

◆ Fraktaler og datastrukturer

Skrevet av: Teodor Heggelund

Kurs: Elm

Tema: Tekstbasert, Nettside

Fag: Matematikk, Programmering, Teknologi

Klassetrinn: 8.-10. klasse, Videregående skole

Introduksjon

En fraktal er en geometri med et mønster som gjentar seg selv inne i seg selv. Høres ikke det rart ut? I denne oppgaven skal vi lage våre egne.

Her er Sierpinski-teppet, som er en fraktal:



Steg 1: Hvordan fungerer Sierpinski?

Fraktaler følger tre regler:

- ☐ **Startregelen** gir hvor vi skal starte. Med en firkant? En trekant? En strek?
- ☐ **Tegneregelen** gir hvordan vi skal tegne på nivået vi er. Fargelegge en bit av firkanten? Splitte en strek i to?

- ☐ **Rekursjonsregelen** deler opp figuren vår i mindre biter, som vi kjører på nytt i. Lager firkanten vi tegnet nye firkanter? Lager streken vi tegnet nye streker? Gjenta for hver strek.

Sjekkliste

Gå til Wikipedia-artikkelen (https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet) til Sierpinski-teppet. Se på animasjonen.

- ☐ Hvordan er teppet før det begynner å bli fargelagt? Dette er **startregelen**.
- ☐ Hva tegner vi i hver firkant? Dette er **tegneregelen**.
- ☐ Hvordan gjentas regelen? Dette er **rekursjonsregelen**.

Se på figurene under avsnittet **Process**. Ser du at noe gjentar seg?

Steg 2: Tegne kvadrater med SVG

Nå skal vi begynne å tegne kvadratene teppet:



Ett kvadrat kan vi tegne slik:

```
import Svg exposing (svg, rect)
import Svg.Attributes exposing (width, height, viewBox, fill, x, y, width, height)

main =
  svg
    [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
    [ rect [ x "0", y "0", width "27", height "27", fill "blue" ] - [
    ], rect [ x "9", y "9", width "9", height "9", fill "green" ] - [
    ] ]
```



✓ Sjekkliste

- ☐ Hvordan kan vi da tegne mange kvadrater?
- ☐ Hva bestemmer posisjonen til tallene?
- ☐ Hvor mange store grønne kvadrater har du tegnet?
- ☐ Hvor mange små grønne kvadrater har du tegnet?
- ☐ **Utvid koden til å tegne mange kvadrater.**

Steg 3: Datastrukturer

Kan du telle hvor mange kvadrater det finnes i Sierpinski-teppet? Ikke jeg heller. Hmm, gidder vi da å skrive de maaaaange linjene SVG for hånd? Nei, vi programmerer!

Vi skal nå representere kvadrater med Records i Elm. Records lar oss lage *våre egne typer*. Vi kommer til å lage en type for punkter og en type for kvadrater.

Sjekkliste

Nå skal du få prøve å lese Elm sine egne lærerressurser.

- ☐ Gå til Elm-dokumentasjonen for records (<http://elm-lang.org/docs/records>). Finner du eksempelet for et punkt?

Vi legger til en liten snutt i programmet vårt:

```
import Html exposing (div, text, h1)

import Svg exposing (svg, rect)
import Svg.Attributes exposing (width, height, viewBox, fill, x, y, width, height)

myPoint =
  { x = 9
    , y = 3
  }

main =
  div []
    [ h1 [] [ text (toString myPoint) ]
      , svg
        [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
        [ rect [ x "0", y "0", width "27", height "27", fill "blue" ] -
          [ ]
            , rect [ x "3", y "3", width "3", height "3", fill "green" ] -
              [ ]
                ]
        ]
    ]
```

Nå kan du endre `toString myPoint` for å skrive ut noe annet.

Sjekkliste

- ☐ Skriv ut kun `x`-attributten til `myPoint`

- ☐ Lag et annet punkt, `yourPoint` . Velg koordinater og skriv ut dette i stedet.
- ☐ Lag et tredje punkt, `theirPoint` . Dette skal du lage *ut ifra* `myPoint` , men du skal bytte ut x-verdien med `0` . Se avsnittet **Updating Records** i guiden.

Nå skal vi ta steget videre og lage våre egne punkter.

Husk! Du kan bruke linjen `[h1 [] [text (toString yz)]` til å teste verdier.

- ☐ Les de to første eksemplene i avsnittet **Record types**.

Her finnes det allerede en `Point` -type vi kan bruke. Har du definert `myPoint` og `yourPoint` på samme måte som det gjøres i guiden?

- ☐ Skriv inn `Point` -typen i programmet ditt
- ☐ Spesifiser at punktene dine skal være av typen `Point` :

```
-- myPoint : Point betyr at myPoint skal være av type Point
myPoint : Point
myPoint = -- din tidligere løsning

-- yourPoint : Point betyr at yourPoint skal være av type Point
yourPoint : Point
yourPoint = -- din tidligere løsning
```

Klager kompilatoren? Hvorfor/hvorfor ikke? Om den klager betyr det ikke at du har gjort noe feil. Det bare at du og guiden lagde punkter på forskjellig måte.

- ☐ Utvid punktene dine med en z-verdi. Hva skjer når du kopilerer? Klarer du tyde feilmeldingen?
- ☐ Lag en ny type: `Point3D` som også har Z-verdi, og spesifiser at punktene dine skal være av denne typen:

```
myPoint : Point3D
-- ...
```

Dette får vi bruk for!

Steg 4: Datastrukturer i datastrukturer

I steg 3 bygget vi opp datastrukturen `Point` fra to tall av typen `Float`.

Nå skal vi bruke vår egen type, `Point`, til å bygge opp ett kvadrat.

Desimaltall

Obs! Her kommer det matte. Viktig for oss nå:

Kommatall i Elm har typen `Float`.

Dette har en forklaring:

Desimaltall i Elm har typen `Float`. `Float` er kort for *Floating point number*, som på norsk er *flyttall*. Disse kalles flyttall fordi de har *flytende presisjon*. Det betyr at vi kan ha et fast antall *siffer* med nøyaktighet. Vi kan også lage veldig store tall, som $1000 * 1000 * 1000 * 1000 * 10000$

✓ Sjekkliste

- ☐ Hva må vi vite om et kvadrat for at vi skal kunne tegne det?
- ☐ Lag typen kvadrat: `type alias Square = -- ...`

Nå skal vi tegne kvadratet!

```
viewSquare square = -- ...
```

- ☐ Lag funksjonen `viewSquare`. Bruk `rect` fra SVG som du har brukt tidligere.

Obs! Når vi tegner kvadrater må vi bruke en farge. En måte å løse det på er å ha en `color : String`-attributt på `Square`.

Her er hvordan jeg bruker min `viewSquare`:


```

start =
  { corner = { x = 0.0
               , y = 0.0
             }
    , width = 27.0
    , color = "blue"
  }

center =
  { corner = { x = 9.0
               , y = 9.0
             }
    , width = 9.0
    , color = "green"
  }

main =
  div []
    [ h1 [] [ text (toString start)
                  , text (toString center)
                ]
      , svg
        [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
        [ viewSquare start
          , viewSquare center
        ]
    ]

```

Dette blir seende slik ut på min PC:

```
{ corner = { x = 0, y = 0 }, width = 27, color = "blue" } { corner = { x = 9, y = 9 }, width = 9,
```



```
color = "green" }
```

Nå har vi **startregelen** i boks! Den er kvadratet start !

Steg 5: Senterkvadrat og let

Vi kan sette binde navn med `let` . Her binder vi `age` til alderen vi regner ut:

```
describeAge yearNow yearBorn =  
  let age = yearNow - yearBorn  
  in "The age is " ++ (toString age)
```

Vi kan binde flere navn som kan være avhengig av hverandre:

```
describeHalfAge yearNow yearBorn =  
  let age = yearNow - yearBorn  
      halfAge = age / 2  
  in "Half the age is " ++ (toString halfAge)
```



Sjekkliste

- ☐ Lag funksjonen `describeDoubleAge` . Hva skal denne gjøre?
- ☐ Les overskriften **Let expressions** i syntaxguiden (<http://elm-lang.org/docs/syntax>). Her er det noen eksempler. Prøv selv!

Nå skal vi tilbake til fraktalene våre, vi skal lage den grønne firkanten i sentrum. Denne gangen med kode!

- ☐ Lag funksjonen `centerSquare` . Denne skal ta inn et kvadrat og returnere kvadratet i sentrum av det forrige. Hvilken farge skal det ha?

Her er en start:

```
centerSquare : Square -> Square
centerSquare old =
    let x =
```

Du skal kunne bruke den slik:

```
> centerSquare
<function> : Utils.Square -> Utils.Square
> centerSquare start
{ color = "blue", width = 9, corner = { x = 9, y = 9 } } : Utils.Square
```

... hva må x-verdien være om det nye kvadratet skal være i sentrum av det forrige?



Får du til? Prøv selv først.

Slik ser min ut:

```
mkSquare color width corner =  
  { color = color  
    , width = width  
    , corner = corner  
  }  
  
blueSquare = mkSquare "blue"  
  
centerSquare : Square -> Square  
centerSquare old =  
  let x = old.corner.x + old.width/3  
      y = old.corner.y + old.width/3  
      w = old.width / 3  
  in blueSquare w (mkPoint x y)
```

Steg 6: Funksjoner fra List og String

`List.map` kjører en funksjon på hvert element i en liste. Eksempel:

```
> add1 x = x + 1
<function> : number -> number
> List.map add1 [10, 20, 30]
[11,21,31] : List number
> times2 x = x * 2
<function> : number -> number
> List.map times2 [10, 20, 30]
[20,40,60] : List number
```

Sjekkliste

- ☐ Les avsnittet om `List.map` i dokumentasjonen til List (<http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/List#map>).
- ☐ Bruk `List.map` til å lage listen `["1", "2", "3", "4"]`

`List.range` kan lage en liste med tall. Eksempel:

```
> List.map toString (List.range 1 4)
["1", "2", "3", "4"] : List String
> List.range 5 10
[5,6,7,8,9,10] : List Int
> List.range 0 3
[0,1,2,3] : List Int
```

- ☐ Les avsnittet om `List.range` i dokumentasjonen til List (<http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/List#range>)
- ☐ Bruk `List.map` og `List.range` til å lage denne store listen:

```
["0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9", "10", "11", "12", "13", "14",  
"15", "16", "17", "18", "19", "20", "21", "22", "23", "24", "25", "26", "27",  
"28", "29", "30"]
```

Vi innfører enda en nyttig funksjon: `String.join`. Denne bygger opp tekst fra en liste.

☐ Les dokumentasjonen til `String.join` i dokumentasjonen til `String` (<http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/String#join>)

☐ Lag funksjonen `sayTo`. Den skal kunne brukes slik:

```
> sayTo 10  
"1 og 2 og 3 og 4 og 5 og 6 og 7 og 8 og 9 og 10" : String  
> sayTo 3  
"1 og 2 og 3" : String
```

Bra! Gi deg selv en klapp på skulderen.

Steg 7: Kvadrater langs kanten

Nå skal vi finne kvadratene langs kanten. Hvor mange blir det? Tell de røde:



Obs! Denne er en utfordring. Ta deg god tid.

✓ Sjekkliste

☐ Lag funksjonen `borderSquares`. Denne skal vi kunne bruke slik:

```
> start
{ color = "green", width = 729, corner = { x = 0, y = 0 } } : Utils.Square
> borderSquares start
[{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 486, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 243 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 486, y = 243 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 486 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 486 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 486, y = 486 } }]
: List Utils.Square
```

Får du til? Prøv selv først.

Slik ser min ut:

```
borderSquares : Square -> List Square
borderSquares old =
    let additions = [ (0,0) -- First row
                      , (1,0)
                      , (2,0)
                      , (0,1) -- Second row
                      , (2,1)
                      , (0,2) -- Third row
                      , (1,2)
                      , (2,2)
                    ]
    w = old.width / 3
    mkBorderSquare (fx,fy) =
        let x = old.corner.x + w*fx
            y = old.corner.y + w*fy
        in blueSquare w (mkPoint x y)
    in List.map mkBorderSquare additions
```

Stopp! Hva var det vi skulle igjen?

Nivå 1 har vi klart:



Nivå 2 har vi også klart når vi har gjort Steg 7:



Men videre blir det vanskeligere. Hvordan skal vi få til steg 3 og steg 4 på en elegant måte?

Nivå 3:



Nivå 4:



Først lager vi én firkant. Så vil vi lage de åtte små firkanene som følger denne ene. Så vil vi for hver av de åtte nye gjøre det samme! Da får vi $8 \cdot 8 = 64$ nye små firkanter. Så vil vi *igjen* for hver av de 64 nye firkantene tegne åtte nye firkanter.

I nivå 1 lager vi **1** ny firkant.

I nivå 2 lager vi **8** nye firkanter.

I nivå 3 lager vi **$8 \cdot 8 = 64$** nye firkanter.

Bruk `elm` `rep1` til å regne ut disse:

☐ Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå **4**?

☐ Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå **5**?

☐ Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå **6**?

Klarer du å se et mønster?

☐ Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå **x**?

Steg 8: concat og map

Vi skal trene litt før vi går videre.

Sjekkliste

☐ Lag filen Tall.elm. Legg inn dette i toppen:

```
module Tall exposing (..)

hei = "Hei!"
```

☐ Start `elm repl` fra kommandovindu i samme mappe

☐ Importer alle funksjonene fra `Tall.elm` fra `elm repl`:

```
---- elm-repl 0.18.0 -----
-----
:help for help, :exit to exit, more at <https://github.com/elm-lang/elm-repl>
-----
-----
> import Tall exposing (..)
> hei
"Hei!" : String
```

Får du til? Bra!

Nå skal vi prøve oss på et problem fra matematikken:

Er det mulig å liste opp alle desimaltall mellom 0 og 1?

... gitt at vi har uendelig god tid. Hmm! La oss prøve, men begrense oss på antall desimaler i starten.

Dette kunne vært første steg:

```
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
```

Sjekkliste

☐ Lag `sifre` for å spare på 0-9:

```
> sifre
["0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9"] : List String
```

Prøv selv først!

Her er hva jeg gjorde:

```
sifre =
  let nullTilNi = List.range 0 9
  in List.map toString nullTilNi
```

☐ Lag `ettSifferBak` som tar inn starten på tallet og legger på sifrene 0-9 på slutten:

```
> ettSifferBak
<function> : String -> List String
> ettSifferBak "0."
["0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9"] : List String
> ettSifferBak "tull"
["tull0", "tull1", "tull2", "tull3", "tull4", "tull5", "tull6", "tull7", "tull8", "tull9"]
: List String
```

Slik gjorde jeg det:

```
ettSifferBak start =  
  let begynnMedStart slutt = start ++ slutt  
  in List.map begynnMedStart sifre
```

Nå kommer trikset for å gå dypere: For hver mulige begynnelse må vi lage alle løsninger, og slå sammen disse.

- ☐ Lag `sifreAvLengde` som tar inn hvor mange sifre som skal legges på og begynnelsen, og gir tilbake alle mulighetene.

```
> sifreAvLengde 0 ""  
[""] : List String  
> sifreAvLengde 0 "0."  
["0."] : List String  
> sifreAvLengde 1 "0."  
["0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9"] : List String  
> sifreAvLengde 1 "1."  
["1.0", "1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8", "1.9"] : List String  
> sifreAvLengde 2 "0."  
["0.00", "0.01", "0.02", "0.03", "0.04", "0.05", "0.06", "0.07", "0.08", "0.09",  
"0.10", "0.11", "0.12", "0.13", "0.14", "0.15", "0.16", "0.17", "0.18", "0.19",  
"0.20", "0.21", "0.22", "0.23", "0.24", "0.25", "0.26", "0.27", "0.28", "0.29",  
"0.30", "0.31", "0.32", "0.33", "0.34", "0.35", "0.36", "0.37", "0.38", "0.39",  
"0.40", "0.41", "0.42", "0.43", "0.44", "0.45", "0.46", "0.47", "0.48", "0.49",  
"0.50", "0.51", "0.52", "0.53", "0.54", "0.55", "0.56", "0.57", "0.58", "0.59",  
"0.60", "0.61", "0.62", "0.63", "0.64", "0.65", "0.66", "0.67", "0.68", "0.69",  
"0.70", "0.71", "0.72", "0.73", "0.74", "0.75", "0.76", "0.77", "0.78", "0.79",  
"0.80", "0.81", "0.82", "0.83", "0.84", "0.85", "0.86", "0.87", "0.88", "0.89",  
"0.90", "0.91", "0.92", "0.93", "0.94", "0.95", "0.96", "0.97", "0.98", "0.99"]  
      : List String
```

Slik gjorde jeg det:

```

sifreAvLengde n start =
  if n == 0
    -- Hvis vi ikke vil ha flere tall, gir vi tilbake kun hva vi har.
    then [start]
  else
    let
      -- Liste over alle de nye startene for neste nivå
      starter = ettSifferBak start

      -- Funksjon som tar inn en start og lager alle sluttene.
      -- Hvorfor bruker vi n-1? Hva skjer om vi bruker n i stede
      t?

      fortsett nyStart = sifreAvLengde (n-1) nyStart

      -- Lager listene med fortsettelsener for 0, 1, 2, ..., i hver
      sin liste
      fortsettelsener = List.map fortsett starter

      -- Slår sammen fortsettelsene i én liste
      in List.concat fortsettelsener

```

☐ Bruk sifreAvLengde til å lage desimaler:

```

> desimaler 0
["0."] : List String
> desimaler 1
["0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9"] : List String
> desimaler 2
["0.00", "0.01", "0.02", "0.03", "0.04", "0.05", "0.06", "0.07", "0.08", "0.09",
"0.10", "0.11", "0.12", "0.13", "0.14", "0.15", "0.16", "0.17", "0.18", "0.19",
"0.20", "0.21", "0.22", "0.23", "0.24", "0.25", "0.26", "0.27", "0.28", "0.29",
"0.30", "0.31", "0.32", "0.33", "0.34", "0.35", "0.36", "0.37", "0.38", "0.39",
"0.40", "0.41", "0.42", "0.43", "0.44", "0.45", "0.46", "0.47", "0.48", "0.49",
"0.50", "0.51", "0.52", "0.53", "0.54", "0.55", "0.56", "0.57", "0.58", "0.59",
"0.60", "0.61", "0.62", "0.63", "0.64", "0.65", "0.66", "0.67", "0.68", "0.69",
"0.70", "0.71", "0.72", "0.73", "0.74", "0.75", "0.76", "0.77", "0.78", "0.79",
"0.80", "0.81", "0.82", "0.83", "0.84", "0.85", "0.86", "0.87", "0.88", "0.89",
"0.90", "0.91", "0.92", "0.93", "0.94", "0.95", "0.96", "0.97", "0.98", "0.99"]
      : List String

```

I sifreAvLengde lagde vi først alle resultatene i hver sin liste med `List.map`, før vi slo listene sammen med `List.concat`. Her har vi skrevet om koden litt:


```

sifreAvLengde n start =
  if n == 0
    -- Hvis vi ikke vil ha flere tall, gir vi tilbake kun hva vi har.
    then [start]
  else
    let
      -- Liste over alle de nye startene for neste nivå
      starter = ettSifferBak start

      -- Funksjon som tar inn en start og lager alle sluttene.
      -- Hvorfor bruker vi n-1? Hva skjer om vi bruker n i stede
      t?

      fortsett nyStart = sifreAvLengde (n-1) nyStart

      -- Slår sammen fortsettelsene i én liste
      in List.concat (List.map fortsett starter)

```

List.concat (List.map funksjon liste) er noe vi ser ofte. Derfor finnes funksjonen concatMap som kjører List.concat på resultatet av en List.map. Da kan vi korte ned litt til:

```

sifreAvLengde n start =
  if n == 0
    -- Hvis vi ikke vil ha flere tall, gir vi tilbake kun hva vi har.
    then [start]
  else
    let
      -- Liste over alle de nye startene for neste nivå
      starter = ettSifferBak start

      -- Funksjon som tar inn en start og lager alle sluttene.
      -- Hvorfor bruker vi n-1? Hva skjer om vi bruker n i stede
      t?

      fortsett nyStart = sifreAvLengde (n-1) nyStart

      -- Slår sammen fortsettelsene i én liste
      in List.concatMap fortsett starter

```

☐ Hvor lange tall kan du skrive ut før PC-en din begynner å gå tregt?

☐ Hvor mange desimaltall finner du da?

Hint: 0.0-0.9 blir 10 tall. 0.00 til 0.99 blir ...? Hva med 0.00000 til 0.99999?

Har du hørt om ++ ?

++ kan slå sammen tekst:

```
> "Hei " ++ "på deg"  
"Hei på deg" : String
```

++ kan også slå sammen lister:

```
> [1,2,3] ++ [4,5,6]  
[1,2,3,4,5,6] : List number
```

Steg 9: Så mange nivåer vi vil!

Nå skal vi bruke teknikken fra Steg 8 til å komme til bunns i fraktalen vår.



Sjekkliste



Lag `generateCenterSquares` . Denne skal kunne fungere slik:

```

---- elm-repl 0.18.0 -----
-----
:help for help, :exit to exit, more at <https://github.com/elm-lang/elm-repl>
-----
-----
> import Main exposing (..)
> start
{ color = "green", width = 729, corner = { x = 0, y = 0 } } : Main.Square
> generateCenterSquares 0 start
[] : List Main.Square
> generateCenterSquares 1 start
[{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 243 } }]
  : List Main.Square
> generateCenterSquares 2 start
[ { color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 243 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 324, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 324 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 324 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 567 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 324, y = 567 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 567 } }
]
  : List Main.Square

```

Gikk det greit? Her er slik jeg gjorde det, og hvordan jeg bruker `generateCenterSquares` i main:

```

generateCenterSquares : number -> Square -> List Square
generateCenterSquares level source =
  if level == 0 then []
  else let children = List.concatMap (generateCenterSquares (level - 1)) (borderSquares source)
       in [centerSquare source] ++ children

main =
  svg
    [ width "100%", viewBox "0 0 729 729" ]
    ( [viewSquare start] ++
      List.map viewSquare (generateCenterSquares 3 start)
    )

```

