

Programmazione Lineare

Luca Tagliavini *

30 giugno 2022

*Correzioni: Andreea Scrob, Federica Grisendi, Stefano Volpe, Matteo Manuelli, Paolo Ceroni

Indice

Esercizio 1.19	1
Esercizio 1.20	2
Esercizio 1.21	3
Esercizio 1.22	4
Esercizio 1.23	5
Esercizio 1.24	6
Esercizio 1.25	7
Esercizio 1.26	8
Esercizio 1.27	9
Esercizio 1.28	10
Esercizio 1.29	11
Esercizio 1.30	12
Esercizio 1.31	13
Esercizio 1.32	14
Esercizio 1.33	15
Esercizio 1.34	16
Esercizio 1.35	17
Esercizio 1.36	18
Esercizio 1.37	19
Esercizio 1.38	20
Esercizio 1.39	21
Esercizio 1.40	22
Esercizio 1.41	23
Esercizio 1.42	24

Esercizio 1.43	25
Esercizio 1.44	26
Esercizio 1.45	27
Esercizio 1.46	29
Esercizio 1.47	30
Esercizio 1.48	31
Esercizio 1.49	32
Esercizio 1.50	33
Esercizio 1.51	35
Esercizio 1.52	36
Esercizio 1.53	37
Esercizio 1.54	38
Esercizio 1.55	39

Esercizio 1.19

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il ragazzo } i \text{ è nella squadra A} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se la ragazza } j \text{ è nella squadra A} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obiettivo

$$\min \quad |(\sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{j=1}^m y_j b_j) - (\sum_{i=1}^n (1 - x_i) a_i + \sum_{j=1}^m (1 - y_j) b_j)|$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j = k \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m y_j \geq q \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m (1 - y_j) \geq q \quad (3)$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

Esercizio 1.20

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}$)

- x_i = numero di kilogrammi del mangime i acquistati

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n x_i c_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n 1000 x_i p_i \geq 170 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n 1000 x_i g_i \leq 200 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i \leq 1100 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Esercizio 1.21

Variabili ($i \in \{1, \dots, 3\}$)

- x_i = numero di pezzi del modello i prodotti

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^3 x_i a_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^3 x_i m_i \leq n \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i o_i \leq s \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_i g_i \leq p \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad (3)$$

$$x_i \leq \frac{\sum_{j=1}^3 x_j}{2} \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad (4)$$

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\} \quad (5)$$

Esercizio 1.22

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se almeno un aereo dell}'i\text{-esimo modello viene acquistato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x_i = \text{numero di aerei dell}'i\text{-esimo modello acquistati}$
- $h_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il } j\text{-esimo volo viene svolto da} \\ & \text{un aereo dell}'i\text{-esimo modello} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n y_i x_i c_i + y_i t_i$$

Vincoli

$$M = m \quad (\text{numero di voli}) \quad (1)$$

$$x_i \leq M y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_i \geq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$h_{i,j} \leq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^m h_{i,j} \leq x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n h_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n h_{i,j} a_i \geq d_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (7)$$

$$x_i \in \mathbb{N}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

$$h_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (9)$$

Esercizio 1.23

Parametri (preprocess) $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, \frac{m}{5}\})$

- $m = \frac{n}{5}$
- $y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } s_i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se lo studente } i \text{ è nel gruppo } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j} y_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 5 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$24 \leq \sum_{j=1}^m \frac{\sum_{i=1}^n x_{i,j} m_i}{m} \leq 28 \quad (2)$$

$$x_{i,j}, y_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Esercizio 1.24

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se collego il pozzo } i \text{ con la raffineria } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{i,j} c_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} a_{i,j} \geq p_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} a_{i,j} \leq r_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

Esercizio 1.25

Variabili $((i, j) \in E)$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \text{ è incluso nella soluzione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{(i,j) \in E} x_{i,j} c_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{(s,d) \in E} x_{s,d} = 1 \quad \sum_{(o,t) \in E} x_{o,t} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{(i,d) \in E} x_{i,d} = \sum_{(o,i) \in E} x_{o,i} \quad \forall i \in E \setminus \{s, t\} \quad (2)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E \quad (3)$$

Esercizio 1.26

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se comprimo il documento } i \text{ con il programma } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se acquisto il programma } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m y_j p_j$$

Vincoli

$$y_j \geq x_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq y_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m y_j d_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} c_{i,j} s_i \leq 650 \cdot 1000 \quad (4)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, y_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

Esercizio 1.27

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se metto l'oggetto } i \text{ nello scatolone } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se uso il } j\text{-esimo scatolone} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m y_j$$

Vincoli

$$y_j \geq x_{i,j} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq y_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} p_i \leq c_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$x_{i,j}, y_j \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

Esercizio 1.28

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}$)

- $v_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in d_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}$)

- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se dovrò frequentare il corso } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n x_i c_i$$

Vincoli

$$x_i = 1 \quad \forall i \in I \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i = 120 \quad (2)$$

$$x_i \geq v_{i,j} \quad \forall i \in I, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i t_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq k \quad (4)$$

$$x_i, v_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

Esercizio 1.29

Variabili $(i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\})$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se la stampante } i \text{ viene data al reparto } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} f_i \geq r_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \leq 5 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Esercizio 1.30

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\})$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se mi muovo dall'attrazione } i \text{ all'attrazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} l_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{d=1}^n x_{s,d} = 1 \qquad \sum_{o=1}^n x_{o,t} = 1 \qquad (1)$$

$$\sum_{d=1}^n x_{i,d} = \sum_{o=1}^n x_{o,i} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \qquad (2)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\} \qquad (3)$$

Esercizio 1.31

Variabili $(i \in \{1, \dots, m\})$

- x_i = numero di pacchi di pasta del tipo i

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n x_i c_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i \geq 1000k \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i g_i \geq 10r \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i q_i \geq 10b \quad (3)$$

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Esercizio 1.32

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- x_i = numero di GB allocati al provider i
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n x_i c_i$$

Vincoli

$$x_i \leq y_i t \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$x_i \geq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq 1000t \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i d_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \geq v \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i u_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \geq v \quad (4)$$

$$x_i \in \mathbb{N}, y_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

Esercizio 1.33

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}$)

- x_i = km percorsi dal camion i
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \leq k_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n y_i c_i + (i - y_i) d_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq 1000000 \quad (1)$$

$$x_i \leq y_i k_i + m_i (1 - y_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_i \geq k_i (1 - y_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_i \leq m_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$x_i \in \mathbb{N}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

Esercizio 1.34

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i \text{ viene assunto per il team } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} c_i$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq t_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in D} x_{i,j} \geq \frac{30}{100} \sum_{i=1}^n x_{i,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i}{\sum_{i=1}^n x_{i,j}} \geq 40 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

Esercizio 1.35

Variabili $((i, j) \in E)$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il commesso viaggiatore sfrutta l'arco } (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} c_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{i,j} = 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j) \in E(V', V'')} x_{i,j} \geq 1 \quad \forall (V', V'') \in (V, E) \quad (2)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Esercizio 1.36

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } e_i \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($i \in \{1, \dots, m\}$)

- x_i = numero di macchine dell'azienda i acquistate

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^m x_i = n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \geq n - k \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^m x_i d_i \geq c \tag{3}$$

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \tag{4}$$

Esercizio 1.37

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, o \in \{1, \dots, k\}$)

- $y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in D_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $h_{i,o} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j = o \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Variabili ($j \in \{1, \dots, m\}$)

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se acquisto il software } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m x_j c_j$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_j y_{i,j} = n \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$x_j, y_{i,j}, h_{j,o} \in \{1, 0\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, k\} \quad (2)$$

Variabili (variante) ($o \in \{1, \dots, k\}$)

- **variante** $y_o = \begin{cases} 1 & \text{se ho diritto allo sconto dall'azienda } o \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obiettivo (variante)

$$\min \sum_{j=1}^m x_j c_j - \sum_{o=1}^k y_o s_o$$

Vincoli (variante)

$$\sum_{j=1}^m x_j h_{j,o} \geq y_o s_o \quad \forall o \in \{1, \dots, k\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j h_{j,o} < y_o M + s_o \quad \forall o \in \{1, \dots, k\} \quad (2)$$

$$M = m \quad (3)$$

Esercizio 1.38

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n^2\}, g \in \{1, \dots, 7\}$)

- $l_{i,g} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_i \neq g \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n^2\}, j \in \{1, \dots, n\}$)

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se alloco il dipendente } i \text{ nello stabilimento } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n^2} \sum_{j=1}^n x_{i,j} d_{c_i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n^2\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n^2} x_{i,j} = n \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n^2} x_{i,j} l_{i,g} \geq p \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, g \in \{1, \dots, 7\} \quad (3)$$

$$x_{i,j}, l_{i,g} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n^2\}, \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall g \in \{1, \dots, 7\} \quad (4)$$

Esercizio 1.39

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se compilo il progetto } i \text{ sulla macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- t = stima per eccesso del tempo necessario

Funzione obbiettivo

$$\min \quad t$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} t_{i,j} \leq t \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, t \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Esercizio 1.40

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in d_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\bullet z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in b_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_j = \begin{cases} 1 & \text{se assumo il candidato } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^m x_j$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_j y_{i,j} \geq 5 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_j z_{i,j} \geq 3 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_j, y_{i,j}, z_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Esercizio 1.41

Variabili $(i, j \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, m^{i,j}\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se prendo il treno da } i \text{ a } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_{i,j,t} = \begin{cases} 1 & \text{se prendo il viaggio } (i,j) \text{ alle } p_{i,j}^t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{o=1}^n \sum_{t=1}^{m^{i,j}} y_{o,h,t} a_{o,h}^t$$

Vincoli

$$\sum_{d=1}^n x_{k,d} = 1 \qquad \sum_{o=1}^n x_{o,h} = 1 \quad (1)$$

$$\sum_{d=1}^n x_{i,d} = \sum_{o=1}^n x_{o,i} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{h, k\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} + x_{j,i} \leq 2 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{m^{i,j}} y_{i,j,t} = x_{i,j} \qquad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$\sum_{t=1}^{m^{i,j}} y_{i,j,t} \leq 1 \qquad \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \quad (5)$$

$$\sum_{o=1}^n \sum_{t=1}^{m^{o,i}} y_{o,i,t} a_{o,i}^t \leq \sum_{d=1}^n \sum_{t=1}^{m^{i,d}} y_{i,d,t} p_{i,d}^t \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

$$x_{i,j}, y_{i,j,t} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in \{1, \dots, m^{i,j}\} \quad (7)$$

Esercizio 1.42

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\})$

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se assegno il dipendente } i \text{ al progetto } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} a_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq k \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \geq p \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Esercizio 1.43

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in c_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se assegno il lavoro } i \text{ alla squadra } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} g_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$x_{i,j} \leq c_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$x_{i,j}, c_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Funzione obiettivo (variante)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} g_{i,j} o_j s_j$$

Esercizio 1.44

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

- $c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in p_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se assegno il candidato } i \text{ alla squadra } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se assumo il candidato } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n y_i c_i$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq k \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$y_i \leq \sum_{j=1}^m x_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \leq y_i M \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_{i,j} \leq c_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$x_{i,j}, y_i c_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (5)$$

$$M = k \quad (\text{questa scelta rende superfluo il vincolo 1}) \quad (6)$$

Esercizio 1.45

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\bullet u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\bullet x_i = \begin{cases} 1 & \text{se scelgo la canzone } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\max \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{m}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i = m \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{i,j} \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{2}$$

$$x_i, u_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{3}$$

Variabili (variante) ($i \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet y_{i,l} = \begin{cases} 1 & \text{se inserisco la canzone } i \text{ in posizione } l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli (variante)

$$\sum_{i=1}^n y_{i,l} = 1 \quad (\text{pedante}) \quad \forall l \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$\sum_{l=1}^m y_{i,l} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

$$x_i \geq y_{i,l} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, m\} \quad (6)$$

$$x_i \leq \sum_{l=1}^m y_{i,l} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n y_{i,l-1} g_i - \sum_{i=1}^n y_{i,l} y_i \right| > 0 \quad \forall l \in \{2, \dots, m\} \quad (8)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_{i,j} v_i}{\sum_{i=1}^n x_i u_{i,j}} \geq q \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \quad (9)$$

$$y_{i,l} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall l \in \{1, \dots, m\} \quad (10)$$

Esercizio 1.46

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, h \in \{1, \dots, k\})$

$$\bullet x_{i,j,h} = \begin{cases} 1 & \text{se pianifico una lezione del corso } i \text{ nell'aula } j \text{ nella fascia } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{h \in D} x_{i,j,h}$$

Vincoli

$$\sum_{h=1}^k x_{i,j,h} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j,h} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, h \in \{1, \dots, k\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j,h} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, h \in \{1, \dots, k\} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^k x_{i,j,h} = f_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$x_{i,j,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, k\} \quad (5)$$

Parametri (preprocess, variante) $(i \in \{1, \dots, n\}, a \in \{1, \dots, s\})$

$$\bullet y_{i,a} = \begin{cases} 1 & \text{se } d_i = a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli (variante)

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j,h} y_{i,a} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, h \in \{1, \dots, k\}, a \in \{1, \dots, s\} \quad (6)$$

$$y_{i,a} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall a \in \{1, \dots, s\} \quad (7)$$

Esercizio 1.47

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\})$

- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se posso acquistare energia da } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{quantita' di kWh che acquisto da } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\max \sum_{i=1}^n y_i m_i + x_i p_i$$

Vincoli

$$x_i \leq y_i c \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = c \quad (2)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n y_i m_i + x_i p_i} \leq 0.2 \quad (3)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Esercizio 1.48

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se carico il pacco } i \text{ sul camion } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se uso il camion } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{j=1}^n y_j$$

Vincoli

$$x_{i,j} \leq y_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$y_j \leq \sum_{i=1}^n x_{i,j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} a_i \leq c \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} b_i \leq m \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

$$x_{i,j}, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

Esercizio 1.49

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 10\})$

- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se assegno la commessa } i \text{ alla macchina } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{consegno la commessa } i \text{ entro la fine del mese} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n y_i g_i - (1 - y_i) p_i$$

Vincoli

$$y_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^1 0x_{i,j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} t_{i,j} \leq 31 \quad \forall j \in \{1, \dots, 10\} \quad (3)$$

$$x_{i,j}, y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 10\} \quad (4)$$

Parametri (preprocess, variante) $(h \in \{1, \dots, k\})$

- $F_h = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid f_i = h\}$

Vincoli

$$\sum_{i \in F_h} y_i \geq \frac{|F_h|}{2} \quad \forall h \in \{1, \dots, k\} \quad (1)$$

$$o_{i,h} \in \{0, 1\}, n_h \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, h \in \{1, \dots, k\} \quad (2)$$

Esercizio 1.50

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 30\})$

- $k_i = \begin{cases} 1 & \text{se il dipendente } i \text{ svolge alcuna ora di straordinario} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il dipendente } i \text{ lavora un turno ordinario nel giorno } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se il dipendente } i \text{ lavora un turno straordinario nel giorno } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $h_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{il dipendente } i \text{ svolge il turno di mattina nel giorno } j \\ 0 & \text{il dipendente } i \text{ svolge il turno di pomeriggio nel giorno } j \end{cases}$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{30} x_{i,j} + 2y_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{30} x_{i,j} \leq o_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{30} y_{i,j} \leq s_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_{i,j} + y_{i,j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 30\} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n h_{i,j} (x_{i,j} + y_{i,j}) \geq k \quad \forall j \in \{1, \dots, 30\} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (1 - h_{i,j}) (x_{i,j} + y_{i,j}) \geq k \quad \forall j \in \{1, \dots, 30\} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{30} x_{i,j} \geq k_i o_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{30} x_{i,j} \leq (1 - k_i)(o_i - 1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (7)$$

$$y_{i,j} \leq k_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 30\} \quad (8)$$

$$k_i, x_{i,j}, y_{i,j}, h_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, 30\} \quad (9)$$

Funzione obiettivo (variante)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{30} x_{i,j} r_i + y_{i,j} t_i$$

Esercizio 1.51

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}$)

- x_i = numero di GB che salvo nel datacenter i

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1000k \quad (1)$$

$$x_i \leq c_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$x_i \geq \frac{90}{100} c_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

Variabili (variante) ($i \in \{1, \dots, n\}$)

- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se uso il datacenter } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione obbiettivo (variante)

$$\min \sum_{i=1}^n x_i p_i + y_i s_i$$

Vincoli (variante)

$$x_i \leq y_i c_i \quad (1)$$

$$x_i \geq y_i \quad (2)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Esercizio 1.52

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet c_{i,l} = \begin{cases} 1 & \text{se } l = S_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se alloco il collaboratore } i \text{ al progetto } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} p_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} c_{i,l} \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}, l \in R_j \quad (1)$$

$$\text{(semi) assegnamento non specificato} \quad (2)$$

$$c_{i,j}, x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

Variabili (variante) ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\bullet y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il collaboratore } i \text{ è assegnato ad almeno un progetto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo (variante)

$$\min \sum_{i=1}^n y_i$$

Vincoli (variante)

$$x_{i,j} \leq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} \geq y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Esercizio 1.53

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_j = \begin{cases} 1 & \text{se vendo il blocco di macchine } S_j \text{ all'acquirente } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{j=1}^m x_j p_j$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_j c_{i,j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$c_{i,j}, x_j \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

Esercizio 1.54

Variabili $(i \in \{1, \dots, n\})$

$$\bullet x_i = \begin{cases} 1 & \text{se spostato il dipendente } i\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obbiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(1-x_j)t_{i,j} + x_j(1-x_i)t_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k \quad \sum_{j=1}^n (1-x_j) \leq k \quad (1)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

Esercizio 1.55

Parametri (preprocess) ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } s_i \neq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili ($i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$)

$$\bullet x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se alloco il libro } i \text{ nello scaffale } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} w_{i,j}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} \leq k_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$w_{i,j}, x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Funzione obiettivo (variante)

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} \delta_{s_i,j}$$