Algebra e geometria

Koci Erik

March 13, 2021

1 Spazi vettoriali

Uno **spazio vettoriale** su un campo κ è un insieme V in cui sono definite:

1. Un'operazione interna tra elementi di V, detta **somma**
2. Un'operazione di **prodotto** che associa ad ogni coppia formata da un elemento di V (vettore) e da un elemento di κ (scalare) un (unico) elemento di V.
3. Devono rispettare le proprietà dei numeri *reali*

L'insieme $R^n = \{(x_1, x_2, x_\mathrm{n}) : x_\mathrm{i} \in R\}$ di tutte le n-uple ordinate di numeri reali con le due operazioni di **somma** e **moltiplicazione per uno scalare** così definite:

$$(x_1, x_2, x_\mathrm{n}) + (y_1, y_2, y_\mathrm{n}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_\mathrm{n} + y_\mathrm{n})$$

$$\lambda(x_1 + x_2 + x_\mathrm{n}) = (\lambda k_1 + \lambda k_2 + \lambda k_\mathrm{n}) \qquad \lambda \in R$$

E' uno **spazioe vettoriale su** R

In particolare

- Il vettore nullo di cui si parla è $0 = (0, 0, .., 0)$
- L'opposto di $v = (x_1, x_2, x_\mathrm{n})$ è $-v = (-x_1, -x_2, -x_\mathrm{n})$
- L'insieme dei vettori nel piano e dei vettori nello spazio possono essere identificati, rispettivamente, con R_2 e R_3

2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo κ. Un sottoinsieme $W \subsetneq V$ è un **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti proprietà:

1. Sommate due coppie di elementi il risultato deve ancora **appartenere** all'insieme definito.
$$W_1 + W_2 \in W$$
2. Moltiplicati due valori per una costante, il risultato deve ancora **appartenere** all'insieme.
$$\lambda w \in W$$
3. W **deve contenere lo 0** e l'opposto di ogni suo elemento.

Esempio:

Stabilire se è un sottospazio vettoriale di $V = R^2$

$$W = \{(x, y) \in R^2 : 2y - 3x = 0\}$$

Considero 2 generici vettori e verifico che la loro somma appartiene a sua volta a W:

$$W_1 + W_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Considero 2 generici vettori e verifico che appartengono a sua volta a W:

$$2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 2y_1 - 3x_1 + 2y_2 - 3x_2 = 0$$

Questa proprietà è verificata perchè sappiamo per definizione che $W_1 \in W$ e $W_2 \in W$.

Considero 2 generici vettori e verifico che il prodotto da come risultato un valore che appartiene a sua volta a W:

$$\lambda w_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$
$$2\lambda y_1 - 3\lambda k_1 = \lambda(2y_1 - 3x_1) = 0$$

Anche questa proprietà è stata verificata perchè sappiamo per definizione che $W_1 \in W$.

Ricordarsi sempre di verificare se esiste il vettore **nullo!**

3 Vettori linearmente dipendenti-indipendenti

Sia V uno spazio vettoriale su un campo κ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\mathrm{n}$ una qualunque somma del tipo:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_\mathrm{n} V_\mathrm{n}$$

Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono **linearamente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dà come risultato il vettore nullo.
Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono **linearmente indipendenti** se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli, ovvero se:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_\mathrm{n} V_\mathrm{n} = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_\mathrm{n} = 0$$

Esempio Verificare se i seguenti vettori $\in R^2$ sono linerarmente dipendenti o indipendenti:

$$V_1 = (1, 2) \qquad V_2 = (4, 1)$$

Per scoprirlo devo **risolvere:**

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$$

$$\lambda_1(1, 2) + \lambda_2(4, 1) = (0, 0) \implies (\lambda_1, 2\lambda_1) + (4\lambda_1, \lambda_1) = (0, 0)$$

$$(\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ 2(-4\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Due vettori sono **linearmente dipendenti** quando **stanno sulla stessa retta** ovvero quando $V_1 = \lambda V_2$.

Nel caso in cui una soluzione del sistema dia come risultato $0 = 0$ significa che il sistema ha infinite soluzioni. Di conseguenza possiamo prendere un **qualunque** valore. Se i vettori stanno sullo stesso piano allora sono **linearmente indipendenti**.

4 Insiemi di generatori e basi

Dati n vettori V_1, V_2, V_n di uno spazio vettoriale V su un campo κ si definisce **span lineare** l'insieme:

$$Span(V_1, V_2, V_n) = \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_n V_n | \lambda_i \in \kappa\}$$

Di tutti i vettori che si possono scrivere come combinazione lineare di V_1, V_2, V_n. Lo span è l'insieme di tutte le combinazioni lineari che possiamo fare da V_1 a $_n$. Esso può essere indicato con due principali sintassi:

$$L(V_1., V_2, V_n) \qquad < V_1, V_2, V_n >$$

Esempio: Se $V_1 \neq 0$ è un vettore di R^2 allora $L(V_1)$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 V_1$. Si tratta quindi della retta passante per l'origine di direzione V_1. Essa comprende tutti i suoi multipli.

Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono un **sistema di generatori** di V se ogni vettore di V si può ottenere come combinazione lineare di $V_1 V_2, V_n$, ovvero se $V = L(V_1, V_2, V_n$
Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono una **base** di V se:

- sono linearmente indipendenti
- sono un sistema di generatori

Si dimostra che, se V ha una base costituita da n vettori, ogni altra base di V è costituita da n vettori. Si dice allora che V ha **dimensione** n e si scrive $dimV = n$.
La scomposizione di un vettore V come combinazione lineare dei vettori di una base è unica, ovvero se V_1, V_2, V_n sono una base dello spazio vettoriale "v allora per ogni $v \in V$ esistono unici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ tali che:

$$V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_n V_n$$

I coefficienti di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ si dicono **componenti** di V rispoetto alla base V_1, V_2, V_n.
Esempio:
in R^2 una possibile base è $V_1 = (1, 0)$ e $V_2 = (0, 1)$. infatti:

- sono linearmente indipendenti (non sono paralleli)
- sono generatorim infatti per ogni generico $V = (a, b)$ di R^2 vale la relazione $V = a(1, 0) + b(0, 1)$