Wykład 13. Odwzorowanie 2-liniowe i wieloliniowe.

Przykład. (1)

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$A = (A_1, \dots, A_n),\ A_i \in \mathbb{R}^n$

$\det(A) = \det(A_1, \dots, A_n)$

$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$

(2) $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\langle X, Y \rangle = \sum_i x_i y_i \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

W (1) i (2): funkcje wielu zmiennych liniowe na każdej współrzędnej.

Ogólnie:

V, W: p. liniowe $/\mathbb{R}$

Def. 13.1 $f : V \times V \longrightarrow W$ jest 2-liniowe, jeśli

(1) $f(x+x', y) = f(x,y) + f(x', y)$

(2) $f(tx, y) = t f(x,y)$

$(t \in \mathbb{R},\ x, x', y \in V)$

liniowość na 1. współrzędnej

⊕ (1') (2') liniowość na 2. współrzędnej.

Ogólniej:

$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow W$ jest n-liniowe (wieloliniowe), gdy jest liniowe na każdej współrzędnej.

• gdy $W = \mathbb{R}$ (lub dowolne ciało K, gdy V: p. liniowa $/K$)

f: funkcjonał n-liniowy (wieloliniowy) na V.

Jeszcze ogólniej:

$f : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow V$ n-liniowe ...

$L(V_1, \ldots, V_n; W) = \{ f : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W :$ f n-liniowe $\}$

• przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$

$f, g \in L(V_1, \ldots, V_n; W) \rightsquigarrow (f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$, $\quad \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$

$t \in \mathbb{R}$

$$(t \cdot f)(\vec{v}) = f(tv_1, v_2, \ldots, v_n) = f(v_1, tv_2, \ldots, v_n) = \ldots = f(v_1, v_2, \ldots, tv_n)$$

$$\left.\begin{aligned} &\dim(L(V_1, \ldots, V_n; W)) = \\ &= \dim V_1 \times \ldots \times \dim V_n \times \dim W \end{aligned}\right]$$ Ćwiczenie.

$L_2(V;\mathbb{R}) := L(V,V;\mathbb{R})$, $L_n(V;\mathbb{R}) := = L(\underbrace{V,\dots,V}_{n};\mathbb{R})$

przestrzenie ~~...~~ funkcjonałów 2-liniowych / n-liniowych.

Macierz funkcjonału $f \in L_2(V,\mathbb{R})$:

Przykład

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$ " $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$f(X,Y) = (x_1,\dots,x_n)\,A\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = X^T A Y =$$

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j .$$

- $f \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- $f(tX,Y) = (tX^T)AY = t(X^TAY) = t f(X,Y)$
- $f(X+X',Y) = (X+X')^T AY = X^TAY + X'^TAY = = f(X,Y) + f(X',Y)$.

TW. 13.2. Załóżmy, że $f \in L_2(V,\mathbb{R})$, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_n\} \subseteq V$ baza. Wtedy $\exists!\, A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t. że dla $v, w \in V$:

$$f(v,w) = [v]_B^T A [w]_B = \sum_{i,j} a_{ij} v_i w_j,$$

gdzie $[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $[w]_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

D-d. Niech $a_{ij} = f(b_i, b_j) \in \mathbb{R}$. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ dobra.

$$f\left(\sum v_i b_i, \sum w_j b_j\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2-liniowość}}}{=} \sum_{i,j} v_i w_j f(b_i, b_j) = \sum_{i,j} a_{ij} v_i w_j = [v]_B^T A [w]_B.$$

Def. 13.3. Dla f, V, B jak w Tw. 13.2:

A : macierz funkcjonału f w bazie B.

Uwaga 13.4.

$f \longmapsto A$ daje $\Phi : L_2(V, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} M_{n\times n}(\mathbb{R})$ izomorfizm przestrzeni liniowych

ozn. $A = A_f$

D-d. $\underbrace{(A_f)_{ij}}$ $= \cancel{f(b_{ij})}\ f(b_i, b_j)$

wyraz macierzy A_f w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.

$f, g \in L_2(V, \mathbb{R})$ $\quad (A_{f+g})_{ij} = (f+g)(b_i, b_j) =$

$= f(b_i, b_j) + g(b_i, b_j) =$

$= (A_f)_{i,j} + (A_g)_{i,j}$

Podobnie: $(A_{tf})_{ij} =$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad = t(A_f)_{ij}$

<u>Oznaczenie</u> $f \in L_2(V,\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza.

$m_{\mathcal{B}}(f)$: macierz funkcjonału f w bazie $\mathcal{B}$.

---

dalej dowód ~~Tw. 13~~ Uwagi 13.4: Φ: "na".

dla $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. $f_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_A(X,Y) = X^T A Y$$

$$m_{\mathcal{E}}(f_A) = A.$$

$$\cdot\ g_A : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dla $v = \sum_i v_i b_i$, $w = \sum_i w_i b_i$ $g_A(v,w) = \sum_{i,j} a_{ij} v_i w_j =$

$$= [v]_{\mathcal{B}}^T A [w]_{\mathcal{B}} = f_A([v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}}).$$

$m_{\mathcal{B}}(g_A) = A.$

---

funkcjonał liniowy versus forma liniowa

funkcjonał 2-liniowy versus forma 2-liniowa:

Funkcjonał liniowy $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$

$\cup$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza

$m_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f) = [f(b_1),\dots,f(b_n)] = [a_1,\dots,a_n]$, $a_i = f(b_i) \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{E} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$

$$f(v) = [a_1,\dots,a_n]\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}} = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \quad v_i \in \mathbb{R}$$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$: forma liniowa funkcjonału f w bazie $\mathcal{B}$.

Funkcjonał 2-liniowy:

$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{B} = \{b_1,\dots,b_n\} \subseteq V$ baza

$m_{\mathcal{B}}(f) = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} = f(b_i, b_j)$

$f(v,w) = \sum a_{ij} v_i w_j = [v]_{\mathcal{B}}^T m_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}}$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\sum a_{ij} x_i y_j$ forma 2-liniowa funkcjonału f w bazie $\mathcal{B}$.

~~Niech~~ Zał., że $\dim V = n < \infty$.

Uwaga 13.5. $\mathrm{Hom}(V, V^*) \cong L_2(V;\mathbb{R})$

<u>D-d</u> $\Phi: \mathrm{Hom}(V,V^*) \longrightarrow L_2(V;\mathbb{R})$

$f \overset{\Phi}{\longmapsto} \Phi_f(v,w) = f(w)(v)$.

- Φ : liniowe (ćw.)

- Φ : 1-1 : $\operatorname{Ker}\Phi = ?$

Zał., że $0 \neq f \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$. Tzn. $f(v) \in V^* \setminus \{0\}$ dla pewnego $v \in V$.

Tzn. $\underbrace{f(v)(w)}_{\Phi_f(w,v)} \neq 0$ dla pewnego $w \in V$, więc $\Phi_f \neq 0$ i $f \notin \operatorname{Ker}\Phi$

<u>Stąd</u> $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$.

- Φ : "na" : ~~niech~~ Dla $\varphi \in L_2(V; \mathbb{R})$. ~~Ale~~ niech $f : V \longrightarrow V^*$, $f(v) = \varphi(\cdot, v)$

Wtedy $\varphi = \Phi_f$.

Uwaga 13.6. Niech $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ baza
$\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subseteq V^*$ baza sprzężona do $\mathcal{B}$.

$f \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$

$\varphi = \Phi_f \in L_2(V, \mathbb{R})$. Wtedy $m_{BB^*}(f) = m_B(\Phi_f)$.

<u>D-d</u>. $m_{BB^*}(f) = [a_{ij}]_{n \times n}$. Tzn. $f(b_j) = \sum_i a_{ij} b_i^*$.

Zatem $a_{ij} = f(b_j)(b_i) = \Phi_f(b_i, b_j)$,

więc $m_{BB^*}(f) = m_B(\Phi_f)$.

$\underset{\text{baza}}{\mathcal{B} \subseteq V}$, $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R}) \rightsquigarrow m_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Jak zmienia się ~~baza~~ $m_{\mathcal{B}}(\varphi)$ przy zmianie bazy $\mathcal{B}$?

Uwaga 13.7. Niech $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq V$ bazy, $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$.

Wtedy $m_{\mathcal{C}}(\varphi) = m_{\mathcal{CB}}(id)^T\, m_{\mathcal{B}}(\varphi)\, m_{\mathcal{CB}}(id)$.

D-d. $\varphi = \Phi_f$ dla pewnego $f: V \longrightarrow V^*$ liniowego.

$$\begin{array}{ccccc} m_{\mathcal{C}\mathcal{C}^*}(f) & = & m_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}(id) & m_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(f) & m_{\mathcal{CB}}(id) \\ \| & & \| & \| & \\ m_{\mathcal{C}}(\varphi) & = & m_{\mathcal{CB}}(id)^T & m_{\mathcal{B}}(\varphi) & m_{\mathcal{CB}}(id) \end{array}, \text{ bo:}$$

W $m_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}(id)$ $\quad id = id_{V^*} = (id_V)^*$

$\boxed{\text{tw. } 12.11} \Rightarrow m_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}(g^*) = m_{\mathcal{CB}}(g)^*$ dla $g: V \to V$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g^*: V^* \to V^*$

więc $m_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}(id_{V^*}) = m_{\mathcal{CB}}(id)^T$.

Def. 13.8.
Załóżmy, że $\dim V < \infty$, $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$.

$\operatorname{rząd}(\varphi) = \operatorname{rząd} m_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dla $\mathcal{B} \subseteq V$ bazy.

Uwaga 13.9. Niech $f: V \longrightarrow V^*$ t. że $\Phi_f = \varphi$.

Wtedy $\operatorname{rząd} \varphi = \operatorname{rząd} f$. (ćwiczenie).

Dlatego $\operatorname{rząd}(\varphi)$ nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B} \subseteq V$.

~~Uwaga~~ **Definicja** 13.10. $\varphi \in L_2(V,\mathbb{R})$ niezdegenerowana,
gdy $\text{rząd}\, \varphi = \dim V$.
($\Leftrightarrow f : V \xrightarrow{\cong} V^*$, gdzie $\varphi = \Phi_f$, tzn. $f(v) = \varphi(\cdot, v)$).

Zadanie. Niech $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$. Znaleźć bazę $\mathcal{C} \subseteq V$ t. że ~~$m_{\mathcal{C}}(V)$~~ $m_{\mathcal{C}}(\varphi)$ "ładna", np. diagonalna?

Def. 13.11. Załóżmy, że $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$
(1) φ jest symetryczny, gdy $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$ dla wszystkich $v, w \in V$.
(2) φ jest dodatnio określony, gdy $\varphi(v,v) > 0$ dla wszystkich $v \in V$, $v \neq 0$.

Uwaga $\varphi \in L_2(V,\mathbb{R})$: iloczyn skalarny,
$\Updownarrow$
φ symetryczny i +-określony.

Def. 13.12 Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
(1) A symetryczna $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $1 \leq i, j \leq n$.
(2) A dodatnio określona, gdy $\Phi_A \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: +-określony,
tzn: $X^T A X > 0$ dla wszystkich $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$.

$\varphi \in L_2(V, \mathbb{R})$

Uwaga 13.13. (1) φ symetryczny $\iff m_{\mathcal{B}}(\varphi)$ symetryczna.

(2) φ : + -określony $\iff m_{\mathcal{B}}(\varphi)$: + -określona.

D-d.

(1) $\Rightarrow$: Niech $m_{\mathcal{B}}(\varphi) = [a_{ij}]_{n\times n}$. tzn. $a_{ij} = \varphi(b_i, b_j) =$

$$\underset{\varphi \text{ symetryczny}}{=} \varphi(b_j, b_i) = a_{ji}.$$

$\Leftarrow$: Zał, że $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $1 \leq i,j \leq n$.

$v = \sum t_i b_i$, $w = \sum s_j b_j \in V$

$$\varphi(v, w) = \sum_{i,j} a_{ij} t_i s_j = \sum_{i,j} \underset{a_{ij}}{\underset{\shortparallel}{a_{ji}}} s_j t_i = \varphi(w, v).$$

(2) ćwiczenie.

Uwaga 13.14. Zał, że $\varphi \in L_2(V, \mathbb{R})$ symetryczny i V : euklidesowa. Wtedy istnieje baza o.n. $\mathcal{B} \subseteq V$ t. że $m_{\mathcal{B}}(\varphi)$: diagonalna.

D-d. Niech $\mathcal{C} \subseteq V$ baza o.n. i $A = m_{\mathcal{C}}(\varphi)$.

A : symetryczna.

Niech $f : V \longrightarrow V$ t. że $m_{\mathcal{C}}(f) = A$.

Wtedy f symetryczny (hermitowski) (fakt 12.19(2))

Z Uwagi 2.24: istnieje baza o.n. $\mathcal{B} \subseteq V$ t. że $m_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalna.

$$m_B(f) = \underbrace{m_{\mathcal{C}B}(id)}_{\parallel}\, m_{\mathcal{C}}(f)\, \underbrace{m_{B\mathcal{C}}(id)}$$

$[m_{B\mathcal{C}}(id)]^{-1} = m_{B\mathcal{C}}(id)^T$, bo ortogonalna, bo $B, \mathcal{C} \subseteq V$ o.n.

$$\parallel$$

$$m_B(\varphi) = m_{B\mathcal{C}}(id)^T\, m_{\mathcal{C}}(\varphi)\, m_{B\mathcal{C}}(id)$$

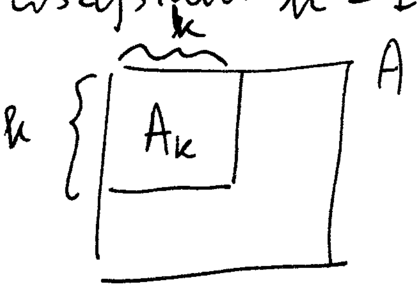
$\uparrow$

wsc diagonalna.

TW.13.15. (Kryterium Sylvestera). ZaŁ, że $A = [a_{ij}]_{n\times n}$: $a_{ij} \in \mathbb{R}$ macierz symetryczna. Wtedy A : $+$-określona $\iff$

$\det A_k > 0$ dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$,

$A_k = [a_{ij}]_{1\le i,j\le k}$



<u>D-d</u> $\Rightarrow$: A : symetryczna i $+$-określona, wsc

$\Phi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$: iloczyn skalarny.

Pokażemy, że $\det A_k > 0$ dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$.

Niech $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ baza standardowa $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{E}_k = \{E_1, \ldots, E_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, $W_k = Lin(\mathcal{E}_k)$.

W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, \Phi_A)$ ortonormalizujemy bazę $\mathcal{E}$ do bazy o.n. $\mathcal{E}' = \{E_1', \ldots, E_n'\}$, metodą Grama-Schmidta.

Wtedy $\mathcal{E}_k' = \{E_1', \dots, E_k'\}$: baza o.n. przestrzeni W_k $(k = 1, \dots, n)$.

Niech $\varphi_k = \Phi_A\restriction_{W_k}$, ~~$W_k$~~ Wtedy $A_k = m_{\mathcal{E}_k}(\varphi_k)$.

$I = m_{\mathcal{E}_k'}(\varphi_k)$

Z Uwagi 13.7:

$$I = m_{\mathcal{E}_k'}(\varphi_k) = m_{\mathcal{E}_k' \mathcal{E}_k}(id)^T A_k \, m_{\mathcal{E}_k' \mathcal{E}_k}(id)$$

$$1 = \det(I) = \det(m_{\mathcal{E}_k' \mathcal{E}_k}(id)^T) \cdot \det(A_k) \cdot \underbrace{\det(m_{\mathcal{E}_k' \mathcal{E}_k}(id))}_{\alpha \neq 0} =$$

$$= \underset{0}{\overset{}{\alpha^2}}\!\!\!\!\!\!\!\!\vee \cdot \det(A_k) \qquad \alpha^2 > 0 \Rightarrow \det(A_k) > 0$$

$\Leftarrow$. Indukcja względem n.

- $n = 1$: teza oczywista.
- krok indukcyjny $n \longmapsto n+1$.

Zał, że $A = [a_{ij}]_{(n+1)\times(n+1)}$: symetryczna i

$$\forall k = 1, \dots, n+1 \quad \det(A_k) > 0.$$

Pok. że $\Phi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$: +-określony.

Niech $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_{n+1}\}$, $\mathcal{E}_n = \{E_1, \dots, E_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$,

$W = Lin(\mathcal{E}_n)$.

Niech $\Phi = \Phi_A\restriction_W$.

$m_{\mathcal{E}_n}(\Phi) = A_n \xRightarrow[\text{zał. indukc.}]{} \Phi$: symetryczny i +-określony

$\Downarrow$

iloczyn skalarny w W.

Niech $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$: baza o.n. przestrzeni (W, Φ).

Niech $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \forall w \in W \ \Phi_A(v, w) = 0\}$.

$$W^\perp = \bigcap_{w \in W} \operatorname{Ker} \Phi_{A,w} < \mathbb{R}^{n+1}, \text{ gdzie } \Phi_{A,w} = \Phi_A(\cdot, w) : V \to V$$

liniowe

(*) $\mathbb{R}^{n+1} = W \oplus W^\perp$

bo: • $W \cap W^\perp = \{0\}$

jeśli $\overset{\Downarrow}{v}$, to $\Phi_A(v, v) = 0$, więc $v = 0$, bo $\Phi_A\restriction_W$: +-określony

• $W + W^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$, bo: niech $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Niech $v' = \sum_{i=1}^{n} \Phi_A(v, c_i) c_i \in W$ ("rzut ortogonalny")

Wtedy $v - v' \in W^\perp$ ...

Z (*): $\dim W^\perp = 1$.

Niech $0 \neq v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pokażemy, że $\Phi_A(v,v) > 0$.

1°. $v \in W$: jasne, bo $\Phi_A\restriction_W$: iloczyn skalarny.

2°. $v \in W^\perp$: niech $c_{n+1} = v$ i $a = \Phi_A(v,v)$.

Wtedy $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{c_{n+1}\}$: baza $\mathbb{R}^{n+1}$ t. że:

- dla $1 \leq i < j \leq n+1$, $\Phi_A(c_i, c_j) = 0$
- dla $1 \leq i \leq n$, $\Phi_A(c_i, c_i) = \Phi(c_i, c_i) = 1$

(bo $\mathcal{C}$ baza o.n. w (W, Φ))

$$m_{\mathcal{C}'}(\Phi_A) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & a \end{bmatrix} \text{ diagonalna.}$$

stąd $\det(m_{\mathcal{C}'}(\Phi_A)) = a$

$$\| $$

$$\det(m_{\mathcal{C}'\mathcal{E}}(id)^T \overbrace{m_{\mathcal{E}}(\Phi_A)}^{A} m_{\mathcal{C}'\mathcal{E}}(id)) =$$

$$= \alpha^2 \det A > 0, \text{ więc } a > 0, \text{ tu } \alpha = \det(m_{\mathcal{C}'\mathcal{E}}(id))$$

3°. $v \notin W$ i $v \notin W^\perp$. Z (*): $v = v' + v''$, $\underset{\neq 0}{v'} \in W$, $\underset{\neq 0}{v''} \in W^\perp$.

$\Phi_A(v', v'') = 0$, $\Phi_A(v', v') > 0$, $\Phi_A(v'', v'') > 0$, więc

$$\Phi_A(v,v) = \Phi_A(v'+v'', v'+v'') = \underbrace{\Phi_A(v', v')}_{>0} + \underbrace{\Phi_A(v'', v'')}_{>0} +$$

$$+ \underbrace{2\Phi_A(v', v'')}_{0} > 0 \qquad \square$$