Algebra I (ISIM), lista 11, ćwiczenia 21.05.24, deklaracje do godz. 11:00.

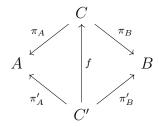
Teoria: Kategorie: definicje, podstawowe przykłady. Funktory kowariantne i kontrawariantne. Sprzężenie jako funktor kontrawariantny w kategorii  $Vect_{\mathbb{R}}$ .  $m_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}(f^*) = m_{\mathcal{BC}}(f)^T$ .

(Anty)izomorfizm Frecheta-Riesza. Indukowany iloczyn skalarny w  $V^*$ .  $f^*$  ortogonalne [unitarne], jeśli f ortogonalne [unitarne].  $f^+$ : hermitowskie sprzężenie f: definicja, własności. Hermitowskie sprzężenie macierzy. Rozkład (jednoznaczny) endomorfizmu przestrzeni euklidesowej [unitarnej] na sumę endomorfizmu symetrycznego (hermitowskiego) i antysymetrycznego (antyhermitowskiego). Diagonalizowalność endomorfizmu hermitowskiego w bazie ortonormalnej. Diagonalizowalność rzeczywistej macierzy symetrycznej i macierzy hermitowskiej. Rozkład SVD.

V,W oznaczają przestrzenie liniowe nad  $\mathbb{R},\ \mathcal{A},\mathcal{B}$  oznaczają kategorie, A,B,C oznaczają obiekty kategorii  $\mathcal{A}$ .

- (i) Udowodnić, że morfizm id<sub>A</sub> w aksjomacie KAT2 jest jedyny.
  (ii) Załóżmy, że f ∈ Mor(A, B) jest izomorfizmem. Wtedy istnieje g ∈ Mor(B, A) jak w definicji izomorfizmu. Udowodnić, że takie g jest jedyne. Nazywa się je odwrotnością f: g = f<sup>-1</sup>.
- 2. Załóżmy, że  $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$  jest funktorem (ko- lub kontrawariantnym), zaś f jest izomorfizmem w kategorii  $\mathcal{A}$ . Udowodnić, że  $\Phi(f)$  jest izomorfizmem w kategorii  $\mathcal{B}$ .
- 3. Produktem obiektów A,B (oznaczenie  $A\times B$ ) nazywamy obiekt C wraz z morfizmami  $\pi_A:C\to A$  i  $\pi_B:C\to B$  spełniającymi następujący warunek uniwersalności:

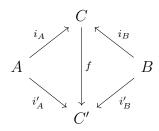
Dla wszystkich  $C', \pi'_A: C' \to A$  i  $\pi'_B: C' \to B$  istnieje jedyny morfizm  $f: C' \to C$  taki, że diagram (\*) poniżej komutuje:



Udowodnić, że jeśli  $(C, \pi_A, \pi_B)$  oraz  $(C', \pi'_A, \pi'_B)$  są produktami A i B, to f w diagramie (\*) jest izomorfizmem.

4. – Koproduktem obiektów A i B (oznaczenie  $A \sqcup B$ ) nazywamy obiekt C wraz z morfizmami  $i_A:A\to C$  i  $i_B:B\to C$  spełniającymi następujący warunek uniwersalności (dualny do warunku uniwersalności dla produktu):

Dla wszystkich  $C', i'_A : A \to C'$  i  $i'_B : B \to C'$  istnieje jedyny morfizm  $f : C \to C'$  taki, że diagram (\*\*) poniżej komutuje:



Udowodnić, że jeśli  $(C, i_A, i_B)$  i  $(C', i'_A, i'_B)$  są koproduktami A i B, to f w diagramie (\*\*) jest izomorfizmem.

- 5. (a) Udowodnić, że w kategorii zbiorów Set następujące układy są produktami zbiorów A i B:
  - (i)  $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ , gdzie  $A \times B$  to produkt kartezjański zbiorow A i B, zaś  $\pi_A, \pi_B$  to rzuty na osie.
  - (ii)  $(A \sqcap B, \pi'_A, \pi'_B)$ , gdzie  $A \sqcap B$  oznacza zbiór wszystkch funkcji  $f : \{0, 1\} \to A \cup B$  takich, że  $f(0) \in A$  i  $f(1) \in B$ , zaś  $\pi'_A : A \sqcap B \to A$ ,  $\pi'_B : A \sqcap B \to B$  dane są przez  $\pi'_A(f) = f(0)$ ,  $\pi'_B(f) = f(1)$ .
  - (b) Udowodnić, ze w kategorii zbiorów Set dla każdych zbiorów A, B istnieje koprodukt  $(A \sqcup B, i_A, i_B)$ .
- 6. W kategorii zbiorów Set,dla ustalonego zbioru Aokreślamy funktor  $_*:Set \rightarrow Set$  przez:
  - (i) Dla X: obiektu Set:  $X_* = X^A$  (tj. zbiór wszystkich funkcji  $A \to X$ ).
  - (ii) Dla  $f: X \to Y$  (morfizmu Set),  $f_*: X_* \to Y_*$  jest dane przez  $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$ . Sprawdzić, że \* jest funktorem kowariantnym.
- 7. Udowodnić, ze w kategorii  $Vect_{\mathbb{R}}$  przestrzeni liniowych nad  $\mathbb{R}$  produkt przestrzeni  $V \times W$  jest produktem i koproduktem przestrzeni V i W (z odpowiednimi morfizmami).
- 8. Załóżmy, że  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$  jest bazą V, zaś  $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$  bazą  $V^*$  sprzężoną do  $\mathcal{B}$ . Niech  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ , gdzie  $c_1 = b_1 + b_2 + b_3, c_2 = b_2, c_3 = b_3$  oraz niech  $\mathcal{C}^* = \{c_1^*, c_2^*, c_3^*\}$  będzie bazą  $V^*$  sprzężoną do  $\mathcal{C}$ . Wyrazić wektory  $c_1^*, c_2^*, c_3^*$  jako liniowe kombinacje wektorów  $b_1^*, b_2^*, b_3^*$ .
- 9. Załóżmy, że  $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$  jest bazą  $V, \mathcal{B}^* = \{b_1^*, \ldots, b^*\} \subseteq V^*$  jest bazą sprzężoną do  $\mathcal{B}$ , zaś  $\mathcal{B}^{**} = \{b_1^{**}, \ldots, b_n^{**}\} \subseteq V^{**}$  bazą sprzężoną do  $\mathcal{B}^*$ . Niech  $\varphi: V \to V^{**}$  będzie kanonicznym izomorfizmem. Udowodnić, że  $\varphi(b_i) = b_i^{**}$ .
- 10. Załóżmy, że  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  jest bazą  $V^*$ . Dowieść, że istnieje dokładnie jedna baza  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$  taka, że  $\Phi$  jest sprzężona do  $\mathcal{B}$  (tzn.  $\varphi_i = b_i^*$ ). (wsk: skorzystać z poprzedniego zadania).

- 11. Załóżmy, że V ma wymiar skończony oraz  $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$ . Udowodnić, że (a)  $Lin(\varphi_1) = Lin(\varphi_2) \iff Ker(\varphi_1) = Ker(\varphi_2)$ , (b)\*  $\dim_{V^*} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = codim_V \bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i)$ .
- 12. Załóżmy, że f,g są przekształceniami liniowymi przestrzeni euklidesowych skończonego wymiaru. Udowodnić, że  $(f \circ g)^+ = g^+ \circ f^+$  (pod warunkiem, że złożenia mają sens), bez rachunków, odwołując się do funktorialności sprzężenia w kategorii  $Vect_{\mathbb{R}}$  i używając izomorfizmu Frecheta-Riesza.
- 13. Załóżmy, że A jest macierzą rzeczywistą. Udowodnić, że macierze  $A^TA$  i  $AA^T$  mają te same dodatnie wartości własne, licząc z krotnościami.
- 14. Załóżmy, że  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Znaleźć macierze U i D w rozkładzie  $A=UDV^T$  według wartości singularnych macierzy A.
  - (b)<br/>– Dodatkowo w (a) znaleźć macierz V. Wskazówka: Najpierw znaleźć rozkład SVD dla macierzy  $A^T$ .