Rzędy, diagonalizacja

$F : V \longrightarrow W$ liniowe, $\overset{n}{\dim V}, \overset{m}{\dim W} < \infty$

Przypomnienie:

Def. (po tw. 4.12): $\overset{\text{rank}}{\text{rząd}}(F) := \dim(\operatorname{Im} F)$.

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{baza}}{\mathcal{B}} \subseteq V \arrow[r, "F"] & W \supseteq \mathcal{C} \text{ baza} \arrow[d, "\Phi", "\cong"'] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{matrix} w \\ \downarrow \\ [w]_{\mathcal{C}} \end{matrix}$$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$

$$\dim(\operatorname{Im}(F)) = \dim(\Phi[\operatorname{Im}(F)])$$

$$\begin{matrix} \Phi : W & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^m \\ \vee & & \vee \\ \Phi|_{\operatorname{Im} F} : \operatorname{Im} F & \xrightarrow{\cong} & \Phi[\operatorname{Im} F] \end{matrix}$$

$\operatorname{Im} F = \operatorname{Lin}(F(b_1), \dots, F(b_n)) \quad \Phi(F(b_i)) = [F(b_i)]_{\mathcal{C}}$

$\Phi(\operatorname{Im}(F)) = \operatorname{Lin}([F(b_1)]_{\mathcal{C}}, \dots, [F(b_n)]_{\mathcal{C}})$

kolumny macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Def. 7.1. Dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\overset{\text{rank}}{\text{rząd}}(A) =$ liczba l.n. kolumn A

analogicznie dla $M_{m\times n}(F)$
$\uparrow$
ciało

Fakt 7.2. $\text{rząd}(F) = \cancel{\text{rząd}}\ \text{rząd}(m_{\mathcal{BC}}(F))$

Problem: Jak obliczyć rząd (A) ?

Tw. 7.3 $\overbrace{\text{Liczba lin. niezal. kolumn macierzy } A}^{c} =$

$= \underbrace{\text{—"— —"— wiersz —"— } A}_{r}$

D-d. Niech $A = (A_1, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ $c = \text{rząd}(A)$

kolumny   wiersze

dowód:

1) $c \leq r$. Niech $R_{i_1}, \dots, R_{i_r}$: l. n. wiersze, $i_1 < \dots < i_r$.

Niech $B = \begin{bmatrix} R_{i_1} \\ \vdots \\ R_{i_r} \end{bmatrix}$

Claim. rząd A = rząd B

bo: niech $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $F_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$

przekształcenia liniowe o macierzach A, B,

- $\text{Ker}(F_A) = \text{Ker}(F_B)$, bo:

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \text{Ker}\, F_A \iff A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} R_1 \cdot X = 0 \\ \vdots \\ R_n \cdot X = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} R_{i_1} \cdot X = 0 \\ \vdots \\ R_{i_r} \cdot X = 0 \end{cases} \iff B \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \iff X \in \text{Ker}\, F_B$

$R_1, \dots, R_n \in \text{Lin}(R_{i_1}, \dots, R_{i_r})$

z tw. 4.12: $n = \dim \mathbb{R}^n = \underbrace{\dim \operatorname{Im} F_A}_{\text{rząd}(A)} + \dim \operatorname{Ker} F_A$

$\overset{\text{Claim}}{=} \underbrace{\dim \operatorname{Im} F_B}_{\text{rząd}(B)} + \dim \operatorname{Ker} F_B$ + Claim.

Ale: rząd $B \leq r$ (bo $\dim \operatorname{Im} F_B \leq r$)

więc $c = \text{rząd}(A) \leq \text{rząd}\, B \leq r$.

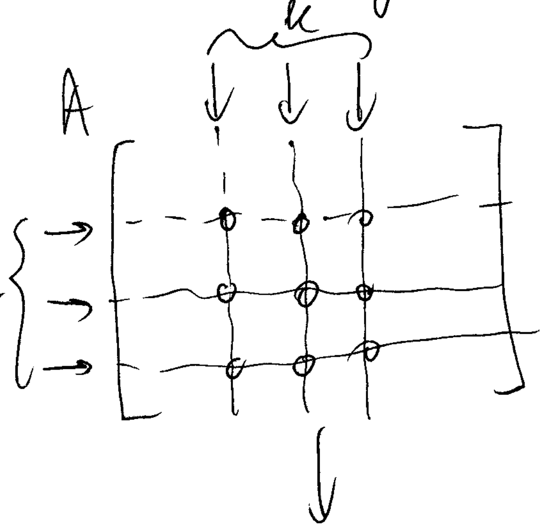
2. Powtarzamy rozumowanie dla macierzy transponowanej A^*, dowodząc $r \leq c$.

Wn. 7.4. rząd A = rząd A^*.

Wn. 7.5. rząd $A \geq k \iff$ macierz A ma pewien niezerowy minor stopnia k.

D-d.

Niech $A_1,\dots,A_n$: kolumny A
$R_1,\dots,R_m$: wiersze A



$\det \begin{bmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{bmatrix}_{k\times k}$: minor stopnia k.

$\Rightarrow$ Zał., że rząd $A \geq k$.

z tw. 7.3:

niech $R_{i_1},\dots,R_{i_k}$: l. n. wiersze

$i_1 < \dots < i_k$

Niech $B = \begin{pmatrix} R_{i_1} \\ \vdots \\ R_{i_k} \end{pmatrix}_{k\times n} = (B_1,\dots,B_n)$, $B_i \in R^k$, rząd$(B) = k$.

$\uparrow$ kolumny B

fragmenty kolumn $A_1,\dots,A_n$ odpowiadające wierszom $R_{i_1},\dots,R_{i_k}$

z tw. 7.3;

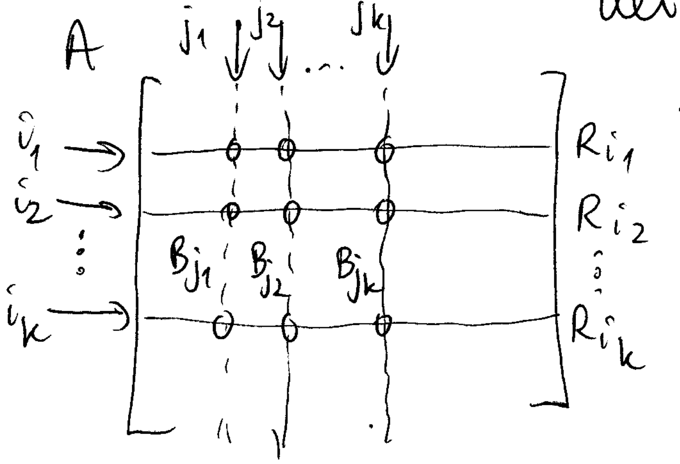
niech $B_{j_1},\dots,B_{j_k}$: l.n. kolumny $\in R^k$

$j_1 < \dots < j_k$

$\Downarrow$

$\det(B_{j_1},\dots,B_{j_k}) \neq 0$

minor A stopnia k



$\Leftarrow$; Zał. że po wyborze k wierszy $i_1 < \dots < i_k$ w A i k kolumn $j_1 < \dots < j_k$

powstaje macierz $B = (B_{j_1},\dots,B_{j_k})$ i $\det(B) \neq 0$

kolumny $\in R^k$

$\Downarrow$

fragmenty kolumn $A_{j_1},\dots,A_{j_k} \in R^n$: też liniowo niezależne,

bo : $\sum_{t=1}^{k} s_t A_{j_t} = 0 \in R^n \Rightarrow \sum_{t=1}^{k} s_t B_{j_t} = 0 \in R^k \underset{\det B \neq 0}{\Rightarrow} s_1 = \dots = s_k = 0$.

Def. 7.6. $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

1. a_{ij}: wyraz wiodący w i-tym ~~wierszu~~ macierzy A,
gdy $a_{ij} \neq 0$ i $\forall_{j'<j}\ a_{ij'} = 0$

~~z~~ (gdy wiersz zerowy, to nie ma w nim wyrazu wiodącego)

2. A ma uporządkowane wiersze, gdy:

(a) jeśli i-ty wiersz A jest zerowy i $i' > i$, to i'-ty —"— A też zerowy,

(b) jeśli a_{ij} i $a_{i'j'}$: wiodące wyrazy A w swoich wierszach oraz $i < i'$, to $j < j'$

Przykład
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5}$$ ma uporządkowane wiersze

- Gdy A ma uporządkowane wiersze, to rząd A = liczba niezerowych wierszy.

Fakt 7.7. Następujące operacje nie zmieniają rzędu macierzy:

(1) zamiana wierszy miejscami

(2) dodanie do wiersza skalarnej krotności innego wiersza

(3) pomnożenie wiersza przez skalar $\neq 0$

[+ analogiczne wersje dla kolumn].

Używając Faktu 7.7 każdą macierz można sprowadzić do postaci z uporządkowanymi wierszami, ~~z~~ zachowując rząd.

Zastosowania. 1. $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$

$$\dim(\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_k)) = \text{rząd macierzy } (A_1, \dots, A_k) = \dots$$

2. $\underset{\text{baza}}{\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}} \subseteq V$, $v_1, \dots, v_k \in V$

$$\Phi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\dim \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_k) =$$
$$= \dim(\mathrm{Lin}(\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{[v_1]_B}, \dots, [v_k]_B)) = \dots \quad (\text{z } 1.)$$

(A, B, C : macierze odpowiednich rozmiarów

Uwaga 7.8. (1) rząd$(AB) \leq$ rząd A, $\leq$ rząd B

(2) B : odwracalna $\Rightarrow$ rząd$(AB) =$ rząd A

(3) C : odwracalna $\Rightarrow$ rząd$(CA) =$ rząd A.

D-d (1) $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $F_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \underset{AB}{\overset{F_A \circ F_B}{\overset{\shortparallel}{F}}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "F_B"] \arrow[dr, dashed] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_A"] \\ & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$F_A \circ F_B = F_{AB}$

rząd A = rząd F_A, rząd$(F_A \circ F_B) \leq$ rząd F_A, $\leq$ rząd F_B ...
rząd B = rząd F_B

(2), (3): podobnie.

---

macierz diagonalna $n \times n$: $\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$

<u>Problem</u> $F: V \to V$ liniowe, $\dim V = n < \infty$.

Czy istnieje baza $\mathcal{B} \subseteq V$ t. że $m_{\mathcal{B}}(F)$: diagonalna?

<u>Def</u> (1) F jest <u>diagonalizowalne</u>, gdy $\boxed{\text{TAK}}$

(2) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest <u>diagonalizowalna</u>, gdy

$\exists C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ odwracalna CAC^{-1}: diagonalna.

Lemat 7.10. Zał, że $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ odwracalna.

Wtedy:

(1) $\exists\, \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq V$ baza t. że $A = m_{\mathcal{BC}}(id)$

(2) $\exists \mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\} \subseteq V$ baza t. że

$$A = m_{\mathcal{D}B}(id).$$

D-d. $A = [a_{ij}]$ odwracalna $\Rightarrow$ A^* też.

(2)
$$\begin{cases} d_1 = a_{11} b_1 + a_{21} b_2 + \dots + a_{n1} b_n \\ d_2 = a_{12} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{n2} b_n \\ \vdots \\ d_n = a_{1n} b_1 + a_{2n} b_2 + \dots + a_{nn} b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = A^* \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = (A^*)^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

więc $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_n\}$: baza V i $m_{\mathcal{D}B}(id) = A$.

(1)
$$V^n \ni \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} := (A^*)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = A^* \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ baza V, $A = m_{B\mathcal{C}}(id)$ (jak w (2)).

TW. 7.11.

Zał. że $F: V \to V$ liniowe, $\mathcal{B} \subseteq V$ baza, $\dim V = n < \infty$.

Wtedy F : diagonalizowalne $\Leftrightarrow$ $m_{\mathcal{B}}(F)$: diagonalizowalna

D-d Niech $A = m_{BB}(F)$.

$\Rightarrow$ Niech $\mathcal{C} \subseteq V$ baza t. że $m_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(F)$: diagonalna.

z Wn. 6.6 :

$$m_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(F) = m_{B\mathcal{C}}(id)\, m_{BB}(F)\, \underbrace{m_{\mathcal{C}B}(id)}_{= m_{B\mathcal{C}}(id)^{-1}}$$

$$\underset{\text{diagonalna}}{D} = C \cdot A \cdot C^{-1}$$

$\Leftarrow$. Zał, że $D = CAC^{-1}$: diagonalna

z lematu 7.10(1) istnieje baza $\mathcal{C} \subseteq V$ t. że

$C = m_{B\mathcal{C}}(id)$, więc $C^{-1} = m_{\mathcal{C}B}(id)$,

$$m_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(F) = m_{B\mathcal{C}}(id)\, m_{BB}(F)\, m_{\mathcal{C}B}(id) = \underset{\text{diagonalna}}{CAC^{-1}}$$

Problem. Dane $F : V \longrightarrow V$ [macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$]

Czy F, A : diagonalizowalne?

Def. 7.12. Niech $F : V \longrightarrow V$ liniowe, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1) Zał, że $t \in \mathbb{R}$, $0 \neq v_0 \in V$ i $F(v_0) = tv_0$

Wtedy : t : wartość własna F,

v_0 : wektor własny F dla wartości własnej t_0.

(2) Gdy t: wartość własna F, to przyjmujemy, że $\mathbb{O} \in V$ to też wektor własny F dla wartości własnej t.

(3) Analogicznie: Gdy $\mathbb{O} \neq X_0 \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$ i

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wektor} \\ \text{własny } A}}{A X_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wartości własnej } t}}{t X_0}, \text{ to}$$

wektor własny A dla wartości własnej t

Wtedy $\mathbb{O}$: też wektor własny A dla wartości własnej t.

Fakt 7.13. Zał, że $\dim V < \infty$ oraz $F \in \mathrm{End}(V)$. Wtedy F: diagonalizowalny $\Leftrightarrow$ istnieje baza $\mathcal{B} \subseteq V$ złożona z wektorów własnych F.

D-d. $\Leftarrow$. Zał, że $\mathcal{B}$: baza złożona z wektorów własnych F.
$\overset{\cap\!|}{V}$

tzn: $F(b_i) = t_i b_i$ dla pewnego $t_i \in \mathbb{R}$

$$[F(b_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

stąd $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} t_1 & & & 0 \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t_n \end{bmatrix}$ (*)

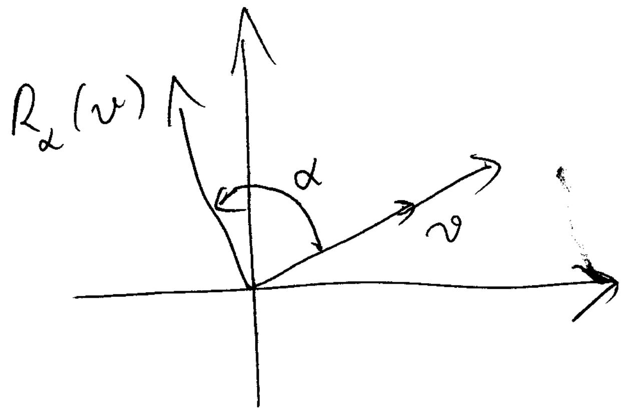
$\Rightarrow$ Gdy F: diagonalizowalny, to dla pewnej bazy $\underset{\text{bazy}}{\overset{\{b_1, \dots, b_n\}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{B}}}} \subseteq V$

$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)$ jest postaci (*). Wtedy $F(b_i) = t_i b_i \Rightarrow$
b_i: wektor własny F.

Przykład

$R_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ obrót o kąt ~~$\alpha \in [0, 2\pi)$~~ $\alpha \in (0, \pi)$ wokół 0

nie jest diagonalizowalny, bo: nie ma wartości własnych (wektorów własnych też nie)



Diagonalizacja macierzy.

Analiza endomorfizmu $F : V \longrightarrow V$, $\dim V = n < \infty$.

Def. 8.1. $\underset{\text{wyznacznik } F}{\det(F)} = \det(m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F))$, gdzie $\mathcal{B} \subseteq V$ dowolna baza

Fakt 8.2. $\det(F)$ nie zależy od wyboru $\mathcal{B}$.

D-d Niech $\mathcal{C} \subseteq V$ inna baza.

$$\overbrace{m_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(F)}^{C} = \overbrace{m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id)}^{A}\,\overbrace{m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)}^{B}\,\overbrace{m_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id)}^{A^{-1}}$$

z tw. Cauchy'ego

$$\det(C) = \det(A)\det(B)\overset{\overset{\det(A)^{-1}}{\shortparallel}}{\det(A^{-1})} = \det(B).$$

Wn. 8.3. F : odwracalne $\Leftrightarrow \det F \neq 0$ AlI/7

D-d:

$$F \text{ odwracalne} \overset{4.7}{\Leftrightarrow} m_{BB}(F) \text{ odwracalne} \overset{5.13}{\Leftrightarrow} \det(m_{BB}(F)) \neq 0, \quad \det F = \det(m_{BB}(F))$$

Uwaga 8.4. (wartości własne F) Niech $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) λ : wartość własna $F \Leftrightarrow \det(F - \lambda \cdot id) = 0$

(2) λ : — // — macierzy $A_{n \times n} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

D-d (1) $\Rightarrow$ $F(v_0) = \lambda v_0$, $v_0 \neq 0$ $\Rightarrow (F - \lambda \cdot id)(v_0) = 0$

$\Downarrow$

$\mathrm{Ker}(F - \lambda \cdot id) \neq \{0\}$

$\Downarrow$

$(F - \lambda \cdot id)$ nie jest 1-1

$\Updownarrow$ 4.13

$\det(F - \lambda \cdot id) = 0 \overset{8.3}{\Leftarrow} (F - \lambda\, id)$ nie jest odwracalne

$\Leftarrow$ $\det(F - \lambda \cdot id) = 0 \overset{8.3}{\Rightarrow} (F - \lambda id)$ nie jest odwracalne

$\Downarrow$ 4.13

$(F - \lambda\, id)$ nie jest 1-1

$\Downarrow$ 4.10

$\mathrm{Ker}(F - \lambda\, id) \neq \{0\}$

$\Downarrow$

$(F - \lambda id)(v_0) = 0$ dla pewnego $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$

$\Updownarrow$

$F(v_0) = \lambda v_0$.

(2) : ćwiczenie

Niech X: zmienna przebiegająca $\mathbb{R}$., $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $= [a_{ij}]_{n\times n}$

$$A - XI = \begin{bmatrix} a_{11}-X & & & \\ & a_{22}-X & & A \\ & & \ddots & \\ A & & & a_{nn}-X \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$\det(A - XI)$: wielomian zmiennej X
(obliczony zgodnie ze wzorem 5.11(†))

Def. 8.5. (1) $\varphi_A(X) := \det(A - XI)$: wielomian charakterystyczny macierzy A.

(2) $\varphi_F(X) = \varphi_A(X)$, gdzie $A = m_B(F)$ dla pewnej bazy $B \subseteq V$

wielomian charakterystyczny przekształcenia F.

- $\deg \varphi_A(X) = n$, $\varphi_A(X) = (-1)^n X^n +$ wyrazy niższych stopni.
- współczynnik $\varphi_A(X)$ przy X^{n-1} to:

$$(-1)^{n-1} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{\stackrel{def}{=}\ Tr(A)} \leftarrow !!!$$

$Tr(A)$ ślad macierzy A.
trace

Do obliczenia $\varphi_A(X)$ wygodne rozwinięcie Laplace'a

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A(X) = \det \begin{bmatrix} 1-X & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-X \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (1-X) \cdot \det \begin{bmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{bmatrix} = \ldots$$

Uwaga 8.6. (1) $\varphi_F(X)$ nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B} \subseteq V$.

(2) dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi_F(\lambda) = \det(F - \lambda \cdot id)$

(3) λ jest wartością własną $F \iff \varphi_F(\lambda) = 0$

(3') λ —"— $A \iff \varphi_A(\lambda) = 0$.

Def. $Tr(F) = Tr(A)$, gdzie $A = m_{\mathcal{B}}(F)$ dla dowolnej bazy $\mathcal{B} \subseteq V$

(nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$).

D-d uwagi 8.6.

(1) Niech $A = m_{BB}(F)$, $\mathcal{C} \subseteq V$ inna baza

$$B = m_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(F).$$

$B = CAC^{-1}$, $C = m_{\mathcal{C}B}(id)$ (z Wn. 6.6.)

$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(C(A - \lambda I)C^{-1}) =$

$C(A_1 + A_2) = CA_1 + CA_2$ (cw)

($\lambda \in \mathbb{R}$) dowolne

$$= \det(\underbrace{CAC^{-1}}_{B} - \underbrace{C\lambda I C^{-1}}_{\lambda CIC^{-1} = \lambda I}) =$$

$$= \det(B - \lambda I) = \cancel{\varphi_B(\lambda} \, \varphi_B(\lambda).$$

Stąd $\varphi_A(X) = \varphi_B(X)$.

$m_{BB}(F+G) = m_{BB}(F) + m_{BB}(G)$

(2) $\det(F - \lambda\, id) = \det(m_{BB}(F - \lambda\, id)) =$

$$= \det(\underbrace{m_{BB}(F)}_{\text{ozn: } A} - \lambda \underbrace{m_{BB}(id)}_{I}) = \det(A - \lambda I) = \varphi_A(\lambda) =$$

$$= \varphi_F(\lambda).$$

(3, 3') wynikają.

Wn. 8.8.

(1) $\dim V = n \Rightarrow F$ ma $\leq n$ różnych wartości własnych

(2) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A$ ma ... ~~TT~~

Zał, że λ: wartość własna F ($\Rightarrow \varphi_F(\lambda)=0$)

z tw. Bezouta:

$\varphi_F(X) = (X-\lambda)^t \cdot W(X)$ dla pewnego $W(X) \in \mathbb{R}[X]$
t. że $W(\lambda) \neq 0$

Def t: krotność wartości własnej λ przekształcenia F
(= krotność λ jako pierwiastka $\varphi_F(X)$)

Uwaga 8.9. ~~Niech V~~ Niech λ: wartość własna F.

Niech $V^\lambda = \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$.
Wtedy $\{0\} \neq V^\lambda < V$, tzw. przestrzeń wektorów własnych F dla wartości własnej λ.

Def. 8.10. Niech $W < V$, $F: V \longrightarrow V$
W jest F-niezmiennicza, gdy $(\forall v \in W)\, F(v) \in W$.

np: V^λ jest F-niezmiennicza.

TW. 8.11. Zał, że $F \in End(V)$,
$\lambda_1, \dots, \lambda_k$: wszystkie wartości własne F
$t_1, \dots, t_k$: ich krotności.

(1) Jeśli F : diagonalizowalny, to
$$\varphi_F(X) = (\lambda_1 - X)^{t_1} \cdot (\lambda_2 - X)^{t_2} \cdots (\lambda_k - X)^{t_k}$$

(2) $V^{\lambda_i} = \ker(F - \lambda_i id)$

(3) Niech $W = V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_k} < V$. Wtedy
$W = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$.

(4) (Kryterium diagonalizowalności). NWSR:
(i) F : diagonalizowalne
(ii) $\sum_i \dim V^{\lambda_i} = \dim V$
(iii) $\sum_i \dim V^{\lambda_i} \geqslant \dim V$.

D-d Niech $n = \dim V$.
(1) Niech $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza złożona z wektorów własnych F, $F(b_i) = r_i b_i$, $r_i \in \mathbb{R}$. Niech $A = m_B(F)$

Wtedy $A = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix}$ diagonalna.

$$\varphi_F(X) = \varphi_A(X) = \det \begin{bmatrix} r_1 - X & & & 0 \\ & r_2 - X & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n - X \end{bmatrix} =$$

$$= (r_1 - X)(r_2 - X)\dots(r_n - X) = (\lambda_1 - X)^{t_1}(\lambda_2 - X)^{t_2}\dots(\lambda_k - X)^{t_k}$$

(2) Oczywiste.

(3) Niech $W_t = V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_t}$, $t = 1, \dots, k$.

(a) W_t : F - niezmiennicza (bo: każde V^{λ_i} : F - niezmiennicze)

Niech $F' = F\restriction_{W_t} : W_t \longrightarrow W_t$.

(b) $\lambda_1, \dots, \lambda_t$: wszystkie wartości własne F'.

bo: niech $\mathcal{B}_1 \subseteq V^{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_t \subseteq V^{\lambda_t}$: bazy.

Wtedy $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_t$ generuje W_t

$\cup|$

istnieje $\mathcal{B}$ baza, $m_{\mathcal{B}}(F')$ diagonalna.

Na przekątnej wyrazy $\in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$. Zatem:

pierwiastki $\varphi_{F'}(X) \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$.

(c) $W = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$:

(*) $\underset{\in}{w} = \underset{\in}{v_1} + \dots + \underset{\in}{v_k}$: przedstawienie <u>jednoznaczne</u>:

nie wprost:

(**) $w = v_1' + \dots + v_k'$: inne takie przedstawienie, tzn: $v_i' \in V^{\lambda_i}$ dla $i = 1,\dots,k$

oraz dla pewnego i, $v_i \neq v_i'$

Niech $i_0 \le k$: maksymalne takie $i \le k$, że $v_i \neq v_i'$.

tzn: $v_{i_0+1} = v_{i_0+1}'$, $v_{i_0+2} = v_{i_0+2}'$, $\dots$, $v_k = v_k'$.

• $i_0 > 1$

(bo jeśli $i_0 = 1$, to

$$v_1 = w - (v_2 + \dots + v_k) = w - (v_2' + \dots + v_k') = v_1' \text{ ↯})$$

Z (∗) i (∗∗):

$$0 = w - w =$$

$$= \underbrace{(v_1 - v_1') + \dots + (v_t - v_t')}_{(t = i_0 - 1)\quad = v \in W_t} + \underbrace{(v_{i_0} - v_{i_0}')}_{u \neq 0} + \overbrace{(v_{i_0+1} - v_{i_0+1}') + \dots + (v_k - v_k')}^{=0}$$

$$0 = v + u \Rightarrow \underset{V^{\lambda_{t+1}}}{\underset{\Uparrow}{\overset{\neq 0}{u}}} = -v \in W_t, \text{ więc } \lambda_{t+1}: \text{wartość własna } F' \text{ ↯.}$$

(4) Niech $W = V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_k} \overset{(3)}{=} V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $W = V \Rightarrow \dim V = \dim W = \sum_i \dim(V^{\lambda_i})$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Oczywiste.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Skoro $\dim W \geqslant \dim V$, ~~to~~ i $W \subseteq V$, to
$$\underset{\displaystyle\sum_i \dim V^{\lambda_i}}{\underset{\shortparallel}{\dim W}}$$
$\dim W = \dim V$ i z uwagi 2.9(2)
$$V = W = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_k}$$

Stąd: istnieje baza V złożona z wektorów własnych F

$\Downarrow$

F: diagonalizowalny.

Uwaga 8.12. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wtedy

A: diagonalizowalna $\Longleftrightarrow$ $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizowalne

więc tw. 8.11 stosuje się też do A.