Algebra I (ISIM), lista 14, ćwiczenia 13.06.24, deklaracje do godz. 11:00.

Materiał z tej listy nie obowiązuje na egzaminie.
Teoria: produkt i (abstrakcyjna) suma prosta przestrzeni liniowych. Lemat o faktoryzacji przekształcenia liniowego. Produkt tensorowy przestrzeni liniowych: konstrukcja, własność uniwersalności, definicja abstrakcyjna. Własności mnożenia tensorowego. Przykłady: $\mathbb{R}[X,Y]$ jako $\mathbb{R}[X]\otimes\mathbb{R}[Y]$, produkt Kroneckera (macierze). Produkt zewnętrzny przestrzeni liniowej, własności.

1. Lemat o faktoryzacji. Załóżmy, że $f : V \to W$ jest liniowe oraz $U < Ker(f)$. Udowodnić, że istnieje jedyne odwzorowanie liniowe $f' : V/U \to W$ takie, że $f = f' \circ j$, gdzie $j : V \to V/U$ jest ilorazowe.

2. (a)* Udowodnić, że gdy I jest nieskończony oraz $V_i \neq \{0\}$ dla $i \in I$,
$$\dim \prod_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I} \dim V_i$$
(b) Udowodnić, że
$$\dim \bigoplus_{i\in I} V_i = \sum_{i\in I} \dim V_i$$
Uwaga: tu $\bigoplus_{i\in I} V_i = \{\langle v_i\rangle \in \prod_{i\in I} V_i : |\{i\in I : v_i \neq 0\}| < \aleph_0\}$.

3. Udowodnić, że:
(a) $(\mathbb{R}[X,Y],\varphi)$ jest produktem tensorowym przestrzeni liniowych $\mathbb{R}[X]$ i $\mathbb{R}[Y]$, gdzie $\varphi(V(X),W(Y)) = V(X)\cdot W(Y)$.
(b) Produkt Kroneckera macierzy jest produktem tensorowym.

4. Udowodnić izomorficzność następujących przestrzeni poprzez udowodnienie istnienia (kanonicznych) izomorfizmów wskazanych w nawiasach kwadratowych.
(a)– $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ $[v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3]$
(b) $\mathbb{R} \otimes V_1 \cong V_1$ $[t \otimes v_1 \mapsto tv]$
(c)– $V_1 \otimes (V_2 \oplus V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \oplus V_1 \otimes V_3$ $[v_1 \otimes (v_2 + v_3) \mapsto v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3]$

5. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest rozszerzeniem ciał (np. $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$) oraz V jest przestrzenią liniową nad K. L jest też (w naturalny sposób) przestrzenią liniową nad K. Zatem $L \otimes V$ jest przestrzenią liniową nad K. Jest ona również przestrzenią liniową nad L. Dodawanie już mamy. Mnożenie przez skalary $\lambda \in L$: Udowodnić, że:
(a) Dla $\lambda \in L$ istnieje jedyne odwzorowanie K-liniowe $l_\lambda : L \otimes V \to L \otimes V$ takie, że $l_\lambda(l \otimes v) = (\lambda l) \otimes v$ dla wszystkich $l \in L$ i $v \in V$.
(b) $(L \otimes V, +, l_\lambda)_{\lambda\in L}$ jest przestrzenią liniową nad L.
(c) jeśli $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in I}$ jest bazą przestrzeni V, to $\{1 \otimes b_i : i \in I\}$ jest bazą L-przestrzeni $L \otimes V$.

6. Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Udowodnić, że $\mathbb{C} \otimes V \cong V \oplus iV$ jest kompleksyfikacją V.

7. Załóżmy, że $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą przestrzeni V.
Niech $v = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} b_i \otimes b_j$. Zbadać, kiedy (tzn. dla jakich współczynników a_{ij}) tensor v jest tensorem prostym. (wsk: v jest tensorem prostym, gdy $v = (\sum_i t_i b_i) \otimes (\sum_i s_i b_i)$ dla pewnych skalarów t_i, s_i. Skorzystać z faktu, że $\{b_i \otimes b_j\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ jest bazą $V \otimes V$.)

8. Załóżmy, że $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^n$. Udowodnić, że
$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n = det(A_1, \ldots, A_n) E_1 \wedge \ldots \wedge E_n$.

9. Załóżmy, że każdy z układów wektorów $v_1, \ldots v_n$ i $w_1, \ldots, w_n$ w przestrzeni V jest liniow niezależny. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
(i) $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = r w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$
(ii) $Lin(v_1, \ldots, v_n) = Lin(w_1, \ldots, w_n)$.