Analiza matematyczna 1
Wykład 2, Zasada indukcji matematycznej

1 Zasada indukcji matematycznej

Twierdzenie 1.

Niech $T(n)$ będzie zdaniem określającym daną własność liczby naturalnej n oraz niech n_0 będzie określoną liczbą naturalną. Jeżeli spełnione są warunki:

1. zdanie $T(n_0)$ jest prawdziwe,
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(n+1),$$

to $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ zdanie $T(n)$ jest prawdziwe.

Warunek 2. powyższego twierdzenia czasem stosujemy w wersji ogólniejszej. Mianowicie, zakładamy że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych od $n+1$ i stąd ma wynikać prawdziwość twierdzenia dla liczby $n+1$.

Przykład 1. Niech $T(n)$ oznacza następującą własność:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n \quad \text{dla} \quad n \geq 4.$$

Dla $n_0 = 4$ należy sprawdzić, czy $T(4)$ zachodzi: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4$, czyli $24 > 16$ nierówność zachodzi. Następnie pokazujemy, że zachodzi implikacja

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) > 2^{n+1},$$

dla $n \geq 4$. Powyższa nierówność jest łatwa do udowodnienia, ponieważ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) > 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2,$$

gdyż $n + 1 \geq 5 > 2$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n \quad \text{dla} \quad n \geq 4.$$

Przykład 2. Znaleźć i udowodnić wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych. Rozwiązanie:

Najpierw stawiamy hipotezę, że

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

na podstawie kilku początkowych wartości dla sumy $S(n)$. Mamy bowiem, $S(1) = 1$, $S(2) = 3, S(3) = 6, S(4) = 10, S(5) = 15$ itd. Dalej zauważamy, że

- $2 \cdot S(1) = 2 = 1 \cdot 2,$
- $2 \cdot S(2) = 6 = 2 \cdot 3,$
- $2 \cdot S(3) = 12 = 3 \cdot 4,$
- $2 \cdot S(4) = 20 = 4 \cdot 5,$
- $2 \cdot S(5) = 30 = 5 \cdot 6,$

czyli $2 \cdot S(n) = n \cdot (n+1)$.

Pokażemy, że tak jest rzeczywiście. Najpierw sprawdzamy, czy $T(1)$ jest prawdziwe - jest. Zakładamy teraz, że $T(n)$ jest prawdą dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$. Musimy wykazać, że wtedy $T(n+1)$ jest także prawdziwe, to jest, że zachodzi

$$S(n+1) = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dowód tezy indukcyjnej:

$$S(n+1) = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = S(n) + (n+1) \text{ (\textit{na mocy założenia indukcyjnego})}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Tak więc, na mocy zasady indukcji matematycznej, $T(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$.

Przykład 3. Znaleźć i udowodnić wzór na sumę sześcianów pierwszych n liczb naturalnych, tzn.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Rozumowanie:

- $1^3 = 1 = 1^2$, $\quad 1 \quad n = 1$
- $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$, $\quad 3 = 1+2 \quad n = 2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$, $\quad 6 = 1+2+3 \quad n = 3$

Stąd hipoteza jest następująca:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Udowodnimy, że nasza hipoteza jest prawdziwa.

1. Sprawdzamy, że dla $n_0 = 1$ wzór jest prawdziwy:

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2.$$

2. Zakładamy, że nasz wzór jest prawdziwy dla $n \geq 1$ - dowolnie ustalona liczba naturalna, tzn, że

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Teza indukcyjna:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Dowód tezy indukcyjnej:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \text{ (\textit{na mocy założenia indukcyjnego})}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 (n^2 + 4(n+1)) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

co kończy dowód prawdziwości naszego wzoru dla $n \geq 1$ naturalnego.
Przykład 4. Pokazać, że $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$43 \,\Big|\, 6^{n+2} + 7^{2n+1}.$$

Dowód:

1. $n_0 = 1$. Sprawdzamy, że $6^3 + 7^3$ jest podzielne przez 43. $(6^3 + 7^3 = 13 \cdot 43)$
2. Założenie indukcyjne: zakładamy, że istnieje taka liczba całkowita l, że

   $$6^{n+2} + 7^{2n+1} = 43 \cdot l,$$

   gdzie n jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną.

Teza indukcyjna: istnieje taka liczba całkowita m, że

$$6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 43 \cdot m.$$

Dowód tezy indukcyjnej:

$$\begin{aligned}
6^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 6^{n+3} + 7^{2n+3} &= 6\left(6^{n+2} + 7^{2n+1}\right) - 6 \cdot 7^{2n+1} + 7^{2n+3} \\
&= 6\left(6^{n+2} + 7^{2n+1}\right) + 7^{2n+1}(7^2 - 6) \\
&= 6 \cdot 43 \cdot l + 7^{2n+1} \cdot 43 = 43\left(6 \cdot l + 7^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ponieważ $6 \cdot l + 7^{2n+1}$ jest liczbą całkowitą, więc teza indukcyjna została udowodniona, czyli nasze twierdzenie jest prawdziwe dla każdego naturalnego $n \geq 1$.

Przykład 5. Pokazać, że $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

$$3^n > n^3.$$

Dowód:

1. $n_0 = 4$. Sprawdzamy, że zachodzi nierówność $3^4 > 4^3$.
2. Zakładamy, że $n \geq 4$ oraz że prawdą jest, że $3^n > n^3$ (założenie). Wykażemy, że stąd wynika prawdziwość nierówności (teza)

   $$3^{n+1} > (n+1)^3.$$

Dowód tezy indukcyjnej:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right).$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że $n^3 < 3^n$. Zauważamy, że zachodzi następująca nierówność

$$1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 3 \quad \text{dla} \;\; n \geq 4,$$

(bo dla $n + 4$ mamy $1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64} \leq 3$ i to jest największa wartość.) Zatem

$$(n+1)^3 < n^3 \cdot 3 = 3^{n+1},$$

co kończy dowód na mocy indukcji matematycznej.
Przykład 6. (Nierówność Bernoulliego) Niech $x \geq -1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wówczas $\forall\, n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dowód: Niech $x \geq -1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wówczas

1. $n_0 = 1$. Sprawdzamy, że nierówność zachodzi, bo mamy wtedy $(1+x)^1 \geq 1+x$.

2. Zakładamy, że n jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną większą lub równą 1. Pokażemy, że zachodzi implikacja: $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie

$$T(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$$
$$T(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$
$$(1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow$$

mnożymy obustronnie nierówność przez $1+x$, a z założenia wiemy, że $1+x \geq 0$, więc znak nierówności się nie zmienia i otrzymujemy następującą nierówność:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

bo $nx^2 \geq 0$, co kończy dowód na mocy indukcji matematycznej.
Przykład 7. (Ciąg zadany rekurencyjnie) Pokazać, że jeżeli dla ciągu a_n $(n \geq 0)$ spełnione są warunki: $a_0 = 12, a_1 = 29$ (warunki początkowe) oraz dla $n \geq 2$ zachodzi

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} (\text{wzór rekurencyjny}),$$

to $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 0$
$$a_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n.$$

Dowód:

1. Sprawdzamy, że zachodzi, $a_0 = 5 \cdot 3^0 + 7 \cdot 2^0 = 12$ oraz $a_1 = 5 \cdot 3^1 + 7 \cdot 2^1 = 29$.

2. Zakładamy, że że n jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną większą lub równą 2 oraz że zachodzi $T(n)$ i $T(n-1)$ (uogólniona wersja indukcji matematycznej).

Pokażemy, że stąd zachodzi $T(n+1)$, czyli

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} = 5 \cdot (5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n) - 6 \cdot \left(5 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1}\right).$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$a_{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} + 7 \cdot 2^{n+1},$$

co kończy dowód na mocy indukcji matematycznej.

Udowodnimy teraz za pomocą indukcji matematycznej następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Dla każdej liczby naturalnej n oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takich, że
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$$
zachodzi nierówność:
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n.$$

Dowód.

1. Sprawdzamy, że zachodzi, $n = 1$, czyli mamy jedną liczbę rzeczywistą dodatnią taką, że $a_1 = 1$. Stąd wynika, że $a_1 \geq 1$. Zatem twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$. Sprawdzamy jeszcze czy twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$. Wówczas mamydwie liczby dodatnie rzeczywiste a_1 i a_2 takie, że $a_1 \cdot a_2 = 1$. Stąd wynika, że $a_2 = \frac{1}{a_1}$ i $a_1+a_2 = a_1+\frac{1}{a_1} = \frac{a_1^2+1}{a_1}$. Chcemy pokazać, że $a_1+a_2 \geq 2$, czyli że $\frac{a_1^2+1}{a_1} \geq 2$, co jest równoważne nierówności $a_1^2+1 \geq 2a_1$ (mnożymy obustronnie poprzednią nierówność przez a_1, które jest dodatnie). Ostatnia nierówność zachodzi zawsze, bo $(a_1-1)^2 \geq 0$. Zatem twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$.

2. Niech $n \geq 2$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną i załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n. Weźmy teraz $n+1$ liczb rzeczywistych dodatnich $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ takich, że
$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n+1} = 1.$$
Jeżeli $b_i = 1$ dlakażdego $i = 1, \ldots, n+1$, to wtedy
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} = n + 1$$
i teza twierdzenia dla $n+1$ zachodzi.
Jeżeli nie wszystkie liczby $b_i = 1$, to znaczy, że istnieją takie i, j, że $b_i < 1$ oraz $b_j > 1$ (przynajmniej po jednej). Bez straty ogólności możemy założyć, że $b_n < 1$ i $b_{n+1} > 1$. Teraz skorzystamy z założenia indukcyjnego, że dla dowolnych n dodatnich liczb rzeczywistych, których iloczyn jest równy 1, twierdzenie jest prawdziwe. Niech zatem
$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n = b_n \cdot b_{n+1}.$$
Wówczas
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n \cdot b_{n+1} + b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1}$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1} \geq n + b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1}$$
(skorzystaliśmy tutaj z założenia, że twierdzenie działa dla liczb $a_1, \ldots, a_n$.) Wystarczy teraz sprawdzić, czy $b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1} \geq 1$, czyli $b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1} - 1 \geq 0$. Zauważmy, że możemy przekształcić ostatnie wyrażenie:
$$b_n + b_{n+1} - b_n \cdot b_{n+1} - 1 = (1 - b_n)(b_{n+1} - 1)$$
co jest dodatnie po uwzględnieniu założenia, że $b_n < 1$ i $b_{n+1} > 1$, co kończy dowód na mocy zasady indukcji matematycznej.

Dla dowolnych liczb nieujemnych rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ przyjmijmy następujące oznaczenia:
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad \text{(średnia geometryczna)}$$
$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{(średnia arytmetyczna).}$$

1.1 Zależność między średnimi liczb

Udowodnimy teraz zależność między średnimi.
Twierdzenie 3.

Dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność:
$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Dowód. Załóżmy, że mamy n dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Rozważmy dwa przypadki

1. Jeżeli któraś z tych liczb jest równa zero, to wtedy ich iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ też jest równy zero. Wówczas $G_n = 0$ i nierówność $G_n \leq A_n$ zachodzi, bo $a_i \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Załóżmy teraz, że $\forall\ i\ a_i > 0$, to niech

$$b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}.$$

Wówczas $b_i > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Zauważmy, że wtedy $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = 1$ i możemy skorzystać z poprzedniego twierdzenia, z którego wynika, że wtedy $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n$. Stąd otrzymujemy nierówność

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}} \geq n,$$

która jest równoważna nierówności

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

co kończy dowód.

1.2 Wzór dwumianowy Newtona

Twierdzenie 4.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi następujący wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dowód. (indukcyjny) Załóżmy, że a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Sprawdzamy, czy twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1, \quad \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1,$$

czyli twierdzenie jest prawdziwe. Dla $n = 1$ mamy

$$(a+b)^1 = a + b, \quad \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a,$$

czyli dla $n = 1$ też zachodzi.

Załóżmy teraz, że $n \geq 1$ jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną i twierdzenie zachodzi. Pokażemy, że wtedy wzór jest prawdziwy dla liczby $n + 1$, tzn.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = \text{(korzystamy z założenia indukcyjnego)}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (a+b) = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

co jest równe

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Ostatnią sumę rozpiszemy teraz w ten sposób, że osobno napiszemy ostatni składnik pierwszej sumy i pierwszy składnik drugiej sumy:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1}.$$

Skoro

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0},$$

to możemy to zapisać w następującej postaci

$$\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}.$$

Zauważamy, że $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)}$ (czyli przesuwamy indeks o jeden). Wówczas mamy

$$\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-(k-1)} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}.$$

Wiemy, że $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Stąd mamy

$$\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-(k-1)} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

co kończy dowód.