Algebra I (ISIM), lista 9, ćwiczenia 9.05.23, deklaracje do 11:00.

Teoria: Przestrzenie euklidesowe i unitarne: baza ortogonalna, ortonormalna. Współrzędne wektora w bazie ortonormalnej. Ortonormalizacja bazy metodą Grama-Schmidta. $P_W$: rzut ortogonalny na podprzestrzeń $W < V$, $S_W$: odbicie (symetria) względem $W$. Przekształcenia ortogonalne, unitarne. Izomorfizm przestrzeni euklidesowych, unitarnych. Przestrzenie euklidesowe [unitarne] tego samego wymiaru skończonego są izomorficzne. $F : V \to W$ jest ortogonalne [unitarne] $\iff$ $F$ jest izometrią liniową $\iff$ $m_{\mathcal{B}}(F)$ jest ortogonalna [unitarna] (tu $\mathcal{B}$ jest bazą ortonormalną). Macierz $A$ jest ortogonalna [unitarna] $\iff$ $A$ jest odwracalna i $A^{-1} = \bar{A}^T$. Dla $A, F$ ortogonalnych [unitarnych]: $|\det(A)| = 1$, $|\det(F)| = 1$, $|\lambda| = 1$, gdy $\lambda$: wartość własna $A$ lub $F$.

Zadania. Tu $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ oznacza przestrzeń euklidesową lub unitarną skończonego wymiaru.

1. Niech $v \neq w \in V$. Niech $u = w - v$, $L = Lin(u)$ i $L' = v + L$ (zatem $L$ jest prostą wzdłuż $u$, zaś $L'$ jest warstwą podprzestrzeni $L$).
   a)– Udowodnić, że $v, w \in L'$ oraz $L' = \{tv + sw : t, s \in \mathbb{R} \text{ i } t + s = 1\}$ ($L'$ nazywamy prostą przechodzącą przez wektory (punkty) $v, w$).
   b)– Udowodnić, że wektor $1/2(v + w)$ jest jedynym wektorem na prostej $L'$ równoodległym od $v$ i $w$.
   c) Niech $U' \subset V$ będzie zbiorem wszystkich wektorów równoodległych od $v$ i $w$. Udowodnić, że $U'$ jest warstwą podprzestrzeni $U = L^{\perp}$ (dokładniej : $U' = 1/2(v + w) + U$).
   d)* Ogólniej : kombinacje liniowe postaci $\sum t_i v_i$, gdzie $\sum_i t_i = 1$, nazywamy afinicznymi kombinacjami liniowymi wektorów $v_i$. Oznaczmy przez $\mathrm{Aff}(v_1, \ldots, v_n)$ zbiór afinicznych kombinacji liniowych wektorów $v_1, \ldots v_n$. Zbiór ten nazywamy afiniczną podprzestrzenią ~~$V$ generow~~aną przez wektory $v_1, \ldots, v_n$. Udowodnić, że zbiór ten jest warstwą pewnej podprzestrzeni liniowej przestrzeni $V$.

2. Udowodnić nierówność Minkowskiego w przestrzeni unitarnej $V$.

3. * Czy istnieje iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taki, ze kosinusy kątów między wektorami $E_1, E_2, E_3$ wynoszą $\frac{1}{2}$ (między $E_1, E_2$), $\frac{1}{3}$ (między $E_2, E_3$), $\frac{1}{4}$ (między $E_1, E_3$) ?

4. * Udowodnić, że jesli układ $k$ wektorów w przestrzeni $n$-wymiarowej $V$ ma tę własność, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty, to $k \leqslant n + 1$.

5. W przestrzeni $\mathbb{R}_2[X]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ znaleźć:
   (a) bazę ortonormalną,
   (b) bazę o.n. podprzestrzeni $W = Lin(1 + X, 1 + 2X)$,
   (c)– rzut prostopadły wektora $X^2$ na $W$,
   (d)– odległość wektora $X^2$ od przestrzeni $W$,
   (e)– odbicie wektora $X^2$ względem płaszczyzny $W$.

6. – Znaleźć bazę o.n. płaszczyzny $\Pi \subseteq R^3$ o równaniu
(a) $2x + 3y - z = 0$, (b) $x + y - 2z = 0$.

7. Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są ortogonalne, to macierz $AB$ też jest ortogonalna. (wariant dla macierzy unitarnych też zachodzi)

8. Załóżmy, że $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ są o.n. bazami $V$. Udowodnić, że $m_{\mathcal{BC}}(id)$ jest macierzą ortogonalną [unitarną].

9. * (a) Udowodnić, że metodą Grama-Schmidta można ortonormalizować bazy przestrzeni euklidesowej/unitarnej wymiaru przeliczalnego.
(b) Podać przykład przestrzeni euklidesowej bez bazy ortonormalnej (przestrzeń ta musi miec wymiar nieprzeliczalny).

10. (a) Załóżmy, że $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą ortonormalną $V$, $F : V \to V$ jest liniowe oraz $\{F(b_1), \ldots, F(b_n)\}$ też jest bazą ortonormalną $V$. Udowodnić, że $F$ jest ortogonalne [unitarne].
(b)* Załóżmy, że $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in V$ spełniają $\langle v_i, v_j\rangle = \langle w_i, w_j\rangle$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Udowodnić, że istnieje przekształcenie ortogonalne/unitarne $F : V \to V$ takie, że $f(v_i) = w_i$ dla wszystkich $i$.