Algebra I (ISIM), lista 7 (ćwiczenia 18.04.2024, deklaracje do godz. 11:00).

Teoria: (uogólniona) macierz Jordana. Twierdzenie Jordana o istnieniu (uogólnionej) bazy Jordana dla danego endomorfizmu (informacyjnie). Kompleksyfikacja rzeczywistej przestrzeni liniowej.

Zadania.

V, W oznaczają przestrzenie liniowe skończonego wymiaru, zaś $F, G \in End(V)$ (chyba że zaznaczono inaczej).

1. – Niech $F : V \to W$.
   (a) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $Im(F) = F[V_1] \oplus F[V_2]$?
   (b) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$, to $V = F^{-1}[W_1] \oplus F^{-1}[W_2]$?
   (c) Czy jeśli $V = V_1 \oplus V_2$ i $F|_{V_1}, F|_{V_2}$ są $1-1$, to F jest $1-1$?
   (d) Czy jeśli $W = W_1 \oplus W_2$ i $W_1, W_2 \subseteq Im(F)$, to F jest "na"?

2. Podać przykład podprzestrzeni $U, V, W < \mathbb{R}^4$ takich, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V = V \oplus W = W \oplus U$.

3. Załóżmy, że u, v i $u + v$ są wektorami własnymi F. Udowodnić, że $u + 2v$ też jest wektorem własnym F.

4. Załóżmy, że $F : V \to V$, $F^n = 0$ oraz $V^i = KerF^i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niech $q_i = dim(V_i)$ oraz $p_i = q_i - q_{i-1}$ dla $0 < i \leqslant n$. Załóżmy, że $v \in V^n \setminus V^{n-1}$. Udowodnić, że:
   (a) $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$.
   (b) Układ wektorów $v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)$ jest liniowo niezależny.

5. – Na zbiorze macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ określamy relację $\sim$:
   $$A \sim B \iff A = CBC^{-1} \text{ dla pewnej macierzy odwracalnej } C.$$
   Gdy $A \sim B$, mówimy, że macierze A, B są podobne.
   (a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności.
   (b) Udowodnić, że macierze $m_B(F), m_C(F)$ endomorfizmu F w różnych bazach $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq V$ są podobne.

6. Na zbiorze $End(V)$ określamy relację równoważności $\sim$:
   $F \sim G \iff$ istnieje izomorfizm liniowy $H : V \to V$ taki, że $F = HGH^{-1}$.
   Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest bazą V. Dowieść, że $F \sim G \iff$ macierze $m_{\mathcal{B}}(F)$ i $m_{\mathcal{B}}(G)$ są podobne. W szczególności, $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze $End(V)$
   .

7. Na zbiorze macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ określamy relację $\approx$ wzorem:
   $A \approx C \iff A = BCD$ dla pewnych macierzy odwracalnych B, D.
   (a) – Udowodnić, że $\approx$ jest relacją równoważności.
   (b) Ile jest klas abstrakcji relacji $\approx$?

8. (a) Dany jest wielomian $W(X) \in \mathbb{C}[X]$ stopnia $n > 0$. Udowodnić, że w zbiorze macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ z dokładnością do relacji podobieństwa jest tylko skończenie wiele macierzy A takich, że $\varphi_A(X) = W(X)$.
(b) To samo, co w (a), lecz nad $\mathbb{R}$ zamiast $\mathbb{C}$.

9. Załóżmy, że $G^2 = G$. Niech $U = Ker(G)$, $W = Im(G)$. Udowodnić, że $V = U \oplus W$ i G jest rzutem na podprzestrzeń W wzdłuż podprzestrzeni U.

10. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma dwie różne wartości własne.
(a) Opisać wszystkie F-niezmiennicze podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
(b)* Opisać wszystkie przekształcenia liniowe $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które komutują z F.

11. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$, $V = W \oplus U$, W jest F-niezmiennicza. Dowieść, że jeśli $dim(U) > 0$, to istnieje $u \in U$, $u \neq 0$, taki że $F(u) \in Lin(W \cup \{u\})$. (wsk: rozważyć $\pi \circ F : U \to U$, gdzie $\pi : V \to V$ to rzut na U wzdłuż W).

12. Używając poprzedniego zadania udowodnić, że każda macierz zespolona jest podobna do macierzy górnotrójkątnej.