

Wykład 11.

Alg I / 11

(V : przestrzeń euklidesowa, $\dim V < \infty$.)

Lemat 12.1. V : p. liniowa / \mathbb{R}

$\infty > \dim V > 0$, $F: V \rightarrow V$ liniowa \Rightarrow istnieje $W < V$

F -niezmiennicza [tzn. $F[W] \subseteq W$], $\dim W = 1$ lub 2 .

D-2. $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza, $A = m_B(F)$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \mathbb{R}^n \\ \cup & & \cup \\ \downarrow & \xrightarrow{\quad} & [v]_B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \mathbb{R}^n \\ F \downarrow & \# & \downarrow F_A \\ V & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Wystarczy znaleźć F_A -niezmienniczy

$W < \mathbb{R}^n$, $\dim W = 1$ lub 2

(wtedy $\Phi^{-1}[W]$: F niezmiennicza)

$$F_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\hat{F}_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

\hat{F}_A : zespolone przekształcenie liniowe o macierzy A .

$\varphi_A(x)$ ma pierwiastek $\lambda \in \mathbb{C}$

\uparrow
wartość własna \hat{F}_A .

wsc: istnieje $Z \in \mathbb{C}^n$ t.j. $\hat{F}_A(Z) = \lambda Z$, tzn:

$\neq 0$

$$A \cdot [Z] = \lambda [Z]$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

(2)
Alg I/11

$$z_j \in \mathbb{C} \quad z_j = x_j + iy_j \quad \text{dla } j = 1, \dots, n$$

$$\cancel{Z = X + iY} \quad X, Y \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X + iY.$$

$$\lambda = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$$

$$\hat{F}_A(Z) = \hat{F}_A(X + iY) = \underbrace{F_A(X)}_{\hat{F}_A(X)} + i \underbrace{F_A(Y)}_{\hat{F}_A(Y)}$$

$$\operatorname{Re}(\hat{F}_A(Z)) = F_A(X), \quad \operatorname{Im} \hat{F}_A(Z) = F_A(Y).$$

$$\hat{F}_A(Z) = \lambda Z = \underbrace{(a + bi)}_{\lambda} \underbrace{(X + iY)}_Z = (aX - bY) + i(bX + aY).$$

$$\operatorname{Re}(\lambda Z) = aX - bY, \quad \operatorname{Im}(\lambda Z) = bX + aY.$$

"
 $\hat{F}_A(Z)$, więc

$$F_A(X) = aX - bY, \quad F_A(Y) = bX - aY.$$

$$\text{Niech } W = \operatorname{Lin}(X, Y) \subseteq \mathbb{R}^n. \quad F_A(W) \subseteq W \text{ oraz}$$

$$0 < \dim W \leq 2.$$

Teraz V : euklidesowa ~~unitarna~~,

(3)
Al I/11

$$\dim V < \infty, F: V \rightarrow V$$

izometryczna liniowa.

Lemat 12.2. (V : euklidesowa lub unitarna)

Zat., że $W \leq V$ F -niezmiennicza. Wtedy

W^\perp też F -niezmiennicza.

D-2. $F[W] \leq W$ wsc $F[W] = W$ (bo F : 1-1,

wsc

$$F|_W: W \rightarrow W : na)$$

• Zat., że $v \in W^\perp$, tzn. $v \perp w$ dla wszystkich $w \in W$.

Pokażemy, że $F(v) \in W^\perp$:

Wzm $w' \in W$. Skoro $F[W] = W$, to $w' = F(w)$ dla pewnego $w \in W$.

$$\langle F(v), w' \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

↑
ortogonalność $v \in W^\perp, w \in W$.

~~Wsc~~ więc $F(v) \perp w'$ dla każdego $w' \in W$.

stąd $F(v) \in W^\perp$. Czyli $F[W^\perp] \subseteq W^\perp$.

Lemat 12.3. Zat., że $\dim V = 1$, $F: V \rightarrow V$ ortogonalna.

Wtedy $F = id_V$ lub $F = -id_V$.

$V = \text{Lin}(v_0)$ (4)
Al $\mathbb{I}/11$

D-d. Niech $v_0 \in V$, $F(v_0) = tv_0$ dla
 $\neq 0$
 pewnego $t \in \mathbb{R}$

wsc t : wartości własne F .

z Uwagi 11.13: $|t| = 1$, wsc $t = 1$ lub
 $t = -1$.

Wtedy dla każdego $v \in V$:

$v = sv_0$ dla pewnego $s \in \mathbb{R}$

wsc $F(v) = F(sv_0) = sF(v_0) = stv_0 = tsv_0 = tv$.

dłatego $F = \text{id}_V$ (gdzie $t = 1$) i $F = -\text{id}_V$ (gdzie $t = -1$)

Lemat 12.4.

Zat., że $\dim V = 2$, $F: V \rightarrow V$ ortogonalna.

Wtedy w pewnej bazie o.n. $B = \{b_1, b_2\} \subseteq V$

$m_B(F)$ jest jednej z postaci:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det = -1$

F : odbicie
 względem
 $\text{Lin}(b_1)$

(b) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

obrót o kąt α wokół 0

(przeważnie do
 zegara)

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

id_V .

D-d. $V = \mathbb{R}^2$

bso. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{E_1, E_2\} = \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$,

$m_{\mathcal{E}}(F)$ ortogonalna, postać (a), (b), lub (c),

Ok, więcej szczegółów:

bso $V = \mathbb{R}^2$, Niech $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

baza o.n.

Wtedy $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ izometria liniowa, więc:

(1) • odbicie względem prostej przechodzącej przez 0)

(2) • ^{lub} obroty wokół zera o kąt α .

Ćwiczenie.

(3) • ^{lub} identyczność.

W przypadku (1) wybrany bazis o.n. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ i odpowiedni

W przypadkach (2), (3) $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ dobra.

Tw. 12.5. Zał, że $F: V \rightarrow V$ ortogonalna, $\dim V < \infty$

Wtedy w pewnej bazie o.n. $\mathcal{B} \subseteq V$, $m_{\mathcal{B}}(F)$ jest postacią:

(*) $C = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$, gdzie $C_i = \pm 1$ lub $\begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}$

Czyli:

F : zbiorek pewnej liczby odbić względem

(6) $Al\ E/h$

hiperprzestrzeni przechodzących przez zero

i obrotów wokół 0 w pewnych płaszczyznach $< V$.

D-d. Z lematów 12.1 i 12.2:

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, gdzie V_1, \dots, V_k : F -niezmien-
niwe,

$U_1 \quad \dots \quad U_k$ parami \perp
 $B_1 \quad \dots \quad B_k$ $\dim V_i = 1$ lub 2
bazy o.n. $B_i \subseteq V_i$: baza o.n.

dla $i=1, \dots, k$.

t.je $m_{B_i}(F|_{V_i})$ postaci C_i .

Wtedy ~~$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$~~

$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$: baza o.n. V dobra,

$m_B(F)$ postaci (*).

Wn. 12.6. Zał. że V : przestrzeń euklidesowa, $\dim V < \infty$,

$F: V \rightarrow V$ izometria ~~linearna~~.

(1) F jest liniowa $\Leftrightarrow F(0)=0$.

$$(2) F = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{translacja} \\ 0 \text{ o } u.}}{T_u} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izometria liniowa}}}{F'} \text{ dla pewnego } u \in V$$

7
AlT/11

D-d. (1) zadanie

$$(2) \text{ Niech } u = F(0). \text{ wtedy } F' = T_{-u} \circ F.$$

$\cdot F'$: izometria (bo : złożenie izometrii jest izometrią).

$$\cdot F'(0) = 0 \quad (F'(0) = \underset{u}{T_{-u}}(\underbrace{F(0)}_u) = \underset{id_V}{T_{-u}}(u) = 0).$$

z (1) : F' liniowa

$$; \quad F' = T_{-u} \circ F \Rightarrow T_u \circ F' = \overbrace{T_u \circ T_{-u}}^{id_V} \circ F = F,$$

TW. 12.7. Zał, że V : unitarna, $0 < \dim V < \infty$,

$F : V \rightarrow V$ unitarne. Wtedy

istnieje baza o.n. $B \subseteq V$ złożona z wektorów

własnych F t.j. $m_B(F) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1.$

D-d F ma $\overbrace{\text{wektor własny } b_1}^{\text{wartość własna } \lambda_1}$, dlc λ_1, b_1 s.o. $\|b_1\| = 1$.
 $0 \neq$

~~Nach~~ Nach $W_1 = \text{Lin}(b_1) : F$ - niezmienne.

jak w Lemma 12.2: W_1^\perp też F -niezmienność. (8)
Al I/11

$F|_{W_1^\perp}$ ma wartości własne λ_2 i wektor własny b_2 dla b_2
:
 $|\lambda_2| = 1$ $\|b_2\| = 1$

Znajdujemy

$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ t.e. W_i : parami \perp
 \uparrow
 $F[W_i] \subseteq W_i$.

Przestrzeń sprzężona (dualna) jest to raz

V : p. liniowa / $\mathbb{R} \rightsquigarrow V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$
 $\dim V = n$ przestrzeń sprzężona (dualna) do V .

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza $\Rightarrow \mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq V^*$
baza sprzężona do \mathcal{B}
dualna

$$b_i^* : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ delta Diraca}$$

$$b_i^*(\sum t_j b_j) = t_i$$

Uwaga 12.8. Izomorfizm $\Phi : V \longrightarrow V^*$ tak, ale :
$$\left(\begin{array}{l} b_i \longmapsto b_i^* \\ \Phi(\sum t_i b_i) = \sum t_i b_i^* \end{array} \right)$$

on nie jest kanoniczny
(zależy od wyboru bazy \mathcal{B}).

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{R}).$$

(9)
AlI/11

Fakt 12.9. Istnieje $\varphi: V \xrightarrow{\text{kanon}} V^{**}$ kanoniczny
~~(dim V < ∞)~~ monomorfizm liniowy.
 • Gdy $\dim V < \infty$, to φ : izomorfizm.
 (nie zależy od wybrania bazy)

Dł $V \ni v \mapsto \varphi(v): V^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi(v)(f) := f(v).$

• φ liniowe $\varphi: V \rightarrow V^{**}$

• φ 1-1 : $\text{Ker } \varphi : \varphi(v) = 0 \in V^{**}$

to zn.: $\forall f \in V^* \quad \varphi(v)(f) = f(v) = 0$

\Downarrow
 $v = 0.$

Kategorie : "strukturalne spójnienie matematyki"
 (i nie tylko).

Kategoria \mathcal{A} :

(1) klasa obiektów $\text{Ob}(\mathcal{A})$ (np: przestrzenie
 liniowe / \mathbb{R})

(2) dla dowolnych $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

zbiór

$\text{Mor}(A, B)$

"morfizmy
z A do B "

(10)
Alg I/11

(np: $\text{Hom}(A, B)$)

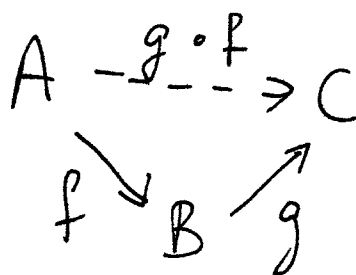
↑
przestrzeń liniowa

(3) odwzorowanie $\circ : \text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow$
(składanie morfizmów)

$\text{Mor}(A, C)$



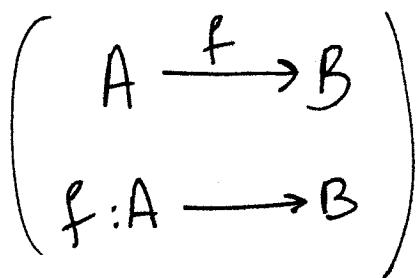
diagram:



(Notacja)

$f \in \text{Mor}(A, B)$

|||



spełniające następujące aksjomaty:

KAT1. $\text{Mor}(A, B) \cap \text{Mor}(A', B') = \emptyset$,

chyba że $A = A', B = B'$

(tzn. gdy $f \in \text{Mor}(A, B)$, to f pamięta A i B
czyli $f \in \text{Mor}(A, B)$)

(inaczej
w teorii
mnożności)

↑
dźwigni
 f

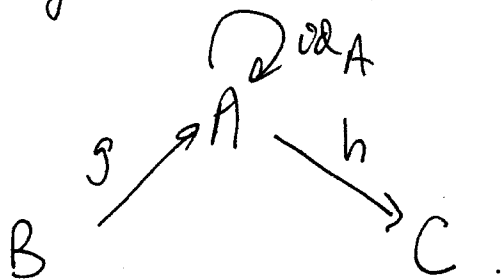
↑
kodźwigni
 f

KAT 2.

Al I/11

$\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \exists \text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$ $\forall B, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$
(morfizm identyfikacyjny)

$\forall g \in \text{Mor}(B, A) \forall h \in \text{Mor}(A, C)$
 $(\text{id}_A \circ g = g \text{ i } h \circ \text{id}_A = h)$



KAT 3: \circ jest łączne: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

(gdzie $f, g, h \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ o odpowiednich dziedzinach i kodziejach)

$$\text{Mor}(\mathcal{A}) = \bigcup_{A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})} \text{Mor}(A, B)$$

Przykłady,

1. Set: kategoria zbiorów

$\text{Ob}(\text{set})$: zbiory $\text{Mor}(A, B) = \{ \text{funkcje } A \rightarrow B \}$
(parzystości $A: B$)

\circ : składanie funkcji.

2. $\text{Vect}_{\mathbb{R}}$: kategoria przestrzeni liniowych \mathbb{R} .

obiekty: przestrzenie liniowe \mathbb{R}

morfizmy: przekształcenia liniowe $V \rightarrow W$,

$$3. A : \cdot \text{Ob}(A) = \{ * \}$$

(12)
Al I/II

$$\cdot \text{Mor}(A) = S_n = \{ \text{permutacje } 1, \dots, n \}$$

$\cdot o$: składanie funkcji.

W kategorii A , uogólniając o moine zdefiniować

mono
auto
epi
izo

— morfizm.

Def. (1) f : endomorfizm, gdy $f \in \text{Mor}(A, A)$
dla pewnego $A \in \text{Ob}(A)$

(2) $f \in \text{Mor}(A, B)$ jest izomorfizm, gdy:

$$\exists g \in \text{Mor}(B, A) \quad (g \circ f = \text{id}_A \text{ i } f \circ g = \text{id}_B)$$

Odurzowania między kategoriami:

funktor (kontravariantne, kowariantne).

Def. $F: A \longrightarrow B$ funktor kowariantny,
gdy

(1) $F: \text{Ob}(A) \longrightarrow \text{Ob}(B)$ funkcja

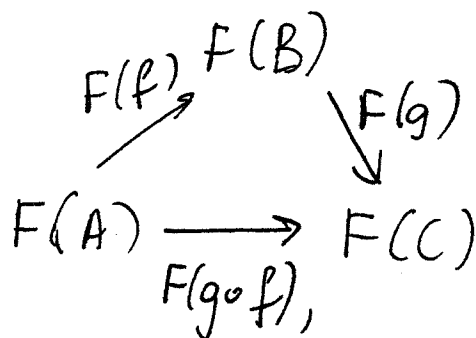
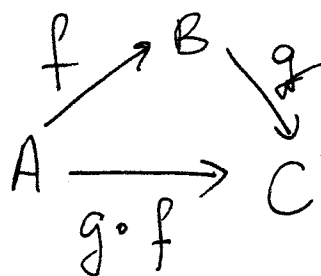
(2) Dla każdych $A, B \in \text{Ob}(A)$, $F: \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(F(A), F(B))$
t. j.:

FUN1. $\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$

(13)
Al II/11

FUN2. Jeśli w \mathcal{A} :

to w \mathcal{B} :



tzn: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Funktor F kontrawariantny:

zamiast (2): (2'):

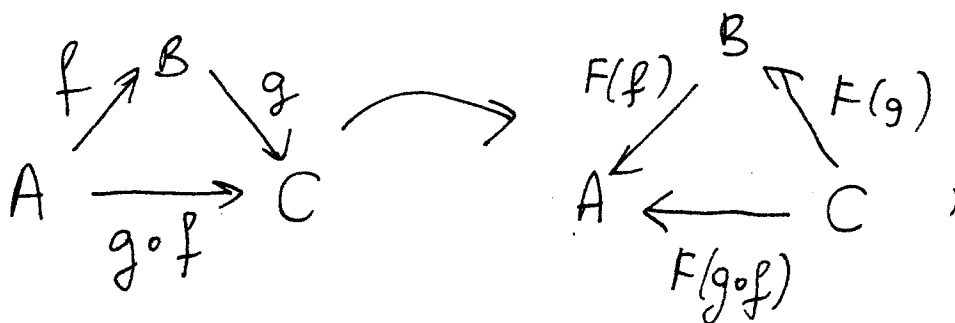
$$F: \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(F(B), F(A))$$

(Odwroca kierunek strzałek)

FUN1:

bez zmian

FUN2':



tzn: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$