

$I(m^4)=$	0,000675
$E(kN/m^2)=$	2100000
$A(m^2)=$	0,09
$EI_1=$	1417,5
$EA_1=$	189000
$EI_2=$	4252,5
$EI_3=$	2835

- a) Şekilde verilen sistemi sonlu elemanlar yöntemi ile çözerek yer değiştirme ve M,N,V değerlerini bularak diyagramlarını çiziniz. Yer değiştirme eğrisini çiziniz. Sistemi SAP2000 ile de çözerek karşılaştırınız.
- b) Sistemi $EA=\infty$ olması durumu için de çözerek a seçeneği ile karşılaştırınız.

DN	X	Y	EN	I	r	li	c	s
1	0	0	1	1	2	5	0,6	0,8
2	3	4	2	2	3	6	1	0
3	9	4	3	3	4	4	0	-1
4	9	0						



- a) Her bir eleman için eleman eksenlerinde tanımlı rijitlik matrisleri oluşturulur.

$k_1' =$	37800	0	0	-37800	0	0
	0	136,08	340,2	0	-136,08	340,2
	0	340,2	1134	0	-340,2	567
	-37800	0	0	37800	0	0
	0	-136,08	-340,2	0	136,08	-340,2
	0	340,2	567	0	-340,2	1134

$k_2' =$	31500	0	0	-31500	0	0
	0	236,25	708,75	0	-236,25	708,75
	0	708,75	2835	0	-708,75	1417,5
	-31500	0	0	31500	0	0
	0	-236,25	-708,75	0	236,25	-708,75
	0	708,75	1417,5	0	-708,75	2835

$k_3' =$

47250	0	0	-47250	0	0
0	531,5625	1063,125	0	-531,563	1063,125
0	1063,125	2835	0	-1063,13	1417,5
-47250	0	0	47250	0	0
0	-531,563	-1063,13	0	531,5625	-1063,125
0	1063,125	1417,5	0	-1063,13	2835

Her eleman için dönüşüm matrisi oluşturulur.

$T_1 =$

0,6	0,8	0	0	0	0
-0,8	0,6	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0,6	0,8	0
0	0	0	-0,8	0,6	0
0	0	0	0	0	1

$T_2 =$

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

$T_3 =$

0	-1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	-1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1

Dönüştürülmüş eleman rijitlik matrisleri $k_i = T^T k' T$ ile elde edilir.

$k_1 =$

13695,0912	18078,6816	-272,16	-13695,0912	-18078,6816	-272,16
18078,6816	24240,9888	204,12	-18078,6816	-24240,9888	204,12
-272,16	204,12	1134	272,16	-204,12	567
-13695,0912	-18078,6816	272,16	13695,0912	18078,6816	272,16
-18078,6816	-24240,9888	-204,12	18078,6816	24240,9888	-204,12
-272,16	204,12	567	272,16	-204,12	1134

$k_2 =$

31500	0	0	-31500	0	0
0	236,25	708,75	0	-236,25	708,75
0	708,75	2835	0	-708,75	1417,5
-31500	0	0	31500	0	0
0	-236,25	-708,75	0	236,25	-708,75
0	708,75	1417,5	0	-708,75	2835

$k_3=$

531,5625	0	1063,125	-531,563	0	1063,125
0	47250	0	0	-47250	0
1063,125	0	2835	-1063,13	0	1417,5
-531,563	0	-1063,13	531,5625	0	-1063,125
0	-47250	0	0	47250	0
1063,125	0	1417,5	-1063,13	0	2835

Çevirme matrisleri yardımıyla toplam sistem rijitlik matrisi oluşturulmuştur.

$C_1=$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

$C_2=$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

$C_3=$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$k_e^1 = [C^1]^T [k^1] [C^1]$$

$$k_e^2 = [C^2]^T [k^2] [C^2]$$

$$k_e^3 = [C^3]^T [k^3] [C^3]$$

K=	13695,09	18078,68	-272,16	-13695,1	-18078,7	-272,16	0	0	0	0	0	0	F=	Ru ₁
	18078,68	24240,99	204,12	-18078,7	-24241	204,12	0	0	0	0	0	0		Rw ₁
	-272,16	204,12	1134	272,16	-204,12	567	0	0	0	0	0	0		0
	-13695,1	-18078,7	272,16	45195,09	18078,68	272,16	-31500	0	0	0	0	0		0
	-18078,7	-24241	-204,12	18078,68	24477,24	504,63	0	-236,25	708,75	0	0	0		-120
	-272,16	204,12	567	272,16	504,63	3969	0	-708,75	1417,5	0	0	0		-120
	0	0	0	-31500	0	0	32031,56	0	1063,125	-531,563	0	1063,125		-200
	0	0	0	0	-236,25	-708,75	0	47486,25	-708,75	0	-47250	0		-120
	0	0	0	0	708,75	1417,5	1063,125	-708,75	5670	-1063,13	0	1417,5		120
	0	0	0	0	0	0	-531,563	0	-1063,13	531,5625	0	-1063,13		0
	0	0	0	0	0	0	0	-47250	0	0	47250	0		Rw ₂
	0	0	0	0	0	0	1063,125	0	1417,5	-1063,13	0	2835		0

Sınır şartları gözetilerek rijitlik matrisi yeniden düzenlenir.

K=	13695,09	18078,68	-272,16	-13695,1	-18078,7	-272,16	0	0	0	0	0	0	F=	Ru ₁
	18078,68	24240,99	204,12	-18078,7	-24241	204,12	0	0	0	0	0	0		Rw ₁
	-272,16	204,12	1134	272,16	-204,12	567	0	0	0	0	0	0		0
	-13695,1	-18078,7	272,16	45195,09	18078,68	272,16	-31500	0	0	0	0	0		0
	-18078,7	-24241	-204,12	18078,68	24477,24	504,63	0	-236,25	708,75	0	0	0		-120
	-272,16	204,12	567	272,16	504,63	3969	0	-708,75	1417,5	0	0	0		-120
	0	0	0	-31500	0	0	32031,56	0	1063,125	-531,563	0	1063,125		-200
	0	0	0	0	-236,25	-708,75	0	47486,25	-708,75	0	-47250	0		-120
	0	0	0	0	708,75	1417,5	1063,125	-708,75	5670	-1063,13	0	1417,5		120
	0	0	0	0	0	0	-531,563	0	-1063,13	531,5625	0	-1063,13		0
	0	0	0	0	0	0	0	-47250	0	0	47250	0		Rw ₂
	0	0	0	0	0	0	1063,125	0	1417,5	-1063,13	0	2835		0

Düğüm noktası yer değiştirmeleri elde edilir.

$$u = K^{-1} \cdot Q$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,438345 \\ -1,06764 \\ 0,792293 \\ -0,079 \\ -1,07399 \\ -0,0015 \\ -0,11662 \\ -1,54048 \\ 0 \\ -0,11662 \end{bmatrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,438345 \\ -1,06764 \\ 0,792293 \\ -0,079 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1,06764 \\ 0,792293 \\ -0,079 \\ -1,07399 \\ -0,0015 \\ -0,11662 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1,07399 \\ -0,0015 \\ -0,11662 \\ -1,54048 \\ 0 \\ -0,11662 \end{bmatrix}$$

Eleman uç yer değiştirmeleri belirlenir.

$$u_i' = T_i \cdot u_i$$

$$u_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,438345 \\ -0,00675 \\ 1,329487 \\ -0,079 \end{bmatrix} \quad u_2' = \begin{bmatrix} -1,06764 \\ 0,792293 \\ -0,079 \\ -1,07399 \\ -0,0015 \\ -0,11662 \end{bmatrix} \quad u_3' = \begin{bmatrix} 0,001505 \\ -1,07399 \\ -0,11662 \\ 0 \\ -1,54048 \\ -0,11662 \end{bmatrix}$$

Eleman iç kuvvetleri hesaplanır.

$$k' \cdot u' = f$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 255,1111111 \\ -58,6666667 \\ -2,9843E-13 \\ -255,1111111 \\ 58,66666667 \\ -293,333333 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 200 \\ 48,8889 \\ 173,3333 \\ -200 \\ -48,8889 \\ 120 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 71,11111111 \\ -3,12639E-13 \\ -6,53699E-13 \\ -71,11111111 \\ 3,12639E-13 \\ -6,25278E-13 \end{bmatrix}$$

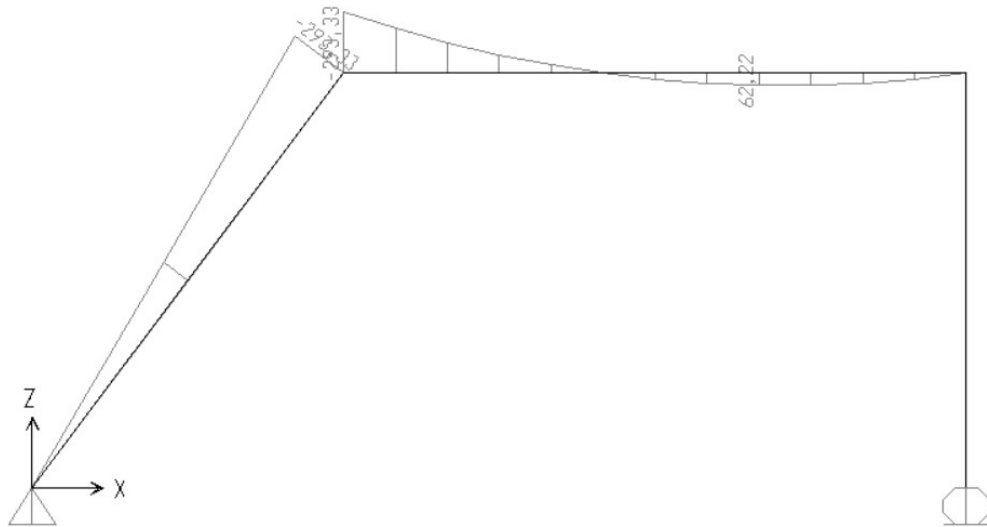
$$f' = f + Q$$

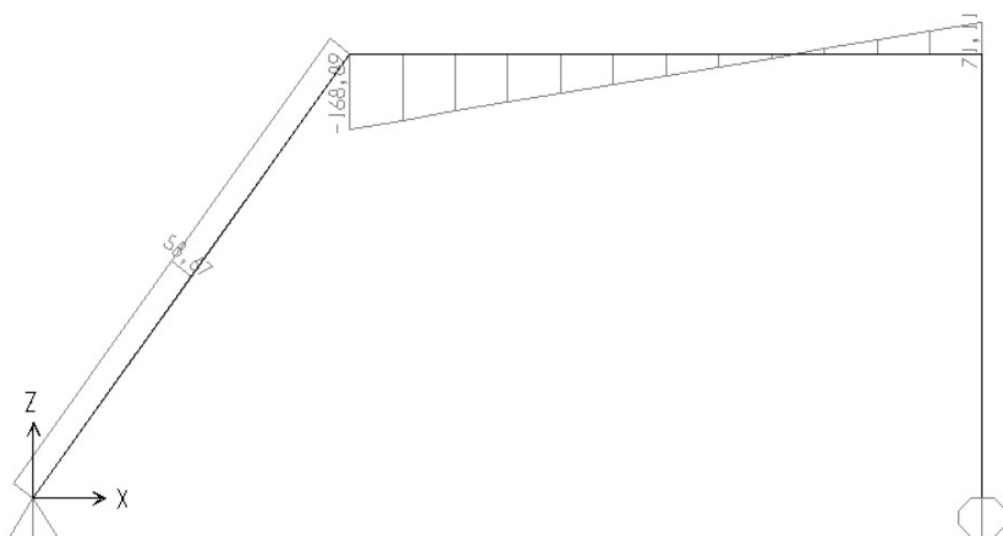
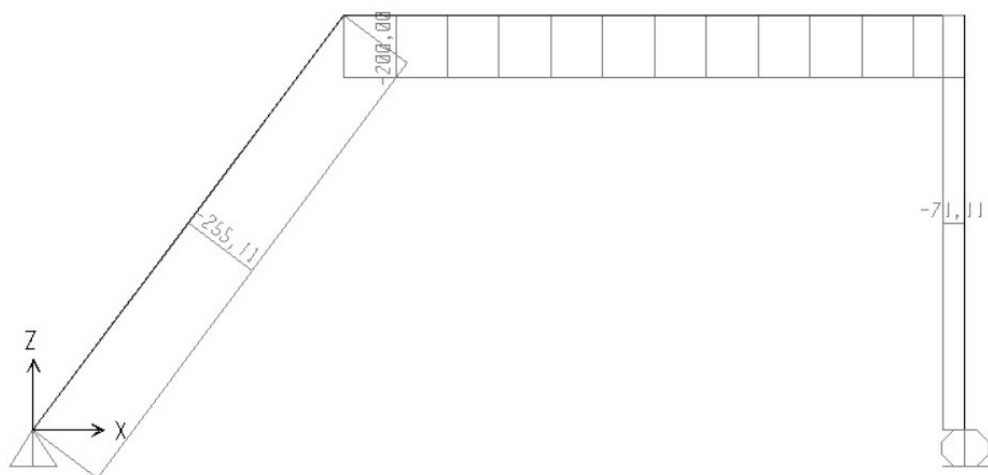
$$f_1' = \begin{bmatrix} 255,1111111 \\ -58,6666667 \\ -2,9843E-13 \\ -255,1111111 \\ 58,66666667 \\ -293,333333 \end{bmatrix} \quad f_2' = \begin{bmatrix} 200 \\ 168,8889 \\ 293,3333 \\ -200 \\ 71,11111 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_3' = \begin{bmatrix} 71,11111111 \\ -3,12639E-13 \\ -6,53699E-13 \\ -71,11111111 \\ 3,12639E-13 \\ -6,25278E-13 \end{bmatrix}$$

SAP2000 sonuçları;

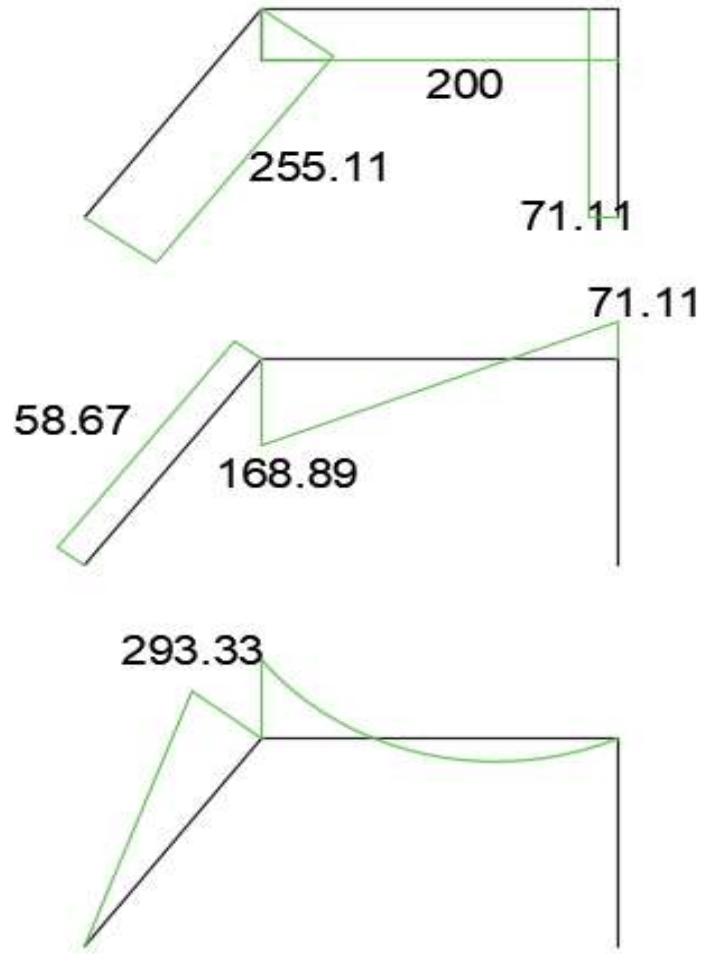
TABLE: Element Forces - Frames				
Frame	Station	P	V2	M3
Text	m	KN	KN	KN-m
1	0	-255,111	58,667	0
1	2,5	-255,111	58,667	-146,6667
1	5	-255,111	58,667	-293,3333
2	0	-200	-168,889	-293,3333
2	0,5	-200	-148,889	-213,8889
2	1	-200	-128,889	-144,4444
2	1,5	-200	-108,889	-85
2	2	-200	-88,889	-35,5556
2	2,5	-200	-68,889	3,8889
2	3	-200	-48,889	33,3333
2	3,5	-200	-28,889	52,7778
2	4	-200	-8,889	62,2222
2	4,5	-200	11,111	61,6667
2	5	-200	31,111	51,1111
2	5,5	-200	51,111	30,5556
2	6	-200	71,111	-2,274E-13
3	0	-71,111	0	0
3	2	-71,111	0	0
3	4	-71,111	0	0

SAP2000 programı kullanılarak elde edilen sırasıyla M,N,V diyagramları;



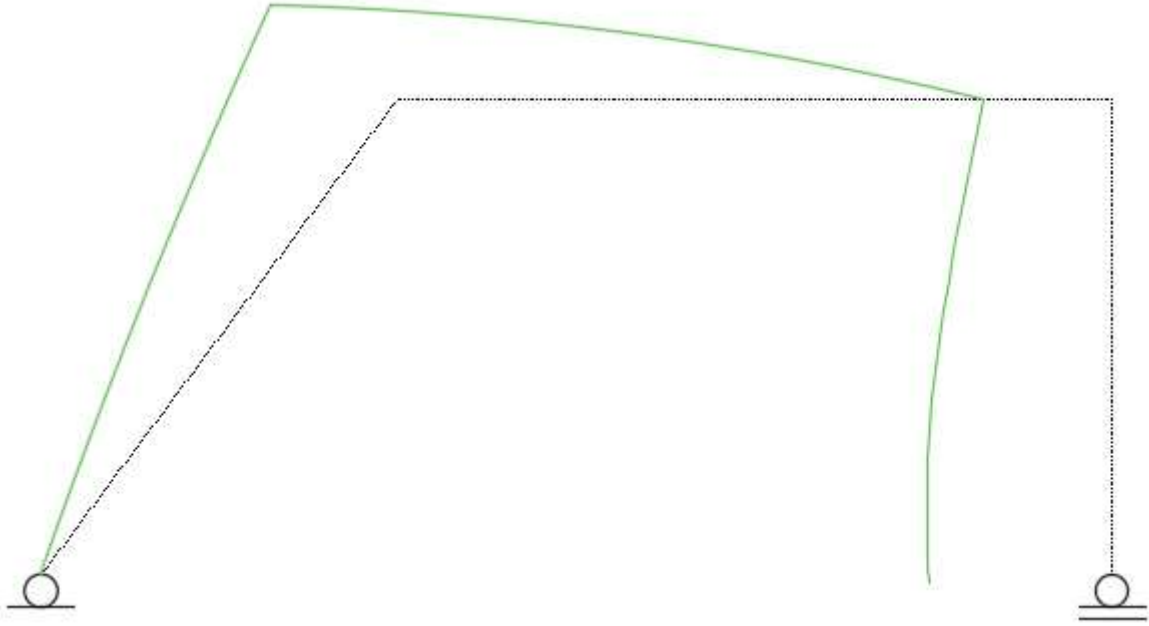


Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen sırasıyla N,V,M diyagramları ;

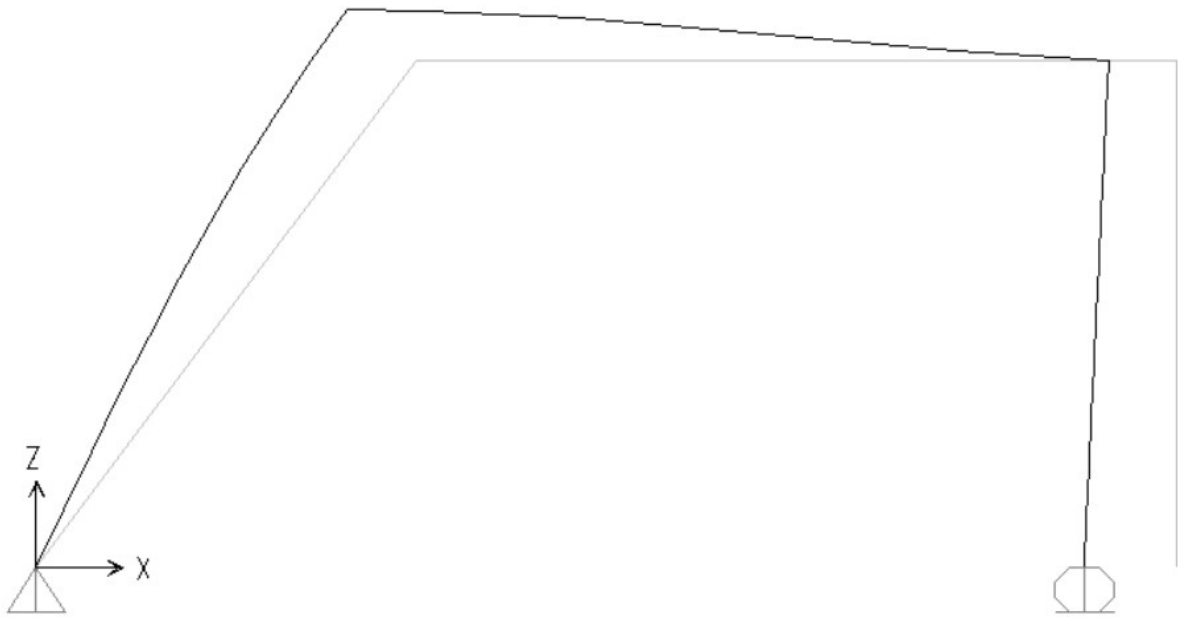


Aşağıda SEM ve SAP2000 düğüm noktası yer değiştirmeleri verilmiştir.

SAP2000	SEM
0	0
0	0
-0,43835	0,43835
-1,07201	-1,06764
0,795571	0,792293
-0,0788	-0,079
-1,07836	-1,07399
-0,0015	-0,0015
-0,11642	-0,11662
-1,54406	-1,54048
0	0
-0,11642	-0,11662



Sonlu Elemanlar Metodu



SAP2000

b) $EA=\infty$ olması durumu için;

$k_1' =$	3,78E+20	0	0	-3,78E+20	0	0
	0	1,3608E+34	3,4E+34	0	-1,3608E+34	3,4E+34
	0	3,402E+34	1,13E+35	0	-3,402E+34	5,67E+34
	-3,78E+20	0	0	3,78E+20	0	0
	0	-1,3608E+34	-3,4E+34	0	1,3608E+34	-3,4E+34
	0	3,402E+34	5,67E+34	0	-3,402E+34	1,13E+35

$k_2' =$	3,15E+20	0	0	-3,15E+20	0	0
	0	2,3625E+34	7,09E+34	0	-2,36E+34	7,09E+34
	0	7,0875E+34	2,84E+35	0	-7,09E+34	1,42E+35
	-3,15E+20	0	0	3,15E+20	0	0
	0	-2,3625E+34	-7,1E+34	0	2,363E+34	-7,1E+34
	0	7,0875E+34	1,42E+35	0	-7,09E+34	2,84E+35

$k_3' =$	4,73E+20	0	0	-4,7E+20	0	0
	0	5,32E+34	1,06E+35	0	-5,3E+34	1,063E+35
	0	1,06E+35	2,84E+35	0	-1,1E+35	1,418E+35
	-4,7E+20	0	0	4,73E+20	0	0
	0	-5,3E+34	-1,1E+35	0	5,32E+34	-1,06E+35
	0	1,06E+35	1,42E+35	0	-1,1E+35	2,835E+35

$K =$	8,71E+33	-6,5E+33	-2,7E+34	-8,7E+33	6,53E+33	-2,72E+34	0	0	0	0	0	0
	-6,5E+33	4,9E+33	2,04E+34	6,53E+33	-4,9E+33	2,041E+34	0	0	0	0	0	0
	-2,7E+34	2,04E+34	1,13E+35	2,72E+34	-2E+34	5,67E+34	0	0	0	0	0	0
	-8,7E+33	6,53E+33	2,72E+34	8,71E+33	-6,5E+33	2,722E+34	-3,2E+20	0	0	0	0	0
	6,53E+33	-4,9E+33	-2E+34	-6,5E+33	2,85E+34	5,046E+34	0	-2,3625E+34	7,09E+34	0	0	0
	-2,7E+34	2,04E+34	5,67E+34	2,72E+34	5,05E+34	3,969E+35	0	-7,0875E+34	1,42E+35	0	0	0
	0	0	0	-3,2E+20	0	0	5,32E+34	0	1,06E+35	-5,3E+34	0	1,06E+35
	0	0	0	0	-2,4E+34	-7,09E+34	0	2,3625E+34	-7,1E+34	0	-4,7E+20	0
	0	0	0	0	7,09E+34	1,418E+35	1,06E+35	-7,0875E+34	5,67E+35	-1,1E+35	0	1,42E+35
	0	0	0	0	0	0	-5,3E+34	0	-1,1E+35	5,32E+34	0	-1,1E+35
	0	0	0	0	0	0	0	-4,725E+20	0	0	4,73E+20	0
	0	0	0	0	0	0	1,06E+35	0	1,42E+35	-1,1E+35	0	2,84E+35

u=	0	u ₁ =	0	u ₂ =	-5,5E-19	u ₃ =	-1,2E-18
	0		0		-4E-19		-1,6E-19
	4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20
	-5,5E-19		-5,5E-19		-1,2E-18		-1E-18
	-4E-19		-4E-19		-1,6E-19		0
	4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20
	-1,2E-18						
	-1,6E-19						
	4,02E-20						
	-1E-18						
	0	u ₁ '=	0	u ₂ '=	-5,5E-19	u ₃ '=	1,63E-19
	4,02E-20		0		-4E-19		-1,2E-18
			4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20
			-6,6E-19		-1,2E-18		0
			2,01E-19		-1,6E-19		-1E-18
	4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20		4,02E-20

SAP2000 programından elde edilen yer değiştirmeler.

TABLE: Joint Displacements			
Joint	U1	U3	R2
Text	m	m	Radians
1	0	0	0
2	-1,037E-20	0	0
3	-1,672E-20	0	0
4	-1,386E-20	0	0

Görüldüğü üzere yer değiştirmeler sıfıra yakın çıkmıştır.

TABLE: Element Forces - Frames				
Frame	Station	P	V2	M3
Text	m	KN	KN	KN-m
1	0	-254,986	58,76	0,25
1	2,5	-254,986	58,76	-146,6507
1	5	-254,986	58,76	-293,5514
2	0	-200	-168,733	-294,25
2	0,5	-200	-148,733	-214,8836
2	1	-200	-128,733	-145,5171
2	1,5	-200	-108,733	-86,1507
2	2	-200	-88,733	-36,7843
2	2,5	-200	-68,733	2,5822
2	3	-200	-48,733	31,9486
2	3,5	-200	-28,733	51,315
2	4	-200	-8,733	60,6815
2	4,5	-200	11,267	60,0479
2	5	-200	31,267	49,4144
2	5,5	-200	51,267	28,7808
2	6	-200	71,267	-1,8528
3	0	-71,267	-2,842E-14	-0,25
3	2	-71,267	-2,842E-14	-0,25
3	4	-71,267	-2,842E-14	-0,25

Elemanlarda oluşan iç kuvvetler ise neredeyse aynı çıkmıştır. En genel anlamda düşünülecek olursa $F=k*x$ formülasyonuna göre F kuvvet değerleri sabit kalmış ve eğer k değeri sonsuza yakın değer alınırsa x yerdeğiştirme değeri de gittikçe sıfıra yakınsayacaktır. Yukarıda da görüldüğü gibi $EA=\infty$ durumunda u yerdeğiştirme değeri neredeyse sıfıra eşit çıkmıştır.

Basit anlamda $M=F*d$ olduğı düşünülürse; burada F elemana etkiyen kuvvet değeri ve d kuvvetin noktaya olan dik uzaklığı, F ve d değeri sabit olduğı sürece moment değeri bir değışiklik göstermez. Eleman iç kuvvet değeri malzeme ve kesit özelliklerinden bağımsız olduğı için $EA=\infty$ durumunda elemanlarda oluşan iç kuvvet değeri değışmemiştir.