Algebra I (ISIM), lista 11, ćwiczenia 21.05.24, deklaracje do godz. 11:00.

Teoria: Kategorie: definicje, podstawowe przykłady. Funktory kowariantne i kontrawariantne. Sprzężenie jako funktor kontrawariantny w kategorii $Vect_{\mathbb{R}}$. $m_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}(f^*) = m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)^T$.
(Anty)izomorfizm Frecheta-Riesza. Indukowany iloczyn skalarny w V^*. f^* ortogonalne [unitarne], jeśli f ortogonalne [unitarne]. f^+: hermitowskie sprzężenie f: definicja, własności. Hermitowskie sprzężenie macierzy. Rozkład (jednoznaczny) endomorfizmu przestrzeni euklidesowej [unitarnej] na sumę endomorfizmu symetrycznego (hermitowskiego) i antysymetrycznego (antyhermitowskiego). Diagonalizowalność endomorfizmu hermitowskiego w bazie ortonormalnej. Diagonalizowalność rzeczywistej macierzy symetrycznej i macierzy hermitowskiej. Rozkład SVD.

V, W oznaczają przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ oznaczają kategorie, A, B, C oznaczają obiekty kategorii $\mathcal{A}$.

1. (i) Udowodnić, że morfizm id_A w aksjomacie KAT2 jest jedyny.
   (ii) Załóżmy, że $f \in Mor(A, B)$ jest izomorfizmem. Wtedy istnieje $g \in Mor(B, A)$ jak w definicji izomorfizmu. Udowodnić, że takie g jest jedyne. Nazywa się je odwrotnością f: $g = f^{-1}$.

2. – Załóżmy, że $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jest funktorem (ko- lub kontrawariantnym), zaś f jest izomorfizmem w kategorii $\mathcal{A}$. Udowodnić, że $\Phi(f)$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathcal{B}$.

3. Produktem obiektów A, B (oznaczenie $A \times B$) nazywamy obiekt C wraz z morfizmami $\pi_A : C \to A$ i $\pi_B : C \to B$ spełniającymi następujący warunek uniwersalności:

   Dla wszystkich $C', \pi'_A : C' \to A$ i $\pi'_B : C' \to B$ istnieje jedyny morfizm $f : C' \to C$ taki, że diagram $(*)$ poniżej komutuje:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \\ & C' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] \arrow[uu, "f"'] & \end{tikzcd}$$

   Udowodnić, że jeśli (C, π_A, π_B) oraz (C', π'_A, π'_B) są produktami A i B, to f w diagramie $(*)$ jest izomorfizmem.

4. – Koproduktem obiektów A i B (oznaczenie $A \sqcup B$) nazywamy obiekt C wraz z morfizmami $i_A : A \to C$ i $i_B : B \to C$ spełniającymi następujący warunek uniwersalności (dualny do warunku uniwersalności dla produktu):

Dla wszystkich $C', i'_A : A \to C'$ i $i'_B : B \to C'$ istnieje jedyny morfizm $f : C \to C'$ taki, że diagram $(**)$ poniżej komutuje:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dd, "f"] & \\
A \arrow[ur, "i_A"] \arrow[dr, "i'_A"'] & & B \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[dl, "i'_B"] \\
& C' &
\end{tikzcd}$$

Udowodnić, że jeśli (C, i_A, i_B) i (C', i'_A, i'_B) są koproduktami A i B, to f w diagramie $(**)$ jest izomorfizmem.

5. (a) Udowodnić, że w kategorii zbiorów Set następujące układy są produktami zbiorów A i B:
   (i) $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, gdzie $A \times B$ to produkt kartezjański zbiorow A i B, zaś π_A, π_B to rzuty na osie.
   (ii) $(A \sqcap B, \pi'_A, \pi'_B)$, gdzie $A \sqcap B$ oznacza zbiór wszystkch funkcji $f : \{0,1\} \to A \cup B$ takich, że $f(0) \in A$ i $f(1) \in B$, zaś $\pi'_A : A \sqcap B \to A,\ \pi'_B : A \sqcap B \to B$ dane są przez $\pi'_A(f) = f(0),\ \pi'_B(f) = f(1)$.
   (b) Udowodnić, ze w kategorii zbiorów Set dla każdych zbiorów A, B istnieje koprodukt $(A \sqcup B, i_A, i_B)$.

6. – W kategorii zbiorów Set, dla ustalonego zbioru A określamy funktor $_* : Set \to Set$ przez:
   (i) Dla X: obiektu Set: $X_* = X^A$ (tj. zbiór wszystkich funkcji $A \to X$).
   (ii) Dla $f : X \to Y$ (morfizmu Set), $f_* : X_* \to Y_*$ jest dane przez $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.
   Sprawdzić, że $_*$ jest funktorem kowariantnym.

7. Udowodnić, ze w kategorii $Vect_{\mathbb{R}}$ przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$ produkt przestrzeni $V \times W$ jest produktem i koproduktem przestrzeni V i W (z odpowiednimi morfizmami).

8. Załóżmy, że $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ jest bazą V, zaś $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ bazą V^* sprzężoną do $\mathcal{B}$. Niech $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$, gdzie $c_1 = b_1 + b_2 + b_3, c_2 = b_2, c_3 = b_3$ oraz niech $\mathcal{C}^* = \{c_1^*, c_2^*, c_3^*\}$ będzie bazą V^* sprzężoną do $\mathcal{C}$. Wyrazić wektory c_1^*, c_2^*, c_3^* jako liniowe kombinacje wektorów b_1^*, b_2^*, b_3^*.

9. Załóżmy, że $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą V, $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b^*\} \subseteq V^*$ jest bazą sprzężoną do $\mathcal{B}$, zaś $\mathcal{B}^{**} = \{b_1^{**}, \ldots, b_n^{**}\} \subseteq V^{**}$ bazą sprzężoną do $\mathcal{B}^*$. Niech $\varphi : V \to V^{**}$ będzie kanonicznym izomorfizmem. Udowodnić, że $\varphi(b_i) = b_i^{**}$.

10. Załóżmy, że $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ jest bazą V^*. Dowieść, że istnieje dokładnie jedna baza $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ taka, że Φ jest sprzężona do $\mathcal{B}$ (tzn. $\varphi_i = b_i^*$). (wsk: skorzystać z poprzedniego zadania).

11. Załóżmy, że V ma wymiar skończony oraz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Udowodnić, że
(a) $Lin(\varphi_1) = Lin(\varphi_2) \iff Ker(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$,
(b)* $\dim_{V^*}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = codim_V \bigcap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i)$.

12. Załóżmy, że f, g są przekształceniami liniowymi przestrzeni euklidesowych skończonego wymiaru. Udowodnić, że $(f \circ g)^+ = g^+ \circ f^+$ (pod warunkiem, że złożenia mają sens), bez rachunków, odwołując się do funktorialności sprzężenia w kategorii $Vect_{\mathbb{R}}$ i używając izomorfizmu Frecheta-Riesza.

13. Załóżmy, że A jest macierzą rzeczywistą. Udowodnić, że macierze $A^T A$ i AA^T mają te same dodatnie wartości własne, licząc z krotnościami.

14. Załóżmy, że $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
(a) Znaleźć macierze U i D w rozkładzie $A = UDV^T$ według wartości singularnych macierzy A.
(b)– Dodatkowo w (a) znaleźć macierz V.
Wskazówka: Najpierw znaleźć rozkład SVD dla macierzy A^T.