

Algoritmi e strutture dati

Koci Erik

May 3, 2021

1 Complessità algoritmi

1. **Costo:** si riferisce al costo di un singolo algoritmo
2. **Complessità:** si riferisce a più risoluzioni di un algoritmo

il costo di un blocco **if-then-else** è $O(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$ cioè **O(1)**.

1.1 Ordini di grandezza

1. $\Theta(f(n))$ se cresce tanto quanto f
2. $O(f(n))$ se la crescita è minore o uguale a f
3. $\Omega(f(n))$ se la crescita è maggiore o uguale a f

1.2 Esercizi

- $1325n^2 + 12n + 1 = \theta(n^3)$ FALSO
- $76n^3 == (n^3)$ VERO
- $n^2 \log n = O(n^2)$ FALSO
- $3^N = O(2^N)$ FALSO
- $1^n = O(2^{\frac{n}{2}})$ FALSO
- $2^N + 100 = O(2^N)$ VERO

- $n = O(n \log n)$ VERO
- $n^2 = (n \log n)$ FALSO
- $\log(n^2) = \Theta(\log n)$ VERO
- $(n + 1)/2 = \Theta(n)$ VERO
- $\frac{(n+1)*n}{2} = \Theta(n^2)$ VERO

1.3 Analisi casi

1. Caso pessimo

$$T_{\text{WORST}}(n) = \max T(I)$$

2. Caso ottimo

$$T_{\text{BEST}}(n) = \min T(I)$$

3. Caso medio

$$T_{\text{AVG}}(n) = \sum T(I)P(I)$$

1.4 Algoritmi ordinamento

Selection sort: scorre tutti gli elementi degli array e si cerca il valore più piccolo scambiando i due valori. Il costo è lineare con il numero di elementi da considerare:

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

il costo è $\Theta(n^2)$ perchè è presente una funzione min che ogni volta controlla se il numero è il minore. Le chiamate a **min** contribuiscono a n^2 mentre il resto combacia con n cioè $n^2 + n$; n viene assorbito.

Ricerca binaria (ricorsiva): per utilizzare questo algoritmo devo avere un array ordinato. Cerco il valore andando a verificare sempre nella metà dove mi aspetto che sia presente.

$$T(n) = 1 \text{ se } n = 0$$

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

equazione di ricorrenza: ci aiuta a calcolare il costo analizzando una singola ricorsione.

1.5 metodo dell'iterazione:

consiste nello sviluppare l'equazione di ricorrenza, per intuirne la soluzione.

$$T(n) = c_1 + c_2 * \log(n) = \Theta(\log(n))$$

E' presente il **logaritmo** perchè ogni volta devo **dimezzare** il tutto in base al numero di elementi. c_1 perchè devo eseguire le istruzioni la prima volta.

dimostrare che $T(n) = O(n)$

$$T(n = 1) \quad n == 1$$

$$T(T([n/2]) + n) \quad n > 1$$

1.6 Metodo della sostituzione:

consiste facendo una dimostrazione per induzione. quindi parto dal valore base che è n (esempio 1) e dimostriamo che vale anche per un n più grande.

caso base:

$$T(1) = 1 \leq cn$$

induzione:

$$\begin{aligned} T(n) &= T([n/2]) + n \\ &\leq c[n/2] + n \quad (\text{ipotesi induttiva}) \\ &\leq cn/2 + n = \frac{cn + 2n}{2} = (c/2 + 1)n \leq cn \end{aligned}$$

1.7 Master Theorem:

Si consideri la seguente equazione di ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &= d \text{ se } n = 1 \\ T(n) &= aT(n/b) + cn^\beta \text{ se } n > 1 \end{aligned}$$

e sia:

$$\alpha = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

a numero di chiamate ricorsive

b mi dice come partiziono il mio input

questi due valori mi danno α .

β mi dice l'esponente che avevo.

L'equazione di ricorrenza ha la seguente soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^\alpha)$ se $\alpha > \beta$
2. $T(n) = \Theta(n^\alpha * \log(n))$ se $\alpha = \beta$
3. $T(n) = \Theta(n^\beta)$ se $\alpha < \beta$

Il teorema fondamentale **non** si può applicare ad algoritmi ricorsivi che non effettuano **partizioni bilanciate**.

ad esempio non può essere applicato nella risoluzione di fibonacci ricorsivo.

Esempio:

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 \text{ se } n \leq 1 \\ T(n) &= T(n/2) + 1 \text{ se } n > 2 \end{aligned}$$

Se le **partizioni sono bilanciate** conviene utilizzare il **Master Theorem**.

partizione bilanciate: quando facciamo chiamate ricorsive prendo il mio input suddividendolo in parti n/b . Fibonacci non è bilanciato perché abbiamo due chiamate ricorsive diverse.

L'analisi ammortizzata: studia il costo medio di una sequenza di operazioni.

Sia $T(n, k)$ il tempo totale richiesto da un algoritmo, nel caso pessimo, per effettuare k operazioni su istanze di lunghezza n . Definiamo il **costo ammortizzato** su una sequenza di k operazioni come:

$$T_\alpha(n) = \frac{T(n, k)}{k}$$

1.8 Algoritmi di visita degli alberi

Esistono due tipologie di visita:

- In profondità (pre-ordine, in-ordine, post-ordine)
- In ampiezza

Nella visita **pre-ordine** si parte visitando il nodo della radice per poi passare a visitare tutto il nodo sinistro, risalendo poi andando verso destra.

Nella visita **in-ordine** si parte a visitare dal ramo più in basso a sinistra risalendo per poi andare verso destra.

Nella visita **post-ordine** vengono prima visitati i nodi più in profondità partendo sempre da sinistra verso destra per poi risalire.

Nella visita per **ampiezza** si analizza l'albero a livelli, partendo dalla radice.

1.9 Alberi AVL

Un albero *AVL* è un albero di ricerca (quasi) bilanciato. Questo albero supporta le operazioni di *insert()*, *delete()*, *search()* con costo $O(\log n)$ nel caso pessimo.

1.9.1 Fattore di bilanciamento

Il fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v è dato dalla differenza tra l'altezza del sottoalbero sinistro e del sottoalbero destro di v :

$$\beta(v) = \text{altezza}(v.\text{left}) - \text{altezza}(v.\text{right})$$

1.9.2 Bilanciamento in altezza

Un albero si dice **bilanciato in altezza** se le altezze dei sottoalberi sinistro e destro di ogni nodo differiscono al più di uno.

$$\beta \leq 1$$

Definizione: un albero *AVL* è un *ABR* bilanciato in altezza.

1.9.3 Inserimento e rimozione

Inserimenti e rimozioni richiedono di essere modificati per mantenere il bilanciamento dell'albero.

L'operazione fondamentale per ribilanciare l'albero è la **rotazione semplice**.

1.9.4 Rotazione a sinistra

Per effettuare questa rotazione prendo il nodo problematico e effettuo una rotazione scambiandolo con il successivo ed il nodo scambiato diventerà figlio destro mentre il figlio del nodo precedente diventerà figlio sinistro.

1.10 Alberi 2-3

Un albero 2-3 è un albero in cui:

- Tutti i percorsi radice-foglia hanno la stessa lunghezza
- Le foglie contengono le chiavi (e i dati da memorizzare) e sono ordinate da sinistra verso destra in ordine di chiave crescente.
- Ogni nodo interno (non foglia) v ha 2 o 3 figli e mantiene due informazioni
 - $S[v]$, **chiave massima** nel sottoalbero sinistro (2 o 3 figli)
 - $M[v]$, **chiave massima** nel sottoalbero centrale (3 figli)
- Distribuzione dei valori k delle chiavi nei sottoalberi:
 - Sinistro $k \leq S[v]$
 - Centro $S[v] < k \leq M[v]$
 - Destro $k > M[v]$

1.11 Tabelle Hash

Le **tabelle hash** hanno una implementazione basata su una chiave k e array. Per ottenere la chiave sono presenti diverse tecniche di calcolo.

Ricapitolando, per realizzare una tabella hash efficiente abbiamo bisogno di:

- Un vettore
- Una funzione hash calcolabile velocemente e che garantisca una buona distribuzione delle chiavi nel vettore
- Un meccanismo per gestire le collisioni

1.11.1 Problema delle collisioni

Una funzione hash h si dice **perfetta** se è iniettiva:

$$\forall u, v \in U : u \neq v \rightarrow h(u) \neq h(v)$$

Se le collisioni sono inevitabili, è necessario trovare un metodo che le minimizzi, distribuendo **uniformemente** le chiavi negli indici della tabella hash.

1.11.2 Funzioni hash

E' necessario fare una premessa; nelle funzioni hash è **sempre possibile** trasformare una chiave complessa in un numero, (conversione in binario).

1.11.3 Metodo dell'estrazione

Le caratteristiche di questo metodo sono:

- Usa solo una parte della chiave
- Si seleziona una sottosequenza di p bit, con $m = 2^p$
- Solitamente dalle posizioni centrali

esempio: Verranno prese le cifre centrali 101000

$$\text{bin}(\text{"beer"}) = 000010\ 000101\ 000101\ 010010$$

- **Vantaggi:** molto veloce da calcolare
- **Svantaggi** rischio collisioni più alto di altri metodi

1.11.4 Metodo della divisione

Basata sul resto della divisione per m :

- **Vantaggio:** molto veloce
- **Svantaggio:** Suscettibile a specifici valori di m . Per risolvere questo problema bisogna scegliere m come numero primo non troppo vicino ad una potenza di 2.

Esempio:

$$m = 12, k = 100 \rightarrow h(k) = 4$$

1.11.5 Metodo della moltiplicazione

Basato sulla moltiplicazione e il resto del numero

1. Sia A una costante, $0 < A < 1$
2. Moltiplichiamo k per A e prendiamo la parte frazionaria
3. Moltiplichiamo quest'ultima per m e prendiamo la parte intera

Esempi:

$$m =, k = 3, A = 0.8 \rightarrow h(k) = 2$$

$$m = 1000, k = 123, A \approx 0.6180339887... \rightarrow h(k) = 18$$

- **Svantaggi:** lento (più lento del metodo di divisione)
- **Vantaggi** Il valore di m non è critico
- **Come scegliere A?** $A \approx (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.61803...$ (**Knuth**)

1.11.6 Metodo della codifica algebrica

Metodo utilizzando dal compilatore java basato su espressioni algebriche:

$$h(k) = (k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0) \bmod m$$

$$k = k_n k_{n-1} \dots k_1 k_0$$

Dove $k_0, k_1 \dots$ possono essere, ad esempio, i bit della **codifica binaria** di k , oppure i **codici ascii** dei singoli caratteri di k .

x è un valore **costante**.

- **Vantaggi:** dipende da tutti i bit/caratteri della chiave
- **Svantaggi:** n addizioni e $n * (n - 1)/2$ prodotti

1.11.7 Problema delle collisioni

Attraverso questi metodi elencati precedentemente siamo riusciti a ridurre il numero di collisioni, ma senza eliminarle.

Per risolvere questo problema la **complessità computazionale potrebbe aumentare a n** , possono essere utilizzate le seguenti tecniche:

1. **Concatenamento**
2. **Indirizzamento aperto**

1.11.8 concatenamento

Nella tecnica di **concatenamento** gli elementi con lo stesso valore hash h vengono memorizzati in una lista concatenata (linked list).

Il **fattore di carico** è dato dal rapporto tra numero di elementi memorizzati e dimensioni della tabella.

La **complessità** del concatenamento è la seguente:

- insert: $\Theta(1)$
- search: $\Theta(n)$
- delete: $\Theta(n)$

1.11.9 indirizzamento aperto

L'idea è quella di memorizzare tutte le chiavi nella tabella stessa, ed ogni slot contiene una chiave oppure *null*.

Inserimento: se lo slot prescelto è utilizzato, si cerca uno slot alternativo.

Ricerca: si cerca nello slot prescelto, e poi negli slot alternativi fino a quando non si trova la chiave oppure *null*.

Vengono utilizzati diversi algoritmi di indirizzamento, per esempio i seguenti:

Ispezione lineare

Il primo elemento determina l'intera sequenza. In questo modo si ottengono **lunghe sottosequenze**.

$$h(k, i) = (h'(k) + i)$$

Ispezione quadratica:

L'ispezione iniziale è in $h'(k)$, mentre le successive hanno un offset che dipende da una **funzione quadratica nel numero di ispezione**.

$$h'(k) + c_1 i + c_2 i^2$$

Doppio hashing:

Formato da **due funzioni ausiliari** di cui la prima h_1 fornisce la prima ispezione, mentre h_2 fornisce l'offset delle successive ispezioni.

$$h(k, i) = (h_1(k) + i h_2(k))$$

1.11.10 Conclusioni hash table

Usare funzioni hash $h(k)$ che producano valori il più possibile uniformemente distribuiti è molto importante perchè altrimenti potremmo arrivare ad una complessità computazionale pari a $O(n)$.

Problemi con hashing:

- Scarsa locality of reference (cache miss)
- In base all'implementazione è in genere difficile ottenere le chiavi in ordine
- Sebbene il costo medio per operazione sia basso, la singola operazione può risultare molto costosa, ad esempio se occorre ridimensionare la tabella e redistribuire le chiavi.

2 Scelta degli algoritmi

A seconda delle operazioni da eseguire è necessario adattare diverse tecniche di implementazione di un algoritmo.

2.0.1 Implementazione su un vettore ordinato

Questo tipo di ricerca ha un costo computazionale basso nel caso in cui volessimo **ricercare degli elementi**. Costi computazionali:

- Ricerca $O(\log n)$
- Inserimento $O(n)$
- Eliminazione $O(n)$

2.0.2 Implementazione su liste concatenate non ordinate

Questa implementazione converrebbe utilizzarla nel caso in cui volessimo **aggiungere o eliminare degli elementi**. Costi computazionali:

- Ricerca $O(n)$
- Inserimento $O(1)$
- Eliminazione $O(n)$

2.0.3 Implementazione alberi ABR

Implementazione basata su alberi binari. Costi computazionali:

- Ricerca $O(h)$
- Inserimento $O(h)$
- Eliminazione $O(h)$

2.0.4 Implementazione alberi AVL

Implementazione basata su alberi binari a altezza equivalente. Costi computazionali:

- Ricerca $O(\log n)$
- Inserimento $O(\log n)$
- Eliminazione $O(\log n)$

2.0.5 Implementazione alberi 2-3

Implementazione basata su alberi binari ordinati con chiavi massime. Costi computazionali:

- Ricerca $O(\log n)$
- Inserimento $O(\log n)$
- Eliminazione $O(\log n)$

2.0.6 Hash table

Implementazione basata su array, dove l'elemento con chiave k è memorizzato nel $k -esimo$ "slot" dell'array.

- Ricerca caso medio $O(1)$ Ricerca caso pessimo $O(n)$
- Inserimento caso medio $O(1)$ Inserimento caso pessimo $O(n)$
- Eliminazione caso medio $O(1)$ Eliminazione caso pessimo $O(n)$

2.1 Riepilogo

	search		insert		delete	
	Medio	Pessimo	Medio	Pessimo	Medio	Pessimo
Array ordinato	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Lista non ordinata	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
ABR	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$
Albero AVL	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Albero 2-3	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Tabella Hash	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$

3 Algoritmi di ordinamento

3.0.1 ordinamento in loco:

L'algoritmo permuta gli elementi direttamente nell'array originale, senza usare un altro array di appoggio.

3.0.2 ordinamento stabile:

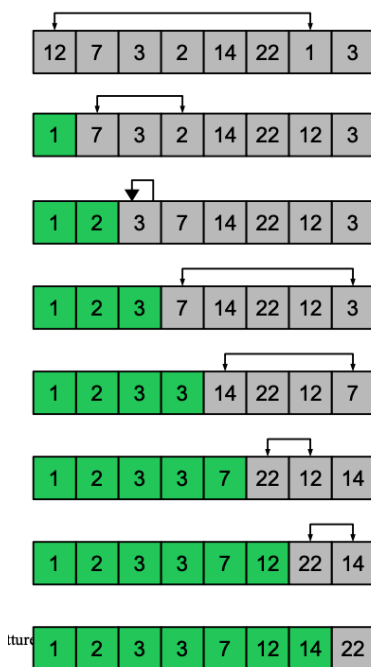
L'algoritmo preserva l'ordine con cui elementi con la stessa chiave compaiono nell'array originale.

3.1 Selection sort

Cerca il minimo in $A[k + 1..n]$ e spostalo in posizione $k + 1$.

La complessità di questo algoritmo è pari a:

$$O(n^2)$$

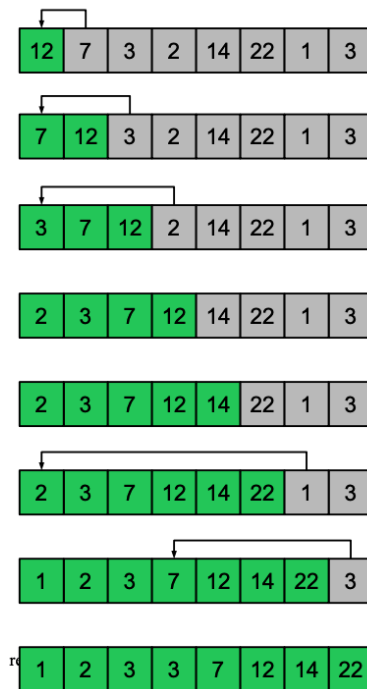


3.2 Insertion sort

Inserisco l'elemento di posizione $k+1$ nella **posizione corretta** all'interno dei primi k elementi ordinati. Al termine del passo k , il vettore ha le prime k componenti ordinate.

Il costo computazionale di questo algoritmo è:

$$O(n^2)$$

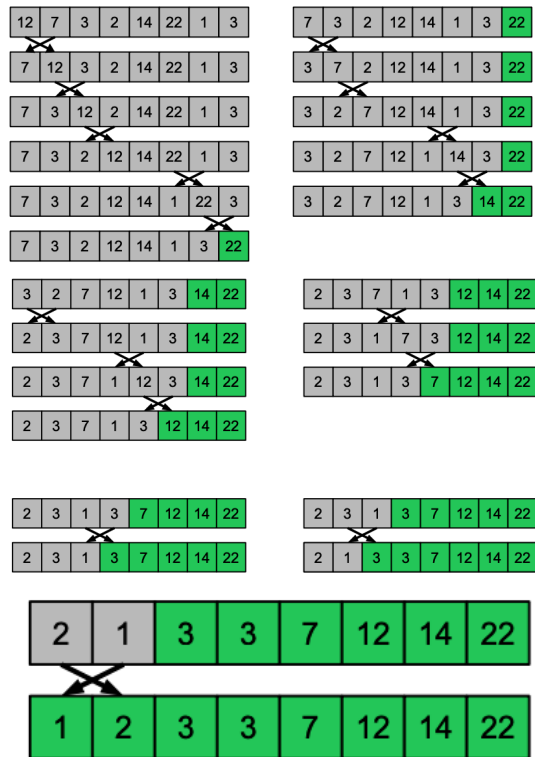


3.3 Bubble sort

Ad ogni scansione scambia le coppie di elementi adiacenti che non sono nell'ordine corretto.

Ad ogni scansione **scambia le coppie di elementi adiacenti**. Dopo la prima scansione, l'elemento massimo occupa l'ultima posizione, dopo la k-esima scansione, i k elementi massimi occupano la posizione corretta in fondo all'array. Nel caso *pessimo* – *ottimo* bubble Sort ha costo:

$$\Theta(n^2) \quad \Theta(n)$$



3.4 Quick sort

Scegli un elemento x del vettore v , e **partiziona il vettore in due parti** considerando gli elementi $\leq x$ e quelli $> x$

Ordina ricorsivamente le due parti.

Restituisci il risultato concatenando le due parti ordinate.

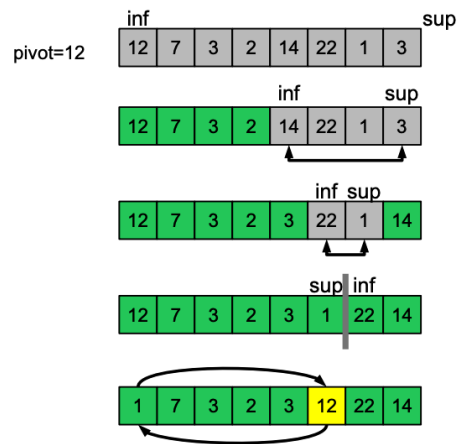
3.4.1 Partizionamento

Manteniamo due indici, inf e sup , che vengono fatti **scorrere dalle estremità** del vettore verso il centro. Quando entrambi (inf e sup) non possono essere fatti avanzare verso il centro, si **scambia** $A[inf]$ e $A[sup]$.

Il costo quick sort: Dipende dal partizionamento:

caso peggiore: $\Theta(n^2)$

caso migliore: $\Theta(n \log n)$



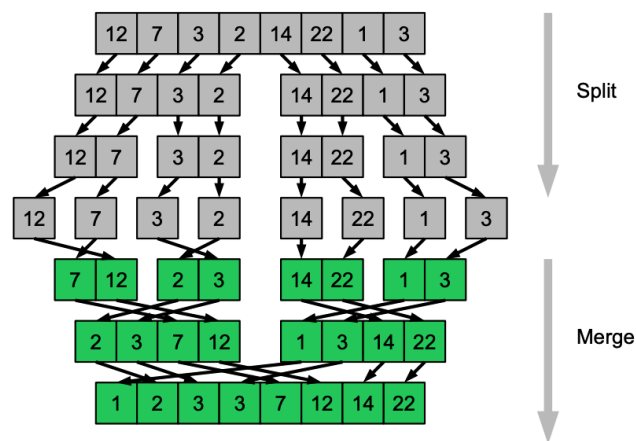
3.5 Merge Sort

Questo algoritmo **divide** $A[]$ in **due meta'** $A1[]$ e $A2[]$ (senza permutare) di dimensioni uguali;

Applica **ricorsivamente** Merge Sort a $A1[]$ e $A2[]$.

Fonde (merge) gli array ordinati $A1[]$ e $A2[]$ per ottenere l'array $A[]$ ordinato.

Merge Sort: esempio



3.6 Heapsort

Funzionamento:

1. Costruire un **max-heap** a partire dal vettore $A[]$ originale, mediante l'operazione **heapify()**
2. Estrarre il **massimo** ($findMax() + deleteMax()$)
3. **Inserire** il massimo in ultima posizione di $A[]$.
4. **Ripetere** il punto 2. finché lo heap diventa vuoto

3.6.1 Albero binario perfetto

Un albero binario è **perfetto** se:

- Tutte le foglie hanno la stessa altezza h
- Nodi interni hanno grado 2

Un albero perfetto ha altezza $h \simeq \log N$

Il numero di nodi è $N = \text{nod}i = 2^{h+1} - 1$

3.6.2 Albero binario completo

Un albero binario è **completo** se:

- Tutte le foglie hanno profondità h o $h-1$
- Tutti i nodi a livello h sono “accatastati” a sinistra
- Tutti i nodi interni hanno grado 2, eccetto al più uno

3.6.3 Max-heap

Un albero binario completo è un albero **max-heap** sse:

- Ad ogni nodo i viene associato un valore $A[i]$
- $A[\text{Parent}(i)] \geq A[i]$

3.6.4 Min-heap

Un albero binario completo è un albero **min-heap** sse:

- Ad ogni nodo i viene associato un valore $A[i]$
- $A[\text{Parent}(i)] \leq A[i]$

3.7 Operazioni su array heap

3.7.1 findMax()

Individua il valore massimo contenuto in uno heap.

Il massimo è sempre la radice, ossia $A[1]$.

L'operazione ha costo $\Theta(1)$.

3.7.2 fixHeap()

Ripristinare la proprietà di max-heap.

Supponiamo di rimpiazzare la radice $A[1]$ di un max-heap con un valore qualsiasi, vogliamo fare in modo che $A[]$ diventi nuovamente uno heap.

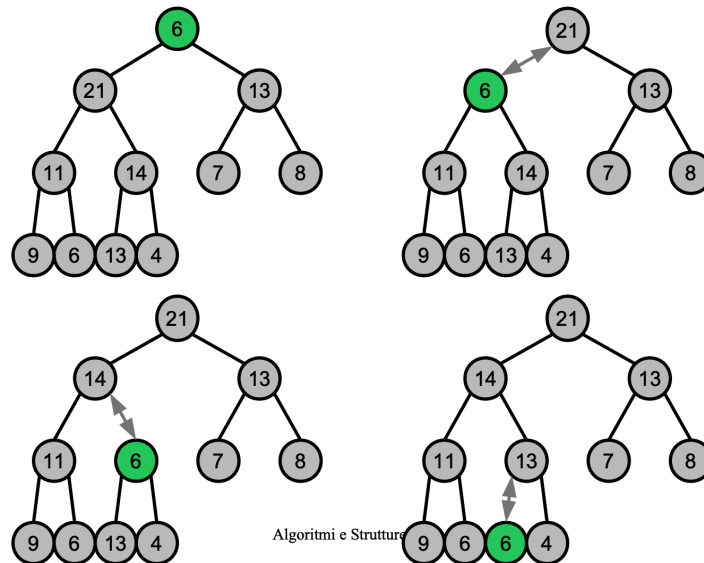
3.7.3 heapify()

Costruire uno heap a partire da un array privo di alcun ordine.

3.7.4 deleteMax()

Rimuovi l'elemento massimo da un maxheap $A[]$.

3.7.5 Esempio heapSort:



Algoritmi di ordinamento: sommario

- Abbiamo visto diversi algoritmi di ordinamento:

- **Selection Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n^2)$
- **Insertion Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n^2)$
- **Bubble Sort**: ottimo $\Theta(n)$, (medio)/pessimo $\Theta(n^2)$
- **Quick Sort**: ottimo $\Theta(n \log n)$, medio $\Theta(n \log n)$, pessimo $\Theta(n^2)$
- **Merge Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n \log n)$ (non in-loco)
- **Heap Sort**: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n \log n)$

Esercizio: come modificare per avere caso ottimo $\Theta(n)$?

- Nota:

- Tutti questi algoritmi sono basati su confronti
 - le decisioni sull'ordinamento vengono prese in base al confronto ($<$, $=$, $>$) fra due valori

Esercizio: perché il caso medio è $\Theta(n^2)$?

4 Tecniche lineari di ordinamento

4.1 Counting Sort

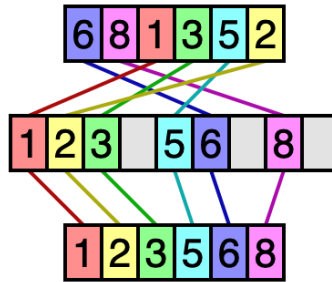
I valori di $A[0..n-1]$ appartengono all'intervallo $[0, k-1]$ (ciascun valore può comparire zero o più volte).

Costruisco un array $Y[0, k-1]$; $Y[i]$ conta il numero di volte in cui il valore i compare in A .

Ricolloco i valori così ottenuti in A .

Counting Sort: Costo

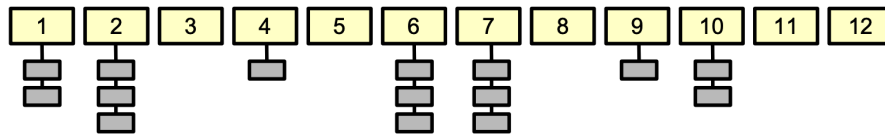
$$O(\max\{n, k\}) = O(n + k) = O(n)$$



4.2 Bucket Sort

Cosa succede se i valori da ordinare non sono numeri interi, ma record associati ad una chiave?

Possiamo usare liste concatenate.



Bucket Sort: Costo

$$O(n + k)$$

4.3 Radix Sort

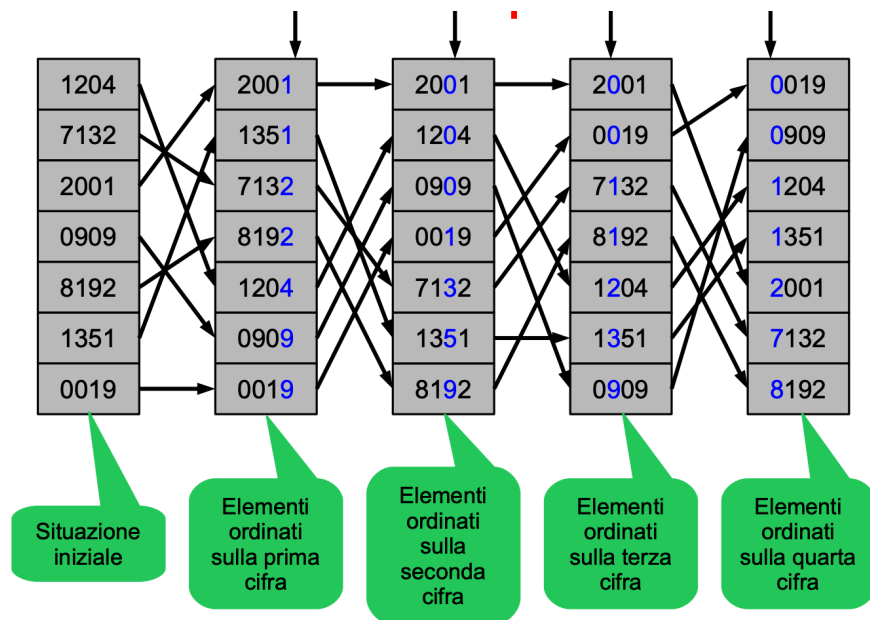
Supponiamo di voler ordinare n numeri con 4 cifre decimali.

Questo richiederebbe $n + 10000$ operazioni; se $n \log n < n + 10000$, questo non sarebbe conveniente.

Prima ordino in base alla cifra delle **unità**.

Poi ordino in base alla cifra delle **decine**.

Poi ordino in base alla cifra delle **centinaia**.



5 Selezione del k-esimo

Consideriamo il seguente problema:

Selezione del k-esimo minimo: dato un array $A[1..n]$ di valori distinti e un valore $1 \leq k \leq n$, trovare l'elemento che è maggiore di esattamente $k - 1$ elementi.

Mediano: il valore che occuperebbe la posizione $(n/2)$ se l'array fosse ordinato.

I **motori di ricerca** producono molti risultati a fronte di una singola query. I risultati vengono mostrati in pagine, in ordine decrescente di rilevanza. È **inutile ordinare tutti i risultati** in base alla rilevanza.

Verifichiamo ora i costi computazionali dei singoli casi:

Ricerca del minimo:

$$T(n) = n - 1 = \Theta(n)$$

Ricerca del secondo minimo:

$$T(n) = 2n - 3 = \Theta(n)$$

Selezione del k-esimo elemento:

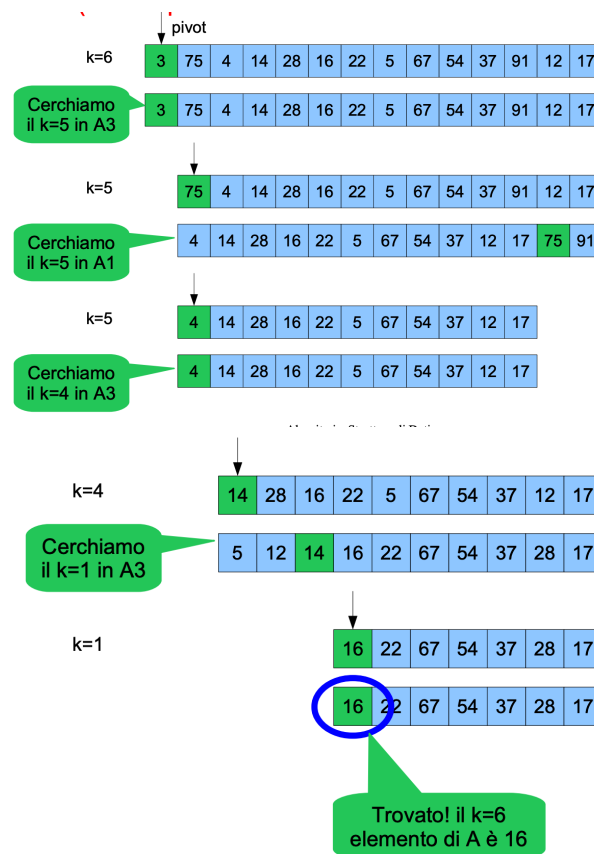
$$T(n) = \Theta(kn)$$

Selezione del valore mediano:

$$T(n) = O(n + k \log n) = O(n + (n/2) \log n) = O(n \log n)$$

5.0.1 Adattamento di quicksort al problema della selezione:

In questo modo divido il mio array in più partizioni, andando a eliminare quelle inutili.



5.0.2 Analisi dell'algoritmo quickSelect()

Costo nel caso ottimo:

$$T(n) = T(n/2) + n = \Theta(n)$$

Costo nel caso pessimo:

$$T(n) = T(n-1) + n = \Theta(n^2)$$

Costo nel caso medio:

$$T(n) \leq 4n$$

6 Code con priorità

Le code con priorità sono strutture dati che mantengono il minimo (massimo) in un insieme dinamico di chiavi.

$$coda = key|elem$$

Sono presenti due possibili implementazioni:

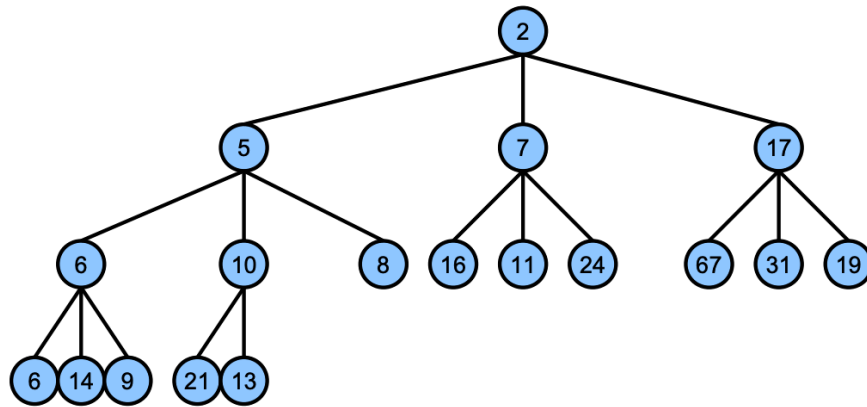
- d-heap
- heap binomiali e heap di fibonacci

6.0.1 d-heap

Un d-heap è un albero d-ario con le seguenti proprietà:

1. Un d-heap di altezza h è perfetto almeno fino alla profondità $h-1$; le foglie al livello h sono accatastate a sinistra.
2. Ciascun nodo v contiene una *chiave*(v) e un elemento *elem*(v). Le chiavi appartengono ad un dominio totalmente ordinato.
3. Ogni nodo diverso dalla radice ha chiave non inferiore (\geq) a quella del padre.

Esempio d-heap: $d = 3$



Un d-heap con n nodi ha **altezza** $O(\log_d n)$

Riepilogo costi per d-heap

- `findMin()` \rightarrow elem $O(1)$
- `insert(elem e, chiave k)` $O(\log_d n)$
- `delete(elem e)` $O(d \log_d n)$
- `deleteMin()` $O(d \log_d n)$
- `increaseKey(elem e, chiave d)` $O(d \log_d n)$
- `decreaseKey(elem e, chiave d)` $O(\log_d n)$

7 Union find

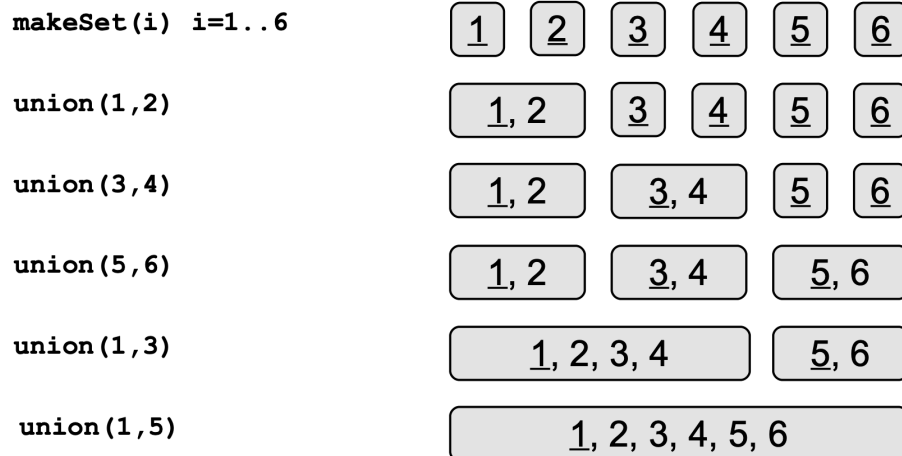
L'**union find** è una struttura dati basata sugli insiemi.

Essa può creare un insieme a partire da un singolo elemento, unire due insiemi, identificare l'insieme a cui appartiene un elemento. Gli insiemi contengono complessivamente $n \leq k$ elementi. Ogni insieme è identificato da un rappresentante univoco.

Operazioni Union find:

- *makeSet(elem x)*: Crea un insieme il cui unico elemento (e rappresentante) è x . Esso non deve appartenere ad un altro insieme esistente.
- *find(elem x) → name*: Restituisce il rappresentante dell'unico insieme contenente x .
- *union(name x, name y)*: Unisce i due insiemi rappresentati da x e da y . Assumiamo che il nome del nuovo insieme sia x . I vecchi insiemi devono essere distrutti.

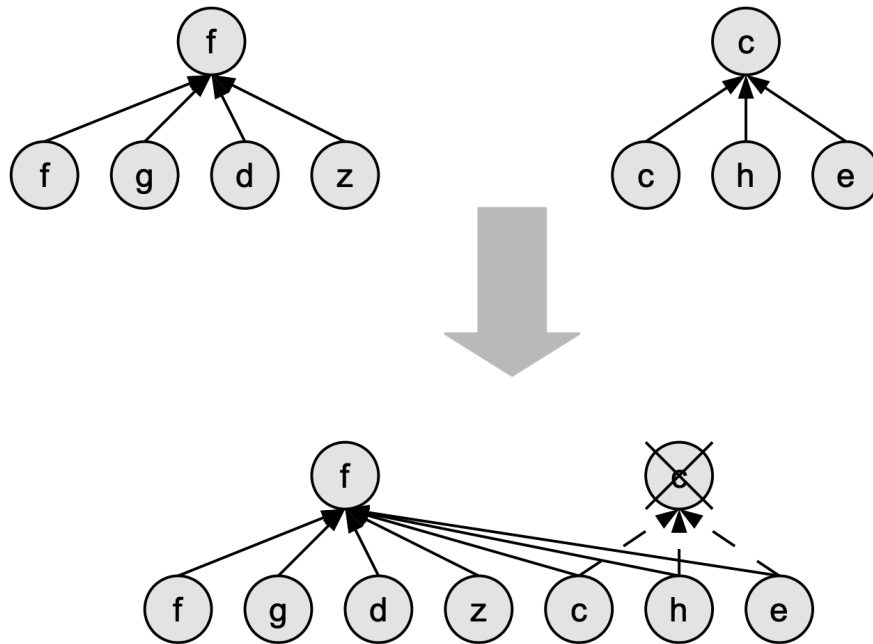
Esempio:



7.1 QuickFind

Ogni insieme viene rappresentato con un **albero** di altezza uno.

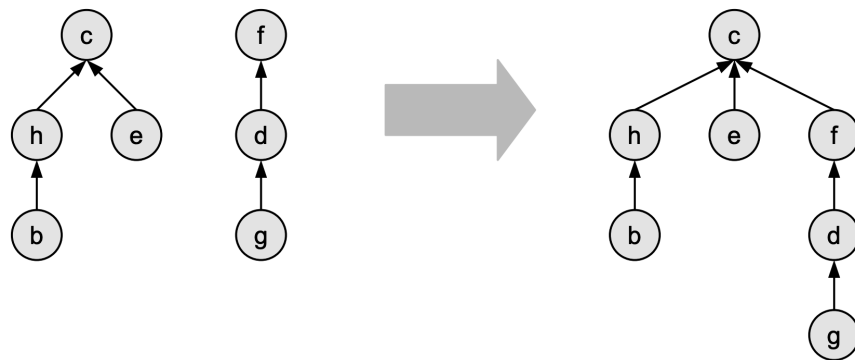
- Le foglie dell'albero contengono gli elementi dell'insieme.
- Il rappresentante è la radice.



7.2 QuickUnion

Implementazione basata su foresta.

- Si rappresenta ogni insieme tramite un albero radicato generico.
- Ogni nodo dell'albero contiene l'oggetto e il puntatore al padre.
- Il rappresentante è la radice.



Riepilogo

	QuickFind	QuickUnion
makeSet	$O(1)$	$O(1)$
union	$O(n)$	$O(1)$
find	$O(1)$	$O(n)$

E' conveniente utilizzare **QuickFind** quando le *union()* sono rare e le *find()* frequenti.

E' conveniente utilizzare **QuickUnion** quando le *find()* sono rare e le *union()* frequenti.

8 Divide et Impera

- Divide-et-impera
 - Un problema viene suddiviso in sotto-problemi, che vengono risolti ricorsivamente (top-down).
- Algoritmi greedy
 - Ad ogni passo si fa sempre la scelta che in quel momento appare ottima; le scelte fatte non vengono mai disfatte
- Programmazione dinamica
 - La soluzione viene costruita (bottom-up) a partire da un insieme di sotto-problemi

Tecnica divisa in **3 fasi** fondamentali:

1. **Divide:** Dividi il problema in sotto-problemi indipendenti, di dimensioni *minori*.
2. **Impera:** Risolvi i sotto-problemi ricorsivamente.
3. **Combina:** Unisci le soluzioni dei sottoproblemi per costruire la soluzione del problema di partenza

8.1 Algoritmi greedy

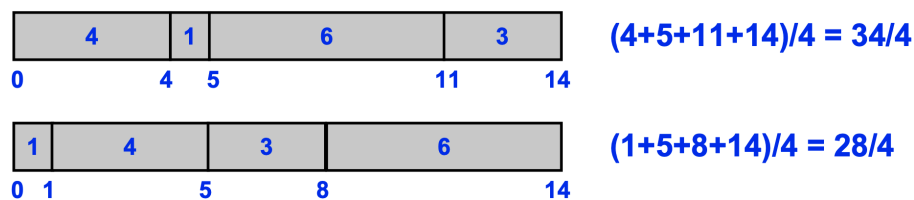
Quando applicare la tecnica greedy?

- Quando è possibile dimostrare che esiste una **scelta ingorda**.
 - Fra le molte scelte possibili, se ne può facilmente individuare una che porta sicuramente alla soluzione ottima.
- Quando il problema ha **sottostruttura ottima**.
 - “Fatta tale scelta, resta un sottoproblema con la stessa struttura del problema principale”.

8.2 Algoritmo di scheduling

Algoritmo che si basa in base al tempo medio di esecuzione:

- 1 processore, n job p_1, p_2, \dots, p_n .
- Ogni job p_i ha un tempo di esecuzione $t[i]$.
- Minimizzare il tempo medio di completamento.



8.3 Codifica di Huffman

Questa codifica viene utilizzata per risolvere il problema di compressione, (compressione di un file). Viene utilizzata una tecnica detta **codifica di caratteri**

- Si usa una **funzione di codifica f**: $f(c) = x$
 1. c è un carattere preso da un alfabeto Σ
 2. x è una rappresentazione binaria del carattere c
 3. c è rappresentato da x in modo efficiente
- Una sequenza di caratteri $c_1c_2c_n$ viene codificata con la sequenza di bit $f(c_1)f(c_2)f(c_n)$
- data una qualsiasi codifica, deve essere sempre possibile decodificarla durante la lettura sequenziale bit-dopo-bit.

Dobbiamo utilizzare una codifica che minimizza la dimensione del nostro file.

8.3.1 Codifica a lunghezza fissa

- Possibili car.: 'a' 'b' 'c' 'd' 'e' 'f'
- frequenze: **45%** **13%** **12%** **16%** **9%** **5%**

- Supponiamo di avere un file di n caratteri.
- Codifica tramite ASCII (8 bit per carattere).
- Codifica basata sull'alfabeto (3 bit per carattere).

8.3.2 Codifica a lunghezza variabile

- Caratteri: 'a' 'b' 'c' 'd' 'e' 'f'
- Codifica: **0** **101** **100** **111** **1101** **1100**
- Costo totale:
 $(0.45*1+0.13*3+0.12*3+0.16*3+0.09*4+0.05*4)*n=2.24n$

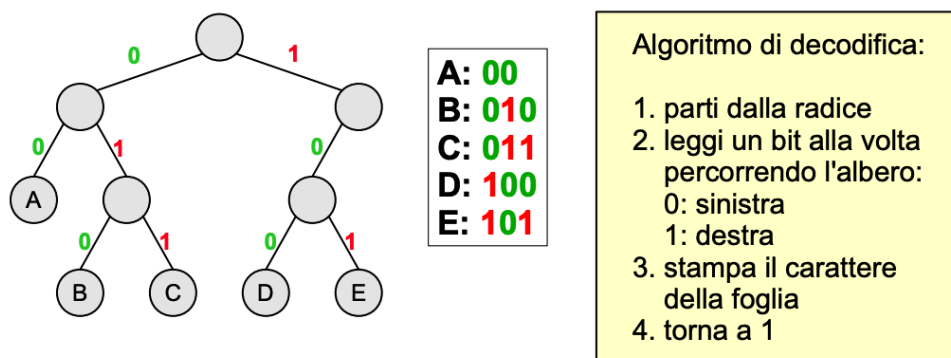
- Codifica a lunghezza variabile
- **codice a prefisso** (senza prefissi):
 - **nessun codice è un prefisso di un altro codice.**
 - Condizione richiesta per permettere sempre la decodifica durante la lettura bit-dopo-bit.

In questo modo avendo dei **prefissi univoci**, non appena troviamo una sequenza di bit possiamo risalire alla decodifica della parola. In questo modo **lettere frequenti** saranno composte da **pochi bit**.

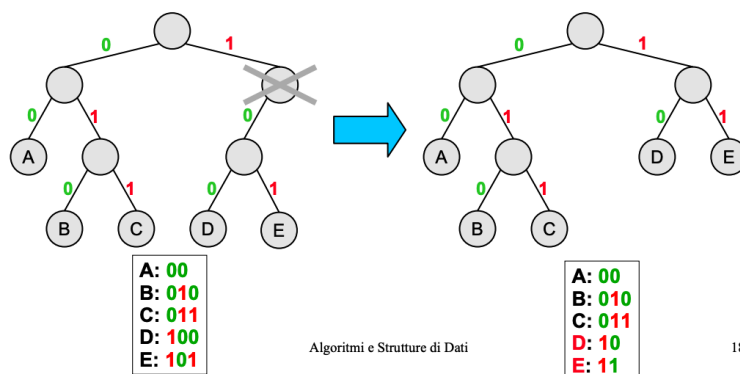
8.3.3 Codici di Huffman

Rappresentazione del codice come un albero binario

- Figlio sinistro: 0 Figlio destro: 1
- Caratteri dell'alfabeto sulle foglie



Questo esempio per essere ottimizzato deve avere anche un figlio destro al primo livello di profondità.



Il principio del codice di Huffman è:

- **Minimizzare la lunghezza dei caratteri** che compaiono più frequentemente.
- Assegnare ai caratteri con la frequenza i codici corrispondenti ai percorsi più lunghi all'interno dell'albero.

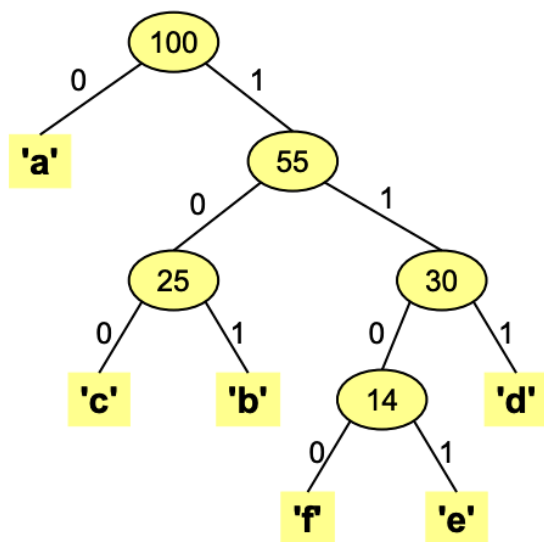
1. Inizialmente costruiamo una lista ordinata di nodi, in cui ogni nodo contiene un carattere e il numero di volte in cui quel carattere compare nel file.

"f" : 5 "e" : 9 "c" : 12 "b" : 13 "d" : 16 "a" : 45

2. Rimuovere i due nodi con frequenze minori.
3. Colregarli ad un nodo padre etichettato con la frequenza combinata (sommata).

"c" : 12 "b" : 13 "d" : 16 "a" : 45

4. Aggiungere il nodo combinato alla lista, mantenendola ordinata in base alla frequenza.



Vantaggi:

- Semplici da programmare
- Solitamente efficienti
- Quando è possibile dimostrare la proprietà di scelta greedy danno la soluzione ottima

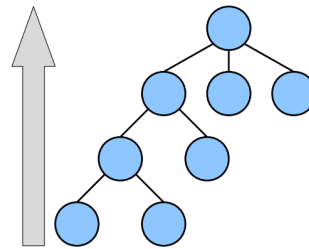
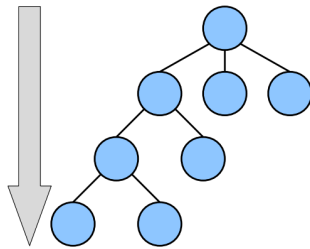
- La soluzione sub-ottima può essere accettabile

Svantaggi:

- Non tutti i problemi ammettono una soluzione greedy
- Quindi, in certi casi gli algoritmi greedy non possono essere usati se si vuole la soluzione ottima

9 Programmazione dinamica

- **Divide-et-impera**
 - Tecnica ricorsiva
 - Approccio **top-down**
 - Vantaggiosa quando i sottoproblemi sono **indipendenti**
- **Programmazione dinamica**
 - Tecnica iterativa
 - Approccio **bottom-up**
 - Vantaggiosa quando ci sono sottoproblemi **ripetuti**



Algoritmi e Strutture di Dati

4

1. **Sottostruttura ottimale**, deve essere possibile combinare le soluzioni dei sottoproblemi.
2. **Sottoproblemi ripetuti**, che ricompaiono costantemente.

9.1 Distanza di Levenshtein

Tecnica utilizzata dai correttori ortografici. Basata su:

- Concetto di edit distance:
 - Numero di operazioni di “editing” che sono necessarie per trasformare una stringa S in una nuova stringa T .
- Trasformazioni ammesse:
 - Lasciare immutato il carattere corrente (costo 0).
 - Cancellare un carattere (costo 1).
 - Inserire un carattere (costo 1).
 - Sostituire il carattere corrente con uno diverso (costo 1).
- Dopo ciascuna operazione ci si sposta sul carattere successivo:
 - Si inizia dal primo carattere di S .

La **distanza di levenshtein** tra $S[1..n]$ e $T[1..m]$ è il **costo minimo** tra tutte le sequenze di operazioni di editing che trasformano S in T .

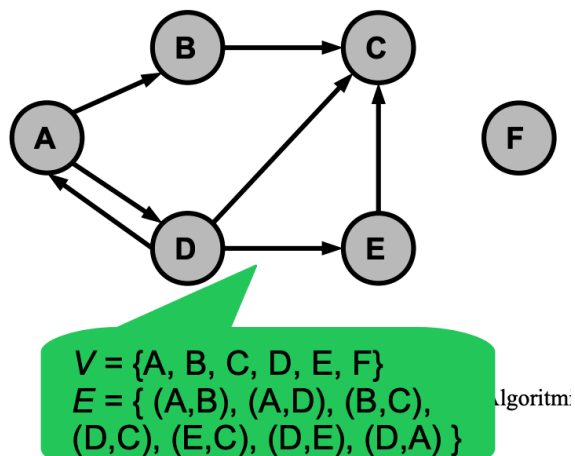
Esempio:

- Determinare il numero minimo di operazioni di editing necessarie per trasformare il prefisso $S[1..i]$ di S nel prefisso $T[1..j]$ di T .
- La definizione della soluzione è data da $L[1..j]$. - La distanza di Levenshtein tra $S[1..n]$ e $T[1..m]$ è il valore $L[n, m]$.

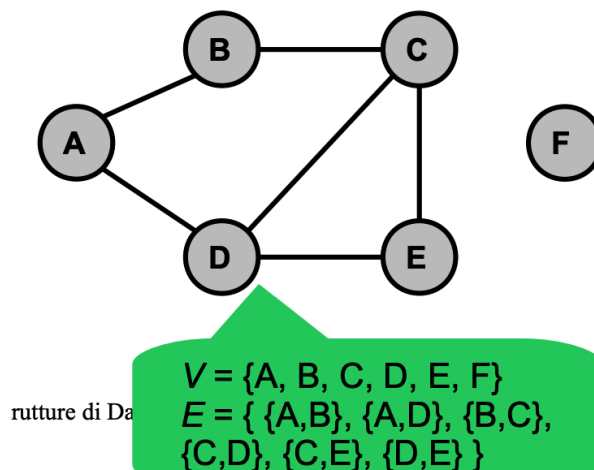
10 Grafi

10.1 Grafi orientati e non orientati

- Un **Grafo orientato** G è una coppia (V, E) dove:
 - Insieme finito dei **vertici** V
 - Insieme degli **archi** E : relazione binaria tra vertici



- Un **grafo non orientato** G è una coppia (V, E) dove:
 - Insieme finito dei **vertici** V
 - Insieme degli **archi** E : coppie non ordinate

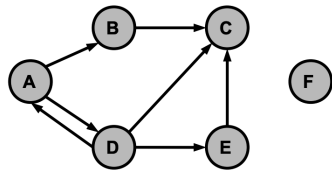


10.2 Problemi sui grafi

- Visite
 - Visite in ampiezza
 - Visite in profondità
- Alberi di copertura minimi
- Cammini minimi
 - Da singola sorgente
 - Fra tutte le coppie dei vertici

10.2.1 Incidenza e adiacenza

- In un grafo orientato l'arco (v, w) è **incidente** da v a w
- Un vertice w è **adiacente** a v se e solo se $(v, w) \in E$
- In un grafo non orientato la relazione di adiacenza tra vertici è simmetrica



(A, B) è incidente da A a B
 (A, D) è incidente da A a D
 (D, A) è incidente da D a A

B è adiacente ad A
C è adiacente a B, D, E
A è adiacente a D e viceversa
B non è adiacente a D, C
F non è adiacente ad alcun vertice

- NumVertici() → intero
- NumArchi() → intero
- grado(vertex v) → intero
- archiIncidenti(vertex v) → (arco, arco, ... arco)
- estremi(arco e) → (vertex, vertex)
- opposto(vertex x, arco e) → vertex
- sonoAdiacenti(vertex x, vertex y) → booleano
- aggiungiVertice(vertex v)
- aggiungiArco(vertex x, vertex y)
- rimuoviVertice(vertex v)
- rimuoviArco(arco e)

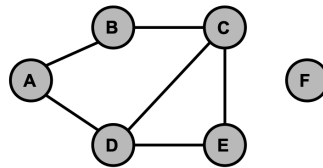
$n = \text{vertici}$

$m = \text{numero archi}$

10.3 Rappresentazioni di grafi

- Liste di archi:

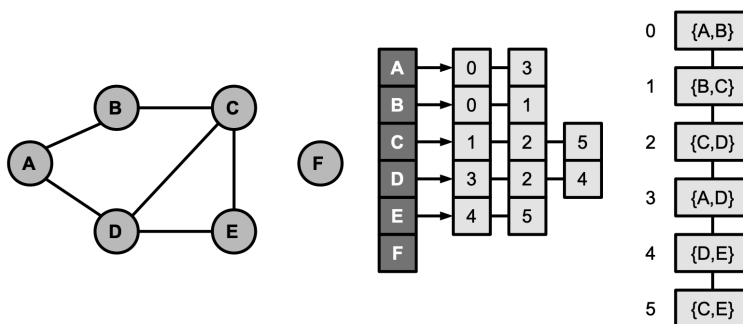
- grado = $O(m)$
- archiIncidenti = $O(m)$
- sonoAdiacenti = $O(m)$
- aggiungiVertice = $O(1)$
- aggiungiArco = $O(1)$
- rimuoviVertice = $O(m)$
- rimuoviArco = $O(1)$



$\delta = \text{grado}$

- Liste di incidenza

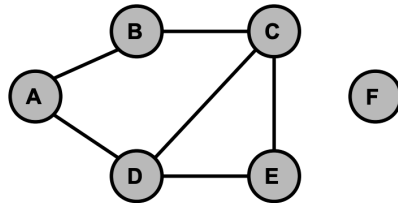
- $\text{grado} = O(\delta(n))$
- $\text{archiIncidenti} = O(\delta(n))$
- $\text{sonoAdiacenti} = O(\min \delta(x), \delta(y))$
- $\text{aggiungiVertice} = O(1)$
- $\text{aggiungiArco} = O(1)$
- $\text{rimuoviVertice} = O(m)$
- $\text{rimuoviArco} = O(\delta(x) + \delta(y))$



- Matrice di adiacenza

- $\text{grado} = O(n)$
- $\text{archiIncidenti} = O(n)$
- $\text{sonoAdiacenti} = O(1)$
- $\text{aggiungiVertice} = O(n^2)$
- $\text{aggiungiArco} = O(1)$
- $\text{rimuoviVertice} = O(n^2)$
- $\text{rimuoviArco} = O(1)$

$$M(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } \{u, v\} \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



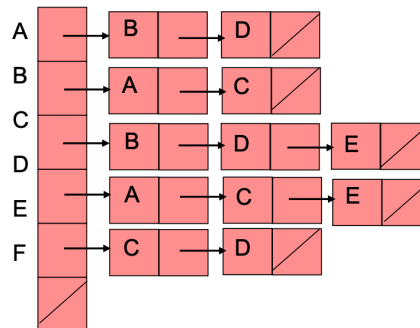
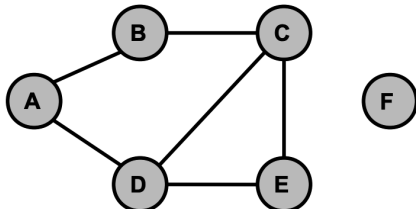
$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Spazio: $\Theta(|V|^2)$

- Liste di adiacenza

- grado = $O(\delta(v))$
- archiIncidenti = $O(\delta(v))$
- sonoAdiacenti = $O(\min \delta(x), \delta(y))$
- aggiungiVertice = $O(1)$
- aggiungiArco = $O(1)$
- rimuoviVertice = $O(m)$
- rimuoviArco = $O(\delta(x) + \delta(y))$

$$v.\text{adj} = \{ w \mid \{v, w\} \in E \}$$



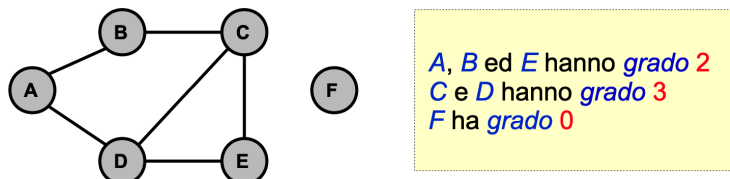
Spazio: $\Theta(|V| + |E|)$

10.4 Grafi pesati

In alcuni casi ogni arco ha un **peso** (o **costo**) associato. Il costo può essere determinato tramite una funzione di costo $c: E \in R$, dove R è l'insieme dei numeri reali. Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è **infinito**.

10.5 Grado

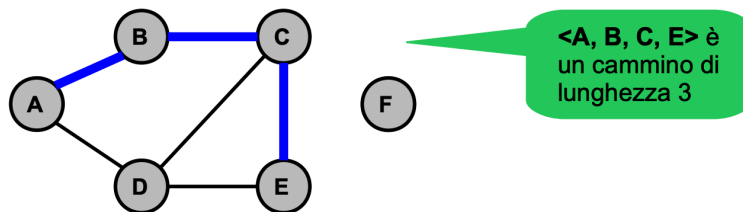
In un **grafo non orientato**, il **grado** di un vertice è il **numero di archi** che partono da esso.



- In un **grafo orientato**, il grado entrante (uscente) di un vertice è il **numero di archi incidenti** in (da) esso
- In un **grafo orientato** il grado di un vertice è la **somma** del suo grado entrante e del suo grado uscente

10.6 Cammini

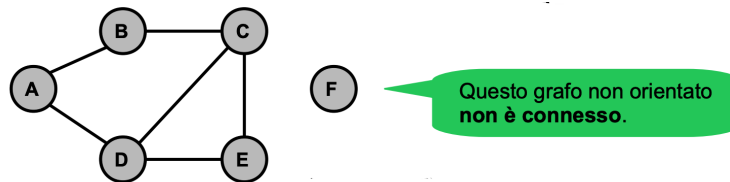
La lunghezza del cammino è il numero di archi attraversati.



Un cammino si dice **semplice** se tutti i suoi vertici sono **distinti** (compaiono una sola volta nella sequenza).

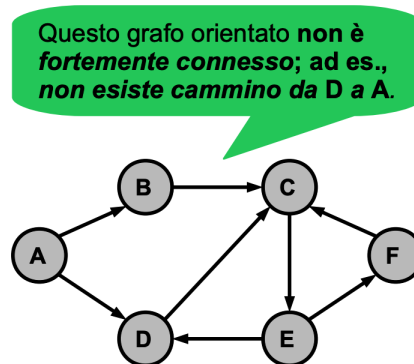
10.7 Grafi connessi

Se G è un grafo **non orientato**, diciamo che G è **connesso** se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.



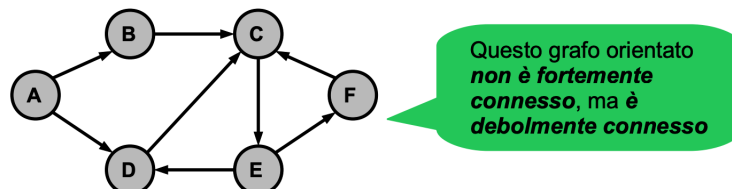
10.7.1 Grafo fortemente connesso

Se G è un grafo **orientato**, diciamo che G è **fortemente connesso** se esiste un cammino da ogni vertice ad ogni altro vertice.



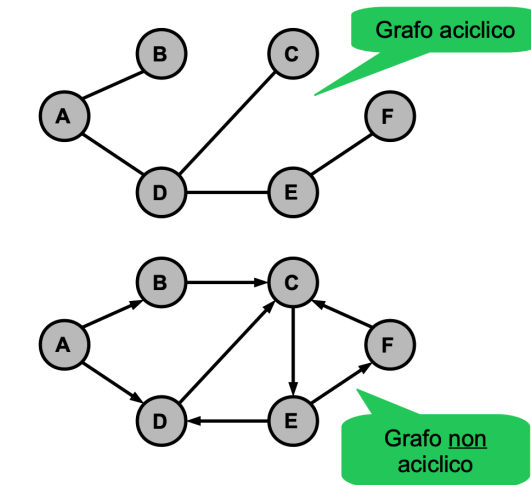
10.7.2 Grafo debolmente connesso

Se G è un grafo **orientato** che non è fortemente connesso, ma la sua versione non orientata è connessa, diciamo che G è **debolmente connesso**.



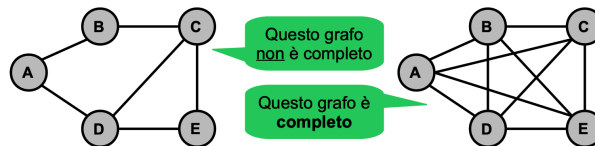
10.8 Grafi aciclici

Un grafo senza cicli semplici è detto **aciclico**. Un grafo orientato aciclico è chiamato **DAG** (Directed Acyclic Graph).



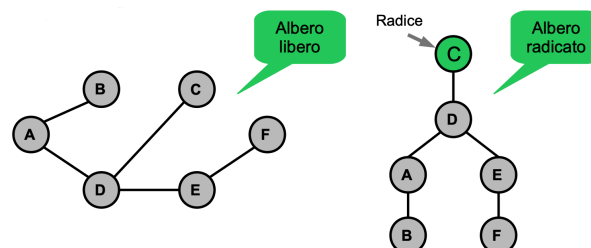
10.9 Grafo completo

Un **grafo non orientato completo** è un grafo non orientato che ha un arco tra ogni coppia di vertici.



10.10 Alberi

Un **albero libero** è un grafo non orientato connesso, aciclico. Se un vertice è detto radice, otteniamo un **albero radicato**.



11 Algoritmi di Visita di grafi

- **Visita in ampiezza** (breadth-first search)
 - Visita i nodi “espandendo” la frontiera fra nodi scoperti / da scoprire
 - Es: Cammini di lunghezza minima da singola sorgente
- **Visita in profondità** (depth-first search)
 - Visita i nodi andando il “più lontano possibile” nel grafo
 - Es: Componenti fortemente connesse, ordinamento topologico

11.0.1 Vertici del grafo

Ogni vertice del grafo può essere:

- **inesplorato**: Il vertice non è ancora stato incontrato.
- **aperto**: l'algoritmo ha incontrato il vertice la prima volta.
- **chiuso**: il vertice è stato visitato completamente (tutti gli archi incidenti sono stati esplorati).

11.1 Algoritmo di visita generico

```
algoritmo visita(G, s)→albero
  rendi "non marcati" tutti i vertici
  T := s
  F := { s }
  "marca" il vertice s
  while (F ≠ ∅) do
    u := F.extract()
    "visita il vertice u"
    for each v adiacente a u do
      if (v non è marcato) then
        marca il vertice v
        T := T ∪ v
        F.insert(v)
        v.parent := u
      endif
    endfor
  endwhile
  return T
```

- F è l'insieme **frontiera** (o **frangia**)
- Il funzionamento di *extract()* e *insert()* non è specificato
- T è l'albero che viene costruito dalla visita
- $v.parent$ è il padre di v nell'albero T

11.1.1 Complessità

- $O(n + m)$ liste di adiacenza
- $O(n^2)$ matrice di adiacenza

11.2 Algoritmo di visita in ampiezza

- Visitare i nodi a distanze crescenti dalla sorgente
- Generare un albero BF (breadth-first), cioè un albero contenente tutti i vertici
- Calcolare la distanza minima da s a tutti i vertici raggiungibili

```
algoritmo BFS(Grafo G, vertice s) → albero
for each v in V do v.mark := false
T := s
F := new Queue()
F.enqueue(s)
s.mark := true
s.dist := 0
while (F ≠ ∅) do
  u := F.dequeue()
  "visita il vertice u"
  for each v adiacente a u do
    if (not v.mark) then
      v.mark := true
      v.dist := u.dist + 1
      F.enqueue(v)
      v.parent := u
    endif
  endfor
endwhile
return T
```

- Insieme F gestito tramite una coda
- $v.mark$ è la marcatura del nodo v
- $v.dist$ è la distanza del nodo v dal vertice s

11

11.3 Algoritmo di visita in profondità

- Utilizzata per coprire l'intero grafo, non solo i nodi raggiungibili da una singola sorgente (diversamente da BFS)
- Informazioni aggiuntive sul tempo di visita

```
algoritmo DFS-visit(vertice u)
u.mark := gray;
time := time + 1;
u.dt := time;
for each v adiacente a u do
  if (v.mark = white) then
    v.parent := u;
    DFS-visit(v);
  endif
endfor
"visita il vertice u"
time := time + 1;
u.ft := time;
u.mark := black;
```

- Nodi bianchi = inesplorati
- Nodi grigi = aperti
- Nodi neri = chiusi

11.3.1 Proprietà della visita DFS

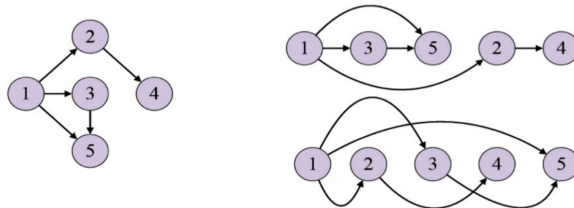
In una qualsiasi visita in profondità per ogni coppia di vertici u, v **una sola** delle seguenti condizioni è vera:

1. Gli intervalli $[u.dt, u.ft]$ e $[v.dt, v.ft]$ sono disgiunti (non sono discendenti)
2. L'intervallo $[u.dt, u.ft]$ è interamente contenuto in $[v.dt, v.ft]$ (u è discendente di v)
3. L'intervallo $[v.dt, v.ft]$ è interamente contenuto in $[u.dt, u.ft]$ (v è discendente di u)

11.4 Ordinamento topologico

Dato un DAG G (direct acyclic graph), un ordinamento topologico su G è un ordinamento lineare dei suoi vertici tale per cui:

- Se G contiene l'arco (u, v) , allora u compare prima di v nell'ordinamento
- Per transitività, ne consegue che se v è raggiungibile da u , allora u compare prima di v nell'ordinamento



11.4.1 Algoritmo per ordinamento topologico

Algoritmo:

1. Si effettua una DFS
2. L'operazione di visita aggiunge il nodo alla testa di una lista "at finish time"
3. Restituire la lista di vertici

