21 grudnia 2023

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 11

1. Niech G będzie spójnym grafem z co najmniej jednym cyklem. Wykaż, że G ma co najmniej jeden cykl, którego długość jest mniejsza lub równa $2d(G) + 1$ gdzie $d(G)$ jest średnicą G.

2. Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje wierzchołek v, taki że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$, taka że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

3. W grafie skierowanym $\text{indeg}(v)$ i $\text{outdeg}(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę łuków wchodzących i wychodzących z wierzchołka v. Pokaż,że digraf zawiera skierowany cykl Eulera dokładnie, gdy jest spójny (po wymazaniu skierowań łuków) i dla wszystkich $v \in V : \text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$.

4. *Minimalnym cięciem* nazywamy zbiór krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego zbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja tego grafu. Wykaż, że spójny graf jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

5. Pokaż, że jeżeli graf spójny G ma dokładnie $2k$ wierzchołków o nieparzystych stopniach ($k > 0$), to zbiór jego krawędzi można rozbić na k rozłącznych krawędziowo marszrut, a na $k - 1$ nie można.

6. Liczby $1, 2, 3, 4, 5$ mogą być rozmieszczone na kole w porządku 1234531425, który zapewnia, że każde dwie z nich są sąsiednie dokładnie raz. Scharakteryzuj dla jakich n można znaleźć podobne rozmieszczenie dla liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ i uzasadnij swoją odpowiedź.

7. *Turniejem* nazywamy graf skierowany, którego każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jednym łukiem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2 do każdego innego.

8. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) drogę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

9. Czy istnieje sposób obejścia szachownicy 5×5 ruchem konika szachowego (na każdym polu stajemy dokładnie raz)? A co jeśli wymagamy żeby po obejściu szachownicy konik wrócił na to samo pole?

10. Wierzchołkami grafu G są wszystkie ciągi złożone z jednej litery a, jednej litery b i czterech liter c. Dwa wierzchołki łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się transpozycją dwóch sąsiednich liter. Pokaż, że G ma drogę Hamiltona, ale nie ma cyklu Hamiltona.

11. Dany jest graf prosty G, w którym $n = |V(G)| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków u, v, w istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}$. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

12. Graf nazywamy k-spójnym gdy jest spójny i usunięcie z niego dowolnych $k-1$ (lub mniej) wierzchołków go nie rozspójnia. Pokaż, że dowolny k-spójny graf o $2k$ wierzchołkach ma cykl Hamiltona.

13. Pokaż, że w grafie 3-regularnym G jest parzysta liczba dróg Hamiltona łączących ustalone sąsiednie wierzchołki u i v.

14. Znajdź n krawędziowo rozłącznych dróg Hamiltona w K_{2n} i n krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona w K_{2n+1}.

15. Pokaż, że jeśli G jest grafem prostym i dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków u, v

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n(G) - 1,$$

to w G istnieje droga Hamiltona.

16. Niech G będzie grafem prostym. Pokaż, że G zawiera drogę o długości równej co najmniej $2m/n$.

17. Niech G będzie grafem zawierającym cykl C i drogę długości k łączącą dwa wierzchołki z C. Pokaż, że G zawiera cykl długości przynajmniej $\sqrt{k}$.

18. Dla wszystkich k podaj przykład grafu G o najdłuższym cyklu C długości mniejszej niż $4\sqrt{k}$, który zawiera drogę łączącą dwa wierzchołki z C o długości k.