Neurónové siete pre počítačové videnie

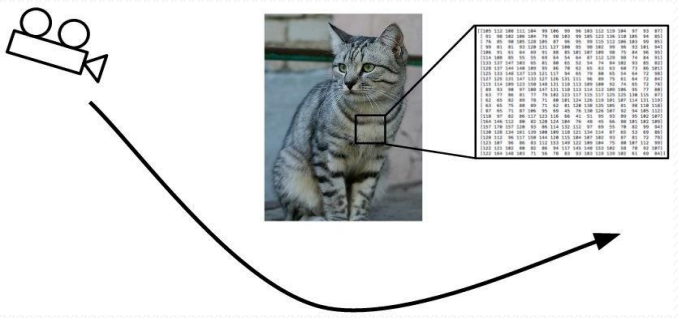
šk.r. 2021-22

Stratové funkcie a optimalizácia

RNDr. Zuzana Černeková, PhD.
Ing. Viktor Kocur, PhD.

Opakovanie: Výzvy pri rozpoznávaní

Pohľad



Osvetlenie

Deformácie

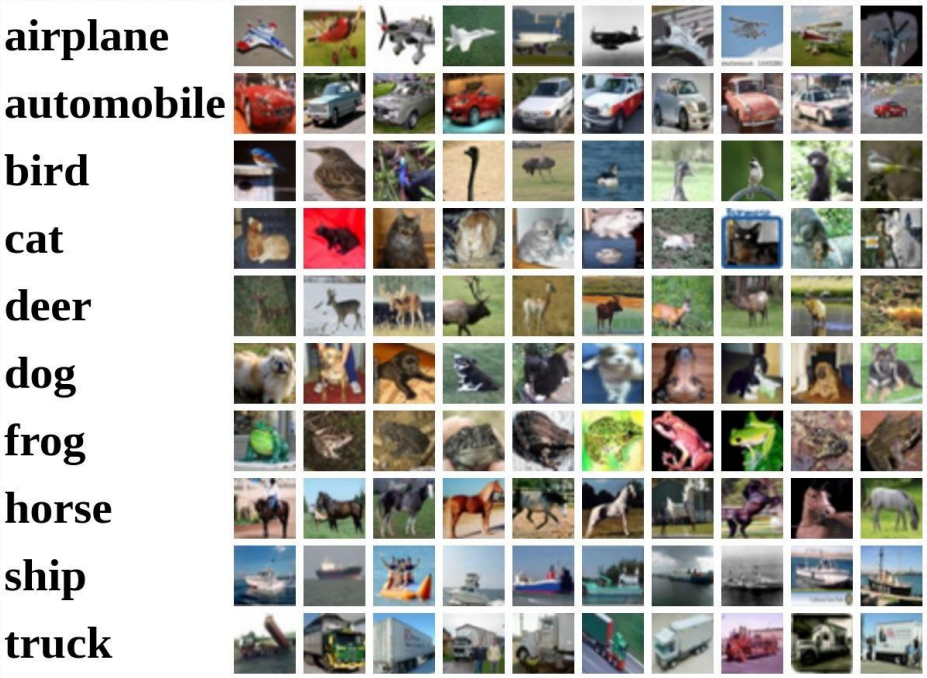
Zakrytie

Výrazné pozadie

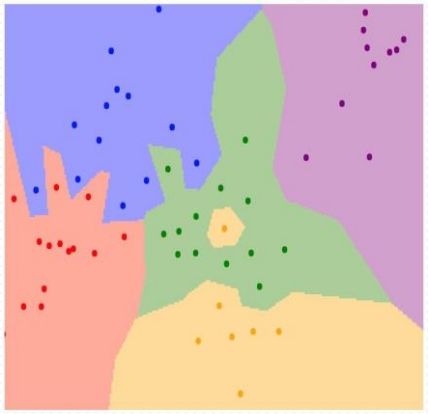
Vnútrotriedna variácia

Opakovanie: dátovo riadené metódy, kNN

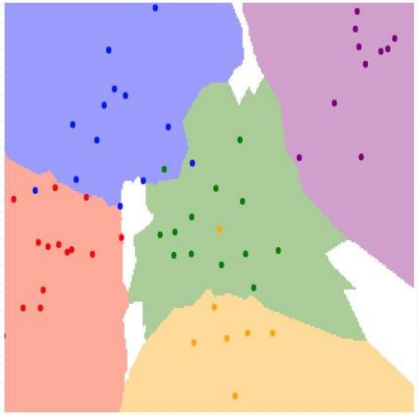
Cifar - 10

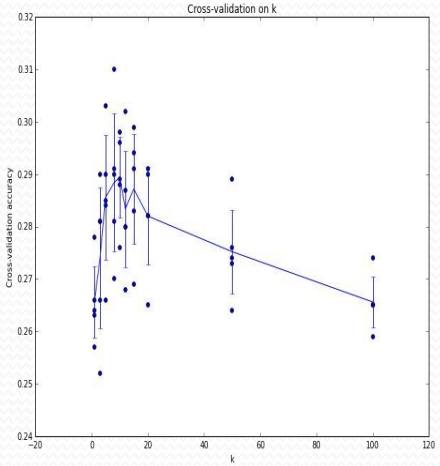


1-NN classifier

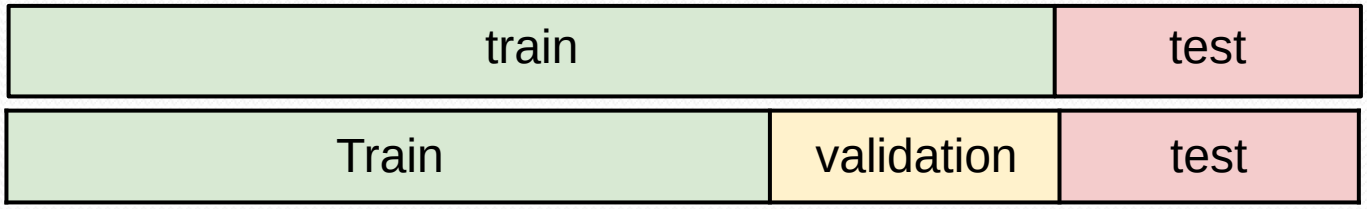


5-NN classifier

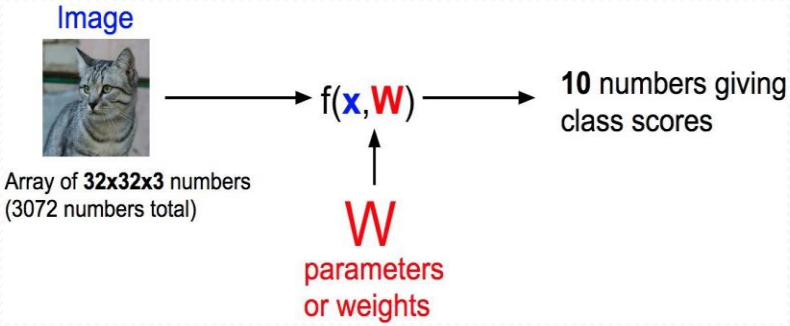




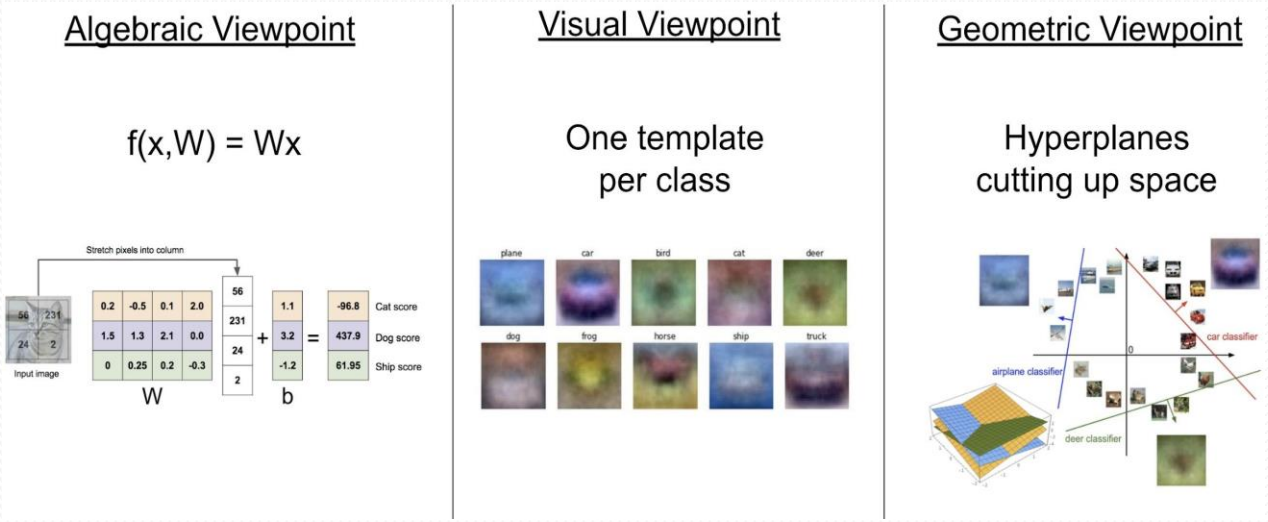
Cross valitation

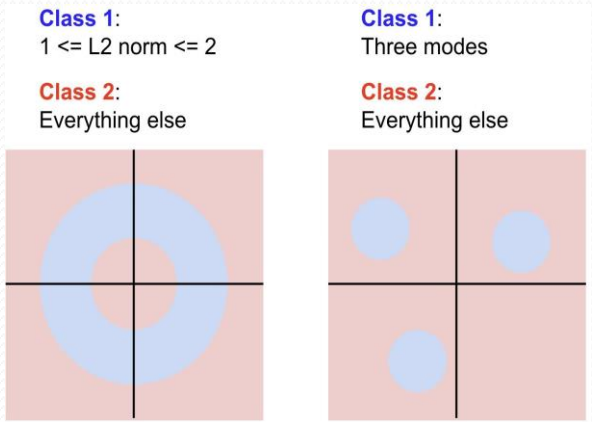


Opakovanie: lineárny klasifikátor



$$f(x,W) = Wx + b$$





Opakovanie: lineárny klasifikátor



airplane	-3.45	-0.51	3.42
automobile	-8.87	**6.04**	4.64
bird	0.09	5.31	2.65
cat	**2.9**	-4.22	5.1
deer	4.48	-4.19	2.64
dog	8.02	3.58	5.55
frog	3.78	4.49	**-4.34**
horse	1.06	-4.37	-1.5
ship	-0.36	-2.09	-4.79
truck	-0.72	-2.93	6.14

Štruktúra dnešnej prednášky

- Definovať **stratovú funkciu (loss function)**, ktorá kvantifikuje našu nespokojnosť so skóre na trénovacích dátach
- Nájsť spôsob ako efektívne hľadať parametre, ktoré minimalizujú stratovú funkciu - **optimalizácia**

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Majme nejakú maticu W dostaneme skóre $f(x, W) = Wx$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**

Stratová funkcia (loss function) hovorí ako dobrý je náš aktuálny klasifikátor

Majme databázu vzoriek

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$$

Kde x_i je obraz a

y_i je (integer) label

Strata na celej databáze je suma strat na všetkých vzorkách:

$$L = \frac{1}{N} \sum_i L_i(f(x_i, W), y_i)$$

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \begin{cases} 0 & \text{if } s_{y_i} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{y_i} + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

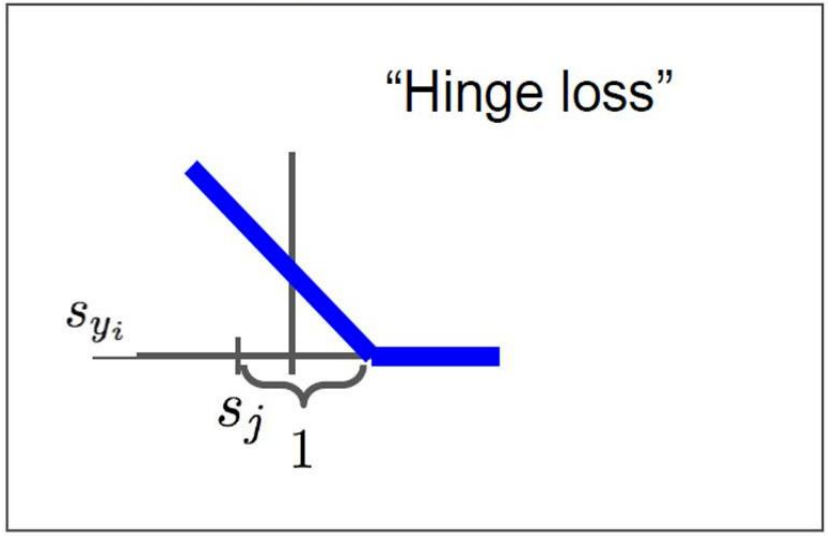
Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**

Strata pre Multiclass SVM:



$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \begin{cases} 0 & \text{if } s_{y_i} \geq s_j + 1 \\ s_j - s_{y_i} + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**		

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

= max(0, 5.1 - 3.2 + 1)
+max(0, -1.7 - 3.2 + 1)
= max(0, 2.9) + max(0, -3.9)
= 2.9 + 0
= 2.9

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

= max(0, 1.3 - 4.9 + 1)
+max(0, 2.0 - 4.9 + 1)
= max(0, -2.6) + max(0, -1.9)
= 0 + 0
= 0

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

= max(0, 2.2 - (-3.1) + 1)
+max(0, 2.5 - (-3.1) + 1)
= max(0, 6.3) + max(0, 6.6)
= 6.3 + 6.6
= 12.9

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Strata pre Multiclass SVM:

Pre danú vzorku (x_i, y_i)
kde x_i je obraz a
kde y_i je the (integer) label,

A použitím skratky *s* pre vektor ohodnotení (score vector):

$$s = f(x_i, W)$$

Strata pre SVM je potom v tvare:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Strata pre celú databázu je priemer:

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} L_i$$

L = (2.9 + 0 + 12.9)/3
= **5.27**



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q1: Čo sa stane s hodntou Straty ak skóre pre auto trochu pomeníme?



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q1: Čo sa stane s hodntou Straty ak skóre pre auto trochu pomeníme?

A: Strata (Loss) sa nezmení.



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q2: Aké hodnoty min/max nadobúda Strata?



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q2: Aké hodnoty min/max nadobúda Strata?

A: Min = 0, Max = ∞



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q3: Pri inicializácii W je malé tak, že všety s ≈ 0. Aká bude Strata?



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q3: Pri inicializácii W je malé tak, že všety s ≈ 0. Aká bude Strata?

A: Počet tried mínus 1. (Užitočné pri debugovaní.)



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q4: Čo ak by bola Strata počítaná cez všetky triedy?
(vrátane $j=y_i$)



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q4: Čo ak by bola Strata počítaná cez všetky triedy?
(vrátane $j=y_i$)

A: Hodnota Straty sa zvýši o 1.



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q5: Čo ak použijeme priemer (mean) namiesto sumy?



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q5: Čo ak použijeme priemer (mean) namiesto sumy?

A: Iba preškálujeme výslednú hodnotu, takže na výsledok to nemá vplyv.



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q6: Čo ak použijeme $L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)^2$



Strata pre SVM má tvar:

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

Q6: Čo ak použijeme $L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)^2$

A: Dostaneme iný klasifikačný algoritmus. Meníme pomer medzi dobrým a zlým skóre nelineárnym spôsobom, takže počítame inú Stratovú funkciu.

$$f(x, W) = Wx$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq y_i} \max(0, f(x_i; W)_j - f(x_i; W)_{y_i} + 1)$$

Predpokladajme, že sme našli **W** také, že L = 0.

Je toto **W** jedinečné?

$$f(x, W) = Wx$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq y_i} \max(0, f(x_i; W)_j - f(x_i; W)_{y_i} + 1)$$

Predpokladajme, že sme našli **W** také, že L = 0.

Je toto **W** jedinečné?

Nie! 2W má tiež L = 0.

Predpokladajme: 3 trénovacie vzorky, 3 triedy.
Pre nejakú maticu W dostaneme skóre

$$f(x, W) = Wx$$



mačka	**3.2**	1.3	2.2
auto	5.1	**4.9**	2.5
žaba	-1.7	2.0	**-3.1**
Strata	**2.9**	**0**	**12.9**

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Before:

= max(0, 1.3 - 4.9 + 1)
+max(0, 2.0 - 4.9 + 1)
= max(0, -2.6) + max(0, -1.9)
= 0 + 0
= 0

With W twice as large:

= max(0, 2.6 - 9.8 + 1)
+max(0, 4.0 - 9.8 + 1)
= max(0, -6.2) + max(0, -4.8)
= 0 + 0
= 0

$$f(x, W) = Wx$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq y_i} \max(0, f(x_i; W)_j - f(x_i; W)_{y_i} + 1)$$

Predpokladajme, že sme našli **W** také, že L = 0.

Je toto **W** jedinečné?

Nie! 2W má tiež L = 0.

Ako vybrať medzi W a 2W?

Regularizácia

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}_{} + \underbrace{\lambda R(W)}_{}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia: Zabráni aby sa model natrénoval *„príliš dobre“* na trénovacích dátach

Regularizácia

λ - sila regularizácie
hyperparameter

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}_{} + \underbrace{\lambda R(W)}_{}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia: Zabráni aby sa model natrénoval *„príliš dobre“* na trénovacích dátach

Regularizácia

λ - sila regularizácie
hyperparameter

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}_{} + \underbrace{\lambda R(W)}_{}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia: Zabráni aby sa model natrénoval *„príliš dobre“* na trénovacích dátach

Jednoduché príklady:

L2 regularization: $R(W) = \sum_k \sum_l W_{k,l}^2$

L1 regularization: $R(W) = \sum_k \sum_l |W_{k,l}|$

Elastic net (L1 + L2): $R(W) = \sum_k \sum_l \beta W_{k,l}^2 + |W_{k,l}|$

Regularizácia

λ - sila regularizácie
hyperparameter

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}_{} + \underbrace{\lambda R(W)}_{}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia: Zabráni aby sa model natrénoval *„príliš dobre“* na trénovacích dátach

Jednoduché príklady:

L2 regularization: $R(W) = \sum_k \sum_l W_{k,l}^2$

L1 regularization: $R(W) = \sum_k \sum_l |W_{k,l}|$

Elastic net (L1 + L2): $R(W) = \sum_k \sum_l \beta W_{k,l}^2 + |W_{k,l}|$

Zložitejšie:

Dropout

Batch normalization

Stochastic depth, fractional pooling, etc

Regularizácia

λ - sila regularizácie
hyperparameter

$$L(W) = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(f(x_i, W), y_i)}_{} + \underbrace{\lambda R(W)}_{}$$

Strata dát: Model by mal zodpovedať trénovacím dátam

Regularizácia: Zabráni aby sa model natrénoval *„príliš dobre“* na trénovacích dátach

Prečo regularizovať?

- Vyjadriť preferencie pomocou váh
- Urobiť model *jednoduchý* aby fungoval na testovacích dátach
- Vylepšiť optimalizáciu

Regularizácia: Vyjadrenie preferencií

$$x = [1, 1, 1, 1]$$

$$w_1 = [1, 0, 0, 0]$$

$$w_2 = [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$$

$$w_1^T x = w_2^T x = 1$$

L2 Regularization

$$R(W) = \sum_k \sum_l W_{k,l}^2$$

Regularizácia: Vyjadrenie preferencií

$$x = [1, 1, 1, 1]$$

$$w_1 = [1, 0, 0, 0]$$

$$w_2 = [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$$

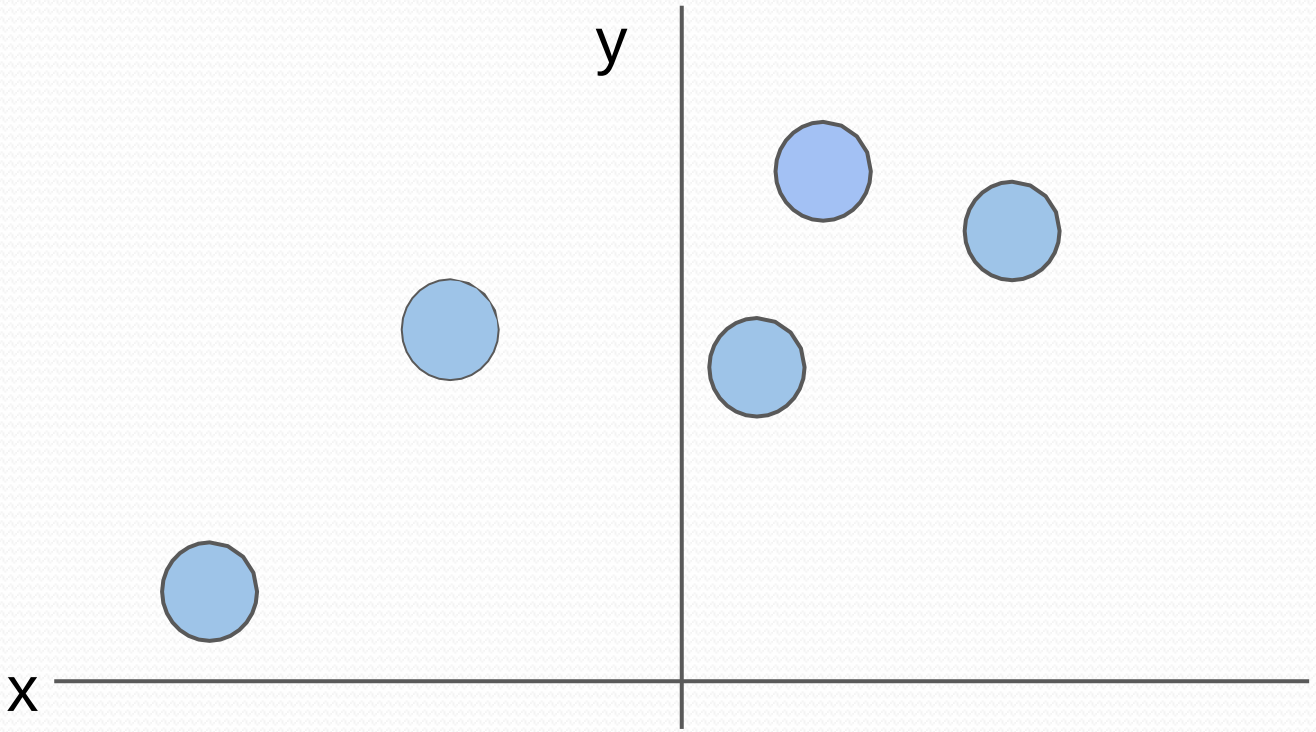
$$w_1^T x = w_2^T x = 1$$

L2 Regularization

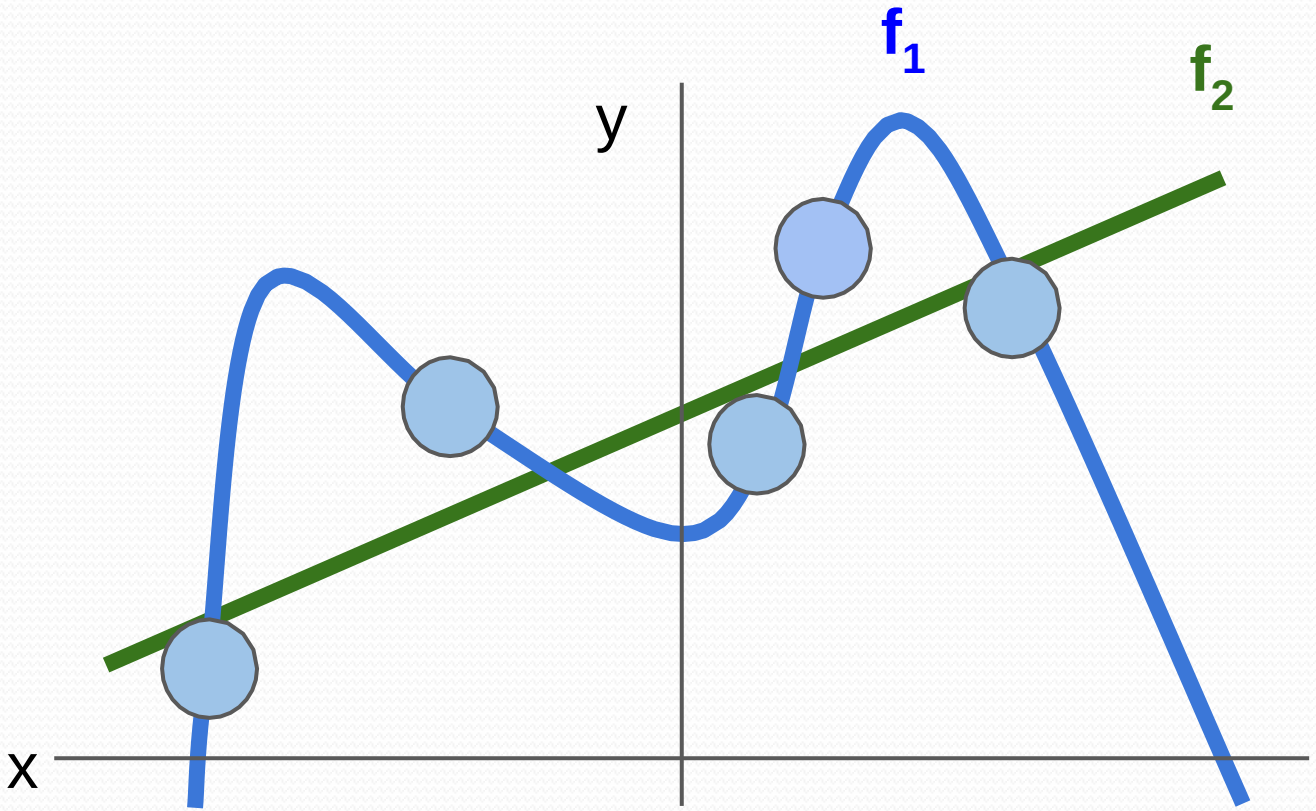
$$R(W) = \sum_k \sum_l W_{k,l}^2$$

L2 regularization likes to "spead out" the weights

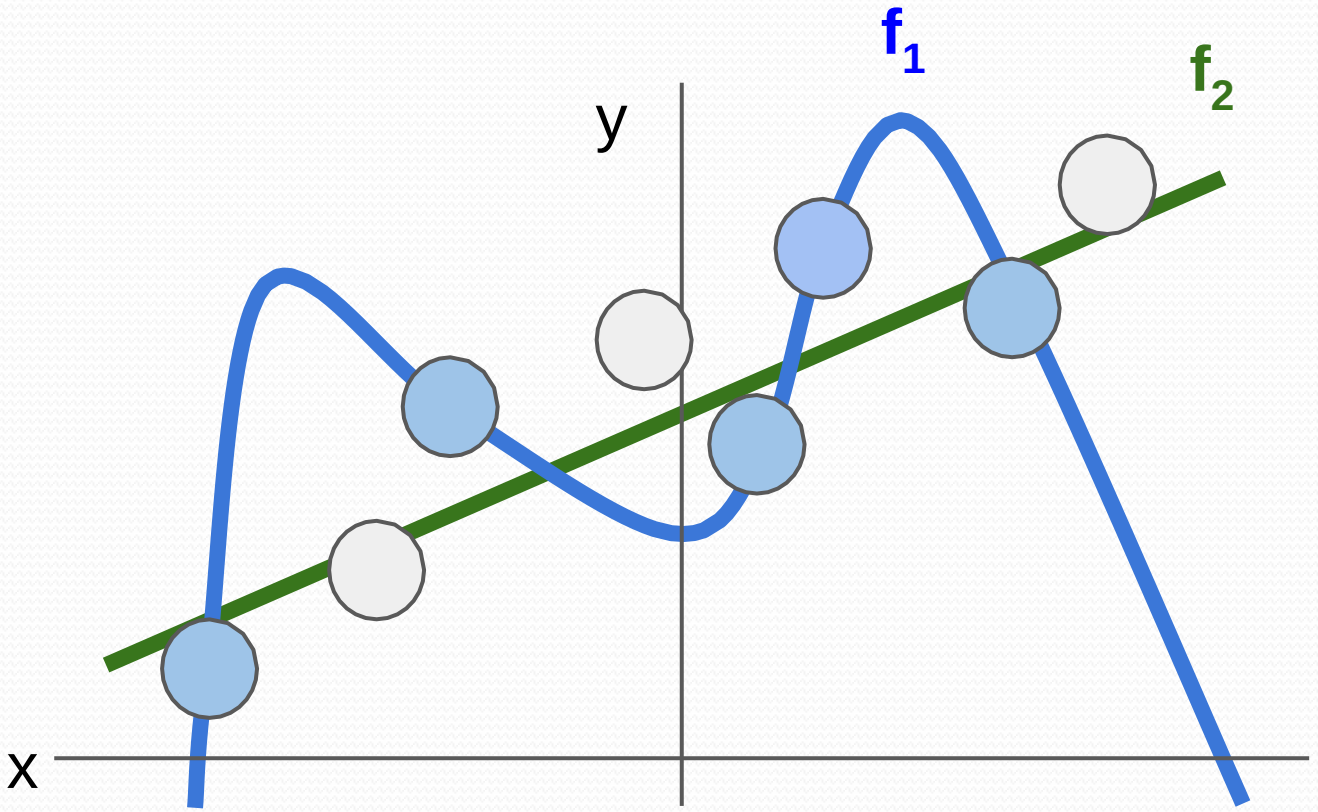
Regularizácia: Uprednostní jednoduché modely



Regularizácia: Uprednostní jednoduché modely



Regularizácia: Uprednostní jednoduché modely



Regularizácia zabraňuje aby sa model fitoval na dáta *príliš dobre* a teda aby sme nefitovali aj šum v dátach

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

mačka	**3.2**
auto	5.1
žaba	-1.7

Iné Stratové funkcie:
Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

mačka **3.2**

auto 5.1

žaba -1.7

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

mačka	**3.2**		**24.5**
auto	5.1	exp →	164.0
žaba	-1.7		0.18

nenormalizované pravdepodobnosti

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

		exp		normalize	
mačka	**3.2**	→	**24.5**	→	**0.13**
auto	5.1		164.0		0.87
žaba	-1.7		0.18		0.00

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

		exp		normalize	
mačka	**3.2**	→	**24.5**	→	**0.13**
auto	5.1		164.0		0.87
žaba	-1.7		0.18		0.00

Unnormalized log-probabilities / logits

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i)$$

		exp		normalize		
mačka	**3.2**	→	**24.5**	→	**0.13**	→ L_i = -log(0.13) = **0.89**
auto	5.1		164.0		0.87	
žaba	-1.7		0.18		0.00	

Unnormalized log-probabilities / logits

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i)$$

mačka	**3.2**	**24.5**	**0.13**
auto	5.1	164.0	0.87
žaba	-1.7	0.18	0.00

exp → normalize →

$L_i = -\ln(0.13) = \mathbf{2.04}$

Metóda maximálnej vierohodnosti (Maximum Likelihood Estimation)
Vyberáme pravdepodobnosti tak, aby sme maximalizovali vierohodnosť pozorovaných dát

Unnormalized log-probabilities / logits

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i)$$

		exp →		normalize →		porovnaj ←	
mačka	**3.2**		**24.5**		**0.13**		**1.00**
auto	5.1		164.0		0.87		0.00
žaba	-1.7		0.18		0.00		0.00

Unnormalized log-probabilities / logits

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Správne pravd.

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i)$$

	Unnormalized log-probabilities / logits	exp	nenormalizované pravdepodobnosti	normalize	pravdepodobnosti	porovnaj	Správne pravd.
mačka	**3.2**	→	**24.5**	→	**0.13**	→	**1.00**
auto	5.1		164.0		0.87		0.00
žaba	-1.7		0.18		0.00		0.00

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

Kullback–Leibler divergence

$$D_{KL}(P\|Q) = \sum_y P(y) \log \frac{P(y)}{Q(y)}$$

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Pravdepodobnosti musia byť >= 0

Suma pravdepodobností musí byť 1

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i)$$

mačka	**3.2**		**24.5**	**0.13**	**1.00**
auto	5.1	exp →	164.0	0.87	0.00
žaba	-1.7		0.18	0.00	0.00

normalize →

porovnaj ←

Cross Entropy

$$H(P, Q) = H(p) + D_{KL}(P\|Q)$$

Unnormalized log-probabilities / logits

nenormalizované pravdepodobnosti

pravdepodobnosti

Správne pravd.

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Maximalizovať pravdepodobnosti správnej triedy

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i) = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

mačka **3.2**

auto 5.1

žaba -1.7

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Maximalizovať pravdepodobnosti správnej triedy

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i) = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

mačka	**3.2**
auto	5.1
žaba	-1.7

Q1: Akú min/max hodnotu môže nadobudnúť L_i?

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Maximalizovať pravdepodobnosti správnej triedy

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i) = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

mačka	**3.2**
auto	5.1
žaba	-1.7

Q1: Akú min/max hodnotu môže nadobudnúť L_i?

A: min 0, max infinity

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Maximalizovať pravdepodobnosti správnej triedy

$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i) = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

mačka	**3.2**
auto	5.1
žaba	-1.7

Q2: Ak inicializujeme všetky s na približne rovnakú hodnotu a počet tried je C, akú hodnotu bude mať L_i?

Softmax Clasifikátor (Multinomial Logistic Regression)

Chceme interpretovať skóre klasifikátora ako **pravdepodobnosti**

$$s = f(x_i; W)$$

$$P(Y = k|X = x_i) = \frac{e^{s_k}}{\sum_j e^{s_j}}$$

Softmax Funkcia

Maximalizovať pravdepodobnosti správnej triedy

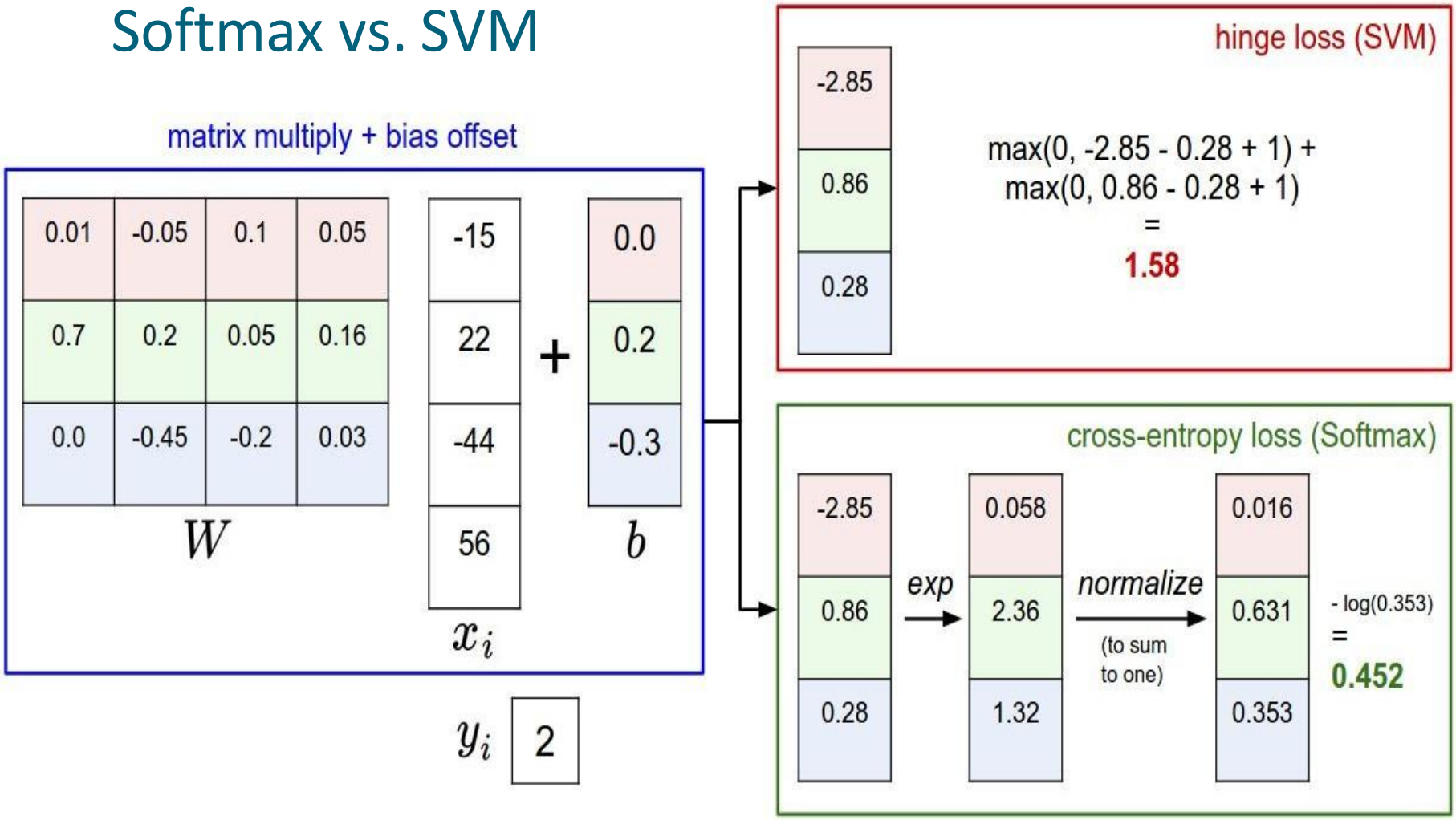
$$L_i = -\log P(Y = y_i|X = x_i) = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

mačka	**3.2**
auto	5.1
žaba	-1.7

Q2: Ak inicializujeme všetky s na približne rovnakú hodnotu a počet tried je C, akú hodnotu bude mať L_i?

A: - log(1/C) = log(C), eg log(10) ≈ 2.3

Softmax vs. SVM



Softmax vs. SVM

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Softmax vs. SVM

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

assume scores:
[10, -2, 3]
[10, 9, 9]
[10, -100, -100]
and $y_i = 0$

Q: Čo sa stane s hodntou Straty v obidvoch prípadoch, ak skóre pre niektorú vzorku trochu pomeníme?

Opakovanie

- Máme databázu vzoriek (x,y)
- Máme **funciu ohodnotení (score function):** e.g. $s = f(x; W) = Wx$
- Máme **stratovú funkciu**:

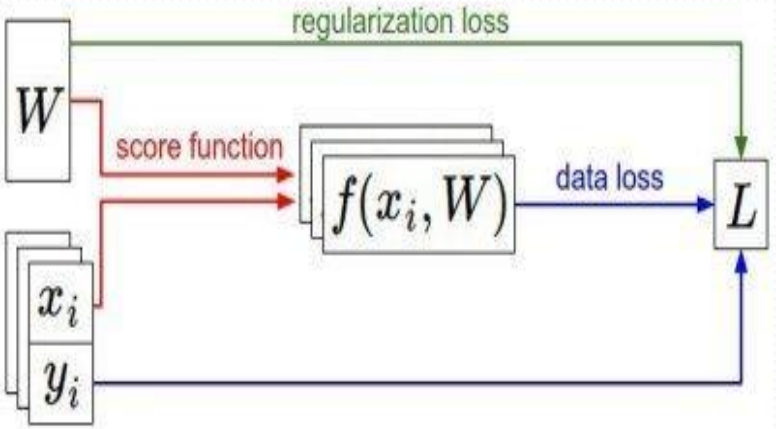
Softmax

$$L_i = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

SVM

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$L = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i + R(W)$$ Full loss



Opakovanie

Ako nájdem najlepšie W?

- Máme databázu vzoriek (x,y)
- Máme **funciu ohodnotení (score function):** e.g. $s = f(x; W) = Wx$
- Máme **stratovú funkciu**:

Softmax

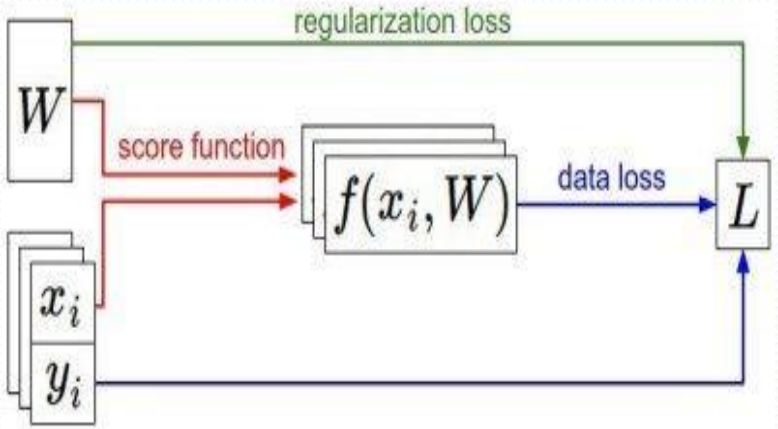
$$L_i = -\log\left(\frac{e^{sy_i}}{\sum_j e^{s_j}}\right)$$

SVM

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

Full loss

$$L = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i + R(W)$$



Optimalizácia

- Každý bod na tejto krajine zodpovedá nejakému nastaveniu parametrov W
- Výška v každom bode zodpoveda hodnote Straty
- Úlohou je nájsť dno údolia, najnižší bod

Stratégia #1: **Random search**

- Prvý nápad – veľmi zlý
- Postupne testujem rôzne W v náhodnom poradí a vypočítame Stratu

- Pri náhodnom rozdelení do 10 tried je uspešnosť 10%
- Ak dostaneme 15,5% sme lepší
- **ALE** state of the art je 95%

Stratégia #2: **Sledovať svah**

- Na základe lokálnej geometrie
- Pomaly sa posúvať smerom dole svahom
- V 1-rozmernom priestore, svah (sklon) sa určí ako derivácia funkcie:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Vo viacrozmerných dimenziách **gradient** je vektor (parciálnych derivácií) pozdĺž každej dimenzie

- Svah v akomkoľvek smere je **skalárny súčin** daného smeru a gradientu
- Smer najstrmšieho zostupu je v smere **negatívneho gradientu**

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

gradient dW:

[**-2.5**,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (1. dim)**:**

[0.34 + **0.0001**,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25322

gradient dW:

[**-2.5**,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (1. dim)**:**

[0.34 + **0.0001**,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25322

gradient dW:

[**-2.5**,
?,
?,

(1.25322 - 1.25347)/0.0001
= -2.5

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

?,
?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (2. dim)**:**

[0.34,
-1.11 + **0.0001**,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25353

gradient dW:

[**-2.5**,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (2. dim)**:**

[0.34,
-1.11 + **0.0001**,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25353

gradient dW:

[-2.5,
0.6,
?,
?,

(1.25353 - 1.25347)/0.0001
= 0.6

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]
loss 1.25347

W + h (3. dim)**:**

[0.34,
-1.11,
0.78 + **0.0001**,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]
loss 1.25347

gradient dW:

[-2.5,
0.6,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,
?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (3. dim)**:**

[0.34,
-1.11,
0.78 + **0.0001**,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

gradient dW:

[-2.5,
0.6,
0,
?,

(1.25347 - 1.25347)/0.0001
= 0

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

?,…]

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

W + h (3. dim)**:**

[0.34,
-1.11,
0.78 + **0.0001**,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

gradient dW:

[-2.5,
0.6,
0,
?,

?,…]

Numerický Gradient

- Pomalý! Musíme prejsť cez všetky dimenzie
- Treba aproximovať

Strata je nejaká funkcia W:

$$L = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i + \sum_k W_k^2$$

$$L_i = \sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1)$$

$$s = f(x; W) = Wx$$

Chceme $\nabla_W L$

Budeme používať **analytický gradient**

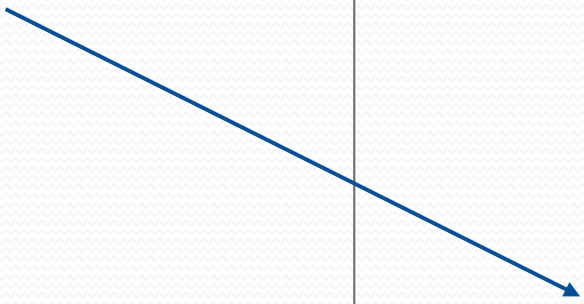
- je presnejší a výrazne rýchlejší

aktuálne W:

[0.34,
-1.11,
0.78,
0.12,
0.55,
2.81,
-3.1,
-1.5,
0.33,…]

loss 1.25347

dW = ...
(some function
data and W)



gradient dW:

[-2.5,
0.6,
0,
0.2,
0.7,
-0.5,
1.1,
1.3,
-2.1,…]

In summary:

- Numerický gradient: aproximácia, pomalé, ľahké napísať

- Analytický gradient: presný, rýchly, náchylný na chyby

=>

V praxi: Vždy používajte analytický gradient, ale kontrolujte implementáciu pomocou numerického gradientu.
Toto sa nazýva **gradient check.**

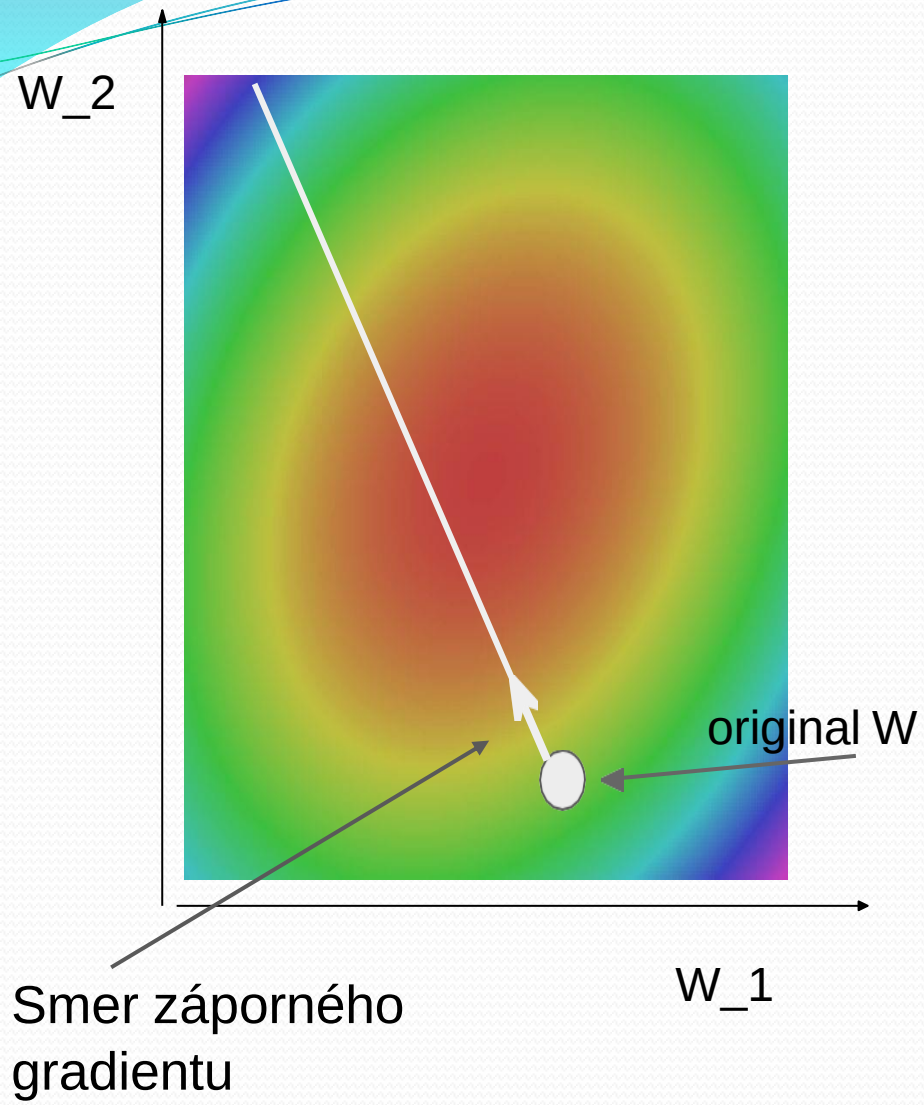
Gradient Descent

- Základ trénovania všetkých NN

```
# Vanilla Gradient Descent

while True:
  weights_grad = evaluate_gradient(loss_fun, data, weights)
  weights += - step_size * weights_grad # perform parameter update
```

- Step size (learning rate) – veľmi dôležitý hyperparameter



- Pohybujem sa vždy v smere negatívneho gradientu
- V praxi iné algoritmy na hladanie update rules
  - Gradient descent with momentum
  - ADAM
- Neskôr v prednáškach

Stochastic Gradient Descent (SGD)

$$L(W) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i(x_i, y_i, W) + \lambda R(W)$$

$$\nabla_W L(W) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \nabla_W L_i(x_i, y_i, W) + \lambda \nabla_W R(W)$$

Celú sumu je problém vypočítať ked N je veľké!

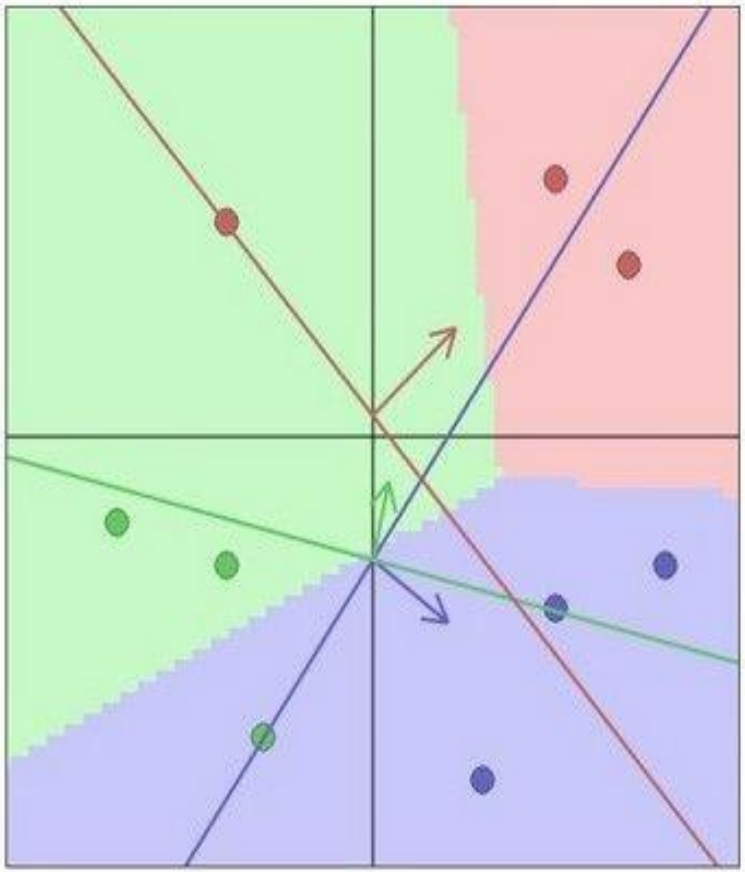
Aproximujeme sumu pomocou **minibatch**

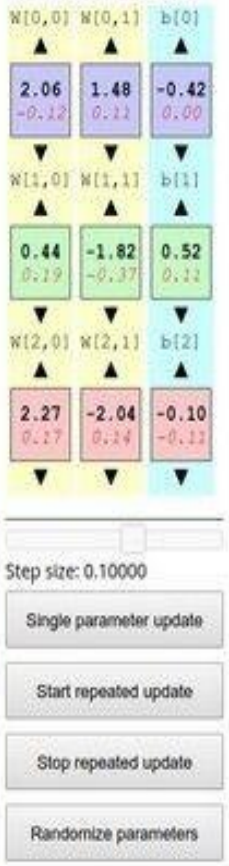
Najčastejšie
32 / 64 / 128 vzoriek

```
# Vanilla Minibatch Gradient Descent

while True:
  data_batch = sample_training_data(data, 256) # sample 256 examples
  weights_grad = evaluate_gradient(loss_fun, data_batch, weights)
  weights += - step_size * weights_grad # perform parameter update
```

Interactive Web Demo





x[0]	x[1]	y	s[0]	s[1]	s[2]	L
0.50	0.40	0	1.20	0.01	0.22	0.02
0.80	0.30	0	1.67	0.33	1.10	0.44
0.30	0.80	0	1.38	-0.80	-1.05	0.00
-0.40	0.30	1	-0.80	-0.20	-1.62	0.39
-0.30	0.70	1	-0.01	-0.88	-2.21	1.87
-0.70	0.20	1	-1.57	-0.15	-2.10	0.00
0.70	-0.40	2	0.43	1.55	2.31	0.25
0.50	-0.60	2	-0.28	1.83	2.26	0.57
-0.40	-0.50	2	-1.98	1.26	0.01	2.24
						mean:
						0.64

Total data loss: 0.64
Regularization loss: 1.92
Total loss: 2.57

L2 Regularization strength: 0.10000

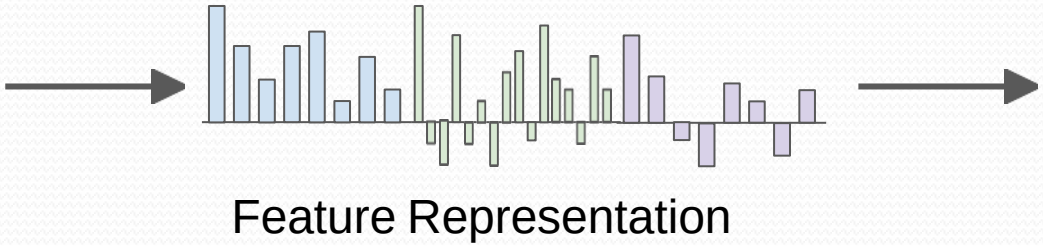
http://vision.stanford.edu/teaching/cs231n-demos/linear-classify/

Bokom: Príznaky v obraze (Image Features)

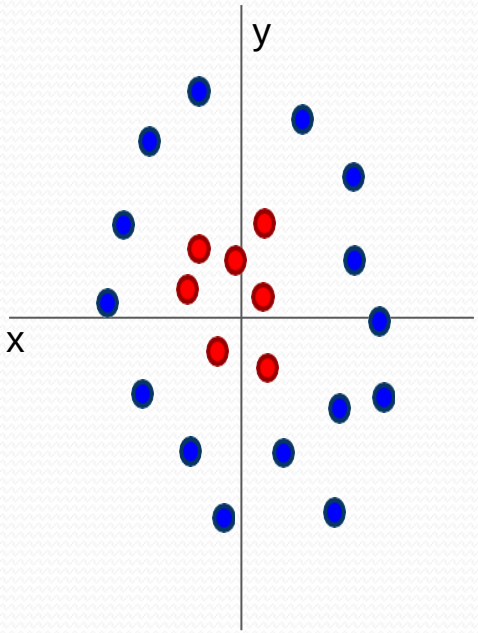
Class scores

$$f(x) = Wx$$

Bokom: Príznaky v obraze (Image Features)

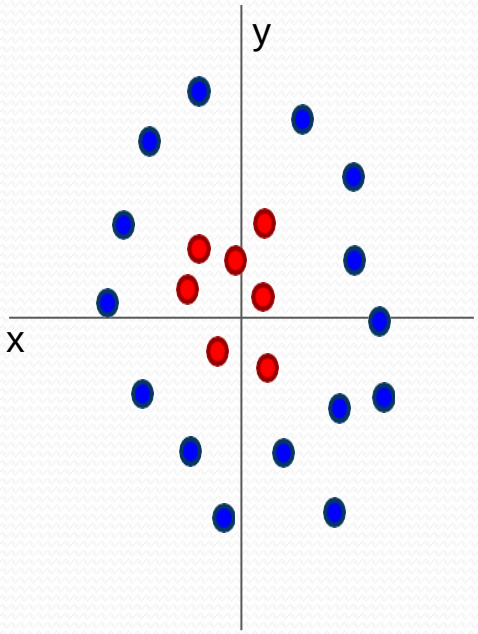


Príznaky: motivácia



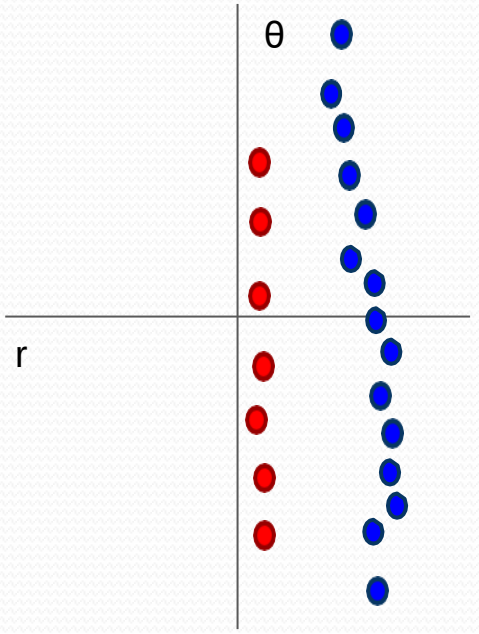
Nevieme oddeliť červené a modré pomocou lineárneho klasifikátora

Príznaky: motivácia



$f(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$

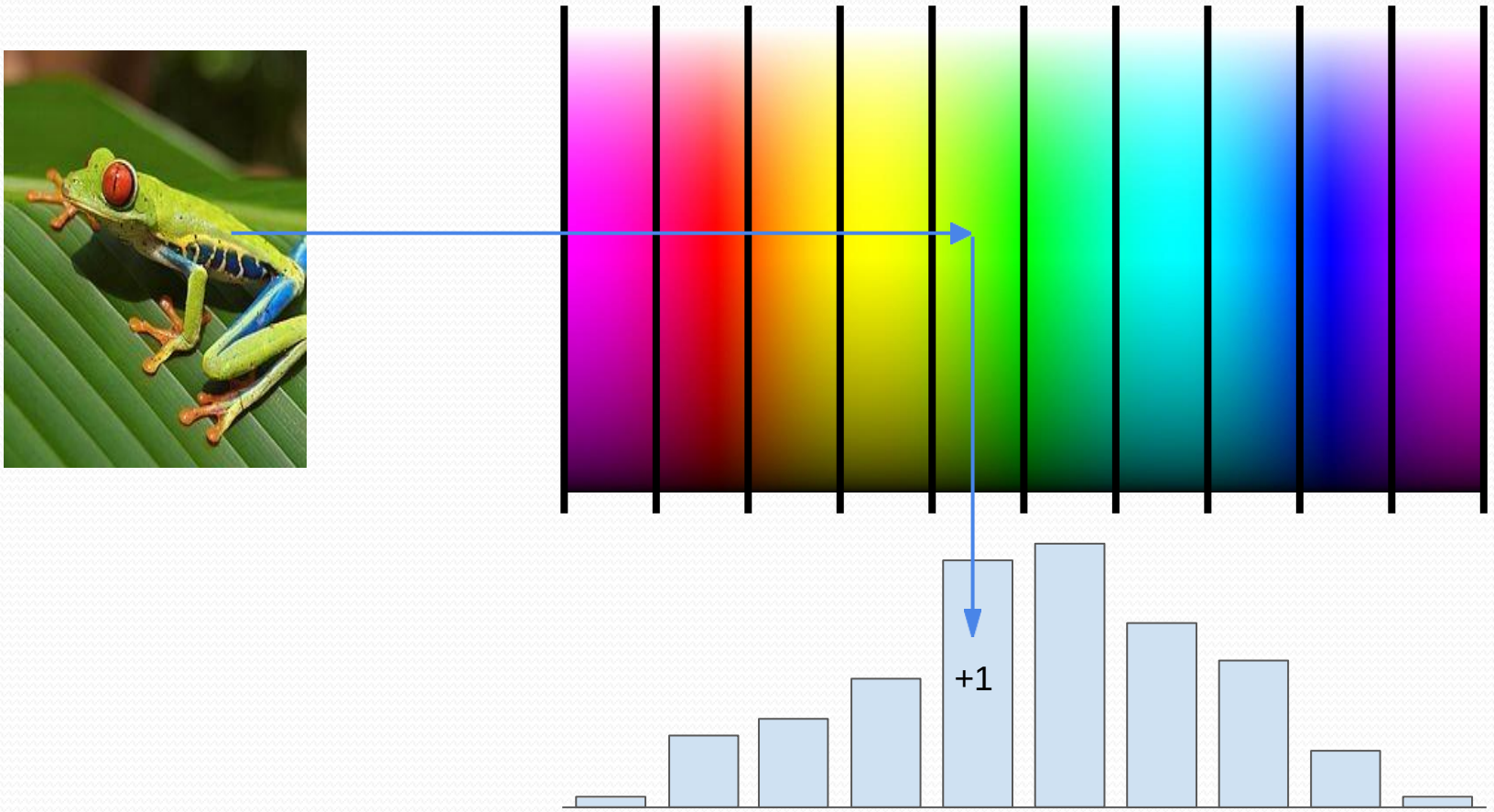
Polárne súradnice



Nevieme oddeliť červené a modré pomocou lineárneho klasifikátora

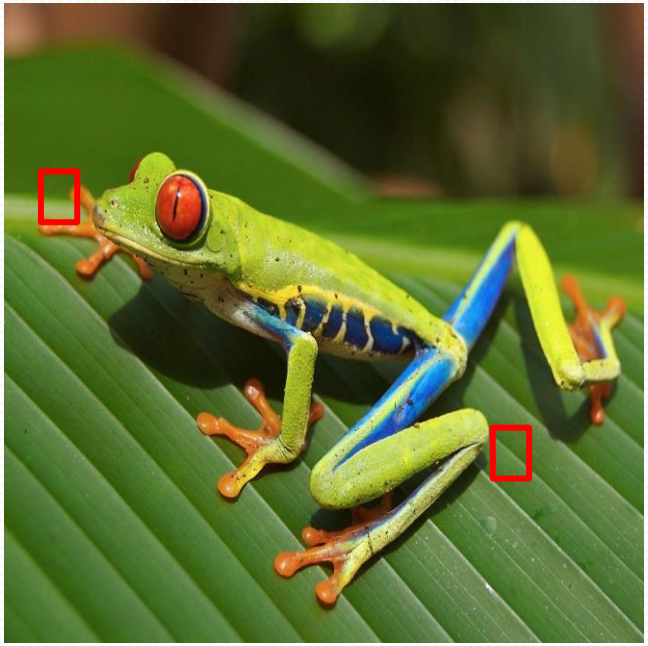
Po aplikovaní transformácie príznakov (feature transform), body môžeme separovať

Príklad: Farebný histogram

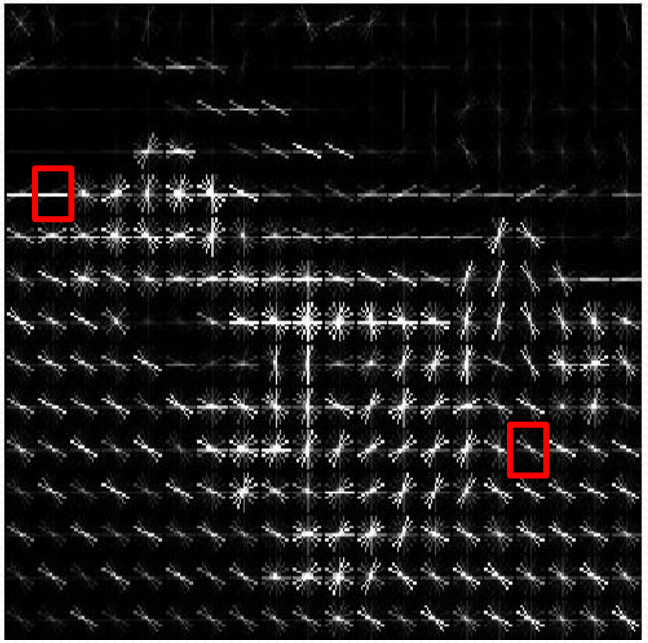


Príklad: Histogram orientovaných gradientov

Histogram of Oriented Gradients (HoG)



Divide image into 8x8 pixel regions
Within each region quantize edge direction into 9 bins

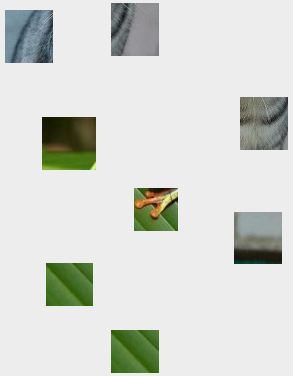


Example: 320x240 image gets divided into 40x30 bins; in each bin there are 9 numbers so feature vector has 30*40*9 = 10,800 numbers

Príklad: Bag of Words

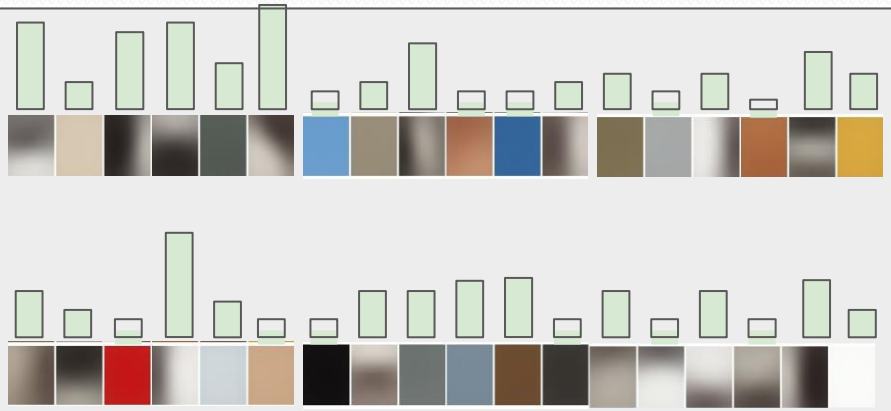
Step 1: Build codebook

Extract random patches



Cluster patches to form “codebook” of “visual words”

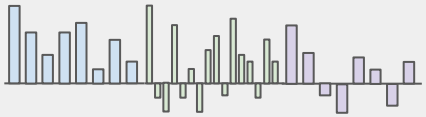
Step 2: Encode images



Fei-Fei and Perona, “A bayesian hierarchical model for learning natural scene categories”, CVPR 2005

Príznaky vs ConvNets

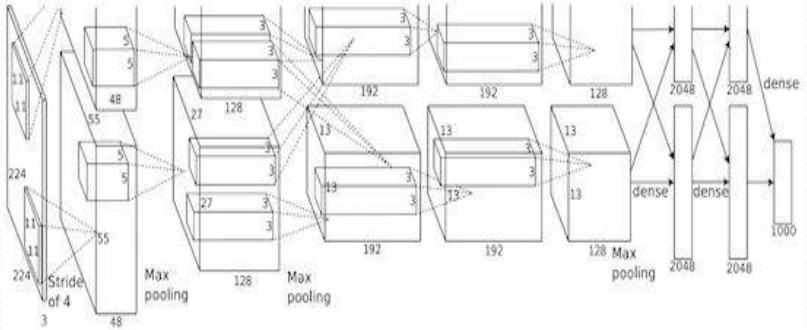
Feature Extraction



f

10 numbers giving scores for classes

training



10 numbers giving scores for classes

training

Nasledujúca prednáška:

Úvod do NN

Spätná propagácia (Backpropagation)