Bonusoppgaver

3. mai 2022

Dette dokumentet inneholder oppgavene

- Jordkloden
- Trekanttall
- Brette Ark
- Fizzbuzz [mangler]
- Gjetteleken over/under [mangler]
- Stein-saks-papir [mangler]
- Fibonacci-rekka
- Tverrsum

Oppgave 1 *Jordkloden*

I denne oppgaven skal vi øve på å bruke Python som kalkulator, ved å regne litt på jordkloden. Husk at formelen for volumet av en kule er

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

a) Jordkloden er tilnærmet en perfekt kule, og har en radius på 6371 km. Lag et kort program som først definerer en variabel `radius`, og deretter regner ut en variabel `volum`. Skriv til slutt ut svaret til brukeren med `print()`-funksjonen. La svaret være i km^3.

b) Endre programmet ditt så svaret istedet skrives ut i antall liter.

c) Den totale massen til jordkloden er omtrent $M = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg. Regn ut hvor mange kg hver liter av jordkloden veier i gjennomsnitt. Virker svaret ditt rimelig?

Oppgave 2 *Trekanttall*

Et trekanttall er summen av tallrekken

$$1, 2, \ldots, n.$$

For eksempel så er

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

så da er 15 et trekanttall. Siden det var summen av de 5 første tallene i tallrekka, så sier vi at det er det *femte* trekanttallet.

La oss si at vi vil vite hva det hundrede trekanttallet er, da må vi legge sammen alle tallene fra 1 til 100. Det blir fort slitsomt og kjedelig å gjøre for hånd. Så la oss bruke programmering.

For å gjøre det lettere å sjekke om programmet vårt, så startet vi med å prøve å regne ut summen fra 1 til 5.

a) Lag en løkke som skriver ut tallene

$$1, 2, 3, 4 \text{ og } 5$$

til skjermen.

b) Endre nå løkka så du isteden finner summen av tallene 1 til 5. Da må du først lage en variabel utenfor løkka, og for hvert tall, legge det til variabelen din. Husk at du kan legge noe til en varibel med `+=`.

c) Sammenlign svaret programmet ditt gir med det vi fant for hånd. Er de to like? Hvis de ikke er det så er det noe galt!

d) Hvis programmet ditt fungerte som forventet kan du nå endre sånn at du regner summen av de første 100 tallene

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.$$

Det er en kjent matematiker, Carl Friedrich Gauss, som fikk denne oppgaven av sin mattelærer når han gikk på skolen på 1700-tallet. Læreren tenkte nok at dette skulle holde Gauss opptatt en god stund med å legge sammen tall etter tall. Gauss hadde ikke tilgang til en datamaskin, så han kunne ikke automatisere jobben slik vi har gjort, men ha la merke til et mønster i tallene. Gauss la merke til at om vi starter på begge endene av rekka får vi et mønster

$$1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, \ldots 50 + 51 = 101.$$

Fra dette mønsteret klarte Gauss å finne en formel for summen av tallene fra 1 til n, og uttrykket hans var

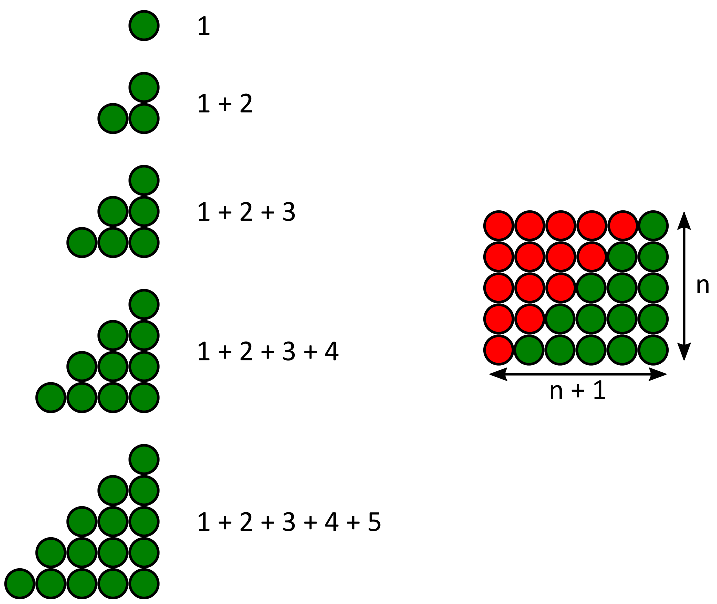
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

---

e) Bruk formelen til Gauss og sjekk at du får samme svar som programmet ditt for $n = 100$.

f) Gjør det samme for $n = 1000$, så $n = 1000000$ (én million).

For å skjønne hvorfor denne formelen er som den er, så kan det lønne seg å skjønne hvorfor de kalles trekanttall. Om vi tegner opp summene som antall baller, og tenger først 1, så 2, og så 3 bortover, sånn som dette:



Så ser vi at de ulike summene blir trekanter. Vi kan så gjøre om en slik trekant til en firkant ved å legge på like mange nye. Sånn som vist på høyre side av figuren. Denne firkanten har n baller i høyden, og $n+1$ baller bortover. Da er antall baller i hele firkanten $n(n+1)$. Men vi har jo doblet antall baller for å få en firkant, så om vi bare skal telle de grønne ballene må vi dele på to.

---

g) Hvordan kan kan du sjekke om et tall er et trekanttall? Skriv et program som sjekker om et heltall er et trekanttall, og hvis ja, skriver ut faktorene i dette. For eksempel bør programmet skrive ut `1 + 2 + 3 + 4 + 5` hvis det blir gitt input `15`.

Oppgave 3 *Tverrsum*

Tverrsummen av et tall er tallet du får dersom du plusser alle sifrene i tallet med hverandre.

a) Hvor mange 3-sifrede tall finnes det som har tverrsum 5? Løs for hånd.

b) Skriv et program som finner alle 3-sifrede tall med tverrsum 4. Start med å skrive en løkke for alle tall fra 1 (hvorfor fra 1?) til 9; i denne løkken lager du enda en løkke; og i denne løkken trenger du enda en. I den innerste løkken trenger du en betingelse, og til slutt en `print`.

c) Legg inn en teller i programmet ditt, som først er 0, og deretter øker hver gang du finner et tall med tverrsum 4. Hvor mange tall er det tilsammen? Stemmer det med det du fikk når du regnet for hånd?

d) Tror du det er flest 3-sifrede tall med tverrsum 4, eller flest 4-sifrede tall med tverrsum 3 – eller er det like mange? Utvid programmet ditt til å telle begge deler, og sjekk om du hadde rett.

Oppgave 4 *Brette ark*

Et vanlig ark er omtrent 0,1 mm tykt. Om vi bretter arket på midten dobbler vi tykkelsen av arket, så det er 0,2 mm tykt. Om vi bretter arket på nytt dobbler vi igjen tykkelsen, så det blir 0,4 mm tykt. Sånn kan vi fortsette å brette arket for å gjøre det tykkere. Om du prøver i praksis viser det seg nok fort at det er veldig vanskelig å brette arket noe særlig mer enn 6-7 ganger. Men om vi nå later som vi kunne brettet arket så mange ganger vi vil, er det ingen grense for hvor tykt arket kunne blitt.

Verdens høyeste bygning er Burj Khalifa i Dubai, som er 828 meter høyt. Vi ønsker å finne ut hvor mange ganger vi må brette arket vårt, før det er like tykt som høyden av denne bygningen.

a) Diskuter med sidemannen hvordan dere kunne funnet ut av dette med penn og papir. Hva er ulempen med fremgangsmåten deres?

Vi skal nå løse problemet ved hjelp av et kort Python-program. For å løse problemet bruker vi en løkke for å brette arket helt til vi har nådd den tykkelsen vi er ute etter.

b) Fyll inn skjelettkoden under for å finne antall brett vi trenger. Pass spesielt på at tykkelsen til arket er oppgitt i millimeter, mens bygningen er oppgitt i meter.

```python
tykkelse = ...
antall_brett = ...

while ...:
    tykkelse *= ...
    antall_brett += ...

print(...)
```

c) Om du har klart å løse oppgaven. Finn antall brett som skal til før tykkelsen er like høyt som verdens høyeste fjell, Mount Everest, som er 8848 meter høyt.

d) Avstanden fra jorda til månen er ca 384400 km. Hvor mange ganger må arket brettes før det er like tykt som denne avstanden?

Oppgave 5 *Fibonacci-rekken*

Fibonacci rekken er en kjent tallfølge som naturlig oppstår mange steder i naturen. Tallfølgen går som følger:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \tag{1}$$

Vi kan skrive Fibonacci rekken som en rekursiv tallfølge etter denne formelen:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \tag{2}$$

hvor $a_0 = 1$ og $a_1 = 1$.

En interessant egenskap ved Fibonacci rekken er at forholdet mellom to etterfølgende tall i følgen går mot det gyldne snitt, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$. Det vil si at

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \to \phi. \tag{3}$$

a) Du skal nå lage et program som skriver ut de første 10 tallene i Fibonacci rekka. Start med å opprette en variabel `forrige_tall =1` og en variabel `fibonacci_tall =1`.

b) Skriv så ut `forrige_tall` og `fibonacci_tall` til brukeren av programmet.

c) Bruk en `for`-løkke som repeteres 8 ganger (10 tall - 2 start-tall) som skriver ut de resterende 8 tallene i Fibonacci-rekka. HINT: Her kan det være lurt å opprette det nye Fibonacci tallet i en variabel `nytt_fibonacci_tall` før du oppdaterer verdien til `forrige_tall` og `fibonacci_tall`.

d) Endre programmet slik at du bruker input til å be brukeren om hvor mange Fibonacci-tall du skal skrive ut til skjermen.

e) Oppdater programmet slik at du og skriver ut forholdet mellom `forrige_tall` og `fibonacci_tall`. Blir dette forholdet ca lik 1.618?

f) Hvis du endrer start-tallene fra $a_0 = 1$ og $a_1 = 1$ til $a_0 = 2$ og $a_1 = 1$ får du en tallrekke som kalles for *Lucas-tallene*. Hvordan oppfører Lucas-tallene seg i forhold til Fibonacci-rekken? Konvergerer forholdet mellom to etterfølgende tall til det samme tallet som før?

g) Prøv så å endre til helt villkårlige start-tall – negative tall, store tall, desimaltall, etc. Endrer konvergensen seg?