1 테일러의 나머지 정리

$x = a$ 를 포함하는 개구간 I에서 함수 f가 $n+1$번 미분 가능할 때, 모든 양의 정수 n과 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (1)$$

이때, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n+1!}(x-a)^{(n+1)}$ 을 만족하는 c가 $a < c < x$ 안에 적어도 하나 존재한다.

2 증명

일반성을 잃지 않고 $a < x$라 하자.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + M(x-a)^{n+1} \quad (2)$$

이라 정의할 때, $M = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n+1!}$ 임을 보이는 것으로 충분하다.
모든 $x \in I$에 대하여 $x \leq b$을 만족하는 실수 b를 잡자. 그리고 $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$의 정의역 $[a, b]$에 속하는 임의의 실수 t에 대하여, 대응되는 치역의 원소 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + M(x-t)^{n+1} \quad (3)$$

문제의 가정으로부터 I에서 정의된 함수 f는 $n+1$번 미분 가능하고 폐구간 $[a, b] \subseteq I$이므로 $g(t)$ 또한 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분 가능하다.
그런데 $[a, x] \subseteq [a, b]$이므로 $g(t)$가 $[a, x]$에서 연속이고 (a, x)에서 미분 가능하다.
$g(a) = g(x)$를 만족할 경우, $g(t)$에 롤의 정리를 적용할 수 있다.

$$g(a) = f(a) = g(x) \tag{4}$$

따라서, 롤의 정리에 의하여 $g'(c) = 0$이 되는 실수 c가 개구간 (a, x)안에 적어도 하나 반드시 존재한다.

이제, $g(t)$를 독립변수 t에 대해 미분하면:

$$g'(t) = f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t) + \dots \tag{5}$$

$$+ \dots \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - M(n+1)(x-t)^n \tag{6}$$

이는 망원급수(telescoping series)로서 유한개의 항을 재배열하면 부분적 항들의 합이 소거되므로 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - M(n+1)(x-t)^n \tag{7}$$

롤의 정리에 의해 $g'(c) = 0$이 되는 실수 c가 존재하므로 c를 대입하고 M에 대하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$M(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{8}$$

문제의 가정으로부터 c는 $a < c < x$안에 존재하므로 $x - c \neq 0$, 양변을 $(x-c)^n$으로 나누면:

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1!} \tag{9}$$

최종적으로 원하는 답을 얻는다.