(V : przestrzeń euklidesowa, $\dim V < \infty$.)

Lemat 12.1. V : p. liniowa $/\mathbb{R}$

$\infty > \dim V > 0$, $F : V \longrightarrow V$ liniowe $\Rightarrow$ istnieje $W < V$

F-niezmiennicza [tzn. $F[W] \subseteq W$], $\dim W = 1$ lub 2.

<u>D-d.</u> $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza, $A = m_{\mathcal{B}}(F)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong", "\Phi"'] & \mathbb{R}^n \\ v \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \arrow[r, mapsto] & {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong", "\Phi"'] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_A"] \\ V \arrow[r, "\cong", "\Phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Wystarczy znaleźć F_A-niezmienniczą

$W < \mathbb{R}^n$, $\dim W = 1$ lub 2

(wtedy $\Phi^{-1}[W]$: F niezmiennicza)

$$\begin{array}{ccccc} F_A & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & \cap\!| & & \cap\!| \\ \hat{F}_A & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$\hat{F}_A$: zespolone przekształcenie liniowe o macierzy A.

$\varphi_A(x)$ ma pierwiastek $\lambda \in \mathbb{C}$

$\uparrow$ wartość własna $\hat{F}_A$.

wsc: istnieje $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$, t.że $\hat{F}_A(Z) = \lambda Z$, tzn:

$$A \cdot [Z] = \lambda [Z]$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$z_j \in \mathbb{C}$ $\qquad z_j = x_j + i y_j$ dla $j = 1, \dots, n$

$\cancel{Z = X +}$ $\qquad X, \; Y \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + i y_1 \\ x_2 + i y_2 \\ \vdots \\ x_n + i y_n \end{bmatrix} = \overset{X}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}} + i \overset{Y}{\overset{\shortparallel}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}} = X + iY.$$

$\lambda = a + bi, \; a, b \in \mathbb{R}.$

$$\hat{F}_A(Z) = \hat{F}_A(X + iY) = \underset{\hat{F}_A(X)}{\underset{\shortparallel}{F_A(\overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\downarrow}{X}})}} + i \underset{F_A(Y)}{\underset{\shortparallel}{F_A(\overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\downarrow}{Y}})}}$$

$$\mathrm{Re}(\hat{F}_A(Z)) = F_A(X), \quad \mathrm{Im}\, \hat{F}_A(Z) = F_A(Y).$$

$$\hat{F}_A(Z) = \lambda Z = \underbrace{(a + bi)}_{\lambda} \underbrace{(X + iY)}_{Z} = (aX - by) + i(bX + aY).$$

$$\underset{\hat{F}_A(Z)}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Re}(\lambda Z)}} = aX - bY, \quad \mathrm{Im}(\lambda Z) = bX + aY.$$

$\hat{F}_A(Z)$, więc

$$F_A(X) = \cancel{A}\, aX - bY, \quad F_A(Y) = bX - aY.$$

Niech $W = \mathrm{Lin}(X, Y) < \mathbb{R}^n$. $\quad F_A(W) \subseteq W$ oraz

$$0 < \dim W \leq 2.$$

Teraz V: euklidesowa ~~[unitarna]~~,

$\dim V < \infty$, $F : V \longrightarrow V$ izometria liniowa.

Lemat 12.2. (V: euklidesowa lub unitarna)
Załóżmy, że $W < V$ F-niezmiennicza. Wtedy

$W^{\perp}$ też F-niezmiennicza.

D-d. $F[W] < W$ więc $\underline{F[W] = W}$ (bo $F : 1\text{-}1$, więc $F\restriction_W : W \longrightarrow W$: na)

- Załóżmy, że $v \in W^{\perp}$, tzn. $v \perp w$ dla wszystkich $w \in W$.

Pokażemy, że $F(v) \in W^{\perp}$:

Niech $w' \in W$. Skoro $F[W] = W$, to $w' = F(w)$ dla pewnego $w \in W$.

$$\langle F(v), w' \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ ortogonalne}}}{=} \langle v, w \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ v \in W^{\perp},\, w \in W}}{=} 0$$

więc $F(v) \perp w'$ dla każdego $w' \in W$.

stąd $F(v) \in W^{\perp}$. Czyli $F[W^{\perp}] \subseteq W^{\perp}$.

Lemat 12.3. Załóżmy, że $\dim V = 1$, $F : V \longrightarrow V$ ortogonalne.

Wtedy $F = id_V$ lub $F = -id_V$.

D-d. Niech $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$. $V = \mathrm{Lin}(v_0)$, $F(v_0) \in V$, $F(v_0) = tv_0$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$

więc t: wartość własna F.

z Uwagi 11.13: $|t| = 1$, więc $t = 1$ lub $t = -1$.

Wtedy dla każdego $v \in V$:

$v = sv_0$ dla pewnego $s \in \mathbb{R}$

więc $F(v) = F(sv_0) = sF(v_0) = stv_0 = tsv_0 = tv$.

dlatego $F = id_V$ (gdy $t = 1$) i $F = -id_V$ (gdy $t = -1$)

Lemat 12.4.

Zał, że $\dim V = 2$, $F : V \longrightarrow V$ ortogonalne.

Wtedy w pewnej bazie o.n. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} \subseteq V$

$m_{\mathcal{B}}(F)$ jest jednej z postaci:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det = -1$; (b), (c): $\det = 1$

F: odbicie względem $\mathrm{Lin}(b_1)$; obrót o kąt α wokół 0 (przeciwnie do zegara) ; id_V.

D-d. $V = \mathbb{E}^2$

bso. ~~$V = \mathbb{R}^2$~~, $\mathcal{B} = \{E_1, E_2\} = \mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$,

$m_{\mathcal{E}}(F)$ ortogonalna, postaci (a), (b), lub (c).

Ok, więcej szczegółów:

bso $V = \mathbb{E}^2$. Niech $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
baza o.n.

Wtedy $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ izometria liniowa, więc:

(1) • odbicie względem prostej przechodzącej przez 0

lub

(2) • obrót wokół zera o kąt α.

lub

(3) • identyczność.

ćwiczenie.

W przypadku (1) wybieramy bazę o.n. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ jak w (a)

W przypadkach (2), (3) $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ dobra.

Tw. 12.5. Zał., że $F: V \longrightarrow V$ ortogonalne, $\dim V < \infty$

Wtedy w pewnej bazie o.n. $\mathcal{B} \subseteq V$, $m_{\mathcal{B}}(F)$ jest postaci:

$$(*) \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & & & 0 \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_k \end{bmatrix}, \text{ gdzie } C_i = \pm 1 \text{ lub } \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Czyli:

F: złożenie pewnej liczby odbić względem hiperpłaszczyzn przechodzących przez zero i obrotów wokół 0 w pewnych płaszczyznach $< V$.

D-d. Z lematów 12.1 i 12.2:

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k, \text{ gdzie } V_1, \ldots, V_k: F\text{-niezmiennicze},$$

$V_1 \supseteq B_1 \ \ldots \ V_k \supseteq B_k$ – bazy o.n.

- parami $\perp$
- $\dim V_i = 1$ lub 2

$B_i \subseteq V_i$: baza o.n. dla $i = 1, \ldots, k$.

t.że $m_{B_i}(F|_{V_i})$ postaci C_i.

Wtedy ~~$\mathcal{C} = \mathcal{B}_1$~~

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$: baza o.n. V dobra,

$m_{\mathcal{B}}(F)$ postaci $(*)$.

Wn. 12.6. Zał. że V: przestrzeń euklidesowa, $\dim V < \infty$,

$F: V \longrightarrow V$ izometria ~~...~~.

(1) F jest liniowa $\Longleftrightarrow F(0) = 0$.

(2) $F = \underbrace{T_u}_{\text{translacja o } u} \circ \underbrace{F'}_{\text{izometria liniowa}}$ dla pewnego $u \in V$

D-d. (1) zadanie

(2) Niech $u = F(0)$. niech $F' = T_{-u} \circ F$.

· F': izometria (bo: złożenie izometrii jest izometrią).

· $F'(0) = 0$ $\left(F'(0) = T_{-u}(\underbrace{F(0)}_{u}) = T_{-u}(u) = 0 \right)$.

z (1): F' liniowa

i $F' = T_{-u} \circ F \Longrightarrow T_u \circ F' \overset{!}{=} \overbrace{T_u \circ T_{-u}}^{id_V} \circ F = F$.

TW. 12.7. Zał, że V: unitarna, $0 < \dim V < \infty$, $F : V \longrightarrow V$ unitarne. Wtedy

Istnieje baza o.n. $\mathcal{B} \subseteq V$ złożona z wektorów własnych F t. że $m_{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $|\lambda_i| = 1$.

D-d F ma (wartość własną λ_1 i) wektor własny $0 \neq b_1$ dla λ_1, bso: $\|b_1\| = 1$.

~~Niech W_1~~ Niech $W_1 = \mathrm{Lin}(b_1)$: F-niezmiennicza.

jak w Lemacie 12.2: $W_1^\perp$ też F-niezmiennicze.

$F|_{W_1^\perp}$ ma wartość własną λ_2 i wektor własny b_2 dla λ_2

: $|\lambda_2| = 1$ $\|b_2\| = 1$

Znajdujemy

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k \text{ tże } W_i : \text{parami } \perp$$

$$F[W_i] \subseteq W_i.$$

Przestrzeń sprzężona (dualna) jeszcze raz

V: p. liniowa $/\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$

$\dim V = n$ przestrzeń sprzężona (dualna) do V.

$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ baza $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b_n^*\} \subseteq V^*$

baza sprzężona do $\mathcal{B}$
dualna

$$b_i^* : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} \text{ delta Diraca}$$

$$b_i^*\left(\sum t_j b_j\right) = t_j$$

Uwaga 12.8. Izomorfizm $\Phi : V \longrightarrow V^*$ taki, że:

$$\left(\begin{array}{c} b_i \longmapsto b_i^* \\ \Phi\left(\sum t_i b_i\right) = \sum t_i b_i^* \end{array} \right)$$

on nie jest kanoniczny

(zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$).

$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{R}).$$

Fakt 12.9. Istnieje $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ kanoniczny
~~(dim V < ∞)~~ monomorfizm liniowy.

(nie zależy od wyboru bazy)

- Gdy $\dim V < \infty$, to φ : izomorfizm.

D-d $V \ni v \longmapsto \varphi(v) : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(v)(f) := f(v).$$

- φ liniowe $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$
- φ : 1-1 : $\ker \varphi$: $\varphi(v) = 0 \in V^{**}$

tzn: $\forall f \in V^* \; \varphi(v)(f) = f(v) = 0$

$$\Downarrow$$

$$v = 0.$$

Kategorie : "struktura spojrzenia na matematykę" (i nie tylko).

Kategoria $\mathcal{A}$:

(1) klasa obiektów $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ (np: obiekty: przestrzenie liniowe / $\mathbb{R}$)

(2) dla każdych $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

zbiór $\mathrm{Mor}(A, B)$ „morfizmy z A do B"

(np.: $\mathrm{Hom}(A, B)$ przestrzenie liniowe)

(3) odwzorowanie $\circ : \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C)$

(składanie morfizmów)

diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Notacja

$f \in \mathrm{Mor}(A, B)$

$\equiv$

$$\left(\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ f : A \longrightarrow B \end{array} \right)$$

spełniające następujące aksjomaty:

KAT1. $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(A', B') = \emptyset$,

chyba że $A = A'$, $B = B'$

(tzn. gdy $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, to f pamięta jedyne A i B

że $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$

dziedzina f kodziedzina f

)

(inaczej niż w teorii mnogości)

KAT 2.

$\forall A \in Ob(\mathcal{A})\ \exists id_A \in Mor(A, A)$ (morfizm identycznościowy) $\forall B, C \in Ob(\mathcal{A})$

$$\forall g \in Mor(B, A)\ \forall h \in Mor(A, C)$$

$$(id_A \circ g = g \text{ i } h \circ id_A = h)$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[ur, "g"] & & C \end{tikzcd}$$

KAT 3: $\circ$ jest łączne: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

(gdy $f, g, h \in Mor(\mathcal{A})$ o odpowiednich dziedzinach i kodziedzinach)

$$Mor(\mathcal{A}) = \dot{\bigcup_{A, B \in Ob(\mathcal{A})}} Mor(A, B)$$

Przykłady.

1. Set: kategoria zbiorów

$Ob(set)$: zbiory $\quad Mor(A, B) = \{$ funkcje $: A \to B\}$ (pamiętające A i B)

$\circ$: składanie funkcji.

2. $Vect_{\mathbb{R}}$: kategoria przestrzeni liniowych $/\mathbb{R}$.

obiekty: przestrzenie liniowe $/\mathbb{R}$

morfizmy: przekształcenia liniowe $V \to W$.

3. $\mathcal{A}$: $\cdot$ $Ob(\mathcal{A}) = \{*\}$

$\cdot$ $Mor(A) = S_n = \{$ permutacje liczb $1, \dots, n\}$.

$\cdot$ $\circ$: składanie funkcji.

W kategorii $\mathcal{A}$, używając $\circ$ można zdefiniować

mono, auto, epi, izo — morfizm.

Def. (1) f : endomorfizm, gdy $f \in Mor(A, A)$ dla pewnego $A \in Ob(\mathcal{A})$

(2) $f \in Mor(A, B)$ jest izomorfizm, gdy:

$$\exists g \in Mor(B, A) \; (g \circ f = id_A \text{ i } f \circ g = id_B)$$

Odwzorowania między kategoriami:

funktory (kontrawariantne, kowariantne).

Def. $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funktor kowariantny,

gdy

(1) $F : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Ob(\mathcal{B})$ funkcja

(2) Dla każdych $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, $F : Mor(A, B) \longrightarrow Mor(F(A), F(B))$

t. że:

FUN1. $\forall A \in Ob(\mathcal{A})\quad F(id_A) = id_{F(A)}$

FUN2. Jeśli w $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C \end{tikzcd}$$

to w $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} & F(B) \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(A) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g\circ f)"'] & & F(C) \end{tikzcd}$$

tzn: $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$

Funktor F kontrawariantny:

zamiast (2): (2'):

$$F: Mor(A, B) \longrightarrow Mor(F(B), F(A))$$

(odwraca kierunek strzałek)

FUN1: bez zmian

FUN2':

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & C \end{tikzcd} \quad\longrightarrow\quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "F(f)"'] & \\ A & & C \arrow[ul, "F(g)"'] \arrow[ll, "F(g\circ f)"] \end{tikzcd},$$

tzn: $F(g\circ f) = F(f)\circ F(g)$