

## Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 2

1. Niech  $a$  będzie liczbą niewymierną i  $n$  liczbą całkowitą dodatnią. Pokaż, że  $\lfloor an \rfloor + \lfloor (1-a)n \rfloor = n - 1$ . Jak wygląda analogiczna równość dla powały?
2. Oblicz dla dowolnych naturalnych  $x \in \mathbb{R}$  i  $m \in \mathbb{N}$  wyrażenie  $\lfloor x/m \rfloor + \lfloor (x+1)/m \rfloor + \dots + \lfloor (x+m-1)/m \rfloor$ .
3. Dla każdej z następujących zależności rekurencyjnych określ liczbę warunków początkowych niezbędnych do jednoznacznego określenia wartości elementów ciągu dla wszystkich  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 
  - (a)  $a_n = na_{n-2}$ ,    (b)  $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ ,    (c)  $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ .
4. Rozwiąż następujące zależności:
  - (a)  $f_n = f_{n-1} + 3^n$  dla  $n > 1$  i  $f_1 = 3$ ;
  - (b)  $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$  dla  $n > 1$  i  $h_1 = 1$ ;
  - (c)  $l_n = l_{n-1}l_{n-2}$  dla  $n > 2$  i  $l_1 = l_2 = 2$ .
5. Rozwiąż zależności rekurencyjne
  - (a)  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 2/a_{n-1}$ ,
  - (b)  $b_0 = 0$ ,  $b_n = 1/(1 + b_{n-1})$ ,
  - (c)  $c_0 = 1$ ,  $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$ ,
  - (d)  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$ .
6. Rozwiąż zależności rekurencyjne
  - (a)  $y_0 = y_1 = 1$ ,  $y_n = (y_{n-1}^2 + y_{n-2})/(y_{n-1} + y_{n-2})$
  - (b)  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = 2$ ,  $z_n = (z_{n-1}^2 - 1)/z_{n-2}$
  - (c)  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_n = (t_{n-1} - t_{n-2} + 3)^2/4$
7. Rozwiąż zależności rekurencyjne
  - (a)  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ ,
  - (b)  $b_0 = 1/2$ ,  $nb_n = (n-2)b_{n-1} + 1$ ,
  - (c)  $c_0 = 0$ ,  $nc_n = (n+2)c_{n-1} + n + 2$ ,
  - (d)  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 2$ ,  $nd_n = (n-2)!d_{n-1}d_{n-2}$ .
8. Rozwiąż zależność rekurencyjną  $a_n = (1 + a_{n-1})/a_{n-2}$  przy warunkach początkowych  $a_0 = \alpha$ ,  $a_1 = \beta$ . Jakie muszą być  $\alpha, \beta$ , żeby ciąg  $a_n$  był określony dla wszystkich  $n$ ?
9. Rozwiąż zależności rekurencyjne
  - (a)  $f(1) = 1$ ,  $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + 1$ ,
  - (b)  $g(0) = 0$ ,  $g(n) = g(\lfloor n/2 \rfloor) + \lfloor \log_2 n \rfloor$ .
10. Podwójna wieża Hanoi składa się z  $2n$  krążków  $n$  różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych by przenieść wieżę z pręta  $A$  na  $B$ , gdy krążki równej wielkości nie są rozróżnialne.
11. Na płaszczyźnie danych jest  $n$  okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Rozwiąż zadanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
12. Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z pojedynczego grubego kawałka za pomocą  $n$  cięć nożem? Zakładamy że każde cięcie jest wyznaczone przez płaszczyznę przecinającą kawałek sera.
13. Sprawdź, że liczby harmoniczne  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  spełniają zależność rekurencyjną  $H_n = \frac{1}{n}(H_{n-1} + H_{n-2} + \dots + H_1) + 1$  dla  $n > 1$ .
14. Wykaż prawdziwość równości (F.Lucas, 1842-1891):
  - (a)  $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ,
  - (b)  $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$  dla  $n \geq 1$ ,
  - (c)  $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ ,
  - (d)  $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$ .
15. Pokaż, że  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ . Dla jakich  $n$  mamy  $F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ?