



**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ  
YAPI ANABİLİM DALI**

**Dersin Adı**

(INS5615) Sonlu Elemanlar Metodu

**ÖDEV 5**

**Dersi Veren Öğretim Üyesi**

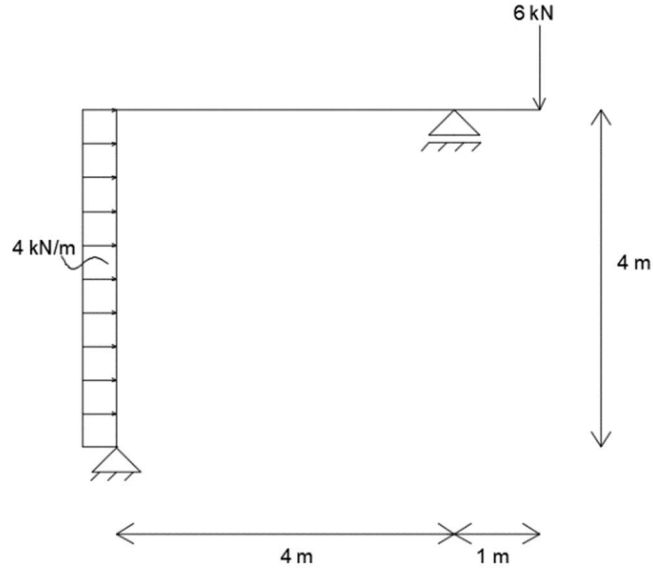
Doç.Dr. Ali KOÇAK

**Ödevi Yapan Öğrenci**

Yusuf KOÇ

17513016

İSTANBUL 2018



Düğüm noktaları ve elemanlara ait bilgiler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

DN	X	Y	EN	l	r	li	c	s
1	0	0	1	1	2	4	0	1
2	0	4	2	2	3	4	1	0
3	4	4	3	3	4	1	1	0
4	5	4						

Aşağıda elemanların malzeme ve kesit özellikleri verilmiştir.

$I_{2,3} (m^4) =$	0,0016	$EI_1 =$	1,51E+09
$A_{2,3} (m^2) =$	0,12	$EI_{2,3} =$	3,36E+08
$E (N/m^2) =$	2,1E+11	$EA_1 =$	5,04E+10
$I_1 (m^4) =$	0,0072	$EA_{2,3} =$	2,52E+10
$A_1 (m^2) =$	0,24		

Bu sistemin sonlu elemanlar yöntemi ile iç kuvvetlerinin bulunabilmesi için öncelikle her eleman için eleman eksenlerinde tanımlı rijitlik matrisleri belirlenir.

Çerçeve eleman rijitlik matrisi aşağıdaki matris yardımı ile hesaplanabilir.

$$k = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Bu sisteme ait 1,2 ve 3 numaralı çubukların hesaplanan eleman eksenlerinde tanımlı rijitlik matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 k'_1 = & \begin{vmatrix} 1,26\text{E}+10 & 0 & 0 & -1,26\text{E}+10 & 0 & 0 \\ 0 & 2,84\text{E}+08 & 5,67\text{E}+08 & 0 & -2,84\text{E}+08 & 5,67\text{E}+08 \\ 0 & 5,67\text{E}+08 & 1,51\text{E}+09 & 0 & -5,67\text{E}+08 & 7,56\text{E}+08 \\ -1,26\text{E}+10 & 0 & 0 & 1,26\text{E}+10 & 0 & 0 \\ 0 & -2,84\text{E}+08 & -5,67\text{E}+08 & 0 & 2,84\text{E}+08 & -5,67\text{E}+08 \\ 0 & 5,67\text{E}+08 & 7,56\text{E}+08 & 0 & -5,67\text{E}+08 & 1,51\text{E}+09 \end{vmatrix} \\
 k'_2 = & \begin{vmatrix} 6,30\text{E}+09 & 0 & 0 & -6,30\text{E}+09 & 0 & 0 \\ 0 & 6,30\text{E}+07 & 1,26\text{E}+08 & 0 & -6,30\text{E}+07 & 1,26\text{E}+08 \\ 0 & 1,26\text{E}+08 & 3,36\text{E}+08 & 0 & -1,26\text{E}+08 & 1,68\text{E}+08 \\ -6,30\text{E}+09 & 0 & 0 & 6,30\text{E}+09 & 0 & 0 \\ 0 & -6,30\text{E}+07 & -1,26\text{E}+08 & 0 & 6,30\text{E}+07 & -1,26\text{E}+08 \\ 0 & 1,26\text{E}+08 & 1,68\text{E}+08 & 0 & -1,26\text{E}+08 & 3,36\text{E}+08 \end{vmatrix} \\
 k'_3 = & \begin{vmatrix} 2,52\text{E}+10 & 0 & 0 & -2,52\text{E}+10 & 0 & 0 \\ 0 & 4,03\text{E}+09 & 2,02\text{E}+09 & 0 & -4,03\text{E}+09 & 2,02\text{E}+09 \\ 0 & 2,02\text{E}+09 & 1,34\text{E}+09 & 0 & -2,02\text{E}+09 & 6,72\text{E}+08 \\ -2,52\text{E}+10 & 0 & 0 & 2,52\text{E}+10 & 0 & 0 \\ 0 & -4032000000 & -2,02\text{E}+09 & 0 & 4,03\text{E}+09 & -2,02\text{E}+09 \\ 0 & 2,02\text{E}+09 & 6,72\text{E}+08 & 0 & -2,02\text{E}+09 & 1,34\text{E}+09 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Çerçeve eleman için dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$T = \begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aşağıda her eleman için oluşturulan dönüşüm matrisleri verilmiştir.

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere ikinci ve üçüncü elemana ait dönüşüm matrisleri birim matrise eşittir.

Daha önce eleman eksenlerinde hesaplanmış olan rijitlik matrisleri dönüşüm matrisleri ile “ $\underline{k} = T^T \underline{k}' T$ ” bağıntısı ile sistem eksenlerine dönüştürülür.

$$k = T_i^T * k'_i * T_i$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 2,84E+08 & 0 & -5,67E+08 & -2,84E+08 & 0 & -5,67E+08 \\ 0 & 1,26E+10 & 0 & 0 & -1,26E+10 & 0 \\ -5,67E+08 & 0 & 1,51E+09 & 5,67E+08 & 0 & 7,56E+08 \\ -2,84E+08 & 0 & 5,67E+08 & 2,84E+08 & 0 & 5,67E+08 \\ 0 & -1,26E+10 & 0 & 0 & 1,26E+10 & 0 \\ -5,67E+08 & 0 & 7,56E+08 & 5,67E+08 & 0 & 1,51E+09 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 6,30E+09 & 0 & 0 & -6,30E+09 & 0 & 0 \\ 0 & 6,30E+07 & 1,26E+08 & 0 & -6,30E+07 & 1,26E+08 \\ 0 & 1,26E+08 & 3,36E+08 & 0 & -1,26E+08 & 1,68E+08 \\ -6,30E+09 & 0 & 0 & 6,30E+09 & 0 & 0 \\ 0 & -6,30E+07 & -1,26E+08 & 0 & 6,30E+07 & -1,26E+08 \\ 0 & 1,26E+08 & 1,68E+08 & 0 & -1,26E+08 & 3,36E+08 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} 2,52E+10 & 0 & 0 & -2,52E+10 & 0 & 0 \\ 0 & 4,03E+09 & 2,02E+09 & 0 & -4,03E+09 & 2,02E+09 \\ 0 & 2,02E+09 & 1,34E+09 & 0 & -2,02E+09 & 6,72E+08 \\ -2,52E+10 & 0 & 0 & 2,52E+10 & 0 & 0 \\ 0 & -4,03E+09 & -2,02E+09 & 0 & 4,03E+09 & -2,02E+09 \\ 0 & 2,02E+09 & 6,72E+08 & 0 & -2,02E+09 & 1,34E+09 \end{bmatrix}$$

Toplam sistem rijitlik matrisi biriktirme yöntemi ile hesaplanmıştır.

K=	2,84E+08	0	-5,67E+08	-2,84E+08	0	-5,67E+08	0	0	0	0	0	0
	0	1,26E+10	0	0	-1,26E+10	0	0	0	0	0	0	0
	-5,67E+08	0	1,51E+09	5,67E+08	0	7,56E+08	0	0	0	0	0	0
	-2,84E+08	0	5,67E+08	6,58E+09	0,00E+00	5,67E+08	-6,30E+09	0	0	0	0	0
	0	-1,26E+10	0	0	1,27E+10	1,26E+08	0	-6,30E+07	1,26E+08	0	0	0
	-5,67E+08	0	7,56E+08	5,67E+08	1,26E+08	1,85E+09	0	-1,26E+08	1,68E+08	0	0	0
	0	0	0	-6,30E+09	0	0	3,15E+10	0	0	-2,52E+10	0	0
	0	0	0	0	-6,30E+07	-1,26E+08	0	4,10E+09	1,89E+09	0	-4,03E+09	2,02E+09
	0	0	0	0	1,26E+08	1,68E+08	0	1,89E+09	1,68E+09	0	-2,02E+09	6,72E+08
	0	0	0	0	0	0	-2,52E+10	0	0	2,52E+10	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	-4,03E+09	-2,02E+09	0	4,03E+09	-2,02E+09
	0	0	0	0	0	0	0	2,02E+09	6,72E+08	0	-2,02E+09	1,34E+09

Sistem yük vektörü aşağıdaki gibidir.

$$F^T = [8 \ 0 \ 5.333 \ 8 \ 0 \ -5.33 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -6 \ 0]$$

Sınır şartları gözetilerek toplam sistem rijitlik matrisi yeniden düzenlenir.

K=	2,84E+08	0	-5,67E+08	-2,84E+08	0	-5,67E+08	0	0	0	0	0	0
	0	1,26E+10	0	0	-1,26E+10	0	0	0	0	0	0	0
	-5,67E+08	0	1,51E+09	5,67E+08	0	7,56E+08	0	0	0	0	0	0
	-2,84E+08	0	5,67E+08	6,584E+09	0	5,67E+08	-6300000000	0	0	0	0	0
	0	-1,26E+10	0	0	1,27E+10	1,26E+08	0	-6,3E+07	1260000000	0	0	0
	-5,67E+08	0	7,56E+08	5,67E+08	1,26E+08	1,85E+09	0	-1,3E+08	1680000000	0	0	0
	0	0	0	-6,3E+09	0	0	31500000000	0	0	-25200000000	0	0
	0	0	0	0	-630000000	-1,26E+08	0	4,1E+09	18900000000	0	-4E+09	20160000000
	0	0	0	0	1,26E+08	1,68E+08	0	1,89E+09	16800000000	0	-2E+09	6720000000
	0	0	0	0	0	0	-25200000000	0	0	25200000000	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	-4E+09	-20160000000	0	4,03E+09	-20160000000
	0	0	0	0	0	0	0	2,02E+09	6720000000	0	-2E+09	13440000000

K=	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1,51E+09	5,67E+08	0	7,56E+08	0	0	0	0	0	0
	0	0	5,7E+08	6,6E+09	0	5,7E+08	-6,3E+09	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1,3E+10	1,3E+08	0	0	1,3E+08	0	0	0
	0	0	7,6E+08	5,7E+08	1,3E+08	1,8E+09	0	0	1,7E+08	0	0	0
	0	0	0	-6,3E+09	0	0	3,2E+10	0	0	-2,5E+10	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1,3E+08	1,7E+08	0	0	1,7E+09	0	-2E+09	6,7E+08
	0	0	0	0	0	0	-2,5E+10	0	0	2,5E+10	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	-2E+09	0	4E+09	-2E+09
	0	0	0	0	0	0	0	0	6,7E+08	0	-2E+09	1,3E+09

												0
												0
												5,33333
												8
												0
												-5,33333
												0
												0
												0
												0
												-6
												0

“ $u = K^{-1}F$ ” ile düğüm noktası yerdeğiştirmeleri elde edilir.

u=	0
	0
	-1,4E-07
	5,5E-07
	7,5E-10
	-1,15E-07
	5,46E-07
	0
	3,95E-08
	5,46E-07
	3,35E-08
	3,06E-08

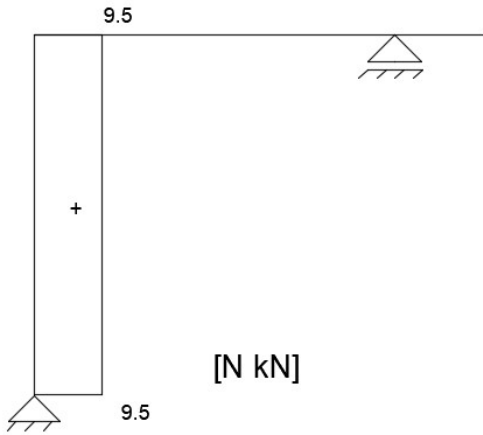
$u' = T \cdot u$  bağıntısı ile eleman uç yerdeğiştirmeleri belirlenir.

$$u'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,43E-07 \\ 7,54E-10 \\ -5,46E-07 \\ -1,15E-07 \end{bmatrix}, u'_2 = \begin{bmatrix} 5,457E-07 \\ 7,54E-10 \\ -1,15E-07 \\ 5,457E-07 \\ 0 \\ 3,949E-08 \end{bmatrix}, u'_3 = \begin{bmatrix} 5,46E-07 \\ 0 \\ 3,95E-08 \\ 5,46E-07 \\ 3,35E-08 \\ 3,06E-08 \end{bmatrix}$$

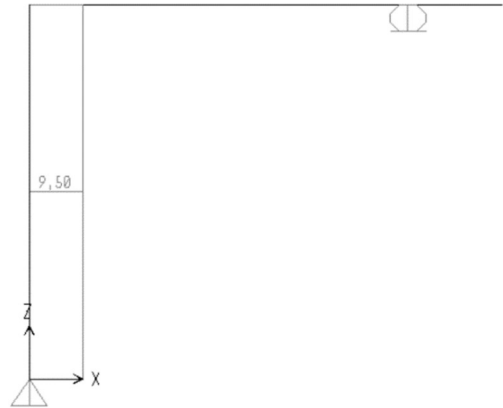
“ $k' \cdot u' = f'$ ” ile eleman iç kuvvetleri hesaplanır.

$$f'_1 = \begin{bmatrix} -9,5 \\ 8 \\ 5,333333 \\ 9,5 \\ -8 \\ 26,66667 \end{bmatrix}, f'_2 = \begin{bmatrix} -9,5 \\ 16 \\ 0 \\ 9,5 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}, f'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9,5 \\ -32 \\ 0 \\ 9,5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

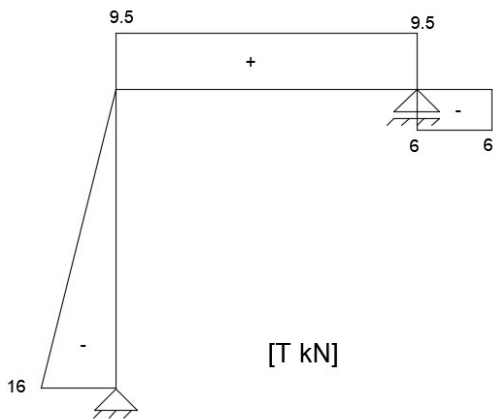
Burada 1 numaralı eleman üzerindeki yayılı yük nedeniyle iç kuvvetlerde yük vektörü ile toplanarak dengeleme yapılmıştır.



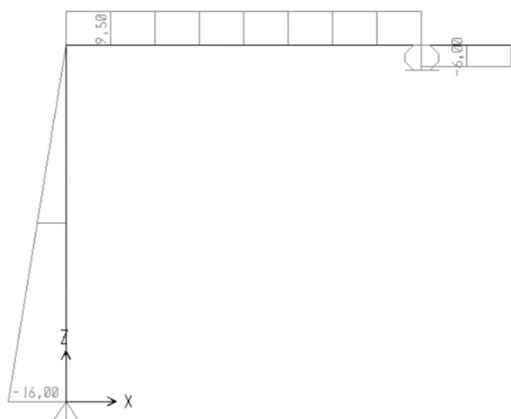
a ) Hesaplanan normal kuvvet diyagramı



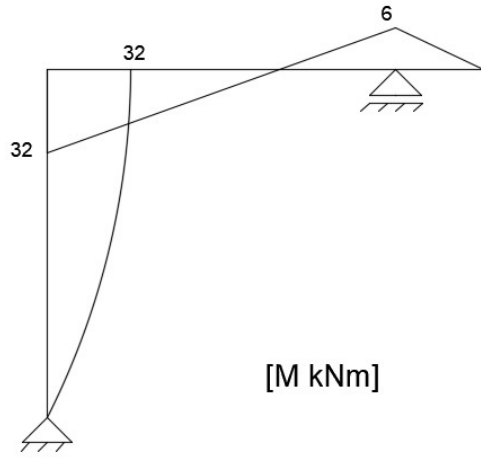
b ) SAP2000 analiz sonucu



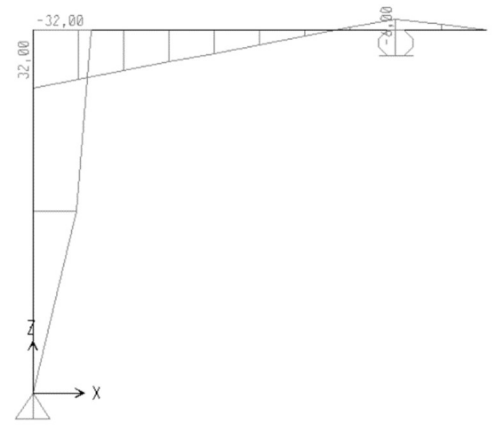
c ) Hesaplanan kesme kuvveti diyagramı



d ) SAP2000 analiz sonucu



e ) Hesaplanan eğilme momenti diyagramı



f ) SAP2000 analiz sonucu