Wykład 4.

Przekształcenia liniowe i macierze c.d.

Tw. 4.3. Zał. że $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{C} \subseteq W$ bazy. Określamy

$$\Phi : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R}) \text{ wzorem:}$$

$$\Phi(F) = m_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F)$$

Wtedy Φ to izomorfizm liniowy.

<u>D-d.</u> • F można "odtworzyć" z macierzy $m_{\mathcal{BC}}(F)$ (tzn: używając $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ i $m_{\mathcal{BC}}(F)$ wyliczyć $F(v)$ dla $v \in V$)

<u>stąd</u>: ~~[illegible]~~ Φ : 1-1.

• każda macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ wyznacza pewne $F : V \longrightarrow W$ liniowe (wzór (*) z tw. 3.14:

$$F(v) = w \iff A \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{C}})$$

wtedy ~~t. że~~ $A = m_{\mathcal{BC}}(F) = \Phi(F)$.

stąd: Φ jest "na".

• Φ liniowe

– addytywność: $F, G \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$A = m_{\mathcal{BC}}(F), \quad B = m_{\mathcal{BC}}(G), \quad C = m_{\mathcal{BC}}(F+G)$$

Niech b_j : j-ty wektor z $\mathcal{B}$. Wtedy:

$$A_j = [F(b_j)]_{\mathcal{C}}, \quad B_j = [G(b_j)]_{\mathcal{C}}, \quad C_j = [(F+G)(b_j)]_{\mathcal{C}} ;$$

j-te kolumny A, B, C odpowiednio.

$$(F+G)(b_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definicja } F+G}}{=} F(b_j)+G(b_j)$$

$$\Downarrow$$

$$C_j = A_j + B_j, \; j=1,\dots,n$$

$$\Downarrow$$

$$C = A + B$$

$$\Phi(F+G) = \Phi(F)+\Phi(G).$$

- jednorodność Φ: ćwiczenie. $\square$

<u>Stąd</u>: $\dim V = n \Rightarrow \dim V^* = \dim(\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}))$

$$\overset{\shortparallel}{\dim}(M_{1\times n}(\mathbb{R})) = n.$$

jawniej:

$\mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_n\} \subseteq V$ baza $\Rightarrow$

$\mathcal{B}^* = \{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ baza V^*, sprzężona, dualna do $\mathcal{B}$.

$$b_i^* : V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq i \\ 1, & \text{gdy } j = i. \end{cases}$$

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(b_i^*) = \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i} = [0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} \dots 0]$$

- Izomorfizm liniowy $f : V \xrightarrow{\cong} V^*$

dany wzorem $f(\sum t_i b_i) = \sum t_i b_i^*$

- niekanoniczny

(zależy od wyboru bazy V).

"wektor" zerowy w $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: macierz zerowa $\mathbb{O}$

$$id : \underset{\substack{\cup\!\!\!\mid \\ \mathcal{B} \\ \text{baza}}}{V} \longrightarrow V \rightsquigarrow m_{\mathcal{B}}(id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{ozn.}}{=} I$$

macierz jednostkowa,

element "neutralny" mnożenia macierzy:

$AI = A$, $IB = B$ dla wszystkich A, B $\underbrace{\text{odpowiednich rozmiarów}}_{\text{ćwiczenie (bez rachunków!)}}$

Wn. 4.4.

Zał, że $\dim V = n$ oraz $\Phi : End(V) \xrightarrow{\cong} M_{n\times n}(\mathbb{R})$ z tw. ~~4.4~~ 4.3, dany

wzorem $\Phi(F) = m_{\mathcal{B}}(F)$.

Wtedy dla $F, G \in End(V)$ $\Phi(F\circ G) = \Phi(F)\cdot\Phi(G)$.

D-d $m_{BB}(F\circ G) = m_{BB}(F)\cdot m_{BB}(G)$ z tw. 3.16.

Def. automorfizm liniowy przestrzeni V =

= endomorfizm V, który jest izomorfizmem przestrzeni V.

$Aut(V) = \{$ automorfizmy liniowe przestrzeni $V \}$

Def. ~~4.1~~ 4.5 (1) Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest <u>odwracalna</u> ("nieosobliwa"), gdy $\exists A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

(2) $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ odwracalna}\}$

Uwaga 4.6.

Jeśli A: odwracalna, to A^{-1} wyznaczone <u>jednoznacznie</u>.

D-d Zał, że $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t. że $AB = BA = I$.

Wtedy

$$A^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B.$$

Ćw. Gdy $AB = I$ i A, B: odwracalne, to $A = B^{-1}$ i $B = A^{-1}$!

Macierz A^{-1} z def. 4.5: <u>macierz odwrotna</u> do macierzy A.

- $(A^{-1})^{-1} = A$ (~~więc~~ gdy A: odwracalna, to A^{-1} też).

Uwaga 4.7 Zał, że $\dim V = n$, $\mathcal{B} \subseteq V$ baza, $F \in End(V)$. Wtedy F: odwracalne $\Leftrightarrow m_{\mathcal{B}}(F)$: odwracalne

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{c} F \in Aut(V) \\ \text{automorfizm liniowy} \end{array}\right]$$

D-d $\Rightarrow$: F^{-1} istnieje.

$$m_{\mathcal{B}}(F^{-1})\, m_{\mathcal{B}}(F) = m_{\mathcal{B}}(F^{-1}\circ F) = m_{\mathcal{B}}(id_V) = I \Rightarrow$$

$$\Leftarrow\ m_{\mathcal{B}}(F)\, m_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = I.$$

analogicznie

Stąd: $m_{\mathcal{B}}(F)$ odwracalna i $m_{\mathcal{B}}(F)^{-1} = m_{\mathcal{B}}(F^{-1})$.

$\Leftarrow$: Zał, że $m_{\mathcal{B}}(F)$ odwracalna.

Niech $F' : V \longrightarrow V$ liniowe t. że $m_{\mathcal{B}}(F') = m_{\mathcal{B}}(F)^{-1}$.

Wtedy $m_{\mathcal{B}}(F'\circ F) = m_{\mathcal{B}}(F')\, m_{\mathcal{B}}(F) = I$

$$\shortparallel$$
$$m_{\mathcal{B}}(id_V)$$

analogicznie: $m_{\mathcal{B}}(F\circ F') = m_{\mathcal{B}}(F)\, m_{\mathcal{B}}(F')$
$= m_{\mathcal{B}}(id_V)$.

Stąd: $F'\circ F = id_V = F\circ F'$, więc $F' = F^{-1}$.

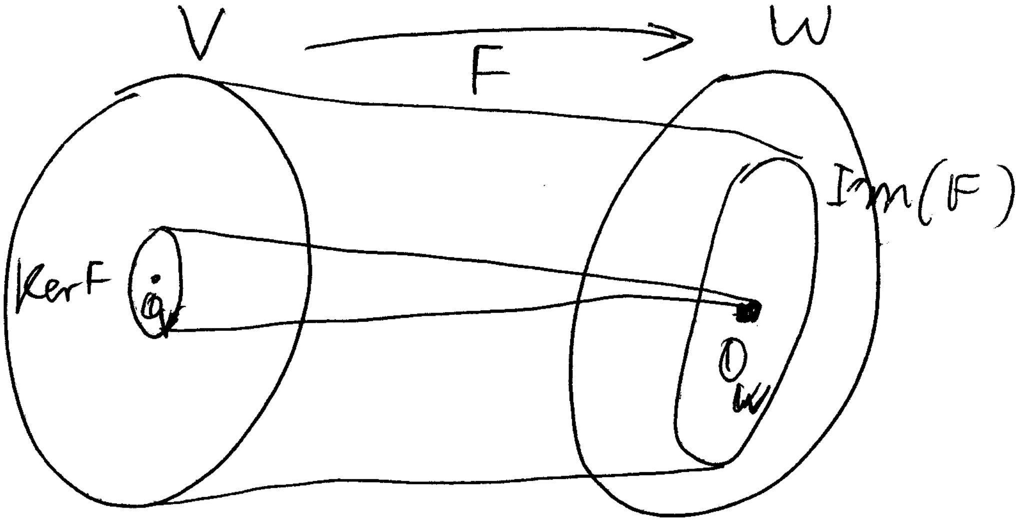
Problemy: 1. Jak sprawdzić, czy A: odwracalna?
2. Jeśli A odwracalna, jak obliczyć A^{-1}?

Niech $F : V \longrightarrow V$ liniowe.

Def. 4.8. $Ker(F) = \{v\in V : F(v) = 0\}$
kernel, jądro

$Im(F) = \{w\in W : \exists v\in V\ F(v) = w\}$
image, obraz $= \{F(v) : v\in V\}$ $(= Rng(F))$

Fakt 4.9 $\operatorname{Ker} F < V$, $\operatorname{Im} F < W$



<u>Przykłady</u>

1\. Załóżmy, że $\underset{v}{\overset{}{V}} = V_0 \oplus V_1$, $v = v_0 + v_1$ ($v \in V$, $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$). $P: V \longrightarrow V_0$, $P(v) = v_0$

P: rzut na podprzestrzeń V_0 wzdłuż podprzestrzeni V_1

[V_1 nazywa się też: podprzestrzenią V dopełniającą do V_0],

P: <u>liniowe</u> (ćw.) $\operatorname{Im} P = V_0$, $\operatorname{Ker} P = V_1$

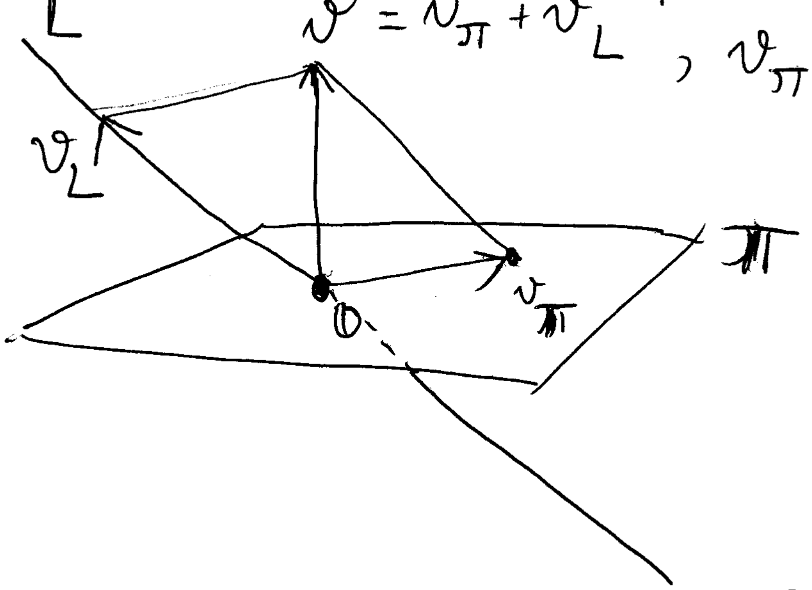
2\. $0 \in \pi \subseteq \mathbb{R}^3$ płaszczyzna, $0 \in L \subseteq \mathbb{R}^3$ prosta, $L \cap \pi = \{0\}$.

Wtedy $\mathbb{R}^3 = \pi \oplus L$ i $P_{\pi, L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \pi$

rzut na płaszczyznę π wzdłuż prostej L.

gdy $L \perp \pi$: $P_{\pi,L}$: rzut prostopadły na płaszczyznę π.

$v = v_\pi + v_L$, $v_\pi \in \pi$, $v_L \in L$



(gdy $L \perp \pi$ to $v_L \perp v_\pi$)

TW. 4.10. ($F : V \longrightarrow W$ liniowe)

F jest 1-1 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} F = \{0\}$

<u>D-d</u>. $\Rightarrow$ $F(0_V) = 0_W$ (Uwaga 3.9(1)),

więc $0_V \in \operatorname{Ker} F$.

F : 1-1 $\Rightarrow$ dla $\underset{V}{\forall} v \neq 0_V$, $F(v) \neq F(0_V) = 0_W$, więc $v \notin \operatorname{Ker} F$. Stąd $\operatorname{Ker} F = \{0_V\}$.

$\Leftarrow$. Nie wprost.

Zał, że $v \neq w \in V$ i $F(v) = F(w)$ (tzn. F nie jest "1-1")

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$v - w \neq 0$ $\quad F(v-w) = F(v) - F(w) = 0$

więc $v - w \in \operatorname{Ker} F$ i $\operatorname{Ker} F \neq \{0\}$.

Uwaga 4.11. Zał., że $F, G : V \to W$ liniowe, $X \subseteq V$ zbiór generatorów (tzn. $\mathrm{Lin}(X) = V$).

(1) Jeśli $(\forall v \in X)\ F(v) = G(v)$, to $F = G$.

(2) $F[X]$ generuje $\mathrm{Im}(F)$.

<u>D-d.</u>

(1) Niech $v \in V$. $\underset{\mathrm{Lin}(X)}{\underset{\|}{V}} \ni v = \sum \overset{\mathbb{R}}{t_i} \overset{X}{x_i} \Rightarrow$ F liniowe

$F(v) = F(\sum t_i x_i) \overset{F \text{ lin.}}{=} \sum t_i F(x_i) \overset{(a)}{=}$

$G(v) = G(\sum t_i x_i) \underset{G \text{ liniowe}}{=} \sum t_i G(x_i)$

więc $F(v) = G(v)$ ~~czyli~~

v i dowolne, ~~więc~~ więc $F = G$.

(2) Niech $w \in \mathrm{Im}\, F$. $w = F(v)$ dla pewnego $v \in V$.

$v = \sum \underset{\mathbb{R}}{t_i} \underset{X}{x_i}$, bo $\mathrm{Lin}(X) = V$. Stąd:

$w = F(\sum t_i x_i) = \sum t_i \underset{F[X]}{F(x_i)}$,

więc $\mathrm{Lin}(F[X]) = \mathrm{Im}\, F$.

Tw. 4.12. ($F : V \to W$ liniowe)

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, F) + \dim(\mathrm{Im}\, F).$$

Def. ($F: V \longrightarrow W$ liniowe)
rząd F = $\dim(\operatorname{Im} F)$,
(rank)

D-d tw. (gdy $\dim V < \infty$)

Więc wtedy $\dim(\operatorname{Ker} F) < \infty$ i $\dim(\operatorname{Im} F) < \infty$

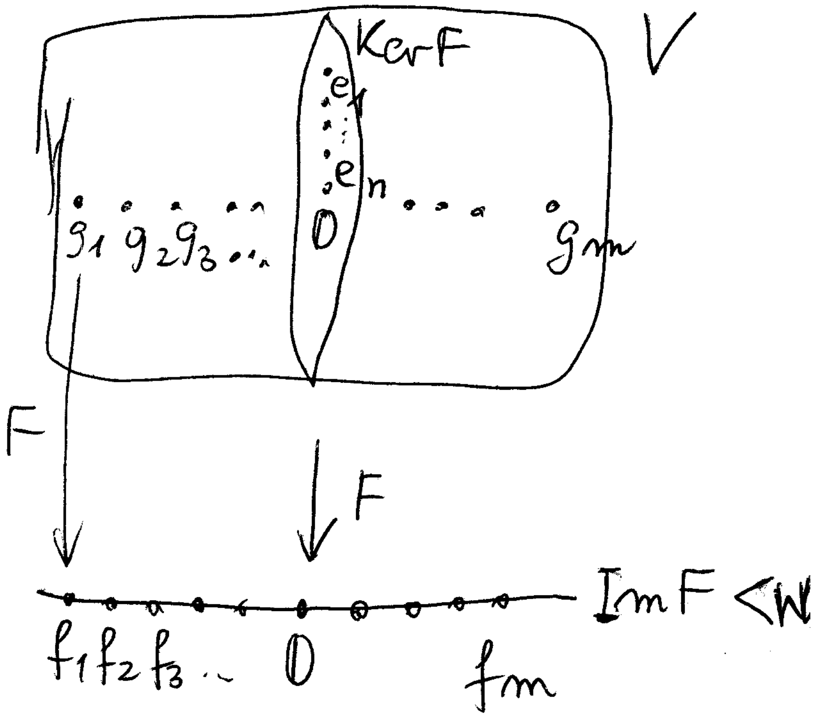
$\wedge$
V

[bo: gdy $\mathcal{B} \subseteq V$ baza, to

$F[\mathcal{B}] \subseteq \operatorname{Im} F$ generuje $\operatorname{Im} F$,
więc zawiera bazę $\operatorname{Im} F$.]

Niech $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza $\operatorname{Ker} F$ $n = \dim \operatorname{Ker} F$
$\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza $\operatorname{Im} F$ $m = \dim \operatorname{Im} F$.

niech $\{g_1, \dots, g_m\} \subseteq V$
t. że $F(g_i) = f_i$
dla $i = 1, \dots, m$



(*) Układ $e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_m$ liniowo niezależny i generuje V.

1. liniowa niezależność:

Załóżmy, że $\sum t_i e_i + \sum s_j g_j = 0$ dla pewnych $t_i, s_j \in R$

$\boxed{\text{Pok, że } t_i = 0 = s_j \text{ dla wszystkich } i, j}$

$\left.\begin{array}{l} e_i \in \operatorname{Ker} F \\ \text{dla } i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum t_i e_i \in \operatorname{Ker} F$ czyli $F(\sum t_i e_i) = 0$

$0 = F(0) = F(\sum t_i e_i + \sum s_j g_j) = F(\sum t_i e_i) + F(\sum s_j g_j) =$

$= F(\sum s_j g_j) \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ liniowe}}}{=} \sum s_j \underbrace{F(g_j)}_{= f_j} = \sum s_j f_j$ w W.

ale $\mathcal{C}$: lin. niezależny w W, więc $0 = \sum s_j f_j$
$\Downarrow$
$s_j = 0, \; j = 1, \dots, m$

$\sum s_j g_j = 0$

$\Downarrow \quad \sum t_i e_i + \sum s_j g_j = 0$

$\sum t_i e_i = 0$

$\Downarrow$ $\mathcal{B}$: lin. niezależny

$t_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n$.

2. Generowanie.

Niech $v \in V$.

$\underset{\in \operatorname{Im} F}{F(v) \in W} \Rightarrow F(v) = \sum s_j f_j$ dla pewnych $s_j \in R$

(bo $\mathcal{C}$: generuje $\operatorname{Im} F$)

Niech $v' = \sum s_j g_j$.

Wtedy $F(v') = \sum s_j f_j \overset{\text{z}}{=} F(v)$

$\Downarrow$

$F(v - v') = 0$ i $v - v' \in \operatorname{Ker} F$.

$\Downarrow$ $\mathcal{B}$ baza

$v - v' = \sum t_i e_i$

dla pewnych $t_i \in R$

Stąd: $v = v - v' + v' =$

$= \sum t_i e_i + \sum s_j g_j$

Dlatego: $\{e_1, \dots e_n, g_1, \dots, g_m\}$: baza V (bez powtórzeń)

i $\dim V = n + m =$

$= \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F$

Wn. 4.13 Zał, że $\dim V < \infty$ i $F : V \longrightarrow V$ liniowe.

Wtedy TFCAE:

(1) F : 1-1 (2) F : "na", (3) F : bijekcja

D-d

$F: 1\text{-}1 \overset{4.10}{\iff} \operatorname{Ker} F = \{0\} \iff \dim \operatorname{Ker}(F) = 0$

$\overset{4.12}{\iff} \dim \operatorname{Im} F = \dim V \overset{2.9(2)}{\iff} V = \operatorname{Im} F \iff F$ "na".

Wn. 4.14.

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wtedy A: odwracalna

$\iff$ kolumny macierzy A są liniowo niezależne (jako wektory w $\mathbb{R}^n$).

D-d Niech $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liniowe o macierzy A.

(w bazie $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$)

$A = m_{\mathcal{E}}(F)$.

Kolumny A to wektory:

$F(E_1), \dots, F(E_n)$

A: odwracalna $\overset{4.6}{\iff} F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizm $\overset{4.13}{\iff} F$ "na" $\iff$

$\overset{4.11(2)}{\iff} F[\mathcal{E}] = \{F(E_1), \dots, F(E_n)\}$ generuje $\mathbb{R}^n$.

$\overset{\dim \mathbb{R}^n = n}{\iff} F[\mathcal{E}]$ baza $\mathbb{R}^n \underset{\dim \mathbb{R}^n = n}{\iff} F(E_1), \dots, F(E_n)$ układ liniowo niezależny.

Permutacje i wyznacznik.

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $A = (A_1, \dots, A_n)$

kolumny, $A_i \in \mathbb{R}^n$.

Problem: Czy A odwracalna? (jak sprawdzić)

$\Updownarrow$ Wn. 4.14

$A_1, \dots, A_n$: lin. niezależne

$\Updownarrow$

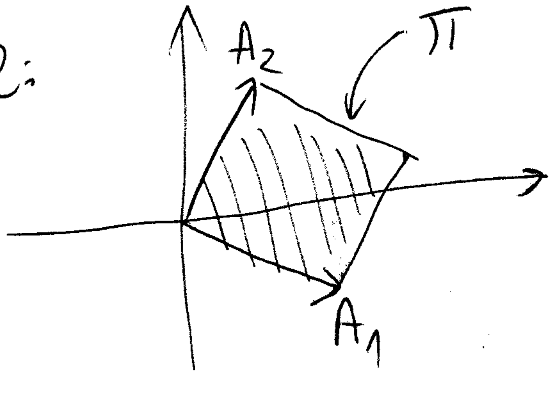
$\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_n) = \mathbb{R}^n$.

$\Updownarrow$

objętość$(\Pi) \neq 0$, gdzie $\Pi = \{\sum_{i=1}^{n} t_i A_i : 0 \leq t_i \leq 1\}$
(zorientowana) $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \dots, n$

uogólniony
równoległościan rozpięty przez
$A_1, \dots, A_n$ w $\mathbb{R}^n$

$n=2$:



<u>intuicja</u>:

det(A) = "zorientowana n-wymiarowa objętość Π"
determinant
wyznacznik $\qquad$ = ($\pm$ objętość Π).

Permutacje

Def. 5.1. $\sigma : \{1,\dots,n\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{1,\dots,n\}$

permutacja zbioru $1,\dots,n$.

$S_n = \{$ permutacje zbioru $\{1,\dots,n\}$ $\}$

$|S_n| = n!$ $\quad S_n \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ zapis 2-wierszowy (tabularyczny)

W S_n działanie składanie funkcji.

np. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

transpozycja: $\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \overset{\text{ozn}}{=:} (i,j) = (j,i)$

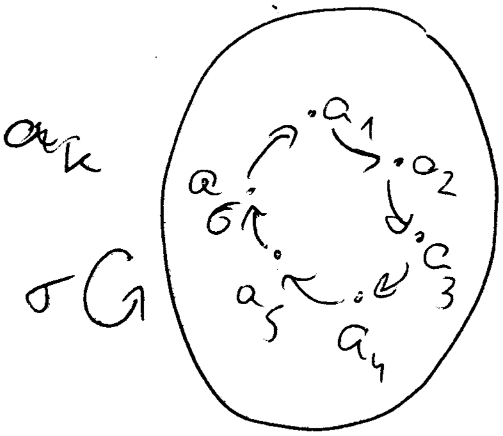
$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

Cykl: $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in S_n$, gdzie $1 \leq a_1, \dots, a_k \leq n$ bez powtórzeń

$\sigma(a_i) = a_{i+1}$ $\quad i = 1, \dots, k-1$

$\sigma(a_k) = a_1$

$\sigma(x) = x$ dla $x \neq a_1, a_2, \dots, a_k$

σ 

długość $k \geq 2$,
$n \geq$

- cykle $(a_1, \dots, a_k)$ i $(b_1, \dots, b_l)$ są <u>rozłączne</u>, gdy $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$

Uwaga 5.2 (1) Każda permutacja $\neq id$ jest złożeniem pewnej liczby cykli rozłącznych. Ten rozkład jest jedyny z dokładnością do kolejności czynników.

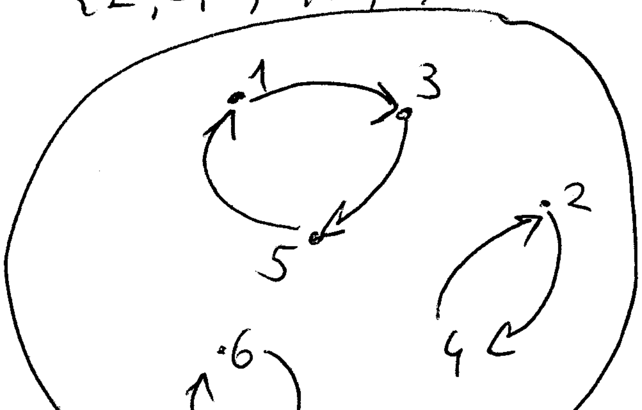
(2) Gdy cykle σ, τ są rozłączne, to $\sigma\tau = \tau\sigma$

(3) Każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby transpozycji liczb sąsiednich.

<u>D-d</u> (1) Przykład.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \underset{(3,5,1)}{(1,3,5)}\underset{(4,2)}{(2,4)}\underset{(7,6)}{(6,7)}$$

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$



(3) $\sigma=(i,j)$, $\tau\in S_n$

$\tau\sigma$ powstaje z τ przez zamianę miejscami (transpozycja) $\tau(i)$ i $\tau(j)$ w dolnym wierszu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(i) & \dots & \tau(j) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(j) & \dots & \tau(i) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix}$$

np. $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$

<u>Idea</u>: znaleźć ciąg transpozycji liczb sąsiednich $\sigma_1\ \sigma_2 \dots \sigma_k$

t. że $id\circ\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k=\tau$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[(2,3)]{\sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[(1,2)]{\sigma_2}$$

tu powinno być 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[(2,3)]{\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[(4,5)]{\sigma_4}$$

OK tu powinno być 2 OK tu powinno być 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[(3,4)]{\sigma_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[(4,5)]{\sigma_6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

OK

Dlatego:

$$\underbrace{id}_{\substack{\uparrow \\ \text{można pominąć.}}} \circ (2,3)(1,2)(2,3)(4,5)(3,4)(4,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \rightsquigarrow \sigma^{-1}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{pmatrix} \leftarrow \text{porządkujemy górny wiersz}$$

np. $(i,j)^{-1} = (i,j)$

Def. 5.3. (1) Liczby $i \neq j$ tworzą inwersję w $\tau \in S_n$, gdy w ciągu $\tau(1), \dots, \tau(n)$ większa z nich występuje wcześniej.

np.: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 3, 2: tworzą inwersję w σ. 1, 3 nie tworzą inwersji

(2) τ: parzysta, gdy występuje w niej parzyście wiele inwersji,

nieparzysta: w przeciwnym razie.

np. inwersje w σ: $\{3,2\}, \{6,4\}, \{6,5\}$

nieparzysta.

(3) znak τ : $sgn(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \tau \text{ parzysta} \\ -1, & \text{gdy } \tau \text{ nieparzysta.} \end{cases}$

signum

Uwaga 5,4. Transpozycja jest nieparzysta.

np: $\underset{\substack{\uparrow \\ S_6}}{(2,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

inwersje w $(2,5)$:

$\{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$

Uwaga 5,5.

Jeśli $\sigma = (i, i+1)$, to $sgn(\tau\sigma) = -sgn(\tau)$.

D-d τ: $\begin{pmatrix} 1 \ldots & i & i+1 \ldots & n \\ \tau(1) \ldots & \tau(i) & \tau(i+1) \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$

$\tau\sigma$: $\begin{pmatrix} 1 \ldots & i & i+1 \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(i+1) & \tau(i) \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$ liczba inwersji zmienia się o 1 (dochodzi lub znika $\{\tau(i), \tau(i+1)\}$

Uwaga 5,6. Dla $\sigma, \tau \in S_n$

$sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma) sgn(\tau)$.

D-d $\sigma = (id) \circ \sigma_1 \ldots \sigma_k$ $\tau = (id) \circ \tau_1 \ldots \tau_l$ transpozycje liczb sąsiednich

parzystość σ = parzystość k

$\sigma\tau = \sigma_1 \ldots \sigma_k \tau_1 \ldots \tau_l$. $\sigma\tau$ parzysta $\Leftrightarrow$ $k+l$ parzysta

$\sigma\tau$ - parzysta $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau$

$\Updownarrow$

$\operatorname{sgn}\sigma\tau = 1$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{sgn}\sigma\tau = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau)$

$\uparrow$

$\operatorname{sgn}\sigma \in \{\pm 1\}$

Uwaga 5.7.

$$\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$$

<u>D-d</u> $\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) = 1.$

Aksjomatyczne ujście $\det(A)$.

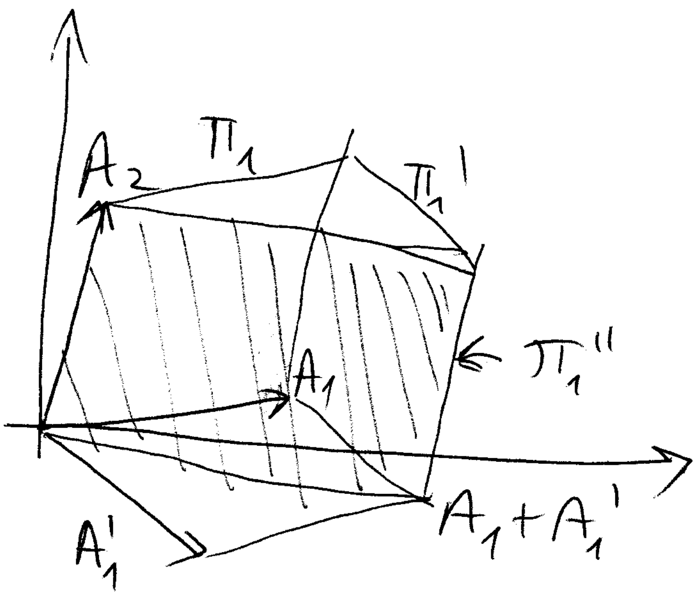
D1. $\det(A_1,\dots,\underbrace{A_i+A_i'}_{i},\dots,A_n)=$

$=\det(A_1,\dots,\underbrace{A_i}_{i},\dots,A_n)+\det(A_1,\dots,\underbrace{A_i'}_{i},\dots,A_n)$

D2. Dla $t\in\mathbb{R}$

$\det(A_1,\dots,\underbrace{tA_i}_{i},\dots,A_n)=$

$=t\cdot\det(A_1,\dots,\underbrace{A_i}_{i},\dots,A_n)$



(może być ujemne, "zorientowana")

D3. Jeśli dla pewnego i, $A_i=A_{i+1}$, to

$\det(A_1,\dots,A_n)=0$

D4. $\det(E_1,\dots,E_n)=\det(I)=1$. $I=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1\end{bmatrix}$

Pokażemy, że istnieje jedyna funkcja

$\det: M_{n\times n}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ spełniająca D1—D4.