(x) \geq 0$, to jest wypukła na I;
3. $f''(x) < 0$, to jest ściśle wklęsła na I;
4. $f''(x) \leq 0$, to jest wklęsła na I.

Jeżeli $f''(x) \geq 0$ dla każdego $x \in I$, ale równość $f''(x) = 0$ zachodzi tylko na skończonej liczbie punktów tego przedziału, to funkcja f jest ściśle wypukła na I. Analogicznie jest dla funkcji wklęsłej.

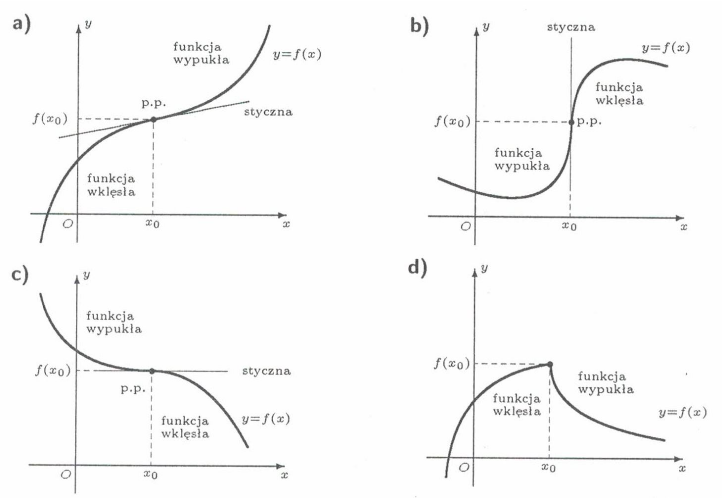
Przykład 4. Określić przedziały wypukłości i wklęsłości podanych funkcji:

a) $f(x) = e^{-x}$; b) $f(x) = x^4$; c) $f(x) = \sin x$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; e) $f(x) = |x|$; f) $f(x) = |x^5|$.

3 Punkty przegięcia wykresu funkcji

Punkt wykresu funkcji jest punktem przegięcia, jeżeli funkcja ma w tym punkcie styczną i zmienia w nim rodzaj wypukłości. Wykres funkcji przechodzi wtedy z jednej strony stycznej na drugą. Ilustrują to poniższe wykresy.



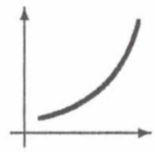
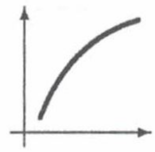
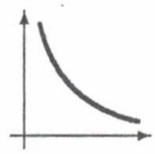
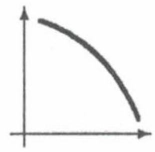
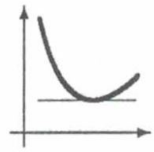
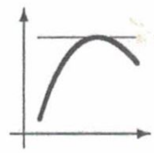
Badanie funkcji

1. Ustalenie dziedziny funkcji.
2. Wskazanie podstawowych własności funkcji:
   - parzystość,
   - okresowość,
   - miejsca zerowe,
   - ciągłość.
3. Obliczenie granic lub wartości funkcji na krańcach dziedziny.
4. Znalezienie asymptot pionowych i ukośnych.
5. Zbadanie pierwszej pochodnej:

- wyznaczenie dziedziny pochodnej i jej obliczenie,
- wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć ekstrema,
- ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji,
- ustalenie ekstremów funkcji,
- obliczenie granic lub wartości pochodnej na krańcach jej dziedziny.

6. Zbadanie drugiej pochodnej funkcji:
   - wyznaczenie dziedziny drugiej pochodnej i jej obliczenie,
   - wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć punkty przegięcia,
   - ustalenie przedziałów wklęsłości i wypukłości,
   - ustalenie punktów przegięcia wykresu funkcji,
   - obliczenie pierwszej pochodnej w punktach przegięcia.
7. Sporządzenie wykresu funkcji.

Pochodne a wykres funkcji

Warunki, które spełniają pochodne funkcji na przedziale lub w punkcie			Własności funkcji	Wykres funkcji
f'	f''	f'''		
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$		rosnąca i wypukła	
$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$		rosnąca i wklęsła	
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$		malejąca i wypukła	
$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$		malejąca i wklęsła	
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$		minimum lokalne właściwe	
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$		maksimum lokalne właściwe	
	$f''(x_0) = 0$	$f'''(x_0) \neq 0$	punkt przegięcia	

Przykład 5. Zbadać podane funkcje i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $r(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; b) $s(x) = \frac{x(x^2+10)}{x^2+1}$.

a) I. Dziedziną funkcji $r(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ jest zbiór $[0,1) \cup (1,\infty)$.

II. Funkcja r jest ciągła w dziedzinie, bo jest funkcją elementarną. Jedynym miejscem zerowym tej funkcji jest $x = 0$.

III. Obliczamy granice funkcji r na „krańcach" dziedziny. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-} r(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} r(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{0^+} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1-0} = \infty.$$

Nie wyznaczaliśmy granicy $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x)$, gdyż punkt 0 należy do dziedziny, a funkcja jest ciągła.

IV. Z obliczeń przeprowadzonych w części III wynika, że prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową obustronną badanej funkcji r. Z obliczeń tych wynika także, że funkcja r nie ma asymptoty poziomej w ∞. Sprawdzimy teraz, czy funkcja ta ma asymptotę ukośną Mamy

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}-1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1$$

oraz

$$B_+ = \lim_{x\to\infty} \left(r(x) - A_+ x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \infty.$$

Zatem funkcja r nie ma asymptoty ukośnej.

V. Zbadamy teraz pierwszą pochodną funkcji r. Mamy

$$r'(x) = \frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-3\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2},$$

przy czym dziedzina pochodnej pokrywa się z dziedziną funkcji. Badając znak pierwszej pochodnej ustalimy przedziały monotoniczności. Mamy

$$r'(x) < 0 \iff \frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-3\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2} < 0 \iff x \in (0,1) \cup \left(1, \frac{9}{4}\right).$$

Funkcja r jest zatem malejąca na przedziałach $(0,1)$ oraz $\left(1, \frac{9}{4}\right)$. Z rozważań tych wynika ponadto, że funkcja r jest rosnąca na przedziale $\left(\frac{9}{4}, \infty\right)$. Ponieważ r' zmienia znak (z „$-$" na „$+$") w punkcie $x = \frac{9}{4}$, więc w tym miejscu ma minimum lokalne właściwe (równe $\frac{27}{4}$). Zbadamy jeszcze, czy w punkcie $x = 0$ jest ekstremum lokalne. Ponieważ funkcja r jest malejaca na przedziale $[0,1)$, więc można przyjąć umownie, że w punkcie $x = 0$ ma maksimum lokalne „prawostronne" (równe 0).

VI. Przechodzimy do zbadania drugiej pochodnej funkcji r. Mamy

$$r''(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3}.$$

Dziedziną tej pochodnej jest zbiór $(0,1) \cup (1,\infty)$. Korzystając z warunku koniecznego wyznaczamy miejsca, w których funkcja może mieć punkty przegięcia. Mamy

$$r''(x) = 0 \iff \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3} = 0 \iff x = 9.$$

Zatem jedynym „podejrzanym" jest $x = 9$. Teraz znajdziemy przedziały wypukłości funkcji r. W tym celu ustalimy, w jakich przedziałach druga pochodna jest dodatnia. Mamy

$$r''(x) > 0 \iff \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3} > 0 \iff x \in (1,9).$$

Analogicznie otrzymamy

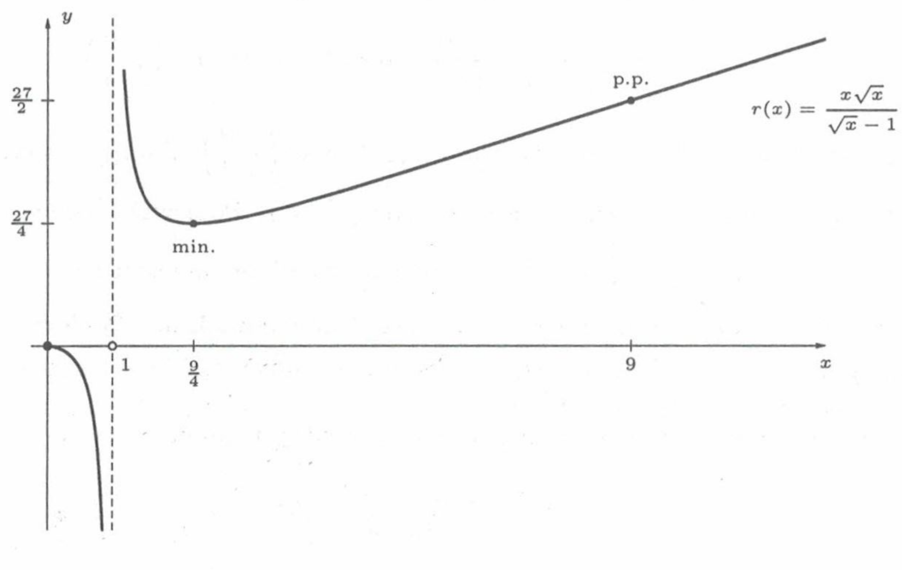
$$r''(x) < 0 \iff \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3} < 0 \iff x \in (0,1) \cup (9,\infty).$$

Z rozważań tych wynika, że funkcja r jest wypukła w dół na przedziale $(1,9)$ oraz wypukła w górę na przedziałach $(0,1)$ i $(9,\infty)$. Z rozważań tych wynika także, że punkt $\left(9,\frac{27}{2}\right)$ jest miejscem przegięcia wykresu badanej funkcji.

VII. Wyniki otrzymane w punktach I-VI zbieramy w tabeli:

x	0	$0<x<1$	1	$1<x<\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}<x<9$	9	$9<x<\infty$	∞
$r''(x)$	×	−	×	+	+	+	0	−	0
$r'(x)$	0	−	×	−	0	+	$\frac{9}{8}$	+	1
$r(x)$	0	$\searrow$	$-\infty\vert\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$\frac{27}{2}$	$\nearrow$	∞
					min.		*p.p.*		

VIII. Na podstawie tabeli sporządzamy wykres funkcji.



Aby lepiej zaprezentować kształt wykresu funkcji na osiach układu nie zachowano tej samej skali.

b) I. Dziedziną funkcji $s(x) = \dfrac{x\left(x^2+10\right)}{x^2+1}$ jest $\mathbb{R}$.
II. Funkcja s jest ciągła w dziedzinie, bo jest funkcją elementarną. Jedynym miejscem zerowym tej funkcji jest $x = 0$. Funkcja s jest nieparzysta, mamy bowiem

$$s(-x) = \frac{-x\left((-x)^2+10\right)}{(-x)^2+1} = -\frac{x\left(x^2+10\right)}{x^2+1} = -s(x)$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Dlatego dalsze badanie funkcji możemy ograniczyć do przedziału $I = [0, \infty)$.
III. Obliczamy granicę funkcji na prawym „krańcu" przedziału I. Mamy

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(x^2+10\right)}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{10}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \infty.$$

Nie wyznaczaliśmy granicy $\lim\limits_{x\to 0+} s(x)$, gdyż punkt 0 należy do wnętrza dziedziny.
IV. Z przeprowadzonych w poprzednich punktach rozważań wynika, że funkcja s nie ma asymptot pionowych ani poziomych. Sprawdzimy teraz, czy ma ona asymptotę ukośną $y = A_+ x + B_+$ w ∞. Mamy

$$A_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{s(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(x^2+10\right)}{x\left(x^2+1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+10}{x^2+1} = 1$$

oraz

$$B_+ = \lim_{x\to\infty} \left(s(x) - A_+ x\right) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x\left(x^2+10\right)}{x^2+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{x^2+1} = 0.$$

Zatem prosta $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji s w ∞.
V. Zbadamy obecnie pierwszą pochodną funkcji s. Mamy

$$s'(x) = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Pochodna s' jest funkcją określoną na przedziale I, do którego ograniczyliśmy badania. Korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum ustalimy, gdzie funkcja s może mieć ekstrema w przedziale I. Dla $x \in I$ mamy

$$s'(x) = 0 \iff \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \iff x = \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5}.$$

Pierwszą pochodną wykorzystamy jeszcze do zbadania monotoniczności funkcji s na przedziale I. Dla $x \in I$ mamy

$$s'(x) > 0 \iff \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{\left(x^2+1\right)^2} > 0 \iff x \in \left(0, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{5}, \infty\right)$$

oraz

$$s'(x) < 0 \iff \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \iff x \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right).$$

Zatem funkcja s jest rosnąca na przedziałach $\left(0, \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{5}, \infty\right)$ oraz malejaca na przedziale $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$. Z rozważań tych wynika, że w punktcie $x = \sqrt{2}$ funkcja s ma maksimum lokalne właściwe równe $4\sqrt{2}$, a w punkcie $x = \sqrt{5}$ ma minimum lokalne w właściwe $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
VI. Pozostała jeszcze do zbadania druga pochodna. Mamy

$$s''(x) = \frac{18x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Druga pochodna s'' także jest funkcją określoną na przedziale I, do którego ograniczyliśmy badania. Korzystając z warunku koniecznego wyznaczamy miejsca, w których funkcja s może mieć punkty przegięcia w przedziale I. Dla $x \in I$ mamy

$$s''(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{18x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{3}.$$

Badanie znaku drugiej pochodnej wykorzystamy do ustalenia wypukłości na przedziale I. Dla $x \in I$ mamy

$$s''(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{18x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$$

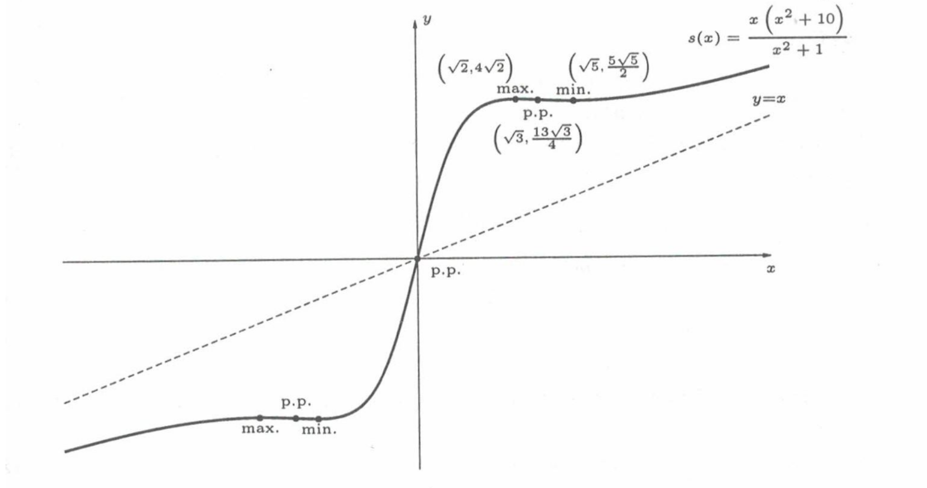
oraz

$$s''(x) < 0 \Longleftrightarrow \frac{18x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, \sqrt{3}\right).$$

Zatem funkcja s jest wypukła w dół na przedziale $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$ oraz wypukła w górę na przedziale $\left(0, \sqrt{3}\right)$. Z rozważań tych wynika, że w punkcie $x = \sqrt{3}$ badana funkcja zmienia rodzaj wypukłości, więc punkt $\left(\sqrt{3}, s\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{13}{4}\sqrt{3}\right)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji s. Ponadto z nieparzystości funkcji s wynika, że także $(0, f(0)) = (0, 0)$ jest punktem przegięcia jej wykresu
VII. Uzyskane w poprzednich punktach wyniki, ograniczone do przedziału $I = [0, \infty)$, zestawiamy w tabeli:

x	0	$0<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}<x<\infty$	∞
$s''(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$s'(x)$	10	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{8}$	$-$	0	$+$	
$s(x)$	0	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{13\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{5\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	∞
	$p.p.$		$max.$		$p.p.$		$min.$		

VIII. Na podstawie tabeli oraz uwzględniając fakt, iż badana funkcja jest nieparzysta sporządzamy wykres funkcji.



Przykład 6. Zbadać podane funkcje i następnie sporządzić ich wykresy:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; b) $f(x) = -x^3 + 4x - 3$; c) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$;

d) $f(x) = xe^{-2x}$; e) $f(x) = \sin x - \sin^2 x$; f) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

g) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; h) $f(x) = x^x$; i) $f(x) = \sqrt[x]{x}$.