Fraktaler og datastrukturer

Skrevet av: Teodor Heggelund

Kurs: Elm

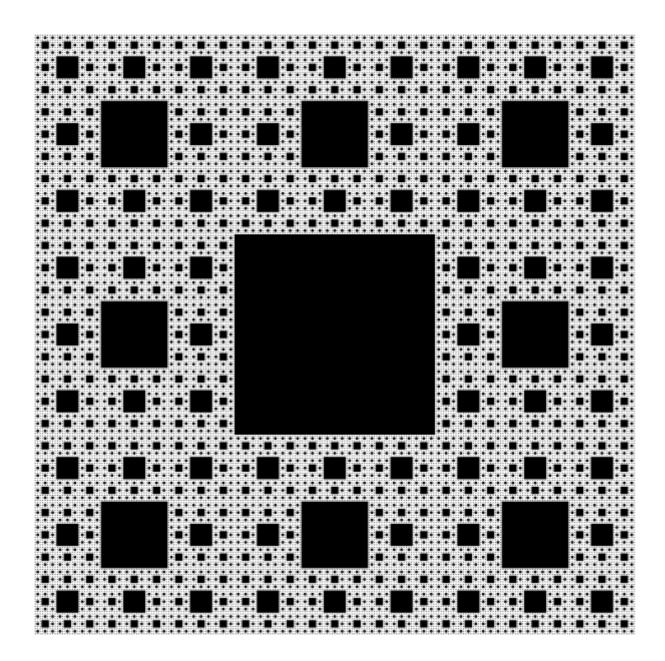
Tema: Tekstbasert, Nettside

Fag: Matematikk, Programmering, Teknologi Klassetrinn: 8.-10. klasse, Videregående skole

Introduksjon

En fraktal er en geometri med et mønster som gjentar seg selv inne i seg selv. Høres ikke det rart ut? I denne oppgaven skal vi lage våre egne.

Her er Sierpinski-teppet, som er en fraktal:



Steg 1: Hvordan fungerer Sierpinski?

Fraktaler følger tre regler:

- Startregelen gir hvor vi skal starte. Med en firkant? En trekant? En strek?
- **Tegneregelen** gir hvordan vi skal tegne på nivået vi er. Fargelegge en bit av firkanten? Splitte en strek i to?

0	Rekursjonsregelen deler opp figuren vår i mindre biter, som vi kjører på nytt i.
	Lager firkanten vi tegnet nye firkanter? Lager streken vi tegnet nye streker? Gjenta
	for hver strek.

V	S	jekk	liste
	-	,	

Gå til Wikipedia-artikkelen (https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet) til Sierpinski-teppet. Se på animasjonen.

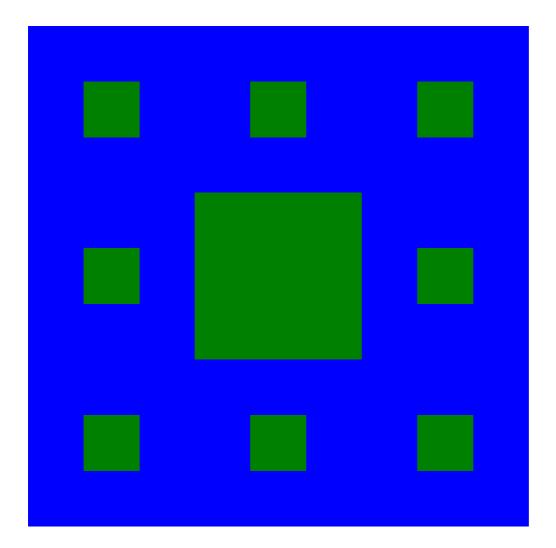
Hvordan er teppet før det begynner å bli fargelagt? Dette er startregelen .
Hva tegner vi i hver firkant? Dette er tegneregelen .

Hvordan gjentas regelen? Dette er **rekursjonsregelen**.

Se på figurene under avsnittet **Process**. Ser du at noe gjentar seg?

Steg 2: Tegne kvadrater med SVG

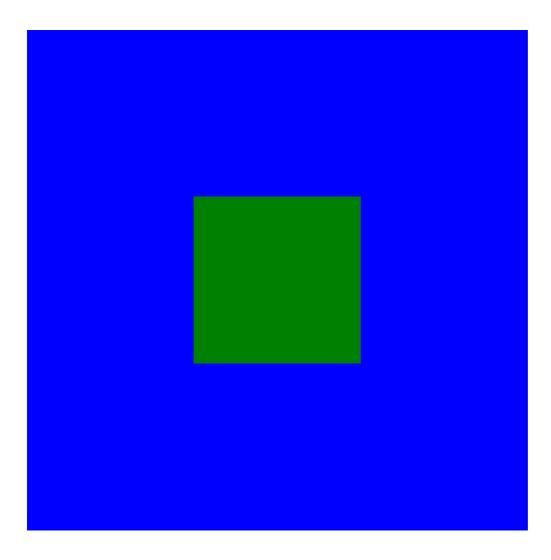
Nå skal vi begynne å tegne kvadratene teppet:



Ett kvadrat kan vi tegne slik:

```
import Svg exposing (svg, rect)
import Svg.Attributes exposing (width, height, viewBox, fill, x, y, wid
th, height)

main =
    svg
    [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
    [ rect [ x "0", y "0", width "27", height "27", fill "blue" ] - [
]
    , rect [ x "9", y "9", width "9", height "9", fill "green" ] - [
]
]
```



Sjekkliste

- Hvordan kan vi da tegne mange kvadrater?
- Hva bestemmer posisjonen til tallene?
- Hvor mange store grønne kvadrater har du tegnet?
- Hvor mange små grønne kvadrater har du tegnet?
- Utvid koden til å tegne mange kvadrater.

Steg 3: Datastrukturer

Kan du telle hvor mange kvadrater det finnes i Sierpinski-teppet? Ikke jeg heller. Hmm, gidder vi da å skrive de maaaange linjene SVG for hånd? Nei, vi programmerer!

Vi skal nå representere kvadrater med Records i Elm. Records lar oss lage *våre egne typer*. Vi kommer til å lage en type for punkter og en type for kvadrater.



Nå skal du få prøve å lese Elm sine egne læreressurser.

Gå til Elm-dokumentasjonen for records (http://elm-lang.org/docs/records). Finner du eksempelet for et punkt?

Vi legger til en liten snutt i programmet vårt:

```
import Html exposing (div, text, h1)
import Svg exposing (svg, rect)
import Svg.Attributes exposing (width, height, viewBox, fill, x, y, wid
th, height)
myPoint =
    \{ x = 9 \}
    , y = 3
main =
    div []
      [ h1 [] [ text (toString myPoint) ]
      , svg
        [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
        [ rect [ x "0", y "0", width "27", height "27", fill "blue" ] -
[ ]
        , rect [ x "3", y "3", width "3", height "3", fill "green" ] -
 [ ]
        ]
      ]
```

Nå kan du endre toString myPoint for å skrive ut noe annet.



Skriv ut kun x -attributten til myPoint

Lag et annet punkt, yourPoint . V	elg koordinater og skriv ut dette i stedet.			
Lag et tredje punkt, theirPoint. bytte ut x-verdien med 0. Se avsn	Dette skal du lage <i>ut ifra myPoint</i> , men du skal ittet Updating Records i guiden.			
Nå skal vi ta steget videre og lage våre e	gne punkter.			
Husk! Du kan bruke linjen [h1 [] [t	ext (toString yz)] til å teste verdier.			
Les de to første eksemplene i avsn	ittet Record types .			
Her finnes det allerede en Point -type vi yourPoint på samme måte som det gjø	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			
Skriv inn Point -typen i programm	et ditt			
Spesifiser at punktene dine skal være av typen Point :				
myPoint : Point betyr at myPoint : Point myPoint = din tidligere l	myPoint skal være av type Point øsning			
yourPoint : Point betyr a yourPoint : Point yourPoint = din tidligere	t yourPoint skal være av type Point løsning			
Klager kompilatoren? Hvorfor/hvorfor ikke? Om den klager betyr det ikke at du har gjort noe feil. Det bare at du og guiden lagde punkter på forskjellig måte. Utvid punktene dine med en z-verdi. Hva skjer når du kopilerer? Klarer du tyde feilmeldingen?				
	å har Z-verdi, og spesifiser at punktene dine			
myPoint : Point3D				

Dette får vi bruk for!

Steg 4: Datastrukturer i datastrukturer

I steg 3 bygget vi opp datastruktren Point fra to tall av typen Float.

Nå skal vi bruke får egen type, Point , til å bygge opp ett kvadrat.

Desimaltall

Obs! Her kommer det matte. Viktig for oss nå:

Kommatall i Elm har typen Float .

Dette har en forklaring:

Desimaltall i Elm har typen Float . Float er kort for *Floating point number*, som på norsk er *flyttall*. Disse kalles flyttall fordi de har *flytende presisjon*. Det betyr at vi kan ha et fast antall *siffer* med nøyaktighet. Vi kan også lage veldig store tall, som 1000 * 1000 * 1000 * 1000 * 10000

Sjekkliste

- Hva må vi vite om et kvadrat for at vi skal kunne tegne det?
- Lag typen kvadrat: type alias Square = -- ...

Nå skal vi tegne kvadratet!

```
viewSquare square = -- ...
```

Lag funksjonen viewSquare. Bruk rect fra SVG som du har brukt tidligere.

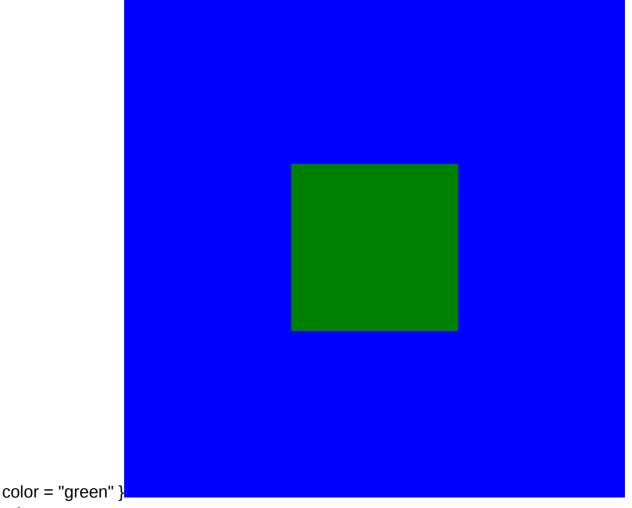
Obs! Når vi tegner kvadrater må vi bruke en farge. En måte å løse det på er å ha en color : String -attributt på Square.

Her er hvordan jeg bruker min viewSquare:

```
start =
  \{ corner = \{ x = 0.0 \}
             , y = 0.0
  , width = 27.0
  , color = "blue"
center =
  \{ corner = \{ x = 9.0 \}
             , y = 9.0
  , width = 9.0
  , color = "green"
main =
    div []
      [ h1 [] [ text (toString start)
             , text (toString center)
              ]
      , svg
        [ width "500", height "500", viewBox "0 0 27 27" ]
        [ viewSquare start
        , viewSquare center
        ]
      ]
```

Dette blir seende slik ut på min PC:

{ corner = { x = 0, y = 0 }, width = 27, color = "blue" }{ corner = { x = 9, y = 9 }, width = 9,



Nå har vi **startregelen** i boks! Den er kvadratet start!

Steg 5: Senterkvadrat og 1et

Vi kan sette binde navn med let . Her binder vi age til alderen vi regner ut:

```
describeAge yearNow yearBorn =
  let age = yearNow - yearBorn
  in "The age is " ++ (toString age)
```

Vi kan binde flere navn som kan være avhengig av hverandre:

```
describeHalfAge yearNow yearBorn =
  let age = yearNow - yearBorn
    halfAge = age / 2
  in "Half the age is " ++ (toString halfAge)
```



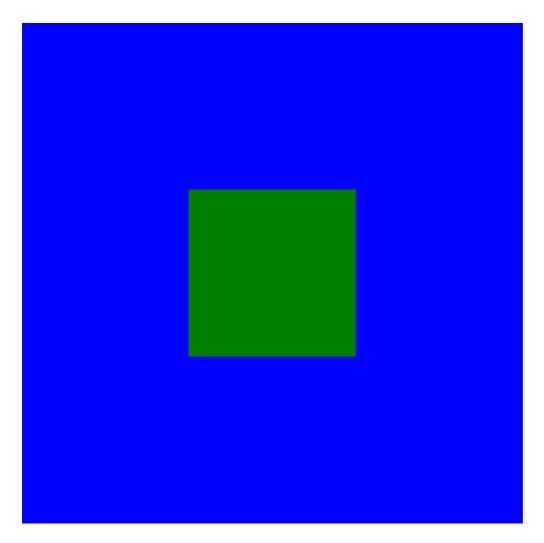
centerSquare : Square -> Square
Her er en start:
Lag funksjonen centerSquare . Denne skal ta inn et kvadrat og returnere kvadratet i sentrum av det forrige. Hvilken farge skal det ha?
Nå skal vi tilbake til fraktalene våre, vi skal lage den grønne firkanten i sentrum. Denne gangen med kode!
Les overskriften Let expressions i syntaxguiden (http://elm-lang.org/docs/syntax). Her er det noen eksempler. Prøv selv!
Lag funksjonen describeDoubleAge . Hva skal denne gjøre?

Du skal kunne bruke den slik:

centerSquare old =
 let x =

```
> centerSquare
<function> : Utils.Square -> Utils.Square
> centerSquare start
{ color = "blue", width = 9, corner = { x = 9, y = 9 } } : Utils.Square
```

... hva må x-verdien være om det nye kvadratet skal være i sentrum av det forrige?



Får du til? Prøv selv først.

Slik ser min ut:

```
mkSquare color width corner =
    { color = color
    , width = width
    , corner = corner
    }
blueSquare = mkSquare "blue"

centerSquare : Square -> Square
centerSquare old =
    let x = old.corner.x + old.width/3
        y = old.corner.y + old.width/3
        w = old.width / 3
    in blueSquare w (mkPoint x y)
```

Steg 6: Funksjoner fra List og String

List.map kjører en funksjon på hvert element i en liste. Eksempel:

```
> add1 x = x + 1
<function> : number -> number
> List.map add1 [10, 20, 30]
[11,21,31] : List number
> times2 x = x * 2
<function> : number -> number
> List.map times2 [10, 20, 30]
[20,40,60] : List number
```

🕏 Sjekkliste

- Les avnsitet om List.map i dokumentasjonen til List (http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/List#map).
- Bruk List.map til å lage listen ["1","2","3","4"]

List.range kan lage en liste med tall. Eksempel:

```
> List.map toString (List.range 1 4)
["1","2","3","4"] : List String
> List.range 5 10
[5,6,7,8,9,10] : List Int
> List.range 0 3
[0,1,2,3] : List Int
```

- Les avsnittet om List.range i dokumentasjonen til List (http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/List#range)
- Bruk List.map og List.range til å lage denne store listen:

```
["0","1","2","3","4","5","6","7","8","9","10","11","12","13","14","15","16","17","18","19","20","21","22","23","24","25","26","27","28","29","30"]
```

Vi innfører enda en nyttig funksjon: String.join. Denne bygger opp tekst fra en liste.

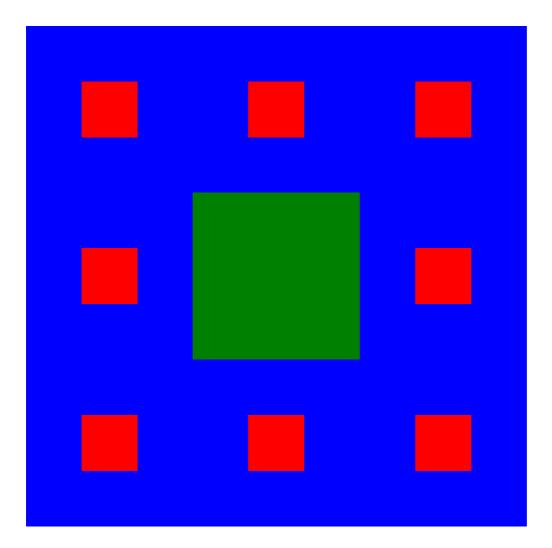
- Les dokumentasjonen til String.join i dokumentasjonen til String (http://package.elm-lang.org/packages/elm-lang/core/latest/String#join)
- Lag funksjonen sayTo . Den skal kunne brukes slik:

```
> sayTo 10
"1 og 2 og 3 og 4 og 5 og 6 og 7 og 8 og 9 og 10" : String
> sayTo 3
"1 og 2 og 3" : String
```

Bra! Gi deg selv en klapp på skulderen.

Steg 7: Kvadrater langs kanten

Nå skal vi finne kvadratene langs kanten. Hvor mange blir det? Tell de røde:



Obs! Denne er en utfording. Ta deg god tid.



Lag funksjonen borderSquares . Denne skal vi kunne bruke slik:

```
> start
{ color = "green", width = 729, corner = { x = 0, y = 0 } } : Utils.Squ
are
> borderSquares start
[{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 486, y = 0 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 243 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 486, y = 243 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 0, y = 486 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 486 } }
,{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 486 } }
: List Utils.Square
```

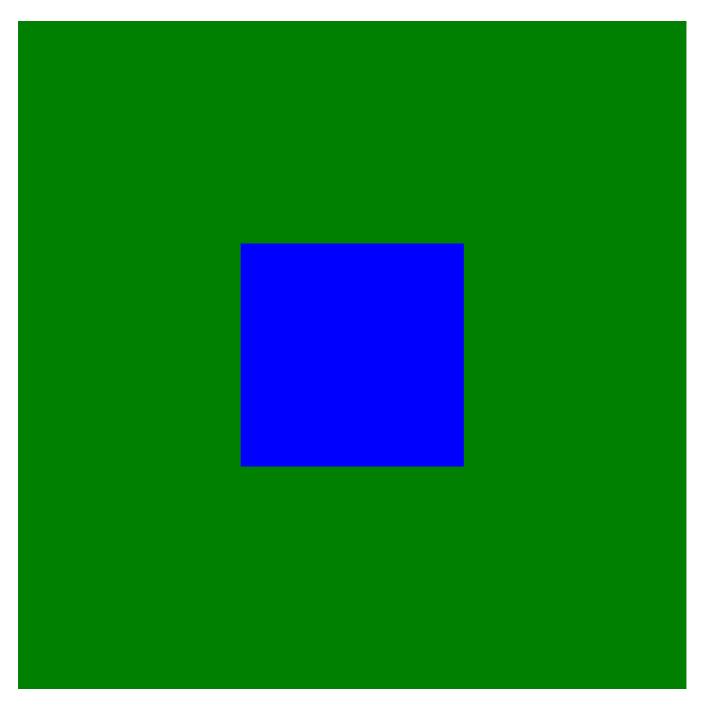
Får du til? Prøv selv først.

Slik ser min ut:

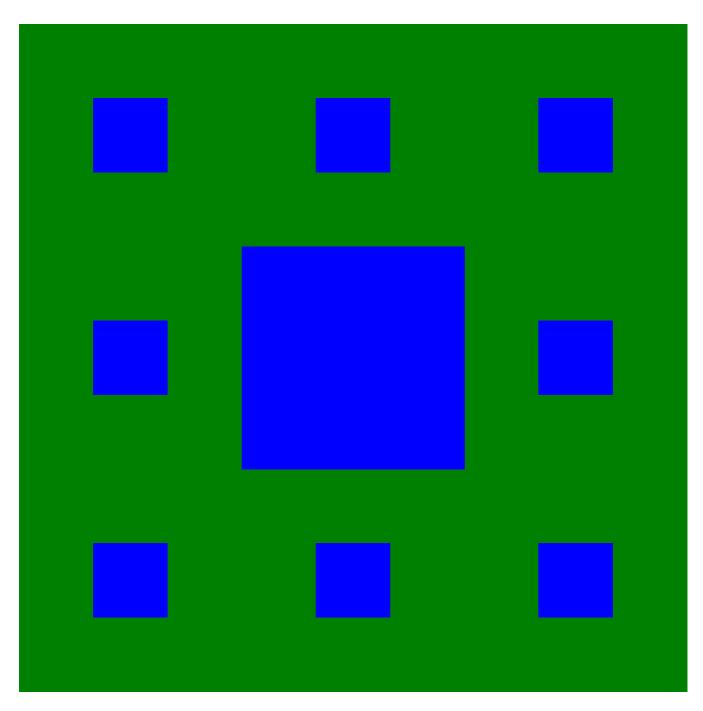
```
borderSquares : Square -> List Square
borderSquares old =
    let additions = [(0,0) -- First row
                    , (1,0)
                    , (2,0)
                    , (0,1) -- Second row
                    , (2,1)
                    , (0,2) -- Third row
                    , (1,2)
                    , (2,2)
        w = old.width / 3
        mkBorderSquare (fx, fy) =
            let x = old.corner.x + w*fx
                y = old.corner.y + w*fy
            in blueSquare w (mkPoint x y)
    in List.map mkBorderSquare additions
```

Stopp! Hva var det vi skulle igjen?

Nivå 1 har vi klart:

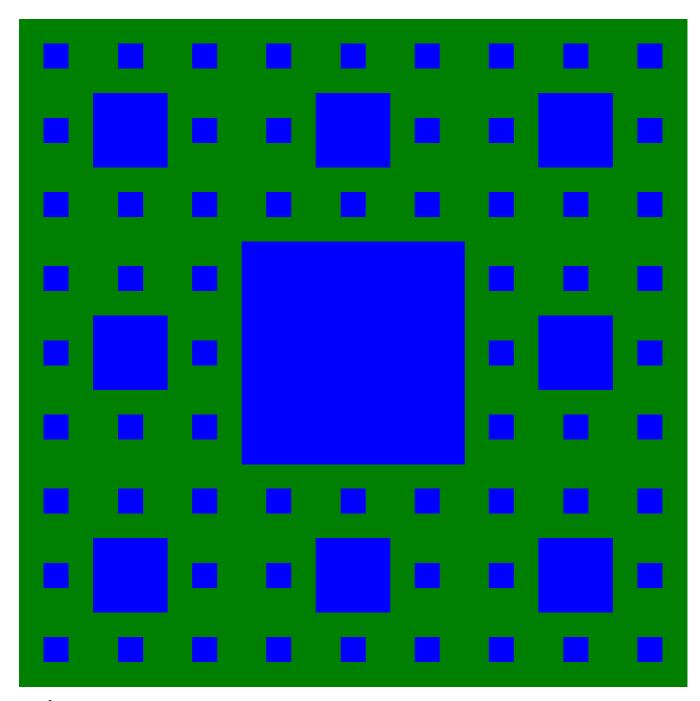


Nivå 2 har vi også klart når vi har gjort Steg 7:

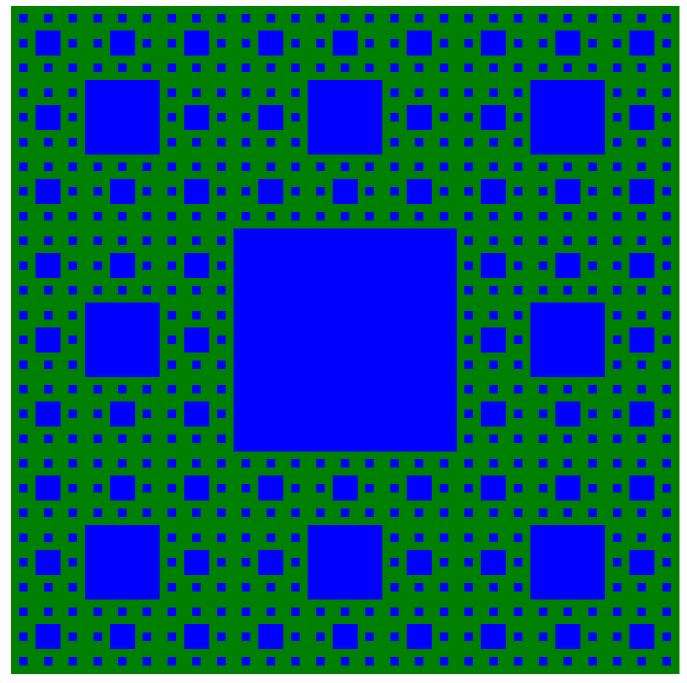


Men videre blir det vanskeligere. Hvordan skal vi få til steg 3 og steg 4 på en elegant måte?

Nivå 3:



Nivå 4:



Først lager vi én firkant. Så vil vi lage de åtte små firkanene som følger denne ene. Så vil vi for hver av de åtte nye gjøre det samme! Da får vi 8*8=64 nye små firkanter. Så vil vi *igjen* for hver av de 64 nye firkantene tegne åtte nye firkanter.

I nivå 1 lager vi **1** ny firkant.

I nivå 2 lager vi **8** nye firkanter.

I nivå 3 lager vi 8 * 8 = 64 nye firkanter.

Bruk elm repl til å regne ut disse:

Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå 4?

Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå **5**?

Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå 6?

Klarer du å se et mønster?

Hvor mange nye firkanter lager vi i nivå x?

Steg 8: concat og map

Vi skal trene litt før vi går videre.



Lag filen Tall.elm. Legg inn dette i toppen:

```
module Tall exposing (..)
hei = "Hei!"
```

- Start elm repl fra kommandovindu i samme mappe
- Importer alle funksjonene fra Tall.elm fra elm repl:

Får du til? Bra!

Nå skal vi prøve oss på et problem fra matematikken:

Er det mulig å liste opp alle desimaltall mellom 0 og 1?

... gitt at vi har uendelig god tid. Hmm! La oss prøve, men begrense oss på antall desimaler i starten.

Dette kunne vært første steg:

```
      0.0

      0.1

      0.2

      0.3

      0.4

      0.5

      0.6

      0.7

      0.8

      0.9
```

🗸 Sjekkliste

Lag sifre for å spare på 0-9:

```
> sifre
["0","1","2","3","4","5","6","7","8","9"] : List String
```

Prøv selv først!

Her er hva jeg gjorde:

```
sifre =
  let nullTilNi = List.range 0 9
  in List.map toString nullTilNi
```

Lag ettSifferBak som tar inn starten på tallet og legger på sifrene 0-9 på slutten:

Slik gjorde jeg det:

```
ettSifferBak start =
   let begynnMedStart slutt = start ++ slutt
   in List.map begynnMedStart sifre
```

Nå kommer trikset for å gå dypere: For hver mulige begynnelse må vi lage alle løsninger, og slå sammen disse.

Lag sifreAvLengde som tar inn hvor mange sifre som skal legges på og begynnelsen, og gir tilbake alle mulighetene.

```
> sifreAvLengde 0 ""
[""] : List String
> sifreAvLengde 0 "0."
["0."] : List String
> sifreAvLengde 1 "0."
["0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9"] : List St
ring
> sifreAvLengde 1 "1."
["1.0", "1.1", "1.2", "1.3", "1.4", "1.5", "1.6", "1.7", "1.8", "1.9"] : List St
ring
> sifreAvLengde 2 "0."
["0.00", "0.01", "0.02", "0.03", "0.04", "0.05", "0.06", "0.07", "0.08", "0.09",
"0.10", "0.11", "0.12", "0.13", "0.14", "0.15", "0.16", "0.17", "0.18", "0.19",
"0.20", "0.21", "0.22", "0.23", "0.24", "0.25", "0.26", "0.27", "0.28", "0.29",
"0.30", "0.31", "0.32", "0.33", "0.34", "0.35", "0.36", "0.37", "0.38", "0.39",
"0.40", "0.41", "0.42", "0.43", "0.44", "0.45", "0.46", "0.47", "0.48", "0.49",
"0.50", "0.51", "0.52", "0.53", "0.54", "0.55", "0.56", "0.57", "0.58", "0.59",
"0.60", "0.61", "0.62", "0.63", "0.64", "0.65", "0.66", "0.67", "0.68", "0.69",
"0.70", "0.71", "0.72", "0.73", "0.74", "0.75", "0.76", "0.77", "0.78", "0.79",
"0.80", "0.81", "0.82", "0.83", "0.84", "0.85", "0.86", "0.87", "0.88", "0.89",
"0.90", "0.91", "0.92", "0.93", "0.94", "0.95", "0.96", "0.97", "0.98", "0.99"]
    : List String
```

Slik gjorde jeg det:

```
sifreAvLengde n start =
    if n == 0
    -- Hvis vi ikke vil ha flere tall, gir vi tilbake kun hva vi har.
    then [start]
    else
        let
            -- Liste over alle de nye startene for neste nivå
            starter = ettSifferBak start
            -- Funksjon som tar inn en start og lager alle sluttene.
            -- Hvorfor bruker vi n-1? Hva skjer om vi bruker n i stede
t?
            fortsett nyStart = sifreAvLengde (n-1) nyStart
            -- Lager listene med fortsettelser for 0, 1, 2, ..., i hver
sin liste
            fortsettelser = List.map fortsett starter
        -- Slår sammen fortsettelsene i én liste
        in List.concat fortsettelser
```

Bruk sifreAvLengde til å lage desimaler:

```
> desimaler 0
["0."] : List String
> desimaler 1
["0.0", "0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9"] : List St
ring
> desimaler 2
["0.00", "0.01", "0.02", "0.03", "0.04", "0.05", "0.06", "0.07", "0.08", "0.09",
"0.10", "0.11", "0.12", "0.13", "0.14", "0.15", "0.16", "0.17", "0.18", "0.19",
"0.20", "0.21", "0.22", "0.23", "0.24", "0.25", "0.26", "0.27", "0.28", "0.29",
"0.30", "0.31", "0.32", "0.33", "0.34", "0.35", "0.36", "0.37", "0.38", "0.39",
"0.40", "0.41", "0.42", "0.43", "0.44", "0.45", "0.46", "0.47", "0.48", "0.49",
"0.50", "0.51", "0.52", "0.53", "0.54", "0.55", "0.56", "0.57", "0.58", "0.59",
"0.60", "0.61", "0.62", "0.63", "0.64", "0.65", "0.66", "0.67", "0.68", "0.69",
"0.70", "0.71", "0.72", "0.73", "0.74", "0.75", "0.76", "0.77", "0.78", "0.79",
"0.80", "0.81", "0.82", "0.83", "0.84", "0.85", "0.86", "0.87", "0.88", "0.89",
"0.90", "0.91", "0.92", "0.93", "0.94", "0.95", "0.96", "0.97", "0.98", "0.99"]
    : List String
```

I sifreAvLengde lagde vi først alle resultatene i hver sin liste med List.map, før vi slo listene sammen med List.concat. Her har vi skrevet om koden litt:

List.concat (List.map funksjon liste) er noe vi ser ofte. Derfor finnes funksjonen concatMap som kjører List.concat på resultatet av en List.map. Da kan vi korte ned litt til:

```
sifreAvLengde n start =
   if n == 0
   -- Hvis vi ikke vil ha flere tall, gir vi tilbake kun hva vi har.
   then [start]
   else
        let
        -- Liste over alle de nye startene for neste nivå
        starter = ettSifferBak start
        -- Funksjon som tar inn en start og lager alle sluttene.
        -- Hvorfor bruker vi n-1? Hva skjer om vi bruker n i stede
t?
        fortsett nyStart = sifreAvLengde (n-1) nyStart
        -- Slår sammen fortsettelsene i én liste
        in List.concatMap fortsett starter
```

Hvor lange tall kan du skrive ut før PC-en din begynner å gå tregt?

Hvor mange desimaltall finner du da?

Hint: 0.0-0.9 blir 10 tall. 0.00 til 0.99 blir ...? Hva med 0.00000 til 0.99999?

Har du hørt om ++?

++ kan slå sammen tekst:

```
> "Hei " ++ "på deg"
"Hei på deg" : String
```

++ kan også slå sammen lister:

```
> [1,2,3] ++ [4,5,6]
[1,2,3,4,5,6] : List number
```

Steg 9: Så mange nivåer vi vil!

Nå skal vi bruke teknikken fra Steg 8 til å komme til bunns i fraktalen vår.



Lag generateCenterSquares . Denne skal kunne fungere slik:

```
---- elm-repl 0.18.0 ------
 :help for help, :exit to exit, more at <https://github.com/elm-lang/el
m-repl>
> import Main exposing (..)
> start
{ color = "green", width = 729, corner = \{ x = 0, y = 0 \} \} : Main.Squa
> generateCenterSquares 0 start
[] : List Main.Square
> generateCenterSquares 1 start
[{ color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 243 } }]
    : List Main.Square
> generateCenterSquares 2 start
[ { color = "blue", width = 243, corner = { x = 243, y = 243 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 324, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 81 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 324 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 324 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 81, y = 567 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 324, y = 567 } },
  { color = "blue", width = 81, corner = { x = 567, y = 567 } }
]
    : List Main.Square
```

Gikk det greit? Her er slik jeg gjorde det, og hvordan jeg bruker generateCenterSquares i main:

```
generateCenterSquares : number -> Square -> List Square
generateCenterSquares level source =
   if level == 0 then []
   else let children = List.concatMap (generateCenterSquares (level -
1)) (borderSquares source)
      in [centerSquare source] ++ children

main =
   svg
   [ width "100%", viewBox "0 0 729 729" ]
   ( [viewSquare start] ++
        List.map viewSquare (generateCenterSquares 3 start)
   )
```

Lisens: CC BY-SA 4.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed)