FACULTY OF MATHEMATICS,
PHYSICS AND INFORMATICS
Comenius University
Bratislava

Rozpoznávanie Obrazcov

3. Cvičenie - Štatistika

Ing. Viktor Kocur, PhD.

1.3.2022

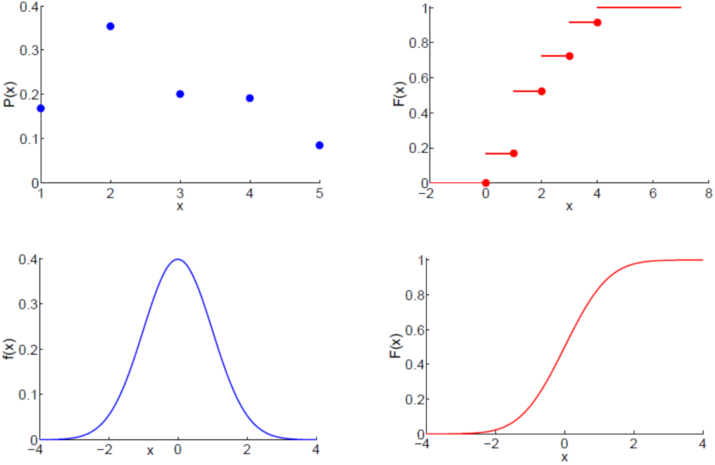
Náhodná premenná

Funkcia, ktorej hodnota je určená výsledkom náhodného pokusu. Priraďuje číselnú hodnotu každému javu.

Distribučná funkcia

Distribučná funkcia - opisuje rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej definovanej na pravdepodobnostnom priestore.

Distribučná funkcia



Bernoulliho schéma

Uvažujeme n na sebe nezávislých pokusov. Pradvdepodobnosť úspechu v každom z nich je p. Potom pre premennú X ktora označuje počet úspečných pokusov platí:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

12. Príklad

Študent má vypracovať test, ktorý obsahuje 10 otázok a ku každej z nich sú 4 odpovede, pričom práve jedna je správna. Aké sú pravdepodobnosti, že študent, ktorý látku vôbec nepozná a volí odpovede náhodne, zodpovie správne a) aspoň 5 otázok b) najviac 5 otázok

Riešenie a)

12. Príklad

Študent má vypracovať test, ktorý obsahuje 10 otázok a ku každej z nich sú 4 odpovede, pričom práve jedna je správna. Aké sú pravdepodobnosti, že študent, ktorý látku vôbec nepozná a volí odpovede náhodne, zodpovie správne a) aspoň 5 otázok b) najviac 5 otázok

Riešenie a)

- $P(A) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

12. Príklad

Študent má vypracovať test, ktorý obsahuje 10 otázok a ku každej z nich sú 4 odpovede, pričom práve jedna je správna. Aké sú pravdepodobnosti, že študent, ktorý látku vôbec nepozná a volí odpovede náhodne, zodpovie správne a) aspoň 5 otázok b) najviac 5 otázok

Riešenie a)

- $P(A) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
- $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.25^5 \cdot 0.75^5$

12. Príklad

Študent má vypracovať test, ktorý obsahuje 10 otázok a ku každej z nich sú 4 odpovede, pričom práve jedna je správna. Aké sú pravdepodobnosti, že študent, ktorý látku vôbec nepozná a volí odpovede náhodne, zodpovie správne a) aspoň 5 otázok b) najviac 5 otázok

Riešenie a)

- $P(A) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$
- $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.25^5 \cdot 0.75^5$
- $P(A) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} 0.25^k \cdot 0.75^{10-k}$

Asi 75% zahraničným turistom chutia naše bryndzové halušky. Aká je pravdepodobnosť, že z 20 zahraničných hostí si a) aspoň 17 na haluškách pochutí, b) že halušky budú chutiť všetkým hosťom?

13. Príklad

Asi 75% zahraničným turistom chutia naše bryndzové halušky. Aká je pravdepodobnosť, že z 20 zahraničných hostí si a) aspoň 17 na haluškách pochutí, b) že halušky budú chutiť všetkým hosťom?

- $P(A) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$

13. Príklad

Asi 75% zahraničným turistom chutia naše bryndzové halušky. Aká je pravdepodobnosť, že z 20 zahraničných hostí si a) aspoň 17 na haluškách pochutí, b) že halušky budú chutiť všetkým hosťom?

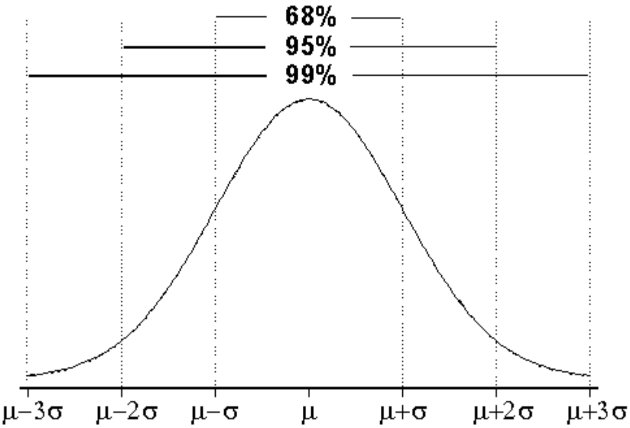
- $P(A) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$
- $P(X = 20) = \binom{20}{20} 0.75^{20} \cdot 0.25^{0} = 0.75^{20}$

13. Príklad

Asi 75% zahraničným turistom chutia naše bryndzové halušky. Aká je pravdepodobnosť, že z 20 zahraničných hostí si a) aspoň 17 na haluškách pochutí, b) že halušky budú chutiť všetkým hosťom?

- $P(A) = P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20)$
- $P(X = 20) = \binom{20}{20} 0.75^{20} \cdot 0.25^{0} = 0.75^{20}$
- $P(A) = \sum_{k=17}^{20} \binom{10}{k} 0.75^{k} \cdot 0.25^{10-k}$

Štandardná odchylka



Výberový priemer

$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Výberový rozptyl

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

Smerodajná odchýlka

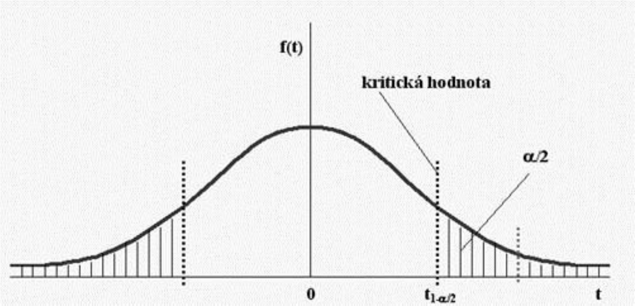
$S = \sqrt{S^2}$

Výberová kovariancia

$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$

Intervalový odhad spoľahlivosti

$P(G_D < \theta < G_H) = 1 - \alpha$



α	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2
$u_{\alpha/2}$	2.5758	2.3263	1.9599	1.6448	1.299

$$X \sim N(0,1) P(|X| > u_{\alpha/2}) = \alpha$$

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P(-u_{\alpha/2} < U < u_{\alpha/2}) \\
&= P(-u_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < u_{\alpha/2}) \\
&= P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

Testovacie štatistiky

Ak poznáme hodnotu σ originálnej distribúcie. Potom používame normálnu distribúciu:

$$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ak ju nepoznáme, tak pre $n > 30$ použijeme:

$$u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Ak je $n < 30$, tak použieje Študentovu distribúciu pre:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Predpokladáme, že výška chlapcov vo veku 9-10 rokov má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou a odchýlko $\sigma^2 = 39.112$. Zmerali sme výšku 15 chlapcov a určili výberovú strednú hodnotu 139.13 cm. Určite 99% obojstranný interval spolahlivosti.

14. Príklad

Predpokladáme, že výška chlapcov vo veku 9-10 rokov má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou a odchýlko $\sigma^2 = 39.112$. Zmerali sme výšku 15 chlapcov a určili výberovú strednú hodnotu 139.13 cm. Určite 99% obojstranný interval spolahlivosti.

- $n = 15, \sigma = 6.253, \overline{X} = 139.13$

Predpokladáme, že výška chlapcov vo veku 9-10 rokov má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou a odchýlko $\sigma^2 = 39.112$. Zmerali sme výšku 15 chlapcov a určili výberovú strednú hodnotu 139.13 cm. Určite 99% obojstranný interval spolahlivosti.

- $n = 15, \sigma = 6.253, \overline{X} = 139.13$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

14. Príklad

Predpokladáme, že výška chlapcov vo veku 9-10 rokov má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou a odchýlko $\sigma^2 = 39.112$. Zmerali sme výšku 15 chlapcov a určili výberovú strednú hodnotu 139.13 cm. Určite 99% obojstranný interval spolahlivosti.

- $n = 15, \sigma = 6.253, \overline{X} = 139.13$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $139.13 \pm 2.5758 \cdot \frac{6.253}{\sqrt{15}}$

Predpokladáme, že výška chlapcov vo veku 9-10 rokov má normálne rozdelenie s neznámou strednou hodnotou a odchýlko $\sigma^2 = 39.112$. Zmerali sme výšku 15 chlapcov a určili výberovú strednú hodnotu 139.13 cm. Určite 99% obojstranný interval spolahlivosti.

- $n = 15, \sigma = 6.253, \overline{X} = 139.13$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $139.13 \pm 2.5758 \cdot \frac{6.253}{\sqrt{15}}$
- $134.97 \leq \mu \leq 143.28$

15. Príklad

Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25. Nájdite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ.

15. Príklad

Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25. Nájdite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ.

- $n = 20, S = 5, \overline{X} = 112$

15. Príklad

Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25. Nájdite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ.

- $n = 20, S = 5, \overline{X} = 112$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$

Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25. Nájdite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ.

- $n = 20, S = 5, \overline{X} = 112$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $112 \pm 2.093 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$

15. Príklad

Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25. Nájdite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ.

- $n = 20, S = 5, \overline{X} = 112$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $112 \pm 2.093 \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$
- $109.65 \leq \mu \leq 114.34$

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota aj odchýlka sú neznáme. Namerané realizácie X sú 27, 15, -3, -6, 12, 20, 13, 0, 7, 10. Zistite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

16. Príklad

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota aj odchýlka sú neznáme. Namerané realizácie X sú 27, 15, -3, -6, 12, 20, 13, 0, 7, 10. Zistite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

- $n = 10, S = 10.319, \overline{X} = 9.5$

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota aj odchýlka sú neznáme. Namerané realizácie X sú 27, 15, -3, -6, 12, 20, 13, 0, 7, 10. Zistite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

- $n = 10, S = 10.319, \overline{X} = 9.5$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$

16. Príklad

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota aj odchýlka sú neznáme. Namerané realizácie X sú 27, 15, -3, -6, 12, 20, 13, 0, 7, 10. Zistite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

- $n = 10, S = 10.319, \overline{X} = 9.5$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $9.5 \pm 2.262 \cdot \frac{10.319}{\sqrt{10}}$

16. Príklad

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie, kde stredná hodnota aj odchýlka sú neznáme. Namerané realizácie X sú 27, 15, -3, -6, 12, 20, 13, 0, 7, 10. Zistite 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

- $n = 10, S = 10.319, \overline{X} = 9.5$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $9.5 \pm 2.262 \cdot \frac{10.319}{\sqrt{10}}$
- $2.118 \leq \mu \leq 16.881$

17. Príklad

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0.06$ sme urobili náhodný výber s prvkami 1.3, 1.8, 1.4, 1.2, 0.9, 1.5, 1.7. Zistite 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

17. Príklad

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0.06$ sme urobili náhodný výber s prvkami 1.3, 1.8, 1.4, 1.2, 0.9, 1.5, 1.7. Zistite 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

- $n = 7, \sigma = 0.245, \overline{X} = 1.4$

17. Príklad

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0.06$ sme urobili náhodný výber s prvkami 1.3, 1.8, 1.4, 1.2, 0.9, 1.5, 1.7. Zistite 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

- $n = 7, \sigma = 0.245, \overline{X} = 1.4$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

17. Príklad

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0.06$ sme urobili náhodný výber s prvkami 1.3, 1.8, 1.4, 1.2, 0.9, 1.5, 1.7. Zistite 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

- $n = 7, \sigma = 0.245, \overline{X} = 1.4$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $1.4 \pm 1.9599 \cdot \frac{0.245}{\sqrt{7}}$

17. Príklad

Zo základného súboru s normálnym rozdelením, kde je známy rozptyl $\sigma^2 = 0.06$ sme urobili náhodný výber s prvkami 1.3, 1.8, 1.4, 1.2, 0.9, 1.5, 1.7. Zistite 95% interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ.

- $n = 7, \sigma = 0.245, \overline{X} = 1.4$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $1.4 \pm 1.9599 \cdot \frac{0.245}{\sqrt{7}}$
- $1.218 \leq \mu \leq 1.581$

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie a)

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie a)

- $n = 16, \sigma = 1, \overline{X} = 10.3$

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie a)

- $n = 16, \sigma = 1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie a)

- $n = 16, \sigma = 1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $10.3 \pm 1.9599 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}}$

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie a)

- $n = 16, \sigma = 1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- $10.3 \pm 1.9599 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}}$
- $9.81 \leq \mu \leq 10.789$
- Hypotézu nezamietneme

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie b)

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie b)

- $n = 16, S = 1.1, \overline{X} = 10.3$

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie b)

- $n = 16, S = 1.1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie b)

- $n = 16, S = 1.1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $10.3 \pm 2.131 \cdot \frac{1.1}{\sqrt{16}}$

18. Príklad

Tvrdíme, že guľôčky vyrobené automatickým sústruhom, majú strednú hodnotu polomeru 10mm. Použitím obojstranného testu významnosti na hladine 0.05 otestujte túto hypotézu ak vo výbere zo 16 guľôčok je priemer ich polomerov 10.3 mm a a) $\sigma^2 = 1$, b) $S^2 = 1.21$.

Riešenie b)

- $n = 16, S = 1.1, \overline{X} = 10.3$
- $1 - \alpha = P(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$
- $10.3 \pm 2.131 \cdot \frac{1.1}{\sqrt{16}}$
- $9.71 \leq \mu \leq 10.88$
- Hypotézu nezamietneme