En redogörelse för kaosteori

SEE075 Evolution och självorganisation i biologiska system

LP3 2022

Inledning

Vad har populationstillväxt hos en flock, konvektion ur en vätskebehållare, och takten med vilken en droppande kran droppar gemensamt? Jo, de följer alla samma periodicitet under lagen om kaosteori. Själv-repeterande mönster på kortare och kortare skalor samt en fundamental konstant inom vetenskap, som beskriver när en graf delas i två, redogörs i denna rapport i syfte att skilja ordning från den oordning som är kaosteori. Detta görs genom att diskutera en ekvation som beskriver populationstillväxt i ett dynamiskt system. Exempel på andra system och ekvationer ges för att visa på generalitet.

Teori

En modell för populationstillväxt

$$x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n) \qquad (1)$$

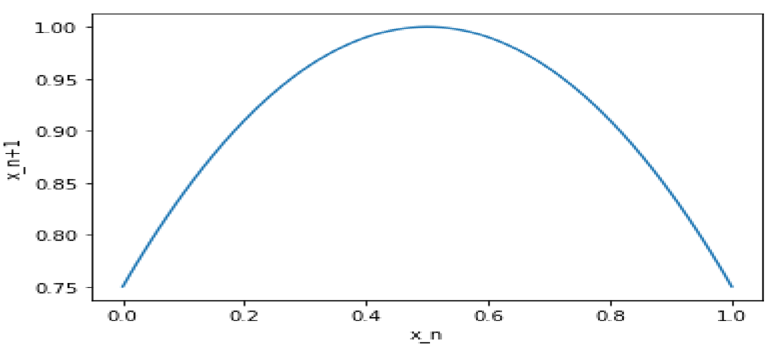
Ekvation (1) är en itererande sådan som beskriver populationsstorleken och dess årliga ökning, där r är tillväxttakten, vilket är synonymt med ett slags reproduktionsvärde; det antal avkommor som en individ producerar. x_n beskriver en andel av den teoretiskt maximala storleken på populationen.

x_{n+1} använder alltså innevarande årets storlek hos populationen, x_n, för att beskriva nästa års storlek. Denna ekvation är känd som *the logistic map* och fungerar iterativt enligt:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= r * x_n * (1 - x_n) \\
x_{n+2} &= r * x_{n+1} * (1 - x_{n+1}) \\
x_{n+3} &= r * x_{n+2} * (1 - x_{n+2}) \\
&\;\;\vdots \\
x_{n+m} &= r * x_{n+m-1} * (1 - x_{n+m-1})
\end{aligned}
$$

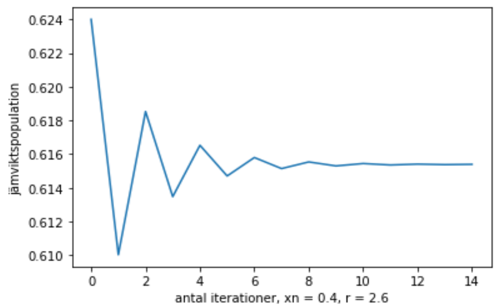
Output (VL) används alltså som input (HL) för nästa iteration.

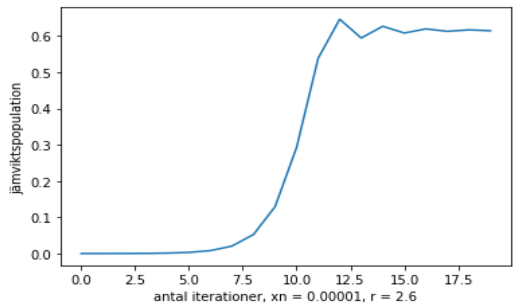
Två konsekutiva år plottas enligt följande:



Ett år med stor population följs av ett år med avsevärt lägre population och vice versa.

Till slut stabiliseras populationen vilket innebär att nyfödda i population precis balanserar ut de bortgångna för ett givet år.
Detta resultat kan exempelvis nås då r = 2.6 och x_initialt = 0.4

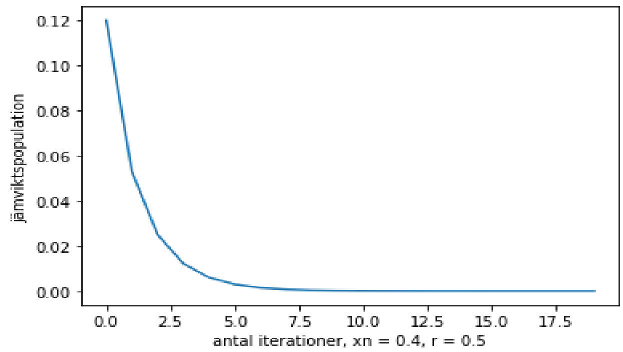




Det krävs få iterationer för att värdet skall konvergera mot x= 0.61469….

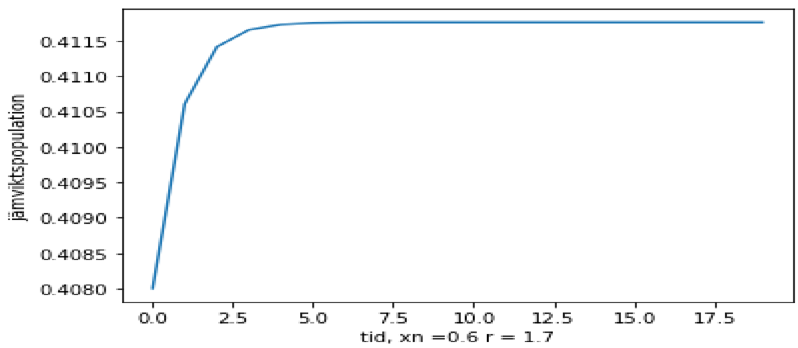
Utifrån detta konkluderas det att det initiala värdet på x inte tycks spela så stor roll eftersom populationen ganska snabbt når ett läge av jämvikt.

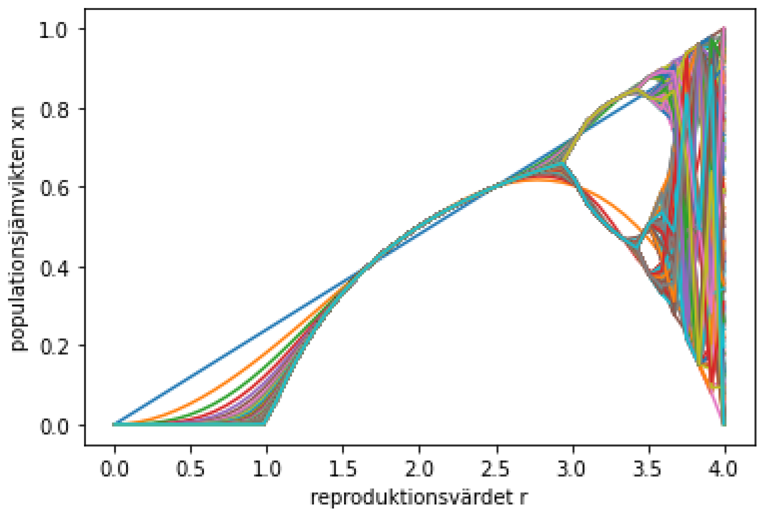
Av större betydelse är därför reproduktionsvärdet, r, och hur jämviktspopulationen varierar beroende på r, och inte på storleken på den initiala populationen.



om r < 1, dör populationen så småningom ut eftersom en genomsnittlig individ producerar färre individer än sig själv.

r > 1 ger en tillväxt hos populationen som mynnar ut i en jämvikt efter fler iterationer.





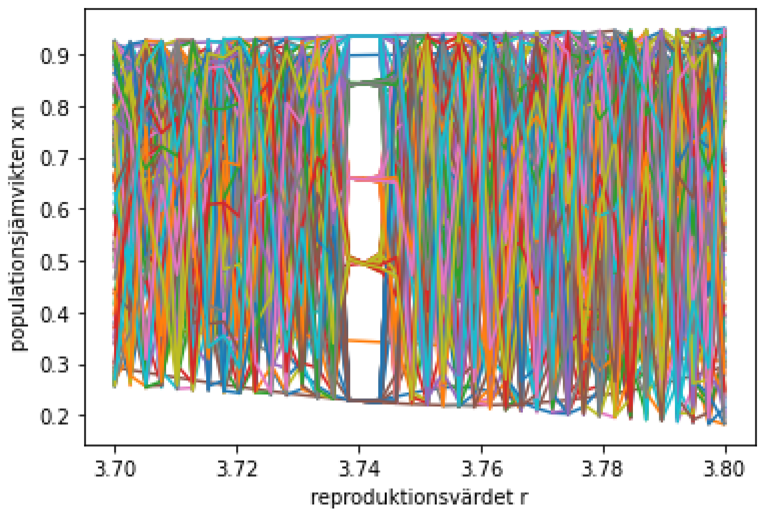
Då istället reproduktionsvärdet r plottas på x-axeln och jämviktspopulationen på y-axeln dyker ett spännande mönster upp.

Precis då r = 3 splittar grafen i två delar.

Ett reproduktionsvärde delar sig i två då r vuxit till 3, varpå jämviktspopulationen växer och delar sig ytterligare en gång, eller minskar och delar sig likartat. Denna tudelande effekt äger rum från r = 3 en bit framåt och ger upphov till en tidscyklisk periodicitet hos populationsjämvikten med avseende på år som har antalet tudelningar som antalet möjliga "värden", (toppar och dalar), innan förfarandet upprepas igen.
Populationsstorleken oscillerar alltså kring jämviktsvärdet 0.6, men i kontrast till tidigare - stabiliseras numera aldrig kring jämviktsvärdet.

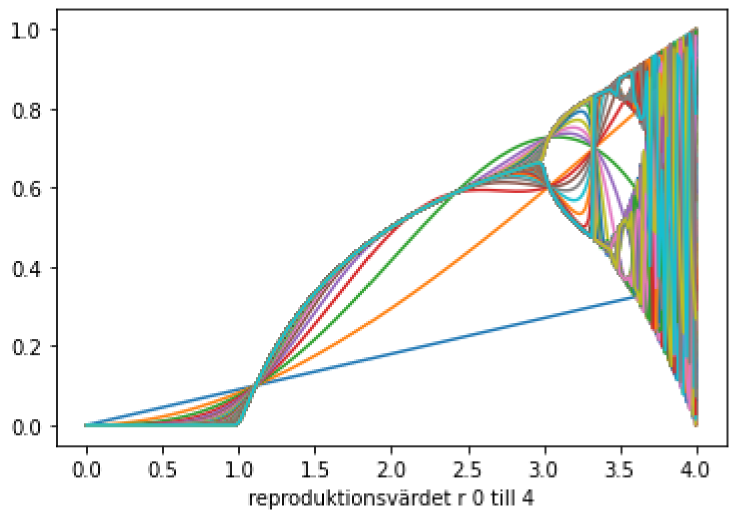
Vid r = 3.6 är hastigheten med vilken tudelningar äger rum så pass hög att ett mönster av kaos emergerar.

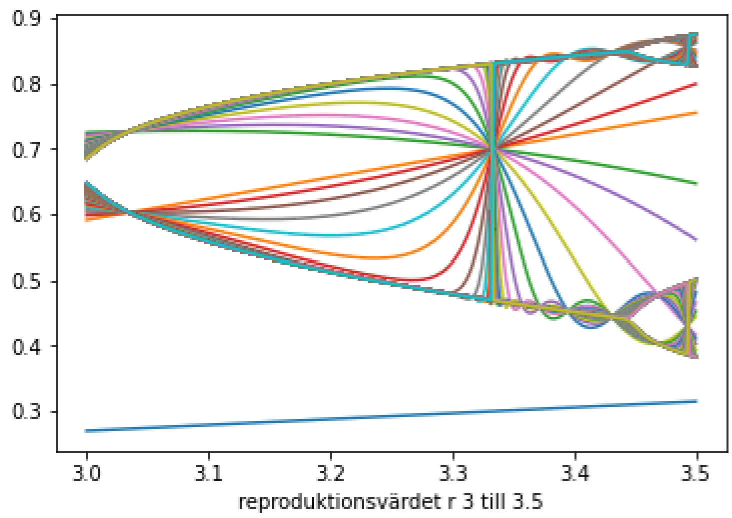
Populationsjämvikten tycks här studsa runt slumpartat och följer nu inget bestämt mönster som det tidigare gjorde. (*Detta kaos kan användas för att ta fram slumpmässiga tal, men dessa skulle klassas som pseudo-slumpmässiga eftersom metoden med vilken de skulle tas fram är av deterministisk karaktär - skulle de initiala värdena på xn och r vara kända så skulle sekvensen av slumpmässiga siffror kunna tas fram eller bekräftas.*)

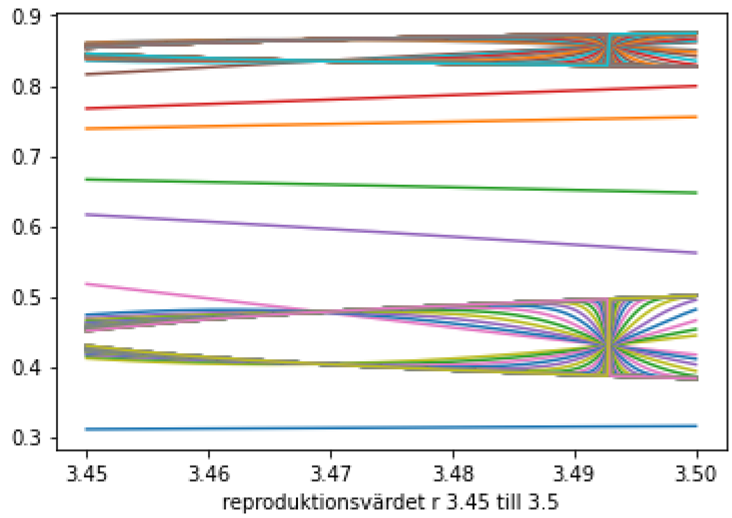


Härifrån återställs ordningen emellanåt. Vid r = 3.73 uppstår en stabil cykel om 3 år. Mönstret blir då hädanefter 3,6,12,24,48 osv tills kaos uppstår igen.

Genom att studera grafen noteras ett själv-repeterande mönster vid inzoomning. Mönstret på stor skala repeteras på kortare skalor. Detta mönster är känt som **fraktaler**.







Genom en skalning av r-axeln beskådas det fraktala på tre nivåer.

*Den mest kända fraktalen är The Mandelbrot Set, och det visar sig att denna bipartitionsgraf är en del av denna mängd. Denna teoretiska utläggning anses dock här vara utanför räckvidden för denna rapport.

Mer intressant är hur denna ekvation som modellerar populationstillväxt i ett dynamiskt system såsom kaniner och rävars samexistens, också är ett uttryck för andra system, där samma cykliska periodicitet och (bi)partitioner uppstår. (hämtade från wikipedias sida om kaosteori och kort beskrivna med egna ord)

- Ett exempel är då en rektangulär box gjord av kvicksilver, innehållandes en cylinder av vätska, värms upp och temperaturen på vätskan i röret mäts. Då röret tillåts snurra så oscillerar vätskans temperatur likt hur populationsjämvikten i det tidigare exemplet gjorde. En ökad temperaturtillförsel ändrade sedan periodiciteten proportionsenligt. **The logistic map utgör här en modell för konvektion.**

- Ett annat exempel är då en salamanders öga utsätts för ett flimrande ljus med en viss periodicitet. Reaktionsfrekvensen, antalet gånger då salamanderns ögon väljer att blinka, reducerades till hälften då antalet flimmer ökade proportionsenligt. Detta gav upphov till ett mönster likt bipartitionsgrafen.

- En långsamt droppande kran tycks följa ett för örat periodiskt och taktbestämt mönster men genom att öka flödet bara en liten bit ses samma mönster som bipartitionsgrafen är av. Kaos kan alltså uppnås genom en så simpel sak som konstant tryck och konstant storlek på kranen samt ett ökande flöde av vatten.

- Förmaksflimmer i råttors hjärtan kunde med hjälp av tidvisa elstötar framgångsrikt återställa arytmin till det normala. Periodiciteten med vilken hjärtat pumpade blod liknade nämligen bipartitionsgrafen på så sätt att hjärtat antingen pumpade blod med två, fyra eller åtta olika sorters slag efter varandra innan cykeln återupprepas igen.

Slutligen, noteras ett mönster för när partitionerna i bipartitionsgrafen äger rum. Det går alltså att närmare bestämma för vilket r som tudelningarna sker. Detta görs genom att dividera bredden på två konsekutiva partitioner. Värdet som erhålls anses vara en fundamental konstant inom vetenskapen idag eftersom den är orelaterad till något annat vetenskapligt fenomen och iterativt på kortare och kortare skalor kontinuerligt är av storleksordningen 4.669… Partitionerna dyker alltså upp snabbare och snabbare men alltid enligt Feigenbaums ratio.

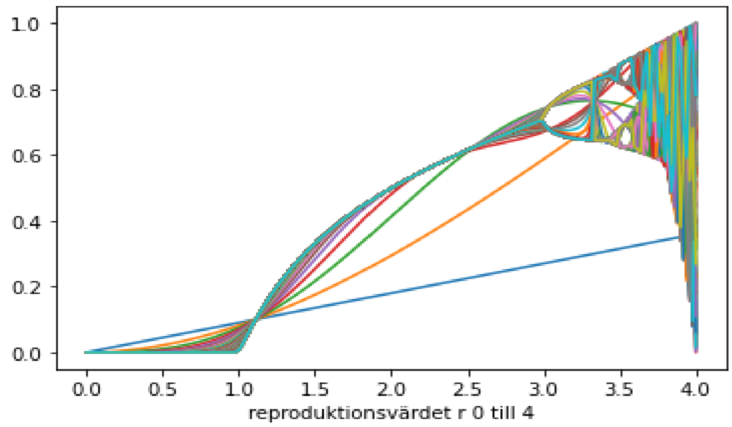
Det är enkelt att iaktta att en partition äger rum då r = 3. Denna bredd dividerat på nästa bredd för vilken en partition äger rum skall alltså vara lika med denna fundamentala konstant.

$r / x = 4.669 \Leftrightarrow x = 0.65$ beskriver då bredden på partitionen för $r = 3$ och nästa tudelning.

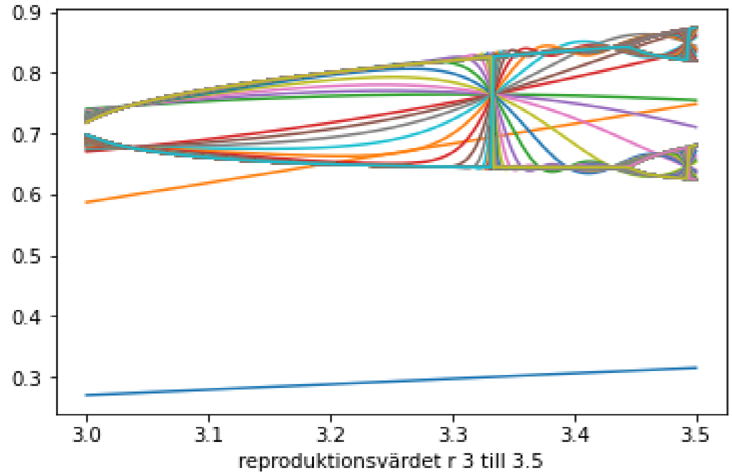
$r + x = 3 + 0.65 =$ **3.65 = det reproduktionsvärde då nästa partition bör äga rum.**

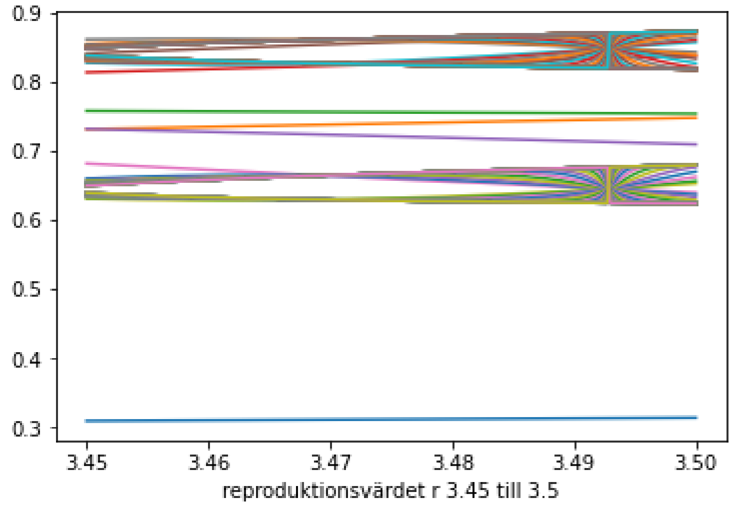
*I realiteten konvergerar avstånden mellan partitioner mot feigenbaums konstant och 3.65 har som följd en viss standardavvikelse och tudelningen äger därför rum något tidigare.

Mer generella ekvationer som övergripande visar på hur dynamiska system följer dessa etablerade lagar om kaos är sådana som mellan två konsekutiva år består av enstaka toppar och dalar. The logistic map kan därför bytas ut mot sinus- och cosinuskurvor och fortsatt följa liknande mönster.



x_n+1 = r*sin(xn) * (1- sin(xn)) och dess fraktaler på kortare skalor





Trots att den ursprungliga ekvationen här bytts ut till en annan ses en liknande bipartitionsgraf och likartade korresponderande fraktaler.

Sammanfattning

Sammanfattningsvis, går det att konstatera att det finns ett stort mått av ordning i ett system av kaos. Dessa är det fraktala mönstret på kortare och kortare skalor, samt att det uppstår viss periodicitet mellan sekvenser av kaos. Förutom självrepeterande mönster, så är även Feigenbaums konstant ett tecken för ordning i ett kaosartat system. Proportionerna med vilken partitionerna äger rum är alltså enligt ett bestämt och skalenligt mönster, vilket visar på ordning bland kaoset. Vidare beskriver en enkel ekvation, som tar sin omgivning och dess begränsningar i beaktande, dynamiken i ett system över tid. The logistic map är en sådan och den beskriver alltså inte bara dynamiken mellan kaniner och rävar, utan även flera fenomen inom andra domäner.