

Algebra e geometria

Koci Erik

March 13, 2021

1 Spazi vettoriali

Uno **spazio vettoriale** su un campo κ è un insieme V in cui sono definite:

1. Un'operazione interna tra elementi di V , detta **somma**
2. Un'operazione di **prodotto** che associa ad ogni coppia formata da un elemento di V (vettore) e da un elemento di κ (scalare) un (unico) elemento di V .
3. Devono rispettare le proprietà dei numeri *reali*

L'insieme $R^n = \{(x_1, x_2, x_n) : x_i \in R\}$ di tutte le n-uple ordinate di numeri reali con le due operazioni di **somma** e **moltiplicazione per uno scalare** così definite:

$$(x_1, x_2, x_n) + (y_1, y_2, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1 + x_2 + x_n) = (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_n) \quad \lambda \in R$$

E' uno **spazioe vettoriale su R**

In particolare

- Il vettore nullo di cui si parla è $0 = (0, 0, \dots, 0)$
- L'opposto di $v = (x_1, x_2, x_n)$ è $-v = (-x_1, -x_2, -x_n)$
- L'insieme dei vettori nel piano e dei vettori nello spazio possono essere identificati, rispettivamente, con R_2 e R_3

2 Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo κ . Un sottoinsieme $W \subsetneq V$ è un **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti proprietà:

1. Sommate due coppie di elementi il risultato deve ancora **appartenere** all'insieme definito.

$$W_1 + W_2 \in W$$

2. Moltiplicati due valori per una costante, il risultato deve ancora **appartenere** all'insieme.

$$\lambda w \in W$$

3. W deve contenere **lo 0** e l'opposto di ogni suo elemento.

Esempio:

Stabilire se è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^2$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 0\}$$

Considero 2 generici vettori e verifico che la loro somma appartiene a sua volta a W :

$$W_1 + W_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Considero 2 generici vettori e verifico che appartengono a sua volta a W :

$$2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 2y_1 - 3x_1 + 2y_2 - 3x_2 = 0$$

Questa proprietà è verificata perchè sappiamo per definizione che $W_1 \in W$ e $W_2 \in W$.

Considero 2 generici vettori e verifico che il prodotto da come risultato un valore che appartiene a sua volta a W :

$$\lambda w_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$2\lambda y_1 - 3\lambda x_1 = \lambda(2y_1 - 3x_1) = 0$$

Anche questa proprietà è stata verificata perchè sappiamo per definizione che $W_1 \in W$.

Ricordarsi sempre di verificare se esiste il vettore **nullo!**

3 Vettori linearmente dipendenti-indipendenti

Sia V uno spazio vettoriale su un campo κ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ una qualunque somma del tipo:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_n V_n$$

Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono **linearmente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dà come risultato il vettore nullo.

Si dice che i vettori V_1, V_2, V_n sono **linearmente indipendenti** se l'unica loro combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli, ovvero se:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_n V_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$$

Esempio Verificare se i seguenti vettori $\in R^2$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$V_1 = (1, 2) \quad V_2 = (4, 1)$$

Per scoprirlo devo **risolvere**:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0 \\ & \lambda_1(1, 2) + \lambda_2(4, 1) = (0, 0) \implies (\lambda_1, 2\lambda_1) + (4\lambda_1, \lambda_1) = (0, 0) \\ & (\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0) \\ & \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \lambda_1 = -4\lambda_2 \\ 2(-4\lambda_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Due vettori sono **linearmente dipendenti** quando stanno sulla stessa **retta** ovvero quando $V_1 = \lambda V_2$.

Nel caso in cui una soluzione del sistema dia come risultato $0 = 0$ significa che il sistema ha infinite soluzioni. Di conseguenza possiamo prendere un **qualsiasi** valore. Se i vettori stanno sullo stesso piano allora sono **linearmente indipendenti**.