8 Oppgaver

Programmering læres ved å gjøre. Dette kapitellet består av oppgaver du kan løse for å øve på programmeringskonseptene gitt i dette kompendiet. Oppgavene er også lagt på et slikt nivå at de kan brukes i egen undervisning etter interesse. Vi anbefaler å jobbe dere igjennom oppgavene i par, på den måten kan dere diskutere og hjelpe hverandre.

Merk at noen av oppgavene er knyttet opp mot bestemte programfag. De varierer også i omfang og vansklighetsgrad. Det er derfor fritt frem for å hoppe over oppgaver utifra egen interesse.

Om du ønsker flere oppgaver er det bare å ta kontakt med oss, så kan vi supplere med eksterne kilder. Vi kan også nevne nettsiden Project Euler. Dette er en nettside som gir oppgaver fra matematikk som er spesielt tiltenkt å løses med programmering. Disse starter forholdsvis enkelt, men stiger i vansklighetsgrad etterhvert. Du finner oppgavene her:

- `https://projecteuler.net/archives`

8.1 Variabler og Utregninger

Oppgave 1 (Printing)

a) Lag et program som skriver ut teksten “Hei, Verden!”, til skjermen.

b) Endre programmet slik at du først lagrer navnet ditt i en variabel, og så får programmet ditt til å skrive ut en hilsen direkte til deg.

c) Endre programmet slik at du først bruker `input()`-funksjonen til å først spørre brukeren om navnet dems, og deretter skriver ut en beskjed som bruker navnet de har oppgitt.

Oppgave 2 (Volumberegninger)
Formelen for volumet til en kule er gitt ved

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

a) Jorda er tilnærmet en perfekt kule, og har en radius på omtrent 6371 km. Regn ut volumet av jorda.

b) Gjenta beregningen din, men denne gangen endre enheter slik at du får svaret oppgitt i antall liter.

c) Jorda har en total masse på omtrent

$$M = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

Regn ut den gjennomsnittlige massetettheten til jorda i kg per liter. Virker svaret ditt rimelig?

Oppgave 3 (Regne ut pH)
pH-verdien til en væske eller løsning er et mål på hvor sur væsken er, det vil si konsentrasjonen av hydrogenioner $[\mathrm{H}^+]$. Formlene for å regne med pH er gitt ved

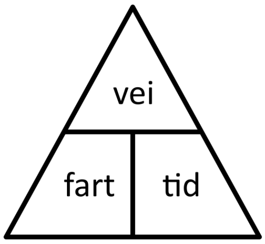
$$\mathrm{pH} = -\log_{10}([\mathrm{H}^+]), \qquad [\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}.$$

a) Regn ut konsentrasjonen av hydrogenioner for en væske med pH 3.6.

b) Regn ut pH verdien til en væske med konsentrasjon av hydrogenioner lik $4.7 \cdot 10^{-5}$ mol/L.

c) Cola har en pH på ca 2.5, nøytralt vann har en pH på 7. Hvor mange ganger fler hydrogenioner er det i cola sammenlignet med vann?

Oppgave 4 (Vei-Fart-Tid)
Vei-fart-tid formelen er grunnlaget for bevegelsesligningene i Fysikken. Egentlig er det tre formler i et, for vi kan stokke om på den avhengig av hva vi ønsker å regne ut. Av og til tegnes vei-fart-tid formelen som en pyramide:



a) Skriv opp uttrykket for å regne ut vei, gitt fart og tid. La fart være gitt i km/h og tid i minutter og avstand i kilometer.

b) Gjenta prosessen for de to andre formene av vei-fart-tid formelen.

Oppgave 5 (Konsentrasjonskalkulator)
Når man gjør eksperimenter i kjemien må man ofte lage løsninger med en bestemt molar konsentrasjon.

Si at vi ønsker å lage en løsning av et stoff X, som veier M g/mol. Vi ønsker å lage en løsning av volum V mL av en gitt konsentrasjon c mol/L.

a) Lag et program som regner ut hvor mange gram av stoff X man må veie ut og løse opp, oppgitt med en nøyaktighet på 0.01 gram.

Hint: For å skrive ut en variabel med 3 desimaler bruk print-formatering med `'{m:.2f}'`.

b) Test programmet ved å finne mengden bordsalt (NaCl) du trenger for å lage 100 mL løsning med 2.5 mol/L.

c) Ved 25°C klarer man å løse opptil 35.7 gram NaCl per 100 mL vann, etter dette er løsningen metter. Øk konsentrasjonen c i programmet ditt til du er omtrent på denne grensa, hva slags konsentrasjon svarer dette til?

Oppgave 6 (Hardy-Weinbergs Lov)
Anta at et gitt gen finnes i to utgaver (kalt alleler), der den ene er den ene er dominant (A), og den andre recessiv (a). Mennesker er diploide organismer, som betyr at vi har to sett kromosomer. Et gitt menneske har derfor én av kombinasjonene AA, Aa eller aa, disse kaller vi de ulike genotypene.

Hardy-Weinbergs lov lar oss regne ut frekvensen av de ulike genotypene, gitt frekvensen av de to allelene, under idealiserte betingelser. Om frekvensen av A er gitt ved p og frekvensen av a er gitt ved q (merk at $p + q = 1$) har vi at

- Frekvensen av genotype AA: p^2.
- Frekvensen av genotype Aa: $2pq$.
- Frekvensen av genotype aa: q^2.

a) Lag et program som gitt en p og en q først sjekker at $p + q = 1$. Dersom dette er tilfellet skal det regne ut frekvensen av de ulike genotypene og skrive dem ut. Dersom $p + q \neq 1$ skal programmet skrive ut en feilmelding.

Sigdcelleanemi er en genetisk sykdom forårsaket av en variant i genet for hemoglobin. Vi kaller det vanlige genet for S og sigdcellegenet for s. Sykdommen er recessiv, man må altså være homozygot for sigdcelle (ss) for å få alvorlig sykdom. De heterozygote (Ss) er bærere av genet, men utvikler ikke sigdcellesykdom. Derimot er det slik at alle med sigdcellegenet, både (Ss) og (ss) genotypen, er resistente mot malaria.

Sigdcelle er en alvorlig sykdom, og man ønsker ikke (ss) genotypen. Derimot er det altså i visse tilfeller (f.eks ved malariaforekomst) hvor det er en fordel å være bærer av genet (Ss) fremfor å ikke ha det i det heletatt (SS).

b) Anta først at allelefrekvensen av sigdcellegenet er $q = 0.1$ og kjør programmet ditt. Øk deretter frekvensen til $q = 0.3$. Sammenlign genotypefrekvensene du får ut. Kan du forklare hvorfor man observerer at allelefrekvensen av sigdcelle typisk er signifikant høyere i områder med malaria enn andre deler av verden?

8.2 If-tester

Oppgave 7 (abc-formelen)
En generell annengradsligning av typen

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

vil kunne ha ingen, én eller to, løsninger avhengig av verdiene til a, b og c. Dette bestemmes av *diskriminanten*:

$$d = b^2 - 4ac,$$

hvis $d > 0$ har vi to løsninger, hvis $d = 0$ har vi én løsning, og om $d < 0$ har vi ingen løsninger.

a) Bruk en if-test til å sjekke hvor mange løsninger det finnes for en gitt a, b, og c.

Løsningene finnes ved selv abc-formelen, som er gitt ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) Utvid programmet ditt så det også skriver ut løsningene.

c) Test programmet ditt ved å sjekke følgende tilfeller

- $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$
- $a = 2$, $b = 3$, $c = -9$
- $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = 2$

d) Modifiser programmet ditt så det spør brukeren om verdier for a, b og c og skriver ut de tilhørende løsningene.

Oppgave 8 (Bohr's Atommodell)
Bohr's atommodell kan forutsi energinivåene til de ulike elektronskallene. Når et elektron deeksiteres fra skall n til m (der $m < n$) vil det sleppe ut et foton med energien:

$$\Delta E = E_0\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)k,$$

der $E_0 = 13.6$ eV.

a) Skriv et program som finner energien til et foton for en vilkårlig m og n.

Man kan finne bølgelengden til et foton med energien E fra formelen

$$\lambda = \frac{hc}{E},$$

der $hc = 1240$ eV.

b) Inkluder denne konversjonen i programmet ditt, slik at den for en gitt m og n skriver ut både energien til fotonet, og bølgelengden.

c) Bruk en if-test til å også skrive ut fargen på lyset til fotonet som blir sendt ut. Her kan du skrive av koden til det tilsvarende eksempelet vist i seksjon 3.2.

d) Bølgelengdene vi finner om vi velger $m = 2$, og ulike n kalles for Balmerserien. Finn de bølgelengdene vi finner i Balmerserien som er synlig lys.

e) Spektrallinjene i Balmerserien er vist i dette bildet:

Passer det du ser med svarene du fikk i oppgave (d)?

Bildet er laget av Jan Homann og delt gjennom Wikimedia Commons under en CC BY-SA 3.0 lisens.

8.3 Løkker

Oppgave 9 (Trekanttall)
Et trekanttall er summen av tallrekken

$$T_n = 1, 2, \ldots, n.$$

For eksempel det femte trekanttallet:

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

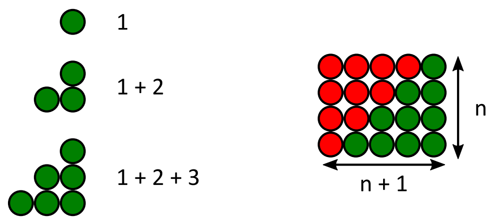
a) Lag et program som regner ut T_{1000} ved hjelp av en for-løkke.

En populær historie skal ha det til at matematikeren Carl Friedrich Gauss som barn fikk denne oppgaven av sin mattelærer når han gikk på skolen på 1700-tallet. Den slemme læreren ville bare holde Gauss opptatt en stund med å legge sammen en haug tall. Vår lure Gauss derimot, utledet istedet formelen

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Bruk formelen til Gauss og sjekk at du får samme svar som programmet ditt for T_{1000}.

For å skjønne hvorfor denne formelen fungerer kan det lønne seg å tenke over hvorfor de kalles *trekanttall*. Om vi tegner opp summene som antall baller, og tenger først 1, så 2, og så 3 bortover, sånn som dette:



Så ser vi at T_n former en trekant. Vi ser også at denne trekanten vil være halvparten av en firkant med sider n og $(n+1)$. Dermed vil arealet av trekanten, som er trekanttallet, være gitt ved formelen til Gauss.

Oppgave 10 (Riskorn og Sjakkbrett)
Om vi plasserer ett riskorn på den første ruta på et sjakkbrett, så to riskorn på neste rute, så fire på den tredje ruta og så videre: Hvor mange riskorn får vi til sammen? Dette kan skrives som summen

$$1 + 2 + 4 + 8 + ...$$

a) Bruk en for-løkke og `range`-funksjonen til å løkke over alle sjakkbrettets ruter og finn antall riskorn vi får totalt.

b) Bruk print-formattering til å skrive svaret ved hjelp av vitenskapelig notasjon (for eksempel: `"{total:.1e}"`).

c) Det er omtrent 50000 riskorn i en 1 kg sekk. Bruk en while-løkke til å finne antall ruter vi må inkludere for å få minst 1 kg ris.

Oppgave 11 (Fibonaccirekka)
Fibonaccirekka starter

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

der hvert nye tall i rekka finnes ved at de to forrige summeres.

a) Definer to variabler, `a=0` og `b=1`.

b) Lag en while-løkke med betingelsen $b < 100$.

c) Inne i løkka, regn først ut det neste tallet i Fibonaccirekka: `ny = a + b`. Skriv så dette nye tallet ut og oppdater så a og b så de har verdiene til de to forrige tallene i rekka.

d) Endre betingelsen i rekka så du skriver ut alle Fibonacci-tallene som er mindre enn 1000.

e) Forholdet mellom to tall som kommer etterhverandre i Fibonaccirekka går nærmere og nærmere det gylne snitt. Regn ut forholdet mellom de to siste tallene du fant i forrige oppgave for å estimere det gyldne snitt.

Oppgave 12 (Skuddår)
Du skal nå skrive et program der brukeren gir et årstall, og programmet forteller oss om det er et skuddår eller ikke. Derimot er reglene for hvilke år som er skuddår litt kompliserte, så vi tar det steg for steg.

a) I første omgang sier vi at alle årstall som er delelige med 4 er skuddår, og alle de andre er ikke det. Lag en if-test som sjekker dette. Sjekk koden med at 2016 var et skuddår, mens 2018 ikke var det.

b) Nå legger vi til at alle årstall som er delelig med 100 er et unntak til den første regelen, disse årene er altså *ikke* skuddår. Legg til dette i koden ved hjelp av en ny `if` eller `elif`-test. Sjekk koden din ved at år 1700, 1800 og 1900 alle ikke er skuddår.

c) Nå legger vi til et unntak til unntaket, om at alle årstall som er delelige med 400 *er* skuddår. Legg også til dette i koden din. Sjekk nå at 1700, 1800 og 1900 fortsatt ikke er skuddår, men at år 2000 er det.

d) Om det bare var slik at hvert fjerde år var et skuddår hadde et gjennomsnittlig år vært 365.25 dager. Men hvordan blir det med tilleggsreglene? Bruk en løkke til å legg sammen alle år fra og med år 0 til og med år 1999. Hvor mange dager har vært år i gjennomsnitt?

e) Skuddår finnes så antall gjennomsnittsdager per år skal ligge så tett opptil det astronomiske året. Jorda bruker 365.2422 døgn på å gå rundt sola én gang. Hvor nært dette kommer vi med tilleggsreglene?

Oppgave 13 (Gangetabellen)
Den følgende koden skriver ut gangetabellen opp til og med 10×10.

```
for i in range(1, 11):
    for j in range(1, 11):
        print(f"{i*j:5}", end="")
    print()
```

a) Kopier koden over til Spyder og kjør den.

b) Gå igjennom koden steg for steg å prøv å forstå hvordan den virker. Gjør gjerne dette i par.

8.4 Plotting

Oppgave 14 (Dempet svingning)
Plott funksjonen

$$4\cos(4x)e^{-x/2\pi},$$

for $x \in [0, 8\pi]$.

Oppgave 15 (Parameterfremstilling av Sirkel)
I seksjon 5.5 lagde vi en parameterfremstilling av en sirkel. Men vi lot sirkelens sentrum være origo. Endre på programmet så du kan kontrollere sirkelens sentrum (x, y).

Oppgave 16 (Grafisk løsning av ligninger)
I denne oppgaven skal vi løse ligningen

$$f(x) = g(x),$$

grafisk ved hjelp av plotting. Der $f(x)$ og $g(x)$ er to annengradsligninger:

$$f(x) = x^2 - 2x - 4,$$
$$g(x) = -2x^2 - 4x + 8.$$

a) Bruk `linspace` til å definere en rekke verdier $x \in [-5, 5]$.

b) Regn ut kurvene `f(x)` og `g(x)`.

c) Plott de to kurvene i samme figur

d) Finn alle x-verdier der de to kurvene skjærer hverandre. Dette kan du gjøre ved å holde musepekeren over skjæringspunktet i figurvinduet og lese av koordinaten.

I dette tilfellet er det lett å løse $f(x) = g(x)$ for hånd også, eller ved å bruke abc-kalkulatoren vi lagde i en tidligere oppgave. Derimot kan grafisk løsning av ligninger også brukes for ligninger det ikke finnes noen analytisk løsning for.

8.5 Funksjoner

Oppgave 17 (Absoluttverdi)
Et reelt tall består av et fortegn og en tallverdi, kalt *absoluttverdi*. Når vi finner absoluttverdien til et tall "fjerner vi fortegnet". Det betyr at absoluttverdien til et tall alltid er positiv. Absoluttverdien til et tall a skrives $|a|$ og er definert som:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } < 0 \end{cases}$$

a) Definer en funksjon `absoluttverdi(x)` som bruker en if-test til å finne og returnere absoluttverdien til x.

b) Lag en funksjon `størst_abs(a, b)` som tar de to tallene a og b og returnerer det tallet som har størt absoluttverdi.

Oppgave 18 (Konvertering av temperatur)
I Norge oppgir vi temperaturer i målestokken Celsius, men i USA bruker de som oftest Fahrenheit. De fleste oppskrifter for eksempel, sier at kaken skal bakes ved 350°F, men hvor mye er egentlig det?

For å regne over fra Fahrenheit til Celsius bruker vi formelen:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Der F er antall grader i Fahrenheit, og C blir antall grader i celsius.

a) Lag en funksjon `F2C`, som tar en temperatur i antall grader Fahrenheit inn, og returnerer den tilsvarende temperaturen i grader Celsius.

b) Bruk programmet ditt til å finne ut hvor mange grader Celsius 350°F svarer til. Virker det rimelig å skulle bake en kake ved denne temperaturen?

c) Snu på ligningen for hånd, så vi løser for F istedenfor C. Lag en funksjon `C2F` som gjør den motsatte konverteringen.

d) Bruk funksjonen til å finne frysepunktet og kokepunktet til vann i Fahrenheit målestokken.

Oppgave 19 (Kombinatorikk)
Vi skal nå definere tre funksjoner som er nyttige i kombinatorikk.

Vi ser først på fakultet, som er antall måter å ordne n ting på, altså antall permutasjoner. Fakultet skrives $n!$, og er gitt ved produktet av alle tall fra og med 1 opp til og med n.

a) Lag en funksjon `fakultet(n)`, som tar et heltall n inn, og returnerer $n!$.

b) Det er 5 elever som er blitt trukket ut til muntlig eksamen. Hvor mange forskjellige rekkefølger kan de eksamineres i?

Den neste funksjonen vi skal se på er *kombinasjoner uten tilbakelegging*, som skrives $n\mathrm{C}k$. Dette er antall måter vi kan velge ut k elementer utifra n, dersom rekkefølgen ikke er viktig. Denne funksjonen er gitt ved binomialkoeffesienten:

$$n\mathrm{C}k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

c) Definer denne funksjonen ved å benytte deg av fakultetsfunksjonen du nettopp lagde.

d) Vi skal plukke 3 elever fra en klasse på 28 til en skriftlig eksamen. Hvor mange ulike kombinasjoner av elever kan vi ende opp med å trekke?

Til slutt skal vi lage funksjonen for antall *permutasjoner uten tilbakelegging*. Dette skrives $n\mathrm{P}k$ og er antall måter å velge ut k elementer fra n, dersom orden er viktig. Formelen er gitt ved

$$n\mathrm{P}k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

e) Definer denne funksjonen ved igjen å bruke fakultetsfunksjonen din.

f) Utifra den samme klassen på 28 elever, hvor mange måter er det å velge en hovedrepresentant, en første vara, og en andre vara til elevrådet?