Algebra liniowa 2

Tomasz Elsner

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wrocław 2023

Spis treści

Rozdział 0

Struktury algebraiczne

Głównym obszarem zainteresowania algebry (w tym algebry liniowej) są operacje przypominające działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych, tyle, że stosowane do bardziej skomplikowanych obiektów – wektorów, macierzy, wielomianów, funkcji, ciągów itp. Z sytuacją, gdy dodawanie (oznaczane symbolem $+$) lub mnożenie (oznaczane symbolem $\cdot$) stosowane były do działań na innych obiektach niż liczby rzeczywiste zetknęliśmy się już w ramach algebry liniowej (dodając wektory w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, dodając i mnożąc liczby zespolone, dodając i mnożąc macierze) oraz analizy matematycznej (dodając i mnożąc funkcje, a także – jako szczególne przypadki funkcji – wielomiany i ciągi).
Na początek przypomnimy poznane dotychchcas dodawania.

Przykład 1 (dodawanie wektorów w $\mathbb{R}^2$)
Jeśli $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ są wektorami w $\mathbb{R}^2$, to ich *sumą* nazywamy wektor:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

Elementem neutralnym dodawania jest wektor zerowy $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, a elementem przeciwnym do wektora $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$ jest wektor $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$.

Przykład 2 (dodawanie wektorów w $\mathbb{R}^3$)
Jeśli $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ są wektorami w $\mathbb{R}^3$, to ich *sumą* nazywamy wektor:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix}$$

Elementem neutralnym dodawania jest wektor zerowy $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a elementem przeciwnym do wektora $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ jest wektor $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$.

Przykład 3 (dodawanie liczb zespolonych)
Jeśli $w = a + bi$ oraz $z = c + di$ są liczbami zespolonymi (gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), to ich *sumą* nazywamy liczbę zespoloną:

$$w + z = (a + c) + (b + d)i$$

Elementem neutralnym dodawania jest liczba $0 = 0 + 0i$, a elementem przeciwnym do liczby zespolonej $z = a + bi$ jest liczba $-z = -a - bi$.

Przykład 4 (dodawanie macierzy rozmiaru $m \times n$)

Jeśli $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ są macierzami rozmiaru $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich *sumą* nazywamy macierz:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementem neutralnym dodawania nazywamy macierz $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, a elementem przeciwnym do macierzy A nazywamy macierz $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Przykład 5 (dodawanie funkcji rzeczywistych)

Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $g : D \to \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi[1], to ich *sumą* nazywamy funkcję $f + g$ zdefiniowaną wzorem:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dla każdego } x \in D$$

np. sumą funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ jest funkcja $(f+g)(x) = \sin x + \cos x$. Elementem neutralnym dodawania jest funkcja tożsamościowo równa zero, a elementem przeciwnym do funkcji f jest funkcja $-f$ zdefiniowana wzorem:

$$(-f)(x) = -f(x) \text{ dla każdego } x \in D$$

np. elementem przeciwnym do funkcji $f(x) = \sin x$ jest funkcja $(-f)(x) = -\sin x$.

Szczególnym przypadkiem dodawania funkcji jest dodawanie wielomianów:

Przykład 6 (dodawanie wielomianów)

Jeśli $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ oraz $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ są wielomianami[2] o współczynnikach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich *sumą* nazywamy wielomian $P + Q$ zdefiniowany wzorem:

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

np. sumą wielomianu $P(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2$ i wielomianu $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ jest wielomian $(P + Q)(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$. Elementem neutralnym dodawania jest wielomian zerowy (wielomian o wszystkich współczynnikach równych zero), a elementem przeciwnym do wielomianu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jest wielomian $(-P)(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$.

Innym szczególnym przypadkiem dodawania funkcji rzeczywistych jest dodawanie ciągów liczbowych[3], pokazane w kolejnym przykładzie.

[1] Jako dziedzinę D zazwyczaj będziemy przyjmować zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, przedział otwarty (a, b) albo przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

[2] Jeśli wielomiany P i Q są różnych stopni, to jeden z nich można zapisać z wykorzystaniem dodatkowych współczynników zerowych, np. $3x + 1 = 0x^3 + 0x^2 + 3x + 1$.

[3] Ciąg liczbowy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ o wyrazach rzeczywistych można traktować jako funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $a(n) = a_n$.

Przykład 7 (dodawanie ciągów)
Jeśli $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są ciągami o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich sumą nazywamy ciąg:
$$(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$$
Na przykład sumą ciągu $a_n = 2n+1$ i ciągu $b_n = n^2$ jest ciąg $a_n+b_n = n^2+2n+1$. Elementem neutralnym dodawania jest ciąg stale równy zero, a elementem przeciwnym do ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciąg $(-a_n)_{n=0}^{\infty}$

Wszystkie zdefiniowane powyżej działania mają pewne wspólne własności (które są abstrakcyjnymi wersjami znanych praw arytmetyki liczb rzeczywistych). Własności te podsumujemy w następującej definicji (abstrakcyjnego) dodawania. Pojęcie *abstrakcyjnego dodawania* nie jest powszechnie używanym w matematyce pojęciem i zostało w niniejszym skrypcie wprowadzone jedynie ze względów dydaktycznych, by ułatwić czytelnikowi przejście od dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych do abstrakcyjnego pojęcia *działania*, które zostanie wprowadzone na początku kursu Algebra 1 i będzie wspólnym uogólnieniem dodawania i mnożenia.

Definicja 0.1: Dodawanie (abstrakcyjne)

Dodawaniem elementów zbioru S nazywamy działanie (oznaczane symbolem „+”), które każdej uporządkowanej parze elementów $a, b \in S$ przypisuje element $a + b \in S$ (zwany *sumą*) w taki sposób, że spełnione są następujące własności:

D1 *łączność*, tzn. dla dowolnych elementów $a, b, c \in S$ zachodzi warunek:
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

D2 *istnienie elementu neutralnego*, tzn. istnieje[4] taki element $0 \in S$ (zwany *elementem neutralnym dodawania* lub *zerem*), że dla dowolnego elementu $a \in S$ zachodzi warunek:
$$0 + a = a + 0 = a$$

D3 *istnienie elementu przeciwnego*, tzn. dla każdego elementu $a \in S$ istnieje[5] element $-a \in S$ (zwany *elementem przeciwnym do* a) spełniający warunek:
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

D4 *przemienność*, tzn. dla dowolnych elementów $a, b \in S$ zachodzi warunek:
$$a + b = b + a$$

Odejmowaniem elementów zbioru S nazywamy działanie odwrotne do dodawania, tzn. działanie zdefiniowane wzorem:
$$a - b = a + (-b)$$
gdzie $-b$ to element przeciwny do b (innymi słowy: odejmowanie elementu to dodawanie elementu do niego przeciwnego).

Spośród powyższych własności najmniej intuicyjna (i tym samym najtrudniejsza do zrozumienia) jest własność D1 (łączność dodawania). Rolą tej własności jest umożliwienie dodawania więcej niż dwóch elementów bez konieczności precyzowania kolejności wykonywania dodawań (tzn. kolejność nie ma wpływu na wynik), co pokazuje poniższy fakt.

[4]Element neutralny jest zawsze wyznaczony jednoznacznie. Fakt ten jest prostym wnioskiem z warunku D2, jednak jego dowód pominiemy.

[5]Dla każdego elementu a element przeciwny $-a$ jest wyznaczony jednoznacznie. Dowód tego faktu pomijamy.

Fakt 0.2: Łączność dodawania

Niech + będzie (abstrakcyjnym) dodawaniem[6] elementów zbioru S. Wówczas *sumą n elementów* $a_1, \ldots, a_n \in S$ nazywamy wynik działania:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

gdzie kolejność wykonywania dodawań jest dowolna i pozostaje bez wpływu na wynik.

Dowód. Zacznijmy od rozważenia sumy trzech elementów:

$$a_1 + a_2 + a_3$$

Kolejność dodawań w powyższym działaniu można ustalić na dwa sposoby:

- najpierw pierwsze dodawanie, a potem drugie: $(a_1 + a_2) + a_3$,
- najpierw drugie dodawanie, a potem pierwsze: $a_1 + (a_2 + a_3)$.

Zgodnie z prawem łączności D1, oba te sposoby prowadzą do tego samego wyniku. Przy dodawaniu czterech elementów:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

kolejność dodawań można ustalić na pięć sposobów:

- pierwsze i trzecie dodawanie, a potem drugie: $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$,
- pierwsze dodawanie, potem drugie, a na końcu trzecie: $((a_1 + a_2) + a_3) + a_4$,
- drugie dodawanie, potem pierwsze, a na końcu trzecie: $(a_1 + (a_2 + a_3)) + a_4$.
- drugie dodawanie, potem trzecie, a na końcu pierwsze: $a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)$,
- trzecie dodawanie, potem drugie, a na końcu pierwsze: $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$,

Wszystkie te sposoby prowadzą do tego samego wyniku, co widać stosując prawo łączności D1 najpierw do elementów $(a_1 + a_2)$, a_3, a_4:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = ((a_1 + a_2) + a_3) + a_4$$

następnie do elementów a_1, a_2, a_3:

$$((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 = (a_1 + (a_2 + a_3)) + a_4$$

potem do elementów a_1, $(a_2 + a_3)$, a_4:

$$(a_1 + (a_2 + a_3)) + a_4 = a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4)$$

i na końcu do elementów a_2, a_3, a_4:

$$a_1 + ((a_2 + a_3) + a_4) = a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$$

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić w przypadku $n \geq 5$ (wymaga to przeprowadzenia dowodu indukcyjnego, który pominiemy). $\square$

Drugi poznany typ działań to mnożenie, z którym zetknęliśmy się w kontekście mnożenia liczb zespolonych i mnożenia macierzy (na algebrze liniowej) oraz mnożenia funkcji, wielomianów i ciągów (na analizie matematycznej). Tak jak dodawanie, mnożenie przypisuje każdej uporządkowanej parze elementów ustalonego zbioru S element tego samego zbioru S (i takiej własności będziemy wymagać od każdej operacji, do której stosować będziemy termin *działanie*). W związku z tym mnożeniem (ani nawet działaniem) nie będziemy nazywać:

[6] Zgodnie z Definicją 0.1 jest to operacja dodawania *dwóch* elementów.

- mnożenia wektora przez skalary[7], gdyż wówczas pierwszy czynnik jest skalarem (elementem zbioru $\mathbb{R}$), a drugi czynnik jest wektorem (elementem zbioru $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$),
- iloczynu skalarnego[8], gdyż wówczas czynniki są wektorami (elementami zbioru $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$), natomiast iloczyn (wynik mnożenia) jest skalarem (elementem zbioru $\mathbb{R}$).

Przyjrzyjmy się poznanym dotychczas mnożeniom:

Przykład 8 (mnożenie liczb zespolonych)

Jeśli $w = a + bi$ oraz $z = c + di$ są liczbami zespolonymi (gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), to ich *iloczynem* nazywamy liczbę zespoloną:

$$w \cdot z = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Elementem neutralnym mnożenia jest liczba $1 = 1 + 0i$, a elementem odwrotnym do (niezerowej) liczby zespolonej $z = a + bi$ jest liczba $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$. Mnożenie liczb zespolonych jest przemienne.

Przykład 9 (mnożenie macierzy rozmiaru 2×2)

Jeśli $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ oraz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ są macierzami rozmiaru 2×2 o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich *iloczynem* nazywamy macierz:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Elementem neutralnym mnożenia jest macierz $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, a elementem odwrotnym do macierzy A (istniejącym tylko gdy $\det A \neq 0$) jest macierz $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Podobnie (korzystając ze wzorów z Algebry liniowej 1) definiujemy mnożenie macierzy rozmiaru 3×3 oraz określamy element neutralny mnożenia macierzy 3×3 i elementy odwrotne do macierzy 3×3.

Przykład 10 (mnożenie funkcji rzeczywistych)

Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $g : D \to \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi[9], to ich *iloczynem* nazywamy funkcję $f \cdot g$ zdefiniowaną wzorem:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ dla każdego } x \in D$$

np. iloczynem funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ jest funkcja $(f \cdot g)(x) = \sin x \cdot \cos x$. Elementem neutralnym mnożenia jest funkcja stale równa 1, a elementem odwrotnym[10] do funkcji f (istniejącym tylko wtedy, gdy f w żadnym punkcie nie przyjmuje wartości 0) jest funkcja $\frac{1}{f}$ zdefiniowana wzorem: $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$. Mnożenie funkcji jest przemienne.

Szczególnymi przypadkami mnożenia funkcji jest mnożenie wielomianów i mnożenie ciągów[11]:

[7] Operację tę zaliczymy do odrębnej kategorii operacji mnożenia przez skalary, omawianej w Definicji 0.5.

[8] Operację tę zaliczymy do odrębnej kategorii operacji iloczynu skalarnego, omawianej w Definicji 4.1.

[9] Jako dziedzinę D zazwyczaj będziemy przyjmować zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, przedział otwarty (a, b) albo przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

[10] Element odwrotny związany z działaniem mnożenia funkcji jest czym innym niż funkcja odwrotna. O funkcji odwrotnej traktuje Przykład 13.

[11] Ciąg liczbowy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ o wyrazach rzeczywistych można traktować jako funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $a(n) = a_n$.

Przykład 11 (mnożenie wielomianów)

Jeśli $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ oraz $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich *iloczynem* nazywamy wielomian $P \cdot Q$ zdefiniowany wzorem:

$$(P \cdot Q)(x) = (a_n b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_0 b_0)$$

np. iloczynem wielomianu $P(x) = x^2 + 3x - 2$ i wielomianu $Q(x) = x + 1$ jest wielomian $(P \cdot Q)(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2$. Elementem neutralnym mnożenia jest wielomian stale równy 1. Tylko wielomiany stałe są odwracalne. Mnożenie wielomianów jest przemienne.

Przykład 12 (mnożenie ciągów)

Jeśli $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są ciągami o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych), to ich iloczynem jest ciąg:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n \cdot b_n)_{n=0}^{\infty}$$

np. iloczynem ciągu $a_n = 2n$ i ciągu $b_n = n^2$ jest ciąg $a_n \cdot b_n = 2n^3$. Elementem neutralnym jest ciąg stale równy 1, a elementem odwrotnym do ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (istniejącym tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy ciągu są niezerowe) jest ciąg $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=0}^{\infty}$. Mnożenie ciągów jest przemienne.

Pojęcie *abstrakcyjnego mnożenia* (podsumowujące wspólne własności z powyższych przykładów) nie jest powszechnie używanym w matematyce pojęciem i zostało w niniejszym skrypcie wprowadzone jedynie ze względów dydaktycznych. Zauważalne podobieństwa Definicji 0.1 oraz Definicji 0.3 są nieprzypadkowe i dlatego w ramach kursu Algebra 1 zostaną one połączone we wspólną definicję *działania*.

Definicja 0.3: Mnożenie (abstrakcyjne)

Mnożeniem elementów zbioru S nazywamy działanie (oznaczane zazwyczaj symbolem „$\cdot$"), które uporządkowanej parze elementów $a, b \in S$ przypisuje element $a \cdot b \in S$ w taki sposób, że spełnione są następujące własności:

M1 *łączność*, tzn. dla dowolnych elementów $a, b, c \in S$ zachodzi warunek

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

M2 *istnienie elementu neutralnego*, tzn. istnieje[12] taki element $1 \in S$ (zwany *elementem neutralnym mnożenia* lub *jedynką*), że dla dowolnego $a \in S$ zachodzi warunek

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Elementem odwrotnym do elementu $a \in S$ nazywamy[13] element $a^{-1} \in S$ taki, że:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Jeśli dodatkowo mnożenie spełnia dla dowolnych $a, b \in S$ warunek:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

to mnożenie takie nazywamy *przemiennym*. Dla przemiennego mnożenia, określamy również działanie *dzielenia* jako działanie odwrotne do mnożenia[14]:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a, \text{ gdzie } b^{-1} \text{ to element odwrotny do } b$$

Przykład 13 (dla zaawansowanych)

Na zbiorze funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można też wprowadzić inne mnożenie niż w Przykładzie 10, oznaczane (wyjątkowo) symbolem $\circ$, czyli składanie funkcji:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Składanie funkcji jest łączne, więc spełnia warunek M1. Elementem neutralnym tego działania jest funkcja identycznościowa $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniony jest więc warunek M2. Przy tak zdefiniowanym działaniu elementem odwrotnym do funkcji f (o ile takowy istnieje) jest funkcja odwrotna f^{-1}. Tak zdefiniowane mnożenie nie jest przemienne.

Na każdym zbiorze z mnożeniem można zdefiniować potęgi o wykładnikach naturalnych (traktując je jako skrótowy zapis mnożenia jednakowych składników):

Definicja 0.4: Potęgowanie

Jeśli na zbiorze S zdefiniowane jest mnożenie, to dla dowolnego n naturalnego określamy *n-tą potęgę* elementu $a \in S$ jako:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

przy czym przyjmujemy $a^0 = 1$ (element neutralny mnożenia) oraz $a^1 = a$.

Odrębnym rodzajem operacji, z którym się spotkaliśmy jest mnożenie przez skalary. Z uwagi na to, że czynniki mnożenia przez skalary są obiektami różnego typu (pierwszy czynnik to skalar, czyli liczba rzeczywista, a drugi czynnik to wektor, macierz, funkcja itp.), operacji tej nie nazywamy działaniem.

Przykład 14 (mnożenie wektorów w $\mathbb{R}^2$ przez skalary)

Mnożenie wektora $v = \binom{v_1}{v_2}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem:

$$t \cdot v = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix}$$

Przykład 15 (mnożenie wektorów w $\mathbb{R}^3$ przez skalary)

Mnożenie wektora $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem:

$$t \cdot v = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{pmatrix}$$

Przykład 16 (mnożenie macierzy rozmiaru $m \times n$ przez skalary)

Mnożenie macierzy A rozmiaru $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych (lub zespolonych) przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem:

$$t \cdot A = t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} & \cdots & ta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{m1} & \cdots & ta_{mn} \end{pmatrix}$$

[12] Element neutralny jest zawsze wyznaczony jednoznacznie. Fakt ten jest prostym wnioskiem z warunku M2, jednak jego dowód pominiemy.

[13] Dla każdego elementu a, dla którego element odwrotny a^{-1} istnieje, jest on wyznaczony jednoznacznie. Dowód tego faktu pomijamy.

[14] Jeśli mnożenie nie jest przemienne, to zamiast posługiwać się pojęciem *dzielenia* mówimy o *mnożeniu przez element odwrotny*, gdyż musimy wówczas rozróżniać mnożenie przez element odwrotny z lewej strony: $b^{-1} \cdot a$ od mnożenia przez element odwrotny z prawej strony: $a \cdot b^{-1}$.

Przykład 17 (mnożenie funkcji rzeczywistych przez skalary)

Mnożenie funkcji rzeczywistej[15] $f : D \to \mathbb{R}$ przez skalar $t \in \mathbb{R}$ definiujemy wzorem:

$$(t \cdot f)(x) = t \cdot f(x)$$

np. funkcja $f(x) = x + \sin x$ pomnożona przez skalar 2 daje funkcję $(2 \cdot f)(x) = 2x + 2\sin x$.

Wspólne własności wszystkich powyższych operacji mnożenia przez skalary podsumujemy w następującej definicji (abstrakcyjnego) mnożenia przez skalary:

Definicja 0.5: Mnożenie przez skalary (abstrakcyjne)

Mnożeniem przez skalary elementów zbioru S nazywamy operację (oznaczaną symbolem „$\cdot$"), która parze złożonej ze skalara t (tzn. liczby rzeczywistej[16]) oraz elementu $a \in S$ przypisuje element $t \cdot a \in S$ w taki sposób, że spełnione są następujące własności:

M1* *zgodność*[17], tzn. dla dowolnego elementu $a \in S$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$(s \cdot t) \cdot a = s \cdot (t \cdot a)$$

M2* $1 \in \mathbb{R}$ *jest elementem neutralnym*, tzn. dla dowolnego $a \in S$ zachodzi:

$$1 \cdot a = a$$

Jeśli na jednym zbiorze zdefiniowane są dwa działania lub jedno działanie i operacja mnożenia przez skalary, będziemy wymagać, by istniał pewien związek między działaniami lub między działaniem i operacją mnożenia przez skalary. Związek ten przyjmie postać następujących własności:

Definicja 0.6: Warunki zgodności i rozdzielności

Na zbiorze S z dodawaniem i mnożeniem możemy sformułować własność *rozdzielności mnożenia względem dodawania*:

R dla dowolnych $a, b, c \in S$ zachodzą warunki:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{oraz} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Na zbiorze S z dodawaniem oraz operacją mnożenia przez skalary, możemy sformułować własność *rozdzielności mnożenia przez skalary względem dodawania*:

R* dla dowolnych $a, b \in S$ oraz dowolnych skalarów $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzą warunki:

$$s \cdot (a + b) = s \cdot a + s \cdot b \quad \text{oraz} \quad (s + t) \cdot a = s \cdot a + t \cdot a$$

Na zbiorze S z mnożeniem oraz operacją mnożenia przez skalary, możemy sformułować własność *zgodności mnożenia z mnożeniem przez skalary*:

Z dla dowolnych $a, b \in S$ oraz dowolnego skalara $t \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek:

$$t \cdot (a \cdot b) = (t \cdot a) \cdot b = a \cdot (t \cdot b)$$

[15] Jako dziedzinę D zazwyczaj będziemy przyjmować zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, przedział otwarty (a, b) albo przedział domknięty $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

[16] W dalszej części skryptu będziemy również omawiać sytuację, gdy skalarami będą liczby zespolone.

[17] Warunek zgodności jest analogiem warunku łączności M1. Różnica polega na tym, że użyte w warunku M1* symbole „$\cdot$" oznaczają dwie różne operacje – mnożenie skalarów oraz mnożenie elementu S przez skalary.

Często będziemy mieć do czynienia z sytuacją, gdy dodawanie, mnożenie lub mnożenie przez skalary zdefiniowane na dużym zbiorze S chcemy ograniczyć do jego podzbioru $S' \subset S$ (otrzymując w ten sposób mniejszy zbiór S' z dodawaniem, mnożeniem lub mnożeniem przez skalary). Wygodnym pojęciem opisującym takie sytuacje jest pojęcie *zamkniętości*:

Definicja 0.7: Zamkniętość

1) Niech $+$ będzie dodawaniem elementów zbioru S. Podzbiór $S' \subset S$ nazywamy *zamkniętym na dodawanie*, jeśli dla dowolnych $a, b \in S'$ zachodzi $a + b \in S'$.
2) Niech $+$ będzie dodawaniem elementów zbioru S. Podzbiór $S' \subset S$ nazywamy *zamkniętym na branie elementu przeciwnego*, jeśli dla dowolnego elementu $a \in S'$ zachodzi $-a \in S'$.
3) Niech $\cdot$ będzie mnożeniem elementów zbioru S. Podzbiór $S' \subset S$ nazywamy *zamkniętym na mnożenie*, jeśli dla dowolnych elementów $a, b \in S'$ zachodzi $a \cdot b \in S'$.
4) Niech $\cdot$ będzie operacją mnożenia przez skalary elementów zbioru S. Podzbiór $S' \subset S$ nazywamy *zamkniętym na mnożenie przez skalary*, jeśli dla dowolnego elementu $a \in S'$ oraz dowolnego skalara $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $t \cdot a \in S'$.

Fakt 0.8: Dodawanie na podzbiorze

Niech $+$ będzie dodawaniem elementów zbioru S, zaś $S' \subset S$ podzbiorem, który jest zamknięty na dodawanie oraz zamknięty na branie elementu przeciwnego. Wówczas działanie $+$ ograniczone do S' jest dodawaniem elementów zbioru S'.

Fakt 0.9: Mnożenie na podzbiorze

Niech $\cdot$ będzie mnożeniem elementów zbioru S, zaś $S' \subset S$ podzbiorem, który jest zamknięty na mnożenie oraz zawiera element neutralny 1. Wówczas działanie $\cdot$ ograniczone do S' jest mnożeniem elementów zbioru S'.

Fakt 0.10: Mnożenie przez skalary na podzbiorze

Niech $\cdot$ będzie operacją mnożenia przez skalary elementów zbioru S, zaś $S' \subset S$ podzbiorem, który jest zamknięty na mnożenie przez skalary. Wówczas działanie $\cdot$ ograniczone do S' jest operacją mnożenia przez skalary elementów zbioru S'.

Przykład 18

Na zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych zdefiniowaliśmy działania dodawania i mnożenia oraz operację mnożenia przez skalary (nietrudno sprawdzić, że spełniają one warunki R, R*, Z). Podzbiór $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej n:

(a) jest zamknięty na dodawanie, gdyż suma wielomianów stopni co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n;

(b) jest zamknięty na branie elementu przeciwnego, gdyż wielomian przeciwny do wielomianu stopnia co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n;

(c) nie jest zamknięty na mnożenie, gdyż iloczyn wielomianów stopni co najwyżej n nie musi być wielomianem stopnia co najwyżej n;

(d) jest zamknięty na mnożenie przez skalary, gdyż wielomian stopnia co najwyżej n pomnożony przez skalar jest wielomianem stopnia co najwyżej n;

oraz zawiera element neutralny dodawania (wielomian zerowy). Wobec tego na zbiorze $\mathbb{R}_n[x]$ zdefiniowane jest tylko działanie dodawania oraz operacja mnożenia przez skalary.

Przykład 19

Na zbiorze wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaliśmy działania dodawania i mnożenia oraz operację mnożenia przez skalary (podobnie jak w poprzednim przykładzie, nietrudno sprawdzić, że spełniają one warunki R, R*, Z). Podzbiór $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych jest:

(a) zamknięty na dodawanie, gdyż suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;

(b) zamknięty na branie elementu przeciwnego, gdyż dla ciągłej funkcji f, funkcja $-f$ też jest funkcją ciągłą;

(c) zamknięty na mnożenie, gdyż iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą;

(d) zamknięty na mnożenie przez skalary, gdyż iloczyn funkcji ciągłej przez skalar jest funkcją ciągłą;

i zawiera elementy neutralne dodawania (funkcja zerowa) i mnożenia (funkcja stale równa 1). Wobec tego na zbiorze $C(\mathbb{R})$ również są zdefiniowane działania dodawania i mnożenia oraz operacja mnożenia przez skalary.

Przykład 20

Na zbiorze $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaliśmy działania dodawania i mnożenia oraz operację mnożenia przez skalary (nietrudno sprawdzić, że spełniają one warunki R, R*, Z). Podzbiór $C^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ funkcji różniczkowalnych o ciągłej pierwszej pochodnej jest:

(a) zamknięty na dodawanie, gdyż $(f + g)' = f' + g'$, czyli suma funkcji różniczkowalnych o ciągłej pochodnej jest funkcją różniczkowalną o ciągłej pochodnej;

(b) zamknięty na branie elementu przeciwnego, gdyż $(-f)' = -f'$, czyli funkcja przeciwna do funkcji różniczkowalnej o ciągłej pochodnej jest funkcją różniczkowalną o ciągłej pochodnej;

(c) zamknięty na mnożenie, gdyż $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$, czyli iloczyn funkcji różniczkowalnych o ciągłej pochodnej jest funkcją różniczkowalną o ciągłej pochodnej;

(d) zamknięty na mnożenie przez skalary, gdyż dla $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $(t \cdot f)' = t \cdot f'$, czyli funkcja różniczkowalna o ciągłej pochodnej pomnożona przez skalar jest funkcją różniczkowalną o ciągłej pochodnej;

i zawiera elementy neutralne dodawania (funkcja zerowa) i mnożenia (funkcja stale równa 1). Wobec tego na zbiorze $C^1(\mathbb{R})$ również zdefiniowane są działania dodawania i mnożenia oraz operacja mnożenia przez skalary.

Przykład 21

Na zbiorze $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ macierzy rozmiaru 2×2 o współczynnikach rzeczywistych zdefiniowaliśmy działania dodawania i mnożenia oraz operację mnożenia przez skalary. Podzbiór macierzy o wyznaczniku 1:

(a) nie jest zamknięty na dodawanie, ani na mnożenie przez skalary;

(b) jest zamknięty na mnożenie, gdyż $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

i zawiera element neutralny mnożenia (macierz identycznościową). Wobec tego na zbiorze macierzy o wyznaczniku 1 zdefiniowane jest tylko działanie mnożenia.

Dla zainteresowanych...

Algebra zajmuje się badaniem zbiorów, na których wprowadzono jedną, dwie lub trzy spośród zdefiniowanych w tym rozdziale operacji (dodawanie, mnożenie, operacja mnożenia przez skalary). W strukturach zawierających dwie lub trzy z tych operacji wymagane jest dodatkowo spełnienie warunków zgodności i/lub rozdzielności (warunki R, R* lub Z). Najważniejsze przykłady *struktur algebraicznych*), to:

1) *grupa*, czyli zbiór z jednym działaniem – dodawaniem lub mnożeniem, przy czym w przypadku mnożenia wymagane jest spełnienie dodatkowego warunku M3 (analogicznego do D3):

   M3 *istnienie elementu odwrotnego*, tzn. dla każdego elementu $a \in S$ istnieje element $a^{-1} \in S$ (zwany *elementem odwrotnym do* a) spełniający warunek:

   $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

   grupę nazywamy *przemienną (abelową)* jeśli działanie jest przemienne (w szczególności grupa z dodawaniem jest zawsze przemienna);

2) *pierścień*, czyli zbiór z dwoma działaniami – dodawaniem i mnożeniem;

3) *ciało*, czyli zbiór z dwoma działaniami – dodawaniem i mnożeniem, przy czym mnożenie musi dodatkowo spełniać warunki M3$'$ i M4 (analogiczne do D3 i D4):

   M3$'$ *istnienie elementu odwrotnego*, tzn. dla każdego elementu $a \in S \setminus \{0\}$ istnieje element $a^{-1} \in S$ (zwany *elementem odwrotnym do* a) spełniający warunek:

   $$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

   M4 *przemienność*, tzn. dla dowolnych elementów $a, b \in S$ zachodzi warunek:

   $$a \cdot b = b \cdot a$$

4) *przestrzeń liniowa*, czyli zbiór z jedynm działaniem – dodawaniem oraz operacją mnożenia przez skalary;

5) *algebra*, czyli zbiór z dwoma działaniami – dodawaniem i mnożeniem oraz operacją mnożenia przez skalary.

W niniejszym skrypcie zajmować się będziemy tylko jedną z tych struktur – przestrzenią liniową (dział algebry zajmujący się przestrzeniami liniowymi nazywamy algebrą liniową). Pozostałe struktury zostaną omówione w kolejnym semestrze w ramach przedmiotu Algebra 1.

Przykład 22 (zbiory liczbowe)

Poznane zbiory liczbowe, z działaniami dodawania i mnożenia liczb, tworzą następujące struktury algebraiczne:

- pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych,
- ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych,
- ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych,
- ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych.

Przykład 23 (wielomiany)

Zbiory wielomianów z działaniami dodawania i mnożenia wielomianów (a w przypadku wielomianów o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych również z operacją mnożenia przez skalary) tworzą następujące struktury algebraiczne:

- pierścień $\mathbb{Z}[x]$ wielomianów o współczynnikach całkowitych,
- pierścień $\mathbb{Q}[x]$ wielomianów o współczynnikach wymiernych,
- algebra $\mathbb{R}[x]$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych,
- algebra $\mathbb{C}[x]$ wielomianów o współczynnikach zespolonych.

Oczywiście pomijając niektóre działania możemy otrzymać „mniejszą" strukturę, np. przestrzeń liniową $\mathbb{R}[x]$ wielomianów o współczynnikach rzeczywistych lub grupę $\mathbb{Z}[x]$ wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Przykład 24 (wektory)

Zbiory wektorów z działaniem dodawania wektorów i operacją mnożenia wektorów przez skalary tworzą następujące struktury algebraiczne:

- przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^2$,
- przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^3$.

Przykład 25 (macierze)

Zbiory macierzy z działaniem dodawania macierzy i operacją mnożenia macierzy przez skalary (a w przypadku macierzy $n \times n$ również z działaniem mnożenia macierzy) tworzą następujące struktury algebraiczne:

- przestrzeń liniowa macierzy rozmiaru $m \times n$ (przy ustalonych m i n),
- algebra macierzy rozmiaru 2×2,
- algebra macierzy rozmiaru 3×3.

Przykład 26 (funkcje)

Zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniami dodawania i mnożenia funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalary tworzy algebrę $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych.
Zbiór funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (tzn. ciągów liczbowych) z działaniami dodawania i mnożenia funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalary tworzy algebrę ciągów liczbowych.
Zbiór wzajemnie jednoznacznych funkcji (bijekcji) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ z działaniem składania funkcji tworzy grupę S_n (zwaną *grupą permutacji*).

Przykład 27 (grupy)

Każdy z powyższych przykładów (pierścieni, ciał, przestrzeni liniowych, algebr) ograniczony do jednego działania – dodawania jest przykładem grupy przemiennej (abelowej).

Rozdział 1

Przestrzenie i przekształcenia

1.1 Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa (inaczej: *przestrzeń wektorowa*) to zbiór (którego elementy będziemy nazywać *elementami przestrzeni liniowej* lub *wektorami*, nawet jeśli nie będą miały nic wspólnego z wektorami na płaszczyźnie, ani z wektorami w $\mathbb{R}^3$) wyposażony w działanie dodawania i operację mnożenia przez skalary. Innymi słowy:

Definicja 1.1: Przestrzeń liniowa

Przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$)[1] nazywamy zbiór V wraz z:

1) dodawaniem,
2) mnożeniem przez skalary (liczby rzeczywiste),

spełniającymi warunki podane w Definicjach 0.1, 0.5 i 0.6, czyli:

D1 dodawanie jest łączne, tzn.
$$\forall u, v, w \in V \ (u + v) + w = u + (v + w)$$
D2 istnieje element neutralny dodawania, tzn.
$$\exists 0 \in V \, \forall v \in V \ 0 + v = v + 0 = v$$
D3 dla każdego elementu istnieje element przeciwny, tzn.
$$\forall v \in V \, \exists(-v) \in V \ v + (-v) = (-v) + v = 0$$
D4 dodawanie jest przemienne, tzn.
$$\forall u, v \in V \ u + v = v + u$$
M1* mnożenie przez skalary i mnożenie skalarów są zgodne, tzn.
$$\forall v \in V \, \forall s, t \in \mathbb{R} \ (s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$$
M2* skalar $1 \in \mathbb{R}$ jest elementem neutralnym mnożenia przez skalary, tzn.
$$\forall v \in V \ 1 \cdot v = v$$
R* mnożenie przez skalary jest rozdzielne względem dodawania, tzn.
$$\forall u, v \in V \, \forall s, t \in \mathbb{R} \ [(s + t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u \ \wedge \ t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v]$$

Przykład 1 (przestrzenie $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$)

Zbiór $\mathbb{R}^2$ z dodawaniem wektorów i mnożeniem wektorów przez skalary jest przestrzenią liniową. Elementem neutralnym dodawania jest $\binom{0}{0}$, a elementem przeciwnym do $\binom{x}{y}$ jest element $\binom{-x}{-y}$. Podobną strukturę przestrzeni liniowej ma $\mathbb{R}^3$.

[1] Podkreślamy w ten sposób, że skalarami są liczby rzeczywiste. W dalszej części skryptu (Definicja 3.16) będziemy rozważać również sytuację, gdy skalarami będą liczby zespolone i wówczas będziemy mówić o *przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$* albo o *zespolonej przestrzeni liniowej*. Termin *przestrzeń liniowa* w niniejszym skrypcie zawsze domyślnie będzie oznaczać *przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$*.

Przykład 2 (przestrzeń $\mathbb{R}^n$)

Przykład 1 można uogólnić, definiując przestrzeń $\mathbb{R}^n$ (gdzie n jest dowolną liczbą naturalną) jako zbiór układów n liczb rzeczywistych $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ z dodawaniem i mnożeniem przez skalary określonymi następująco:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń liniową, w której elementem zerowym jest element $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zaś elementem przeciwnym do $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ jest $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$. Oczywiście $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Przykład 3 (przestrzeń $M_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Zbiór $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ macierzy rozmiaru $m \times n$ o wyrazach rzeczywistych (będziemy używać też[2] oznaczenia $M_{m\times n}$) z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez skalary jest przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, a elementem przeciwnym do macierzy $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ jest macierz $\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Przykład 4 (przestrzenie $\mathbb{R}_n[x]$ oraz $\mathbb{R}[x]$)

Zbiór $\mathbb{R}_n[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej n o współczynnikach rzeczywistych oraz zbiór $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez skalary to przestrzenie liniowe. Elementem zerowym jest wielomian zerowy (tzn. wielomian o wszystkich współczynnikach równych zero), natomiast elementem przeciwnym do wielomianu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jest wielomian $-P(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$.

Przykład 5 (przestrzenie $C(\mathbb{R})$ oraz $C(a,b)$ i $C([a,b])$)

Zbiór $C(\mathbb{R})$ ciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z dodawaniem funkcji i mnożeniem funkcji przez skalary:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

jest przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest funkcja zerowa, tj. funkcja f taka, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Elementem przeciwnym do funkcji f jest funkcja $-f$, gdzie $(-f)(x) = -f(x)$. Analogicznie definiujemy przestrzeń $C(a,b)$ ciągłych funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz przestrzeń $C[a,b]$ ciągłych funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Przykład 6 (przestrzeń ciągów liczbowych)

Zbiór wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych z dodawaniem ciągów i mnożeniem ciągów przez skalary jest przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest ciąg stale równy zero, a elementem przeciwnym do ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciąg $(-a_n)_{n=0}^{\infty}$.

[2] Oznaczenie $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ma odróżniać przestrzeń macierzy o wyrazach rzeczywistych od przestrzeni macierzy o wyrazach zespolonych, oznaczanej $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. W początkowych rozdziałach będziemy pomijać parametr $\mathbb{R}$, traktując go jako domyślny.

Przykład 7

Zbiór $\mathbb{C}$ liczb zespolonych z dodawaniem liczb zespolonych i mnożeniem liczb zespolonych przez skalary (liczby rzeczywiste[3]) jest przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$).

Definicja 1.2: Podprzestrzeń

Podprzestrzenią W przestrzeni liniowej V (ozn. $W < V$) nazywamy taki niepusty podzbiór $W \subset V$, który spełnia następujące warunki:

1) jest zamknięty na dodawanie, tzn. dla dowolnych $u, v \in W$ zachodzi $u + v \in W$,
2) jest zamknięty na mnożenie przez skalary, tzn. dla dowolnych $u \in W$, $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $tu \in W$.

Podprzestrzeń W przestrzeni liniowej V sama również jest przestrzenią liniową (z dodawaniem i mnożeniem przez skalary zdefiniowanymi tak samo jak dla V).

Fakt 1.3: Własności podprzestrzeni

Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V, to:

1) W zawiera element 0,
2) dla dowolnego $w \in W$ zachodzi $-w \in W$.

Dowód. Weźmy dowolny wektor $w \in W$ oraz skalar $0 \in \mathbb{R}$. Zgodnie z Definicją 1.2 element $0 \cdot w = 0$ należy do W. Podobnie element $(-1) \cdot w = -w$ należy do W dla dowolnego $w \in W$. □

Przykład 8

Każdy z następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ jest podprzestrzenią:
- zbiór jednoelementowy $\{0\}$,
- dowolna prosta przechodząca przez 0,
- całe $\mathbb{R}^2$.

Jak przekonamy się później, jest to kompletna lista podprzestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Przykład 9

Każdy z następujących podzbiorów $\mathbb{R}^3$ jest podprzestrzenią:
- zbiór jednoelementowy $\{0\}$,
- dowolna prosta przechodząca przez 0,
- dowolna płaszczyzna przechodząca przez 0,
- całe $\mathbb{R}^3$.

Jak przekonamy się później, jest to kompletna lista podprzestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Przykład 10

Dla dowolnego n naturalnego zachodzi: $\mathbb{R}_n[x] < \mathbb{R}[x]$. Podobnie dla dowolnych liczb naturalnych m i n takich, że $m \leq n$ zachodzi: $\mathbb{R}_m[x] < \mathbb{R}_n[x]$. Natomiast zbiór wielomianów stopnia *równego* n nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}_n[x]$.

[3] W odniesieniu do zbioru $\mathbb{C}$ znacznie naturalniej jest traktować jako skalary liczby zespolone. Otrzymamy wówczas *zespoloną przestrzeń liniową*, o której mowa w Definicji 3.16.

Przykład 11

Każdy z następujących podzbiorów przestrzeni $M_{3\times 3}$ jest podprzestrzenią:
- zbiór macierzy diagonalnych,
- zbiór macierzy symetrycznych,
- zbiór macierzy górnotrójkątnych,

natomiast żaden z poniższych podzbiorów nie jest podprzestrzenią $M_{3\times 3}$:

- zbiór macierzy odwracalnych,
- zbiór macierzy o wyrazach 0 i 1.

Przykład 12

Każdy z następujących podzbiorów zbioru $C(\mathbb{R})$ jest podprzestrzenią:
- zbiór $C^1(\mathbb{R})$ funkcji różniczkowalnych o ciągłej pochodnej,
- zbiór $C^2(\mathbb{R})$ funkcji dwukrotnie różniczkowalnych o ciągłej drugiej pochodnej,
- zbiór $C^n(\mathbb{R})$ funkcji n-krotnie różniczkowalnych o ciągłej n-tej pochodnej,
- zbiór $C^\infty(\mathbb{R})$ funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy,
- zbiór ograniczonych funkcji ciągłych,
- zbiór funkcji ciągłych mających granicę 0 w $+\infty$,

natomiast żaden z poniższych podzbiorów nie jest podprzestrzenią:

- zbiór nieograniczonych funkcji ciągłych,
- zbiór funkcji ciągłych mających granicę 1 w $+\infty$.

Przykład 13

Każdy z następujących podzbiorów zbioru wszystkich ciągów (o wyrazach rzeczywistych) jest podprzestrzenią:
- zbiór ℓ^∞ ciągów ograniczonych,
- zbiór c ciągów zbieżnych,
- zbiór c_0 ciągów zbieżnych do 0,

natomiast żaden z poniższych podzbiorów nie jest podprzestrzenią:

- zbiór ciągów rozbieżnych,
- zbiór ciągów zbieżnych do 1.

Przykład 14

Dla dowolnej przestrzeni liniowej V zachodzi $\{0\} < V$ oraz $V < V$.

Intuicyjnie, *wymiarem* przestrzeni liniowej V (ozn. $\dim V$) nazywamy (minimalną) liczbę parametrów potrzebnych do opisania elementu tej przestrzeni, np.

- $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, bo do opisania elementu $\mathbb{R}^3$ potrzeba 3 parametrów (współrzędnych),
- $\dim M_{3\times 3} = 9$, bo do opisania elementu $M_{3\times 3}$ potrzeba 9 parametrów (wyrazów macierzy),
- $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$, bo do opisania elementu $\mathbb{R}_5[x]$ potrzeba 6 parametrów (współczynników wielomianu),
- $\dim \mathbb{C} = 2$, bo do opisania elementu $\mathbb{C}$ potrzeba 2 parametrów (części rzeczywistej i części urojonej),
- $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$, bo do opisania dowolnego elementu $\mathbb{R}[x]$ potrzeba nieskończenie wielu parametrów (współczynników przy x^n dla $n = 0, 1, 2, \dots$).

Formalne wprowadzenie pojęcia wymiaru wymaga wcześniejszego zdefiniowania pojęcia *bazy*:

Definicja 1.4: Baza

Niech V będzie przestrzenią liniową. *Kombinacją liniową* wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ ze współczynnikami $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nazywamy wektor:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Bazą przestrzeni liniowej V nazywamy taki skończony ciąg[4] wektorów $b_1, \ldots, b_n \in V$, że każdy wektor $v \in V$ przedstawia się *jednoznacznie* w postaci kombinacji liniowej:

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

lub taki nieskończony[5] zbiór wektorów $\mathcal{B} \subset V$, że każdy wektor $v \in V$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej skończonej liczby elementów z $\mathcal{B}$.

Definicja wymiaru wymaga następującego ważnego twierdzenia, którego dowód wykracza poza ramy niniejszego skryptu:

Twierdzenie 1.5: Istnienie bazy i jednoznaczność wymiaru

Każda przestrzeń liniowa V ma bazę i wszystkie bazy przestrzeni V są równoliczne.

Definicja 1.6: Wymiar

Wymiarem przestrzeni liniowej V (ozn. $\dim V$) nazywamy liczbę elementów bazy V.

W świetle Twierdzenia 1.5 powyższa definicja ma sens, gdyż pomimo iż przestrzeń liniowa ma bardzo wiele różnych baz, to wszystkie one mają taką samą liczbę elementów.

Przykład 15 (baza standardowa $\mathbb{R}^n$)

Każdy wektor $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wersorów $e_1 = \binom{1}{0}$ i $e_2 = \binom{0}{1}$:

$$\binom{x_1}{x_2} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$$

więc (e_1, e_2) to baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (zwana *bazą standardową* $\mathbb{R}^2$), a zatem $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.
Każdy wektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wersorów $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3$$

więc (e_1, e_2, e_3) to baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (zwana *bazą standardową* $\mathbb{R}^3$), a zatem $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
Podobnie definiujemy bazę standardową $(e_1, \ldots, e_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie e_i (i-ty wersor) to wektor o i-tej współrzędnej równej 1, a pozostałych współrzędnych zerowych. Wówczas:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

jest jednoznacznym przedstawieniem wektora $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wersorów (potwierdzając, że $(e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą $\mathbb{R}^n$). Wynika stąd, że $\dim \mathbb{R}^n = n$.

[4] Baza jest ciągiem wektorów, tzn. zmieniając kolejność jej elementów otrzymujemy inną bazę.

[5] W niniejszym skrypcie będziemy stosować pojęcie bazy wyłącznie w odniesieniu do przestrzeni skończenie wymiarowych (tzn. posiadających skończoną bazę). Przyjmujemy, że bazą jednoelementowej przestrzeni $\{0\}$ jest zbiór pusty, w związku z czym jej wymiar wynosi 0. Tylko przestrzeń jednoelementowa (złożona z samego elementu neutralnego) ma wymiar 0.

Przykład 16

Para wektorów (u,v) przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$, jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej u i v, tzn. równanie (układ równań) z niewiadomymi α i β:

$$X = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha u_1 + \beta v_1 \\ x_2 = \alpha u_2 + \beta v_2 \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego X (dla dowolnych x_1 i x_2). Zgodnie ze wzorami Cramera jest to prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \det(u,v) \neq 0$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ ma więc nieskończenie wiele różnych baz. Przykładem (niestandardowej) bazy $\mathbb{R}^2$ jest para wektorów $(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$. Podobnie dowodzimy, że trójka wektorów (u,v,w) przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(u,v,w) \neq 0$.

Przykład 17

Przykładem bazy przestrzeni $M_{2\times 2}$ jest układ $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$. Nietrudno przekonać się, że każdy element $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej tych wektorów:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd $\dim M_{2\times 2} = 4$. Innym przykładem bazy jest układ $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$. Aby się o tym przekonać sprawdzamy, czy równanie z niewiadomymi α, β, γ, δ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta + \gamma \\ c = \beta - \gamma \\ d = \delta \end{cases}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych a, b, c, d. Równanie to (układ równań) rzeczywiście ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych α, β, γ, δ, a rozwiązaniem tym jest:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \frac{1}{2}(b+c) \\ \gamma = \frac{1}{2}(b-c) \\ \delta = d \end{cases}$$

Przykład 18

Przykładem bazy przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ jest układ $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, ponieważ każdy wielomian $P(x) = ax^2 + bx + c$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej elementów $\mathcal{B}$:

$$P(x) = c \cdot 1 + b \cdot x + a \cdot x^2$$

Stąd $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$. Inny przykład bazy to $\mathcal{C} = (x^2, x, 1)$ (baza to ciąg wektorów, więc zmiana kolejności wektorów oznacza zmianę bazy). Jeszcze inny przykładem bazy jest układ

$\mathcal{D} = (x^2 + x + 1, x + 1, 1)$. Aby się o tym przekonać sprawdzamy, czy równość wielomianów:

$$ax^2 + bx + c = \alpha \cdot (x^2 + x + 1) + \beta \cdot (x + 1) + \gamma \cdot 1$$

zachodzi dla dokładnie jednej trójki współczynników α, β, γ. Nietrudno sprawdzić, że jest to prawdą, a ową jedyną trójką współczynników jest:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b - a \\ \gamma = c - b \end{cases}$$

Przykład 19

Przykładem bazy przestrzeni $\mathbb{C}$ jest układ $\mathcal{B} = (1, i)$, gdyż każda liczba zespolona z zapisuje się jednoznacznie w postaci:

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Stąd[6] $\dim \mathbb{C} = 2$. Innym przykładem bazy jest układ $\mathcal{C} = (1 + i, i)$, gdyż dla każdej liczby zespolonej $z = a + bi$ istnieją jednoznacznie wyznaczone współczynniki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla których:

$$z = \alpha \cdot (1 + i) + \beta \cdot i$$

Nietrudno wyliczyć, że współczynnikami tymi są:

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b - a \end{cases}$$

Przykład 20

Bazą przestrzeni macierzy symetrycznych rozmiaru 2×2 jest układ $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$, gdyż każda macierz symetryczna przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej powyższych macierzy:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oznacza to, że przestrzeń macierzy symetrycznych rozmiaru 2×2 ma wymiar 3.

Przykład 21

Bazą (nieskończenie wymiarowej) przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ jest układ $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$. Zauważmy, że (zgodnie z Definicją 1.4) każdy element $\mathbb{R}[x]$ jest kombinacją liniową pewnego **skończonego** podzbioru bazy $\mathcal{B}$.

Operowanie na wektorach w $\mathbb{R}^n$ oraz przekształceniach liniowych $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sprowadzało się do rachunków na macierzach (gdzie wektor w $\mathbb{R}^n$ był szczególnym przypadkiem macierzy). Podobne podejście będziemy stosowali do dowolnej skończenie wymiarowej[7] przestrzeni liniowej, niezależnie od tego czy jej elementami są wektory z $\mathbb{R}^n$, macierze, wielomiany, ciągi czy funkcje. Do tego celu potrzebujemy wprowadzić opis wektora (którym może być macierz, wielomian, ciąg, funkcja itp.) w postaci kolumny liczb.

[6] Traktujemy tu przestrzeń $\mathbb{C}$ jako *rzeczywistą* przestrzeń liniową. Przestrzeń $\mathbb{C}$ traktowana jako *zespolona* przestrzeń liniowa (w rozumieniu Definicji 3.16) ma wymiar 1.

[7] Niniejszy skrypt poświęcony jest niemal wyłącznie przestrzeniom skończenie wymiarowym.

Definicja 1.7: Współrzędne wektora

Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V. *Współrzędnymi* wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{B}$ nazywamy taki ciąg współczynników $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, że:

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

Współrzędne wektora v w bazie $\mathcal{B}$ oznaczamy $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Powyższa definicja wyjaśnia dlaczego baza to **ciąg**, a nie **zbiór** – pozycja wektora w bazie odpowiada pozycji współczynnika w wektorze współrzędnych.
Dodawanie wektorów oraz mnożenie wektorów przez skalary w dowolnej przestrzeni liniowej przekształca ich współrzędne w taki sam sposób, jak w przypadku wektorów w $\mathbb{R}^n$:

Fakt 1.8: Współrzędne wektora

Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V. Wówczas dla $u, v \in V$:

1) jeśli $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ oraz $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, to $[u+v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u+v_1 \\ \vdots \\ u+v_n \end{pmatrix}$,

2) jeśli $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ oraz $t \in \mathbb{R}$, to $[tv]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ \vdots \\ tv_n \end{pmatrix}$.

Dowód. (1) Skoro $u = u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n$ oraz $v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n$, to:

$$u + v = (u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n) + (v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n) = (u_1 + v_1) b_1 + \cdots + (u_n + v_n) b_n$$

czyli $[u+v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$. Dowód części (2) jest analogiczny. □

Przykład 22

W Przykładzie 18 zdefiniowaliśmy trzy bazy na przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$: bazę $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, bazę $\mathcal{C} = (x^2, x, 1)$ oraz bazę $\mathcal{D} = (x^2 + x + 1, x + 1, 1)$. Wielomian $P(x) = ax^2 + bx + c$ ma w tych bazach następujące współrzędne:

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \qquad [P]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad [P]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-b \end{pmatrix}$$

np. wielomian $x^2 + 2x + 3$ ma następujące współrzędne, w zależności od bazy:

$$[x^2 + 2x + 3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [x^2 + 2x + 3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [x^2 + 2x + 3]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Baza

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy pojęcie bazy przestrzeni liniowej V jako takiego układu wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$, że każdy element V przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów $v_1, \ldots, v_n$. W tym rozdziale omówimy różne sposoby konstrukcji takiego układu wektorów, pozwalające sprawnie wyznaczyć bazę oraz wymiar przestrzeni liniowej.

Zaczniemy od pokazania w jaki sposób skonstruować bazę przestrzeni przy pomocy kilkuetapowej procedury, rozpoczynając od zbioru zbyt dużego albo zbyt małego.

Definicja 1.9: Zbiór generujący

Zbiór wektorów[8] $v_1, \ldots, v_n \in V$ *generuje* przestrzeń liniową V (jest *zbiorem generującym* V), jeśli zaczynając od zbioru $\{v_1, \ldots, v_n\}$ i powtarzając (wielokrotnie) operację powiększania kolejno otrzymywanych zbiorów o kombinacje liniowe ich elementów można otrzymać cały zbiór V. Sytuację taką oznaczamy: $V = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Przykład 1

Sprawdź, czy zbiór $1 + x, 1 + 3x + x^2, x - x^2, 1 + 2x - x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ jest zbiorem generującym przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$.

Rozwiązanie. Z podanych elementów można wygenerować wektor:

$$3x = (1 + 3x + x^2) + (1 + 2x - x^2) - 2 \cdot (1 + x)$$

Wykorzystując ten wektor możemy wygenerować wektor:

$$1 = (1 + x) - \tfrac{1}{3} \cdot 3x$$

Wykorzystując wygenerowane wcześniej wektory możemy wygenerować wektor:

$$x^2 = (1 + 3x + x^2) - 3x - 1$$

Z otrzymanych wektorów $3x$, 1, x^2 (tworzących bazę $\mathbb{R}_2[x]$) można wygenerować dowolny element $\mathbb{R}_2[x]$:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot x^2 + \tfrac{b}{3} \cdot 3x + c \cdot 1$$

czyli podany zbiór jest zbiorem generującym.

Fakt 1.10: Zbiór generujący

Zbiór wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest zbiorem generującym przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element $v \in V$ można przedstawić (na **co najmniej jeden** sposób) w postaci kombinacji liniowej elementów $v_1, \ldots, v_n$ (tzn każdy element V można wygenerować w **jednym** kroku procedury opisanej w Definicji 1.9).

Dowód. Zauważmy, że jeśli elementy $w_1, \ldots, w_m \in V$ są kombinacjami liniowymi $v_1, \ldots, v_n$,

[8] Można również zdefiniować pojęcie *zbioru generującego* w odniesieniu do nieskończonego zbioru wektorów, jednak takie uogólnienie nie będzie potrzebne w niniejszym skrypcie.

czyli

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1n}v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \alpha_{m1}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_n \end{aligned}$$

to element $u \in V$ będący kombinacją liniową $w_1, \ldots, w_m$ (czyli możliwy do wygenerowania w dwóch krokach z $v_1, \ldots, v_n$):

$$u = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$$

jest również kombinacją liniową $v_1, \ldots, v_n$ (czyli można go wygenerować w jednym kroku z $v_1, \ldots, v_n$):

$$\begin{aligned} u &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1n}v_n) + \cdots + \beta_m(\alpha_{m1}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_n) \\ &= (\beta_1 a_{11} + \cdots + \beta_m\alpha_{m1})v_1 + \cdots + (\beta_1 a_{1n} + \cdots + \beta_m\alpha_{mn})v_n \end{aligned}$$

Oznacza to, że element, który można wygenerować w dwóch krokach procedury opisanej w Definicji 1.9, można również wygenerować w jednym kroku. Powtarzając wielokrotnie to rozumowanie pokazujemy, że wektor generowany z $v_1, \ldots, v_n$ w k krokach jest możliwy do wygenerowania w jednym kroku. □

Przykład 2 (zbiór za duży na bazę)

...który można pomniejszyć do bazy (zbiór generujący).

Dane są wektory $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Nie tworzą one bazy $\mathbb{R}^3$, gdyż każda baza $\mathbb{R}^3$ składa się z trzech wektorów. Sprawdzimy, że każdy element $\mathbb{R}^3$ można wygenerować z tego zbioru. Najłatwiej uzasadnić to w następujący sposób:

- wersor $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ można wygenerować jako $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;
- wersor e_1 można wygenerować (wykorzystując otrzymany już e_2) jako $e_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - 2e_2$;
- wersor e_3 można wygenerować (wykorzystując otrzymany już e_2) jako $e_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - 2e_2$;
- wygenerowawszy wersory e_1, e_2, e_3 możemy z nich wygenerować dowolny wektor $\mathbb{R}^3$.

Wobec tego dowolny wektor $\mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wyjściowych czterech wektorów, ale przedstawienie to nie będzie jednoznaczne (oznacza to, że nasz zbiór zawiera za dużo wektorów). Szukamy w rozważanym zbiorze czterech wektorów takiego wektora, który jest „zbędny”, tzn. można go bez straty usunąć (bo daje się wygenerować z pozostałych wektorów). Przykładem takiego wektora jest $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, który daje się wygenerować z pozostałych trzech wektorów:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

W związku z tym wektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ można usunąć, a pozostały układ trzech wektorów: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ wciąż będzie generował całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że układ ten jest bazą $\mathbb{R}^3$ (tzn. każdy wektor z $\mathbb{R}^3$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej tych trzech wektorów).

Definicja 1.11: Zbiór liniowo niezależny

Zbiór wektorów[9] $v_1, \ldots, v_n \in V$ nazywamy *liniowo niezależnym* (lnz), jeśli żadnego z tych wektorów nie można wygenerować z pozostałych (tzn. nie jest kombinacją liniową pozostałych). Zbiór, który nie jest liniowo niezależny, nazywamy zbiorem *liniowo zależnym*.

Przykład 3 (zbiór za mały na bazę)

...ale można go powiększyć do bazy (zbiór liniowo niezależny).
Dane są wektory $1, 1+x, 1+x^2 \in \mathbb{R}_3[x]$. Jeśli wektor $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej podanych wektorów, to przedstawienie to jest jednoznaczne, gdyż jeśli:

$$P(x) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \cdot (1+x^2)$$

to

$$\begin{cases} \alpha = d - b - c \\ \beta = c \\ \gamma = b \end{cases}$$

Niemniej nie każdy element $\mathbb{R}_3[x]$ daje się przedstawić w tej postaci (np. nie jest to możliwe dla wektora x^3). Dołączając wektor x^3 do początkowego układu wektorów otrzymujemy układ $(1, 1+x, 1+x^2, x^3)$, który będzie już bazą (sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi).

Fakt 1.12: Zbiór liniowo niezależny (pierwsza charakteryzacja)

Zbiór wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ przestrzeni liniowej V jest liniowo niezależny (lnz) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element $v \in V$ można przedstawić na **co najwyżej jeden** sposób w postaci kombinacji liniowej elementów $v_1, \ldots, v_n$.

Dowód. $\Leftarrow$ Załóżmy, że każdy element V można przedstawić na co najwyżej jeden sposób w postaci kombinacji liniowej $v_1, \ldots, v_n$. Wówczas jedynym przedstawieniem elementu v_1 jest:

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

co oznacza, że element v_1 nie jest kombinacją liniową $v_2, \ldots, v_n$ (taka kombinacja liniowa dawałaby drugie przedstawienie). Podobnie, żaden z wektorów $v_2, \ldots, v_n$ nie jest kombinacją liniową pozostałych.
$\Rightarrow$ Załóżmy, że $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest zbiorem liniowo niezależnym. Gdyby istniał element $v \in V$, który można przedstawić na dwa sposoby w postaci kombinacji liniowej $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$
$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

to przynajmniej jedna z liczb $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$ byłaby niezerowa oraz

$$0 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$$

Jeśli $\gamma_1 \neq 0$, to:

$$v_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} v_2 - \cdots - \frac{\gamma_n}{\gamma_1} v_n$$

czyli zbiór $v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo zależny. Podobne rozumowanie prowadzimy jeśli niezerowym współczynnikiem jest jeden z $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$. □

[9] Można również zdefiniować pojęcie *liniowej niezależności* w odniesieniu do nieskończonego zbioru wektorów, jednak takie uogólnienie nie będzie potrzebne w niniejszym skrypcie.

Porównanie Faktów 1.10 i 1.12 z Definicją 1.4 daje natychmiastowy wniosek:

Fakt 1.13: Charakteryzacja bazy (pierwsze podejście)

Baza przestrzeni liniowej to zbiór, który jest równocześnie generujący i liniowo niezależny.

Przykład 4

Uzasadnij, że zbiór $V = \{A \in M_{2\times 2} : A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0\}$ jest przestrzenią liniową, a następnie wyznacz wymiar i bazę tej przestrzeni.

Rozwiązanie. Dla sprawdzenia czy zbiór $V \subset M_{2\times 2}$ jest przestrzenią liniową, należy sprawdzić czy jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary. Jeśli $A, B \in V$, to:

$$(A+B)\cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + B \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 + 0 = 0$$

czyli $A + B \in V$. Jeśli $A \in V$ oraz $t \in \mathbb{R}$, to:

$$(tA) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = t \cdot (A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = t \cdot 0 = 0$$

czyli $tA \in V$. Wobec tego V jest podprzestrzenią $M_{2\times 2}$, w szczególności jest przestrzenią liniową. Żeby wyznaczyć bazę zauważmy, że każdy element V jest postaci:

$$\begin{pmatrix} a & -2a \\ c & -2c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dla pewnych $a, c \in \mathbb{R}$, czyli jest kombinacją liniową wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Ta para wektorów stanowi zatem zbiór generujący V. Zbiór ten jest też liniowo niezależny, bo żaden z tych wektorów nie jest kombinacją liniową pozostałych, czyli (w tym wypadku) nie jest krotnością drugiego wektora. Zatem zbiór ten stanowi bazę V, w szczególności $\dim V = 2$.

Przykład 5

Uzasadnij, że zbiór $V = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$ jest przestrzenią liniową, a następnie wyznacz wymiar i bazę tej przestrzeni.

Rozwiązanie. Dla sprawdzenia czy zbiór $V \subset \mathbb{R}^3$ jest przestrzenią liniową, należy sprawdzić czy jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary. Jeżeli $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in V$, to:

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (2x_1 + 3y_1 - z_1) + (2x_2 + 3y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$$

czyli $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in V$. Jeżeli $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in V$ oraz $t \in \mathbb{R}$, to:

$$2(tx) + 3(ty) - (tz) = t \cdot (2x + 3y - z) = t \cdot 0 = 0$$

czyli $t \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in V$. Stąd V jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$, w szczególności jest przestrzenią liniową. Żeby wyznaczyć bazę zauważmy, że każdy element V jest postaci:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

czyli jest kombinacją liniową wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Ta para wektorów stanowi zatem zbiór generujący V. Zbiór ten jest też liniowo niezależny, bo żaden z tych wektorów nie jest kombinacją liniową pozostałych, czyli (w tym przypadku) nie jest krotnością drugiego wektora. Zatem zbiór ten stanowi bazę V, w szczególności $\dim V = 2$.

Opisane w Przykładach 2 i 3 procedury to dość typowe sposoby wyznaczania bazy, które można podsumować nastepująco:

1) weź dowolny zbiór generujący i zmniejsz go do bazy (wyrzucając, po jednym, elementy, które są kombinacją liniową pozostałych) lub
2) weź dowolny zbiór liniowo niezależny i powiększ go do bazy (dodając, po jednym, elementy, które nie są kombinacją liniową pozostałych).

Procedury te formalizuje poniższy fakt.

Fakt 1.14: Wyznaczanie bazy

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową.

1) Usuwając ze (skończonego) zbioru generującego V **jeden** element, który jest kombinacją liniową pozostałych elementów tego zbioru otrzymujemy nowy zbiór generujący V. Kontynuując tę procedurę tak długo, jak to możliwe, otrzymamy bazę V (tzn. baza jest minimalnym zbiorem generującym).
2) Dokładając do (skończonego) liniowo niezależnego podzbioru V **jeden** element, który nie jest kombinacją liniową elementów tego podzbioru otrzymujemy nowy zbiór liniowo niezależny. Kontynuując tę procedurę tak długo, jak to możliwe, otrzymamy bazę V (tzn. baza to maksymalny zbiór liniowo niezależny).

Dowód. (1) Opisana procedura prowadzi do zbioru, który generuje przestrzeń V i w którym żaden element nie jest kombinacją liniową pozostałych (czyli jest liniowo niezależny). Zbiór ten, jako generujący i liniowo niezależny, zgodnie z Faktem 1.13 jest bazą przestrzeni V.
(2) Opisana procedura prowadzi do zbioru, który jest liniowo niezależny i generujący (gdyż każdy wektor V jest kombinacją liniową jego elementów). Zgodnie z Faktem 1.13 zbiór ten jest bazą przestrzeni V. □

Wniosek 1.15: Charakteryzacja bazy (drugie podejście)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Wówczas układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni V spełniający **dowolne dwa** z poniższych warunków jest bazą przestrzeni V oraz spełnia pozostały (trzeci) warunek:

1) wektory $v_1, \ldots, v_n$ są lnz,
2) wektory $v_1, \ldots, v_n$ generują V,
3) $n = \dim V$.

Dowód. Jeśli układ wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ spełnia warunki:

- (1) i (2), to zgodnie z Faktem 1.13 jest bazą V, w szczególności spełniony jest (3);
- (2) i (3), to zgodnie z Faktem 1.14 można z niego wybrać bazę, ale z uwagi na (3) nie może to spowodować zmniejszenia liczby jego elementów – układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest więc bazą, w szczególności spełnia warunek (1);
- (1) i (3), to zgodnie z Faktem 1.14 można go rozszerzyć do bazy, ale z uwagi na (3) nie może to spowodować zwiększenia liczby jego elementów – układ $(v_1, \ldots, v_n)$ jest więc bazą, w szczególności spełnia warunek (2).

□

Przykład 6

Wyznacz bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ zaczynając od zbioru generującego:

$$1 + x,\ 1 + 3x + x^2,\ x - x^2,\ 1 + 2x - x^2$$

Rozwiązanie. W Przykładzie 1 sprawdziliśmy, że powyższy zbiór generuje przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$, jednak nie może być bazą, gdyż zawiera zbyt dużo elementów ($\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$). Zgodnie z opisaną w Fakcie 1.14 procedurą szukamy w podanym zbiorze wektora „zbędnego", tzn. będącego kombinacją liniową pozostałych wektorów. Przykładem takiego wektora jest:

$$1 + 2x - x^2 = (1 + x) + (x - x^2)$$

W związku z tym układ $1+x, 1+3x+x^2, x-x^2$ jest bazą (jest zbiorem generującym i składa się z tylu elementów ile wynosi wymiar przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$).

Przykład 7

Wyznacz bazę przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ zaczynając od zbioru liniowo niezależnego:

$$1 + x,\ 1 + 2x - x^2,\ 1 + x^3$$

Rozwiązanie. W Przykładzie 9 sprawdziliśmy, że powyższy zbiór jest liniowo niezależny, jednak nie może być bazą, gdyż zawiera zbyt mało elementów ($\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$). Zgodnie z opisaną w Fakcie 1.14 procedurą chcemy dołożyć do zbioru wektor nie będący kombinacją liniową jego elementów. Przykładem takiego wektora jest x^3, gdyż próba wyrażenia go jako kombinacji liniowej elementów zbioru prowadzi do sprzeczności, jako że:

$$x^3 = \alpha(1 + x) + \beta(1 + 2x - x^2) + \gamma(1 + x^3) = \gamma x^3 - \beta x^2 + (\alpha + 2\beta)x + (\alpha + \beta + \gamma)$$

implikuje:

$$\begin{cases} 1 = \gamma \\ 0 = -\beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 0 = 0 + 0 + 1 \end{cases}$$

W związku z tym układ $1+x, 1+2x-x^2, 1+x^3, x^3$ jest bazą (jest liniowo niezależny i składa się z tylu elementów ile wynosi wymiar przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$).

Fakt 1.16: Wymiar podprzestrzeni

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Wówczas każda podprzestrzeń $W < V$ spełnia warunek $\dim W \leq \dim V$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $W = V$.

Dowód. Baza podprzestrzeni W (czyli układ wektorów liniowo niezależnych i generujących W) potraktowana jako układ wektorów V przestaje już być zbiorem generującym (chyba, że $W = V$), ale pozostaje zbiorem liniowo niezależnym. Zgodnie z Faktem 1.14 można ją więc rozszerzyć do bazy V, skąd $\dim W \leq \dim V$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy baza W jest równocześnie bazą V, czyli $W = V$. □

Przykład 8

Wyznaczyć wszystkie podprzestrzenie przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$.
Rozwiązanie. Ponieważ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, więc zgodnie z Faktem 1.16 każda podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ ma wymiar 0, 1 lub 2, przy czym jedyną podprzestrzenią wymiaru 2 jest całe $\mathbb{R}^2$. Jedyną podprzestrzenią wymiaru 0 jest jednoelementowa podprzestrzeń $\{0\}$. Pozostają do wyznaczenia podprzestrzenie wymiaru 1 – są to podprzestrzenie, których bazą jest jeden wektor $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, czyli podprzestrzenie postaci

$$\{t \cdot \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right), t \in \mathbb{R}\}$$

a więc proste w $\mathbb{R}^2$ przechodzące przez punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Sprawdzanie, że dany zbiór wektorów jest generujący lub liniowo niezależny zazwyczaj wykonujemy odwołując się do następującego przeformułowania Definicji 1.11:

Fakt 1.17: Zbiór liniowo niezależny (druga charakteryzacja)

Zbiór wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ jest liniowo niezależny (lnz) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych współczynników $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{1.1}$$

(tzn. jedyna zerująca się kombinacja liniowa wektorów $v_1, \ldots, v_n$ to kombinacja o wszystkich współczynnikach równych 0).

Dowód. Jeśli układ $v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo niezależny, to zgodnie z Faktem 1.12 istnieje tylko jedna zerująca się kombinacja liniowa wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Tą jedyną kombinacją liniową jest kombinacja trywialna:

$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n$$

co oznacza, że warunek (1.1) jest spełniony.
Jeśli układ $v_1, \ldots, v_n$ jest liniowo zależny, to zgodnie z Faktem 1.12 istnieje wektor, który przedstawia się na dwa różne sposoby w postaci kombinacji liniowej $v_1, \ldots, v_n$, czyli:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

gdzie przynajmniej dla jednego indeksu i zachodzi $\alpha_i \neq \beta_i$. Stąd:

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

czyli istnieje zerująca się kombinacja liniowa wektorów $v_1, \ldots, v_n$, której nie wszystkie współczynniki są zerami (bo $\alpha_i - \beta_i \neq 0$), co oznacza, że warunek (1.1) nie jest spełniony. □

Przykład 9

Sprawdź, czy układ wektorów $1 + x, 1 + 2x - x^2, 1 + x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ jest liniowo niezależny.
Rozwiązanie. Rozważmy zerującą się kombinację liniową tych wektorów:

$$\alpha(1 + x) + \beta(1 + 2x - x^2) + \gamma(1 + x^3) = 0$$

czyli

$$\gamma x^3 - \beta x^2 + (2\beta + \alpha)x + (\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

Powyższa równość to równość wielomianów (zero po prawej stronie oznacza wielomian zerowy). Wielomian jest wielomianem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki są zerami, czyli:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \\ 2\beta + \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $\alpha = \beta = \gamma = 0$, czyli jedyna zerująca się kombinacja liniowa to kombinacja o wszystkich współczynnikach równych 0. Badany układ wektorów jest więc liniowo niezależny.

Na koniec podamy dwa sposoby wyznaczania podprzestrzeni (prostrsze niż badanie zamkniętości zbioru na dodawanie i mnożenie przez skalary):

Fakt 1.18: Liniowa otoczka

Niech V będzie przestrzenią liniową, a $v_1, \ldots, v_n \in V$ dowolnymi wektorami. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji liniowych:

$$W = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V, oznaczaną $W = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że podany zbiór jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary, gdyż dla dowolnych $\alpha_i, \beta_i, t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

$$t \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = (t\alpha_1)v_1 + \cdots + (t\alpha_n)v_n$$

□

Przykład 10

Rozpoznaj podprzestrzeń:

$$V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} < M_{2\times 2}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że pierwszy z podanych elementów można wygenerować z pozostałych, więc:

$$\mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Z kolei ta ostatnia przestrzeń składa się z elementów postaci:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

Wobec tego V to przestrzeń macierzy symetrycznych rozmiaru 2×2.

Fakt 1.19: Przekrój podprzestrzeni

Jeśli $W_1, W_2 < V$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $W_1 \cap W_2$ też jest podprzestrzenią V.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że $W_1 \cap W_2$ jest zamknięty na dodawanie wektorów i mnożenie przez skalary. Rozważmy wektory $w, w' \in W_1 \cap W_2$. Wobec tego $w, w' \in W_1$, a ponieważ W_1 jest podprzestrzenią V, więc $w + w' \in W_1$. Podobnie $w + w' \in W_2$, a stąd dostajemy $w + w' \in W_1 \cap W_2$, co oznacza, że zbiór $W_1 \cap W_2$ jest zamknięty na dodawanie. Analogicznie dowodzimy zamkniętości na mnożenie przez skalary. □

Przykład 11

Uzasadnij, że zbiór wszystkich ograniczonych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalnych dowolną liczbę razy jest przestrzenią liniową.

Rozwiązanie. Zbiór $C^\infty(\mathbb{R})$ funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy oraz zbiór $L^\infty(\mathbb{R})$ funkcji ograniczonych są podprzestrzeniami przestrzeni wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wobec tego zbiór $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ograniczonych funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy, jako przekrój dwóch podprzestrzeni, jest podprzestrzenią przestrzeni wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, w szczególności jest przestrzenią liniową.

1.3 Przekształcenia liniowe

Definicja 1.20: Przekształcenie liniowe

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Przekształcenie $F : V \to W$ nazywamy *przekształceniem liniowym* (inaczej: *homomorfizmem*)[10], jeśli dla dowolnych $u, v \in V$ oraz $t \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:

1) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ (zwany *warunkiem addytywności*)
2) $F(t \cdot v) = t \cdot F(v)$ (zwany *warunkiem jednorodności*)

Zbiór wszystkich przekształceń liniowych $F : V \to W$ oznaczamy $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Warunki addytywności i jednorodności można połączyć w jednym warunku zwanym *warunkiem liniowości*:

Fakt 1.21: Przekształcenie liniowe

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Przekształcenie $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia *warunek liniowości* mówiący, że dowolnych $u, v \in V$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$F(su + tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v)$$

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli F jest przekształceniem liniowym, to spełnia warunki addytywności i jednorodności, skąd otrzymujemy warunek liniowości:

$$F(su + tv) = F(su) + F(tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v)$$

$\Leftarrow$ Warunek addytywności to warunek liniowości dla $s = t = 1$, zaś warunek jednorodności to warunek liniowości dla $s = 0$. Stąd warunek liniowości implikuje warunki addytywności i jednorodności. $\square$

Przykład 1

Każde przekształcenie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane wzorem:

$$F(X) = AX \qquad \text{czyli} \qquad F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gdzie $A \in M_{m \times n}$ jest przekształceniem liniowym. W szczególności, wszystkie przekształcenia liniowe rozważane w poprzednim semestrze (gdy $m, n \leq 3$) pozostają przekształceniami liniowymi (choć nowa definicja jest inna niż ta z pierwszego semestru). Sprawdzamy to korzystając z praw działań na macierzach:

$$F(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = F(X) + F(Y)$$
$$F(tX) = A(tX) = t \cdot (AX) = t \cdot F(X)$$

W szczególności przekształceniem liniowym jest przekształcenie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postaci:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

[10] Terminy *funkcja*, *przekształcenie*, *odwzorowanie*, *operator* to synonimy, aczkolwiek istnieją pewne ustalone konwencje dotyczące ich używania (np. gdy dziedziną jest $\mathbb{R}$ zwykle używamy terminu *funkcja*, a gdy dziedziną jest przestrzeń funkcji, jak $C(\mathbb{R})$, to zwykle używamy terminu *operator*). Termin *homomorfizm* jest synonimem terminu *przekształcenie liniowe*.

Przykład 2

Przekształcenie $D : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem $D(f) = f'$ (tzn. operator pochodnej) jest liniowe, zgodnie z twierdzeniami z analizy matematycznej:

$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(t \cdot f)' = t \cdot f'$$

Przykład 3

Przekształcenie $I : C(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem $I(f) = \int f(x)dx$ (tzn. operator całki nieoznaczonej) byłoby liniowe, zgodnie z twierdzeniami z analizy matematycznej:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int t \cdot f(x)dx = t \cdot \int f(x)dx$$

gdyby nie to, że jest ono źle zdefiniowane (całka nieoznaczona daje w wyniku funkcję z dokładnością do stałej całkowania, czyli zbiór funkcji, a nie pojedynczą funkcję). Z problemem poprawnego zdefiniowania operatora całki nieoznaczonej (który faktycznie okaże się operatorem liniowym) zmierzymy się ponownie, gdy poznamy pojęcie *warstwy podprzestrzeni*.

Przykład 4

Niech a i b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Przekształcenie $I : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ (tzn. operator całki oznaczonej) jest liniowe, zgodnie z twierdzeniami z analizy matematycznej:

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$
$$\int\limits_a^b t \cdot f(x)dx = t \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

Przykład 5

Przekształcenie $F : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $F(f) = f(3)$ (czyli przekształcenie przypisujące każdej funkcji jej wartość w punkcie 3) jest liniowe, bo:

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3)$$
$$(t \cdot f)(3) = t \cdot f(3)$$

Podobnie liniowe jest przekształcenie $G : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowane $G(P) = P(4)$ (czyli przypisujące każdemu wielomianowi jego wartość w punkcie 4). Oczywiście występujące tu liczby 3 i 4 można zamienić na dowolne inne.

Przykład 6

Przekształcenie $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ zdefiniowane wzorem $F(P)(x) = xP(x)$ (czyli mnożące każdy wielomian przez x) jest przekształceniem liniowym, bo:

$$x(P(x) + Q(x)) = xP(x) + xQ(x)$$
$$x(t \cdot P(x)) = t \cdot xP(x)$$

Przykład 7

Przekształcenie $F : M_{m\times n} \to M_{n\times m}$ zdefiniowane wzorem $F(A) = A^\top$ jest przekształceniem liniowym, bo:

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top$$
$$(tA)^\top = t \cdot A^\top$$

Weryfikowanie liniowości przekształcenia ułatwia poniższy fakt. Nie jest on niezbędny do zrozumienia dalszego ciągu rozdziału i przy pierwszym czytaniu skryptu można go pominąć. Wszelkie przykłady wykorzystujące do sprawdzenia liniowości Fakt 1.22 można rozwiązać odwołując się bezpośrednio do Definicji 1.20.

Fakt 1.22: Konstruowanie przekształceń liniowych

Niech U, V, W będą przestrzeniami liniowymi. Wówczas:

1) Jeśli przekształcenia $F : V \to W$ oraz $G : V \to W$ są liniowe, to przekształcenie $F + G : V \to W$ też jest liniowe.
2) Jeśli przekształcenie $F : V \to W$ jest liniowe, a t jest liczbą rzeczywistą, to przekształcenie $t \cdot F : V \to W$ też jest liniowe.
3) Jeśli przekształcenia $F : V \to W$ oraz $G : U \to V$ są liniowe, to przekształcenie $F \circ G : U \to W$ też jest liniowe.

Dowód. (1) Dla dowolnych $v_1, v_2 \in V$ zachodzi $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ (addytywność F) oraz $G(v_1 + v_2) = G(v_1) + G(v_2)$ (addytywność G). Stąd:

$$\begin{aligned}(F + G)(v_1 + v_2) &= F(v_1 + v_2) + G(v_1 + v_2)\\ &= F(v_1) + F(v_2) + G(v_1) + G(v_2) = (F + G)(v_1) + (F + G)(v_2)\end{aligned}$$

czyli $F + G$ jest addytywne. Podobnie sprawdzamy jednorodność.
(2) Dla dowolnych $v_1, v_2 \in V$ zachodzi $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ (addytywność F). Stąd:

$$(tF)(v_1 + v_2) = t \cdot F(v_1 + v_2) = t \cdot F(v_1) + t \cdot F(v_2) = (tF)(v_1) + (tF)(v_2)$$

czyli tF jest addytywne. Podobnie sprawdzamy jednorodność.
(3) Z addytywności F i G, dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$ zachodzi:

$$\begin{aligned}(F \circ G)(u_1 + u_2) &= F(G(u_1 + u_2)) = F(G(u_1) + G(u_2))\\ &= F(G(u_1)) + F(G(u_2)) = (F \circ G)(u_1) + (F \circ G)(u_2)\end{aligned}$$

czyli $F \circ G$ jest addytywne. Podobnie sprawdzamy jednorodność. □

Przykład 8

Uzasadnij, że przekształcenie $F : C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $F(f) = f'(2)$ jest przekształceniem liniowym.
Rozwiązanie. Zauważmy, że $F = G\circ H$, gdzie $H : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dane jest wzorem $H(f) = f'$, zaś $G : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dane jest wzorem $G(f) = f(2)$. Przekształcenia G i H, jak sprawdziliśmy w poprzednich przykładach, są liniowe, stąd F (jako złożenie przekształceń liniowych) również jest liniowe.

Przykład 9

Uzasadnij, że przekształcenie $F : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ zdefiniowane wzorem $F(A) = A^\top - A$ jest przekształceniem liniowym.
Rozwiązanie. Zauważmy, że $F = G - \mathrm{id}$, gdzie $G : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ dane jest wzorem $G(A) = A^\top$ oraz $\mathrm{id} : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ dane jest wzorem $\mathrm{id}(A) = A$. Przekształcenia G i id są liniowe, więc ich różnica również jest przekształceniem liniowym.

Z każdym przekształceniem liniowym związane są (oprócz dziedziny i przeciwdziedziny) jeszcze dwie ważne przestrzenie. Jedna z nich (jądro) jest podprzestrzenią dziedziny, druga (obraz) – podprzestrzenią przeciwdziedziny.

Definicja 1.23: Obraz i jądro

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi, zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym. Wówczas:

1) *obrazem* F nazywamy zbiór $\mathrm{Im}F = \{F(v) : v \in V\} \subset W$,
2) *jądrem* F nazywamy zbiór $\ker F = \{v \in V : F(v) = 0\} \subset V$.

Fakt 1.24: Obraz i jądro

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi, zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym. Wówczas:

1) $\ker F$ jest podprzestrzenią dziedziny przekształcenia F (tzn. $\ker F < V$),
2) $\mathrm{Im}F$ jest podprzestrzenią przeciwdziedziny przekształcenia F (tzn. $\mathrm{Im}F < W$).

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że $\ker F$ oraz $\mathrm{Im}F$ są zamknięte na dodawanie wektorów oraz na mnożenie przez skalary.
(1) Niech $v, v' \in \ker F$, czyli $F(v) = F(v') = 0$. Wówczas z warunku addytywności:

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = 0 + 0 = 0$$

czyli $v + v' \in \ker F$, więc $\ker F$ jest zamknięte na dodawanie. Zamkniętość na mnożenie przez skalary sprawdzamy podobnie.
(2) Niech $w, w' \in \mathrm{Im}F$. Oznacza to, że $w = F(v)$ oraz $w' = F(v')$ dla pewnych wektorów $v, v' \in V$. Z warunku addytywności:

$$w + w' = F(v) + F(v') = F(v + v')$$

czyli $w + w' \in \mathrm{Im}F$, więc $\mathrm{Im}F$ jest zamknięte na dodawanie. Zamkniętość na mnożenie przez skalary sprawdzamy podobnie. □

Fakt 1.24 pozwala uprościć sprawdzanie, że pewne podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi, co pokażemy w kolejnych przykładach.

Przykład 10

Uzasadnij, że zbiór $\{P \in \mathbb{R}_4[x] : P'(2) = 0\}$ z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez skalary jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią $\mathbb{R}_4[x]$).
Rozwiązanie. Rozważany zbiór jest jądrem przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(P) = P'(2)$$

czyli (zgodnie z Faktem 1.24) podprzestrzenią dziedziny, w szczególności przestrzenią liniową.

Przykład 11

Uzasadnij, że zbiór $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 - x_2 - x_4 = 0\right\}$ z dodawaniem wektorów i mnożeniem wektorów przez skalary jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$).
Rozwiązanie. Rozważany zbiór można zapisać w postaci:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Jest on zatem jądrem przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowanego wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

czyli (zgodnie z Faktem 1.24) podprzestrzenią dziedziny, w szczególności przestrzenią liniową.

Przykład 12

Uzasadnij, że zbiór $\{A \in M_{2\times 2} : A^\top = A\}$ (zbiór macierzy symetrycznych) z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez skalary jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią $M_{2\times 2}$).
Rozwiązanie. Rozważany zbiór można zapisać w postaci:

$$\{A \in M_{2\times 2} : A^\top - A = 0\}$$

Jest on zatem jądrem przekształcenia liniowego $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(A) = A^\top - A$$

czyli (zgodnie z Faktem 1.24) podprzestrzenią dziedziny, w szczególności przestrzenią liniową.

Przedstawienie zbioru w postaci jądra pewnego odwzorowania liniowego pozwala nie tylko uzasadnić, że zbiór ten jest podprzestrzenią, ale również wyznaczyć wymiar tej podprzestrzeni, co pokazuje następujące twierdzenie. Dowód tego twierdzenia pominiemy, jako zbyt trudny.

Twierdzenie 1.25: Twierdzenie o indeksie

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi, przy czym $\dim V < \infty$, zaś $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

$$\dim \ker F + \dim \mathrm{Im} F = \dim V$$

Przykład 13

Wyznacz wymiar przestrzeni liniowej $V = \{P \in \mathbb{R}_4[x] : P'(2) = 0\}$.
Rozwiązanie. W Przykładzie 10 ustaliliśmy, że przestrzeń V jest jądrem przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(P) = P'(2)$$

Obraz $\mathrm{Im}F$ jest podprzestrzenią jednowymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}$, wobec tego $\dim \mathrm{Im}F = 0$ (jeśli obraz składa się wyłącznie z elementu 0) albo $\dim \mathrm{Im}F = 1$ (w przeciwnym razie). Stąd, zgodnie z Twierdzeniem o indeksie, otrzymujemy:

$$\dim\ker F = \dim \mathbb{R}_4[x] - \dim \mathrm{Im} F = 5 - 1 = 4$$

Przykład 14

Wyznacz wymiar przestrzeni $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_1 - x_2 - x_4 = 0\}$.

Rozwiązanie. W Przykładzie 11 ustaliliśmy, że przestrzeń ta jest jądrem przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowanego wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

Obraz $\mathrm{Im}F$ jest podprzestrzenią dwuwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$, wobec tego $\dim \mathrm{Im}F = 0$ (jeśli obraz składa się wyłącznie z elementu 0) albo $\dim \mathrm{Im}F = 1$ (jeśli wszystkie elementy obrazu są współliniowe) albo $\dim \mathrm{Im}F = 2$ (w przeciwnym razie). Ponieważ w obrazie $\mathrm{Im}F$ nietrudno znaleźć dwa niezerowe i niewspółliniowe elementy, np. $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, więc $\dim \mathrm{Im}F = 2$ i zgodnie z Twierdzeniem o indeksie otrzymujemy:

$$\dim\ker F = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Im}F = 4 - 2 = 2$$

Przykład 15

Wyznacz wymiar przestrzeni $\{A \in M_{2\times 2} : A^\top = A\}$.

Rozwiązanie. W Przykładzie 12 ustaliliśmy, że przestrzeń ta jest jądrem przekształcenia liniowego $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(A) = A^\top - A$$

Ponieważ

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix}$$

więc każdy element obrazu jest pewną krotnością elementu $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, czyli $\dim \mathrm{Im}F = 1$. Wobec tego, zgodnie z Twierdzeniem o indeksie, otrzymujemy:

$$\dim\ker F = \dim M_{2\times 2} - \dim \mathrm{Im}F = 4 - 1 = 3$$

Jak widać z powyższych przykładów, wyznaczanie wymiaru przestrzeni liniowej często można sprowadzić do wyznaczania wymiaru obrazu przekształcenia liniowego. Wyznaczanie wymiaru obrazu ułatwia następujący fakt:

Fakt 1.26: Obraz przekształcenia liniowego

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi, zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą V, to zbiór $F(b_1), \ldots, F(b_n)$ jest zbiorem generującym obraz $\mathrm{Im}F$.

Dowód. Każdy element obrazu $\mathrm{Im}F$ jest postaci $F(v)$ dla pewnego $v \in V$. Wektor v można przedstawić w postaci kombinacji liniowej bazy:

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

Stąd, z warunku liniowości, otrzymujemy:

$$F(v) = F(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 F(b_1) + \cdots + \alpha_n F(b_n)$$

czyli każdy element $\mathrm{Im}F$ jest kombinacją liniową elementów $F(b_1), \ldots, F(b_n)$. □

Przykład 16

Wyznacz bazę i wymiar obrazu przekształcenia liniowego $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(A) = A^\top - A$$

Rozwiązanie. Ciąg $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))$ jest bazą $M_{2\times 2}$. Zgodnie z Faktem 1.26 obraz $\mathrm{Im}F$ jest generowany przez obrazy wektorów bazowych, czyli:

$$F(b_1) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad F(b_2) = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \quad F(b_3) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \quad F(b_4) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Wektory zerowe można bez straty usunąć ze zbioru generującego, a pozostałe dwa wektory są współliniowe. Stąd baza $\mathrm{Im}F$ składa się z jednego elementu: $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$, w szczególności $\dim \mathrm{Im}F = 1$.

Przykład 17

Wyznacz bazę i wymiar obrazu przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowanego wzorem:

$$F(P) = \begin{pmatrix}P(1)\\P'(1)\\P''(1)\end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Ciąg $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$. Zgodnie z Faktem 1.26 obraz $\mathrm{Im}F$ jest generowany przez obrazy wektorów bazowych, czyli:

$$F(b_1) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \quad F(b_2) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad F(b_3) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$$

Wobec tego obraz $\mathrm{Im}F$ zawiera wektory:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\\
&\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\\
&\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

które generują całe $\mathbb{R}^3$. Wobec tego $\mathrm{Im}F = \mathbb{R}^3$, w szczególności $\dim \mathrm{Im}F = 3$.

Fakt 1.27: Różnowartościowość i „na"

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi, zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym. Wówczas:

1) F jest różnowartościowe[11] $\iff$ $\ker F = \{0\}$ (tzn. $\dim \ker F = 0$),
2) F jest „na"[12] $\iff$ $\mathrm{Im} F = W$ (tzn. $\dim \mathrm{Im} F = \dim W$).

Dowód. (1) $\Rightarrow$ Jeśli F jest różnowartościowe, to przeciwobraz każdego punktu $w \in W$ (w szczególności przeciwobraz $0 \in W$, czyli $\ker F$) jest zbiorem pustym lub jednoelementowym. Ponieważ $0 \in \ker F$ (z liniowości mamy $F(0) = 0$), więc $\ker F = F^{-1}[0] = \{0\}$.
$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\ker F = \{0\}$. Jeśli $v, v' \in V$ są takimi punktami, że $F(v) = F(v')$, to z warunku liniowości:

$$F(v - v') = F(v) - F(v') = 0$$

Zatem $v - v' \in \ker F$, czyli $v - v' = 0$, a więc $v = v'$. Stąd F jest różnowartościowa.
(2) Jest to przeformułowanie definicji własności „na". Warunek $\mathrm{Im} F = W$ jest równoważny warunkowi $\dim \mathrm{Im} F = \dim W$ zgodnie z Faktem 1.16.

□

Wniosek 1.28: Bijekcja

Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, zaś $F : V \to W$ przekształceniem liniowym.

1) Jeśli $\dim V = \dim W$ to:

$$F \text{ jest różnowartościowe} \iff F \text{ jest „na"} \iff F \text{ jest bijekcją}$$

2) Jeśli $\dim V < \dim W$ to F nie może być „na", w szczególności nie może być bijekcją.
3) Jeśli $\dim V > \dim W$ to F nie może być jest różnowartościowe, w szczególności nie może być bijekcją.

Dowód. (1) Z twierdzenia o indeksie oraz warunku $\dim V = \dim W$ otrzymujemy:

$$\dim \ker F + \dim \mathrm{Im} F = \dim V = \dim W$$

skąd $\dim \ker F = 0 \iff \dim \mathrm{Im} F = \dim W$. W świetle Faktu 1.27 oznacza to, że dla przekształcenia liniowego spełniającego warunek $\dim V = \dim W$ własność różnowartościowości jest równoważna własności „na". Wobec tego warunek różnowartościowości jest równoważny bijektywności.
(2) Z twierdzenia o indeksie wiemy, że:

$$\dim \mathrm{Im} F < \dim \ker F + \dim \mathrm{Im} F = \dim V < \dim W$$

więc $\dim \mathrm{Im} F < \dim W$, czyli F nie może być „na".
(3) Z twierdzenia o indeksie wiemy, że:

$$\dim \ker F = \dim V - \dim \mathrm{Im} F > \dim W - \dim \mathrm{Im} F \geq 0$$

więc $\dim \ker F > 0$, czyli F nie może być różnowartościowe. □

[11] Mówimy też, że F jest *injekcją*.
[12] Mówimy też, że F jest *surjekcją*.

Przykład 18

Sprawdź, które z poniższych przekształceń liniowych są różnowartościowe, które są „na” i które są bijekcjami:

(a) przekształcenie $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem $F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1) \end{pmatrix}$,

(b) przekształcenie $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem $J(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ x-y \\ 3x+2y \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. (a) W Przykładzie 17 sprawdziliśmy, że $\mathrm{Im} F = \mathbb{R}^3$, czyli przekształcenie F jest „na”. Ponieważ $\dim \mathbb{R}_2[x] = \dim \mathbb{R}^3$, więc (zgodnie z Wnioskiem 1.28) oznacza to, że F jest bijekcją, w szczególności jest różnowartościowe.

(b) Jeśli $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \ker J$, to

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

skąd $x = y = 0$. Stąd $\ker J = \{0\}$, czyli J jest różnowartościowe. Ponieważ $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$, więc (zgodnie z Wnioskiem 1.28) J nie jest „na”, w szczególności nie jest bijekcją.

Wiemy, że każde przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ można opisać jako mnożenie z lewej strony przez pewną macierz (zwaną *macierzą przekształcenia* F). Opisanie w podobny sposób dowolnego przekształcenia liniowego $F : V \to W$ jest utrudnione z uwagi na to, że przestrzenie V i W mogą być np. przestrzeniami macierzy, wielomianów, funkcji lub ciągów. Używając pojęcia współrzędnych wektora w bazie możemy element dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni opisać w postaci kolumny liczb rzeczywistych, jednak opis ten w istotny sposób zależy od wyboru bazy. Dlatego każdej macierzy przekształcenia musi towarzyszyć informacja o bazach, w odniesieniu do których macierz ta została wyznaczona:

Definicja 1.29: Macierz przekształcenia

Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, a $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ i $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ bazami, odpowiednio V i W. Wówczas macierz (rozmiaru $m \times n$):

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = ([F(b_1)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [F(b_n)]_{\mathcal{C}}) \tag{1.2}$$

nazywamy *macierzą przekształcenia F w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$* (tzn. kolumny macierzy przekształcenia to współrzędne obrazów wektorów bazowych).

Przy takiej definicji, znany z poprzedniego semestru warunek liniowości:

$$F(X) = m(F) \cdot X$$

gdzie $m(F)$ jest macierzą przekształcenia F, przyjmuje następującą postać:

Fakt 1.30: Macierz przekształcenia

Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, a $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ i $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ bazami, odpowiednio V i W. Wówczas:

$$[F(v)]_{\mathcal{C}} = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot [v]_{\mathcal{B}} \tag{1.3}$$

Dowód. Jeśli $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, to $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$. Zauważmy, że dla dowolnej macierzy

$A = (A_1, \ldots, A_n)$ (czyli macierzy o kolumnach $A_1, \ldots, A_n$) zachodzi:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (A_1, \ldots, A_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$$

więc zgodnie ze wzorem (1.2) dostajemy:

$$\begin{aligned} m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = ([F(b_1)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [F(b_n)]_{\mathcal{C}}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= \alpha_1 [F(b_1)]_{\mathcal{C}} + \cdots + \alpha_n [F(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ = [\alpha_1 F(b_1) + \cdots + \alpha_n F(b_n)]_{\mathcal{C}} = [F(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n)]_{\mathcal{C}} &= [F(v)]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

□

Przykład 19

Wyznacz macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ zadanego wzorem:

$$F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1) \end{pmatrix}$$

(a) w bazach $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ i $\mathcal{C} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$;

(b) w bazach $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3)$ i $\mathcal{C}' = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Rozwiązanie. (a) Zgodnie z Definicją 1.29 kolumny macierzy przekształcenia to współrzędne obrazów wektorów bazowych. Ponieważ:

$$\begin{aligned} F(b_1) = F(1) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 \\ F(b_2) = F(x) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 \\ F(b_3) = F(x^2) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 \\ F(b_4) = F(x^3) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 + 6 \cdot c_3 \end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Przeprowadzając podobny rachunek dla baz $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{C}'$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(b'_1) = F(1) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot c'_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c'_2 - \tfrac{1}{2} \cdot c'_3 \\ F(b'_2) = F(1+x) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{3}{2} \cdot c'_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c'_2 - \tfrac{1}{2} \cdot c'_3 \\ F(b'_3) = F(1+x^2) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot c'_1 + 1 \cdot c'_2 + 1 \cdot c'_3 \\ F(b'_4) = F(1+x^3) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot c'_1 + \tfrac{5}{2} \cdot c'_2 + \tfrac{7}{2} \cdot c'_3 \end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Przykład 20

Wyznacz macierz przekształcenia liniowego $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowanego wzorem:

$$G\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

(a) w bazach $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ i $\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

(b) w bazach $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ i $\mathcal{D}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. (a) Zgodnie z Definicją 1.29 kolumny macierzy przekształcenia to współrzędne obrazów wektorów bazowych. Stąd, ponieważ:

$$\begin{aligned} G(c_1) &= G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_2 \\ G(c_2) &= G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot d_1 + 1 \cdot d_2 \\ G(c_3) &= G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot d_1 + 0 \cdot d_2 \end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Przeprowadzając podobny rachunek dla baz $\mathcal{C}'$ i $\mathcal{D}'$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} G(c'_1) &= G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot d'_1 + 0 \cdot d'_2 \\ G(c'_2) &= G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot d'_1 + \frac{1}{2} \cdot d'_2 \\ G(c'_3) &= G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot d'_1 + \frac{1}{2} \cdot d'_2 \end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{D}'}(G) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Szczególnym przypadkiem wzoru (1.3) jest wzór umożliwiający zamianę współrzędnych wektora w jednej bazie na współrzędne tego samego wektora w innej bazie:

Wniosek 1.31: Macierz zmiany bazy

Dla baz $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ i $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ przestrzeni liniowej V zachodzi:

$$[v]_{\mathcal{C}} = m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \cdot [v]_{\mathcal{B}}, \qquad \text{gdzie } m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = ([b_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [b_n]_{\mathcal{C}}) \tag{1.4}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot [v]_{\mathcal{C}}, \qquad \text{gdzie } m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = ([c_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [c_n]_{\mathcal{B}}) \tag{1.5}$$

Dodatkowo, macierze $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ oraz $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ (zwane *macierzami zmiany bazy*) spełniają warunek:

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = (m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}))^{-1} \tag{1.6}$$

Dowód. Wzory (1.4) i (1.5) to szczególne przypadki wzoru (1.3) (zastosowanego do przekształcenia identycznościowego $\mathrm{id} : V \to V$). Przekształcając (1.4) otrzymujemy:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \left(m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right)^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{C}}$$

co po porównaniu (1.5) daje[13]:

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \left(m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right)^{-1}$$

□

Przykład 21

Wyznacz obie macierze zmiany bazy dla baz $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz sprawdź, że macierze te są wzajemnie odwrotne.

Rozwiązanie. Ponieważ:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot c_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_3\\
b_2 &= \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \tfrac{3}{2} \cdot c_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_2 + \tfrac{3}{2} \cdot c_3\\
b_3 &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot c_1 - \tfrac{1}{2} \cdot c_2 - \tfrac{1}{2} \cdot c_3
\end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = ([b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3\\
c_2 &= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 3 \cdot b_1 - 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3\\
c_3 &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -2 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 - 1 \cdot b_3
\end{aligned}$$

więc

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = ([c_1]_{\mathcal{B}}, [c_2]_{\mathcal{B}}, [c_3]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Nietrudno sprawdzić, że otrzymane macierze są wzajemnie odwrotne.

Przykład 22

Na przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ dane są dwie bazy: $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ oraz $\mathcal{C} = (1 + x, 1 + 2x - x^2, 2 + x^2)$. Wyznacz $[P]_{\mathcal{C}}$ dla wielomianu $P(x) = x^2 - 3x + 4$.

Rozwiązanie. W poprzednim rozdziale wyznaczaliśmy współrzędne rozwiązując układ równań. Teraz możemy posłużyć się macierzą zmiany bazy. Wiemy, że $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$, wobec tego:

$$[P]_{\mathcal{C}} = m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \cdot [P]_{\mathcal{B}}$$

Znacznie łatwiejsze od wyznaczenia macierzy:

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = ([b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}})$$

[13] Argument ten wymaga założenia, że macierz jest odwracalna. W Fakcie 2.23 pokażemy, że macierz liniowego przekształcenia odwracalnego (a taki jest $\mathrm{id} : V \to V$) zawsze jest odwracalna.

jest wyznaczenie macierzy:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = ([c_1]_{\mathcal{B}}, [c_2]_{\mathcal{B}}, [c_3]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \left(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

czyli

$$[P]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Fakt 1.32: Macierz złożenia przekształceń

Dla przekształceń liniowych $F : U \to V$ i $G : V \to W$ oraz baz $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ przestrzeni, odpowiednio, U, V, W zachodzi[14]:

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \tag{1.7}$$

Dowód. Zauważmy, że zgodnie z Faktem 1.30 dla dowolnego wektora $u \in U$ zachodzi:

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) \cdot [u]_{\mathcal{B}} = [(G \circ F)(u)]_{\mathcal{D}} = [G(F(u))]_{\mathcal{D}}$$
$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot [u]_{\mathcal{B}} = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot [F(u)]_{\mathcal{C}} = [G(F(u))]_{\mathcal{D}}$$

Stąd dostajemy równość macierzy ze wzoru (1.7). □

Przykład 23

Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ z Przykładu 19 zdefiniowane wzorem:

$$F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1) \end{pmatrix}$$

oraz przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ z Przykładu 20 zdefiniowane wzorem:

$$G\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

Napisz macierz przekształcenia $G \circ F$ oraz sprawdź wzór (1.7) dla baz:

(a) $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ i $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

(b) $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3)$ i $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{D}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Przekształcenie $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ jest zdefiniowane wzorem:

$$(G \circ F)(P) = \begin{pmatrix} P(1) + P'(1) + P''(1) \\ P(1) + P'(1) \end{pmatrix}$$

[14] Wzór ten można w oczywisty sposób uogólnić na złożenie trzech i więcej przekształceń.

Zgodnie z Definicją 1.29 kolumny macierzy przekształcenia to współrzędne obrazów wektorów bazowych, więc:

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad m_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{B}'}(G \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Korzystając z wyliczeń z Przykładów 19 i 20 sprawdzamy, że:

$$m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F)$$

oraz

$$m_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{C}'}(G) \cdot m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = m_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{B}'}(G \circ F)$$

Rozważając przekształcenia liniowe, dla których dziedzina i przeciwdziedzina są równe (czyli przekształcenia $F : V \to V$) zazwyczaj przyjmujemy tę samą bazę dla dziedziny i przeciwdziedziny (choć nie jest to obowiązkowe). Macierze zmiany bazy pozwalają wówczas ustalić wzajemną relację macierzy przekształcenia F w różnych bazach:

Wniosek 1.33: Macierz przekształcenia w różnych bazach

Dla baz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ przestrzeni V oraz przekształcenia liniowego $F : V \to V$ zachodzi:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \tag{1.8}$$

Dowód. Stosując dwukrotnie wzór (1.7) otrzymujemy:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(F \circ \mathrm{id}) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id} \circ F \circ \mathrm{id}) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$$

□

Przykład 24

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$$

oraz bazy $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ i $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz macierz przekształcenia F w każdej z tych baz oraz sprawdź wzór (1.8).

Rozwiązanie. Dla bazy $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ wyznaczamy:

$$F(b_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4b_1 - b_2 + 2b_3$$
$$F(b_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 7b_1 - b_2 + 4b_3$$
$$F(b_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2b_1 + b_2$$

skąd

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dla bazy $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ wyznaczamy:

$$\begin{aligned} F(c_1) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 2c_1 \\ F(c_2) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 - \tfrac{3}{2}c_3 \\ F(c_3) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 + \tfrac{1}{2}c_3 \end{aligned}$$

skąd

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Korzystając ze wzorów na macierze zmiany bazy wyprowadzonych w Przykładzie 21 sprawdzamy:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Definicja 1.34: Izomorfizm

Przekształcenie liniowe $F : V \to W$ nazywamy *przekształceniem odwracalnym* lub *izomorfizmem*, jeśli istnieje przekształcenie liniowe $G : W \to V$ takie, że:

$$F \circ G = \mathrm{id}_W \qquad \text{oraz} \qquad G \circ F = \mathrm{id}_V \tag{1.9}$$

Przekształcenie G spełniające powyższy warunek oznaczamy $G = F^{-1}$ i nazywamy *przekształceniem odwrotnym* do F. Przestrzenie liniowe V i W nazywamy wówczas *przestrzeniami izomorficznymi* (ozn. $V \cong W$).

Fakt 1.35: Izomorfizm

Przekształcenie liniowe $F : V \to W$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją. W szczególności izomorficzne przestrzenie liniowe mają ten sam wymiar.

Dowód. Zwróćmy uwagę, że warunek bijektywności $F : V \to W$ oznacza istnienie przekształcenia odwrotnego $F^{-1} : W \to V$, ale nie gwarantuje natychmiast, że F^{-1} jest przekształceniem liniowym. Zatem pozostaje sprawdzić, że F^{-1} jest addytywne i jednorodne. Weźmy dowolne wektory $w, w' \in W$. Ponieważ F jest bijekcją, więc istnieją $v, v' \in V$ takie, że $w = F(v)$ i $w' = F(v')$, czyli $F^{-1}(w) = v$ i $F^{-1}(w') = v'$. Wówczas:

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = w + w'$$

skąd

$$F^{-1}(w + w') = v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}(w')$$

czyli F^{-1} jest addytywne. Podobnie sprawdzamy jednorodność F^{-1}. □

Fakt 1.36: Uniwersalność przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Jeśli V jest przestrzenią liniową wymiaru n, to $V \cong \mathbb{R}^n$.

Dowód. Odwzorowanie $F: V \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowane $F(v) = [v]_{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest pewną ustaloną bazą, jest przekształceniem liniowym (dodawaniu wektorów odpowiada dodawanie współrzędnych w bazie $\mathcal{B}$, podobnie mnożenie przez skalar) oraz jest bijekcją. Zatem F jest izomorfizmem. □

Przykład 25

Sprawdź, które z poniższych par przestrzeni są izomorficzne:

(a) $\mathbb{R}_3[x]$ oraz $\mathbb{R}^4$,

(b) $M_{2\times 2}$ oraz $\mathbb{R}^4$,

(c) $\mathbb{R}_4[x]$ oraz $M_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. (a) Przekształcenie $F: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ zdefiniowane wzorem:

$$F(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym oraz bijekcją, a zatem izomorfizmem, Stąd $\mathbb{R}_3[x] \cong \mathbb{R}^4$.
(b) Przekształcenie $F: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ zdefiniowane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

jest przekształceniem liniowym oraz bijekcją, a zatem izomorfizmem, Stąd $M_{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$.
(c) Ponieważ $\dim \mathbb{R}_4[x] = 5$, zaś $\dim M_{2\times 2} = 4$, więc przestrzenie te (jako przestrzenie różnych wymiarów) nie są izomorficzne.

Dla zainteresowanych...

Rozważmy zbiór ciągów spełniających równanie rekurencyjne:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ dla } n \geq 1 \tag{1.10}$$

Zbiór ten jest zamknięty na dodawanie ciągów i na mnożenie ciągów przez skalar, czyli:

$$V = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} : a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ dla każdego } n \geq 1\}$$

jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią przestrzeni ciągów). Wykorzystamy Twierdzenie o indeksie do obliczenia $\dim V$. Przekształcenie liniowe $F: V \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem:

$$F((a_n)_{n=0}^{\infty}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

jest różnowartościowe (bo $\ker F$ zawiera jedynie ciąg zerowy) oraz „na" (dwa pierwsze wyrazy ciągu spełniającego rozważaną rekurencję mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi). Wobec tego F jest izomorfizmem, czyli $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, a zatem dowolne dwa niewspółliniowe elementy V stanowią bazę. Poszukamy bazy złożonej z ciągów wykładniczych. Ciąg $a_n = t^n$ należy do V, jeśli:

$$t^{n+1} = t^n + t^{n-1} \qquad \text{czyli} \qquad t^2 = t + 1$$

Powyższe równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki: $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Wobec tego ciągi $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ oraz $b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ stanowią bazę V.

Rozważmy teraz ciąg Fibonacciego, czyli ciąg zadany wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest elementem przestrzeni V, więc jest kombinacją liniową ciągów bazowych:

$$f_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Podstawiając $n = 0$ oraz $n = 1$ wyliczamy $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ i otrzymujemy zwarty wzór ciągu Fibonacciego:

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Z podobnym rozumowaniem zetkniemy się na równaniach różniczkowych. Rozważmy równanie różniczkowe[a]:

$$f'' = -f \tag{1.11}$$

Zbiór funkcji spełniających (1.11):

$$W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f'' = -f\}$$

jest zamknięty na dodawanie funkcji i mnożenie funkcji przez skalar, czyli jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią $C^2(\mathbb{R})$). Obliczymy $\dim W$ korzystając z Twierdzenia o indeksie. Przekształcenie liniowe $F : W \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

$$F(f) = \begin{pmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}$$

zgodnie z twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych[b] jest różnowartościowe i „na”. Wobec tego F jest izomorfizmem, czyli $\dim W = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, a zatem dowolne dwa niewspółliniowe elementy W stanowią bazę. Nietrudno zgadnąć takie dwa elementy: $f_1(x) = \sin x$ oraz $f_2(x) = \cos x$. Rozważmy teraz równanie różniczkowe z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(x) = -f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Zgodnie z powyższym rozumowaniem f jest kombinacją liniową wektorów bazowych, czyli:

$$f(x) = \alpha \cdot \sin x + \beta \cdot \cos x \tag{1.12}$$

Z warunku $f(0) = f'(0) = 1$ otrzymujemy $\alpha = \beta = 1$, czyli

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

[a] Równanie (1.11) oznacza, że szukamy takich funkcji, dla których druga pochodna jest tym samym co funkcja przeciwna.

[b] Twierdzenie to (które poznamy w dalszym toku studiów) mówi m.in. że równanie różniczkowe postaci $f''(x) = a \cdot f'(x) + b \cdot f(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek $f'(0) = c$, $f(0) = d$ dla dowolnych c i d.

Rozdział 2

Macierze i układy równań

2.1 Wyznacznik macierzy

Definicja 2.1: Rozstawienie wyrazów macierzy

Rozstawieniem[1] wyrazów macierzy $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ rozmiaru $n \times n$ nazywamy każdy taki wybór zbioru n wyrazów tej macierzy:

$$a_{i_1j_1} \quad a_{i_2j_2} \quad \ldots \quad a_{i_nj_n}$$

że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jeden z wybranych wyrazów (tzn. indeksy $i_1, \ldots, i_n$ są parami różne oraz indeksy $j_1, \ldots, j_n$ są parami różne). *Rozstawieniem diagonalnym* nazwiemy rozstawienie składające się z wyrazów leżących na przekątnej macierzy, tzn. rozstawienie:

$$a_{11} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{nn}$$

Znajdowanie rozstawienia wyrazów macierzy $n \times n$ jest matematyczną wersją szachowego zadania: ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ w taki sposób, by żadne dwie z nich się nie atakowały. Klasyczne podręczniki algebry liniowej zamiast posługiwać się pojęciem rozstawienia wyrazów macierzy używają pojęcia permutacji liczb $1, 2, \ldots, n$, czyli bijekcji:

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

Używając tej terminologii, rozstawienie to zbiór wyrazów macierzy postaci:

$$a_{1\sigma(1)} \quad a_{2\sigma(2)} \quad \ldots \quad a_{n\sigma(n)}$$

dla pewnej permutacji σ. Rozstawienie diagonalne odpowiada permutacji identycznościowej, tzn. permutacji σ takiej, że $\sigma(k) = k$ dla dowolnego k.

Fakt 2.2: Liczba rozstawień

Dla macierzy $n \times n$ istnieje dokładnie $n!$ rozstawień wyrazów.

Dowód. Z pierwszego wiersza macierzy możemy wybrać dowolny z n wyrazów. Z drugiego wiersza możemy wybrać dowolny z $n - 1$ wyrazów (jedna kolumna jest już „zajęta” przez wyraz wybrany z pierwszego wiersza). Z trzeciego wiersza możemy wybrać dowolny z $n - 2$ wyrazów

[1] Pojęcie *rozstawienia wyrazów macierzy* zostało wprowadzone wyłącznie na użytek niniejszego skryptu, aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie (skomplikowanego) wzoru na wyznacznik macierzy. Pojęcie to nie jest ogólnie przyjętym terminem i nie występuje w klasycznych podręcznikach algebry liniowej.

(dwie kolumny są już „zajęte” przez wyrazy wybrane z pierwszego i drugiego wiersza), itd. Stąd liczba możliwych rozstawień to:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

Fakt 2.3: Parzystość rozstawienia

Każde rozstawienie wyrazów macierzy $n \times n$ możemy przekształcić w rozstawienie diagonalne poprzez wielokrotne powtórzenie operacji zamiany miejscami dwóch kolumn macierzy. Rozstawienie nazywamy[2]:

1) *parzystym*, jeśli można to zrobić wykonując parzystą liczbę zamian,
2) *nieparzystym*, jeśli można to zrobić wykonując nieparzystą liczbę zamian.

Żadne rozstawienie nie może być równocześnie parzyste i nieparzyste.
Definicja parzystego i nieparzystego rozstawienia nie ulegnie zmianie, jeśli operację zamiany miejscami dwóch kolumn zastąpimy operacją zamiany miejscami dwóch wierszy.

Fakt, że każde rozstawienie można przekształcić w rozstawienie diagonalne jest prosty (wystarczy uporządkować kolumny według pozycji zajmowanej przez wybrany wyraz). Kluczowym stwierdzeniem (którego dowód pomijamy, jako wykraczający poza ramy niniejszego skryptu) jest fakt, że żadne rozstawienie nie może być równocześnie parzyste i nieparzyste.

Fakt 2.4: Liczba (nie)parzystych rozstawień

Wśród wszystkich $n!$ rozstawień wyrazów macierzy $n \times n$ (dla $n \geq 2$), połowa rozstawień jest parzysta, a połowa – nieparzysta.

Dowód. Rozstawienia możemy połączyć w pary, łącząc każde rozstawienie z rozstawieniem powstałym z niego przez zamianę miejscami pierwszej i drugiej kolumny. W ten sposób w każdej parze mamy jedno rozstawienie parzyste i jedno nieparzyste, czyli rozstawień parzystych i nieparzystych jest tyle samo. □

Definicja 2.5: Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ rozmiaru $n \times n$ nazywamy liczbę:

$$\det A = \sum \pm a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n j_n} \tag{2.1}$$

gdzie suma przebiega wszystkie możliwe rozstawienia wyrazów macierzy A, a wybór znaku jest zgodny z parzystością rozstawienia ($+$ dla parzystych, $-$ dla nieparzystych).

Przykład 1

Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że istnieją tylko dwa rozstawienia wyrazów macierzy 2×2:

$$\underset{+ad}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad \underset{-bc}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

[2] Pojęcie parzystego/nieparzystego rozstawienia odpowiada pojęciom parzystej/nieparzystej permutacji.

Drugie rozstawienie wymaga jednej zamiany kolumn, by sprowadzić je do diagonalnego (czyli jest nieparzyste, stąd znak $-$). Pierwsze rozstawienie już jest diagonalne, czyli parzyste (wymaga 0 zamian kolumn), stąd znak $+$. Otrzymujemy wzór:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

który pokrywa się ze wzorem z ubiegłego semestru. Zauważmy, że otrzymana suma ma 2! składników, z których każdy jest iloczynem 2 wyrazów macierzy oraz że połowa składników występuje ze znakiem $+$, a połowa ze znakiem $-$.

Przykład 2

Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Istnieje $6 = 3!$ rozstawień wyrazów macierzy 3×3:

$$\underset{+a_1b_2c_3}{\begin{pmatrix} \color{red}{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & \color{red}{b_2} & c_2 \\ a_3 & b_3 & \color{red}{c_3} \end{pmatrix}} \underset{+b_1c_2a_3}{\begin{pmatrix} a_1 & \color{red}{b_1} & c_1 \\ a_2 & b_2 & \color{red}{c_2} \\ \color{red}{a_3} & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} \underset{+c_1a_2b_3}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \color{red}{c_1} \\ \color{red}{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & \color{red}{b_3} & c_3 \end{pmatrix}} \underset{-c_1b_2a_3}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \color{red}{c_1} \\ a_2 & \color{red}{b_2} & c_2 \\ \color{red}{a_3} & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} \underset{-b_1a_2c_3}{\begin{pmatrix} a_1 & \color{red}{b_1} & c_1 \\ \color{red}{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & \color{red}{c_3} \end{pmatrix}} \underset{-a_1c_2b_3}{\begin{pmatrix} \color{red}{a_1} & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & \color{red}{c_2} \\ a_3 & \color{red}{b_3} & c_3 \end{pmatrix}}$$

Pierwsze rozstawienie jest diagonalne (czyli parzyste). Drugie rozstawienie można przekształcić w diagonalne wykonując dwie zamiany kolumn (zamieniając pierwszą kolumnę z drugą, a następnie drugą z trzecią), czyli również jest parzyste. Czwarte rozstawienie można przekształcić w diagonalne przez jedną zamianę kolumn (zamieniając pierwszą kolumnę z trzecią), czyli jest nieparzyste. Podobnie sprawdzamy znaki dla pozostałych rozstawień, otrzymując wzór:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

który pokrywa się ze wzorem z ubiegłego semestru. Zauważmy, że otrzymana suma ma 3! składników, z których każdy jest iloczynem 3 wyrazów macierzy oraz że połowa składników występuje ze znakiem $+$, a połowa ze znakiem $-$.

W praktyce rzadko będziemy wyliczać wyznacznik korzystając bezpośrednio z Definicji 2.5, ale definicja ta pozwoli nam zrozumieć wiele własności wyznacznika, które znacząco ułatwią jego wyliczanie.

Fakt 2.6: Wyznacznik macierzy transponowanej

Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}$ zachodzi $\det A^\top = \det A$.

Dowód. Transpozycja macierzy (czyli „symetryczne odbicie” względem głównej przekątnej) przekształca wiersze w kolumny, a kolumny w wiersze. W związku z tym transpozycja każde rozstawienie wyrazów macierzy A przekształca w rozstawienie wyrazów macierzy $A^\top$ złożone z takich samych wyrazów co rozstawienie wyrazów macierzy A. Parzystości rozstawienia i jego odbicia również są jednakowe, gdyż liczba zamian kolumn A potrzebna do doprowadzenia rozstawienia do rozstawienia diagonalnego jest równa liczbie zamian wierszy macierzy $A^\top$ potrzebnej do doprowadzenia jego odbicia do rozstawienia diagonalnego, a to (zgodnie Faktem 2.3) oznacza jednakowe parzystości. Wobec tego składniki sumy (2.1) dla $\det A$ oraz dla $\det A^\top$ są jednakowe, skąd $\det A = \det A^\top$.

□

Wniosek 2.7: Zamiana kolumn/wierszy

Wyznacznik macierzy $A \in M_{n\times n}$ zmienia znak przy zamianie miejscami dwóch kolumn lub dwóch wierszy.

Dowód. Zamiana miejscami dwóch kolumn macierzy przekształca każde rozstawienie w rozstawienie o tym samym iloczynie, ale przeciwnej parzystości, czyli zmienia znak każdego składnika sumy (2.1), a wobec tego zmienia znak wyznacznika. Podobny argument stosuje się do zamiany miejscami dwóch wierszy. □

Wniosek 2.8: Jednakowe kolumny/wiersze

Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}$ ma dwie jednakowe kolumny lub dwa jednakowe wiersze, to $\det A = 0$.

Dowód. Zamiana miejscami obu jednakowych kolumn macierzy A z jednej strony nie zmienia wyznacznika (bo macierz pozostaje niezmieniona), a z drugiej strony zmienia wyznacznik na przeciwny (zgodnie z Wnioskiem 2.7). Wobec tego $\det A = -\det A$, skąd $\det A = 0$. Podobny argument stosuje się do macierzy z dwoma jednakowymi wierszami. □

Fakt 2.9: Wyznacznik macierzy diagonalnej

Wyznacznik *macierzy diagonalnej* (tzn. macierzy, której wszystkie wyrazy poza przekątną są zerowe) jest równy iloczynowi wyrazów na przekątnej, tzn.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \tag{2.2}$$

Dowód. Jedyne rozstawienie wyrazów macierzy diagonalnej, które nie zawiera wyrazu 0, to rozstawienie złożone z wyrazów na przekątnej. Stąd suma (2.1) dla rozważanej macierzy diagonalnej redukuje się do jednego składnika: $+a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. □

Fakt 2.10: Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej

Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej (tzn. macierzy, której wszystkie wyrazy poniżej przekątnej są zerowe) jest równy iloczynowi wyrazów na przekątnej, tzn.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \tag{2.3}$$

Dowód. Jedyne rozstawienie wyrazów macierzy górnotrójkątnej, które nie zawiera wyrazu 0, to rozstawienie złożone z wyrazów na przekątnej. Stąd suma (2.1) dla rozważanej macierzy górnotrójkątnej redukuje się do jednego składnika: $+a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. □

Przykład 3

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1\cdot 7 = 42$$

Fakt 2.11: Wyznacznik macierzy klatkowej

Macierz kwadratową, której wszystkie niezerowe wyrazy znajdują się w obrębie dwóch[3] ułożonych wzdłuż przekątnej „podmacierzy” (zwanych *klatkami*) nazywamy *macierzą klatkową*. Wyznacznik takiej macierzy jest iloczynem wyznaczników obu klatek, tzn.

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix}$$

Powyższy wzór w uproszczeniu zapisujemy jako:

$$\det\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} = \det A\cdot\det B$$

gdzie A i B to (kwadratowe) klatki.

Dowód. We wzorze (2.1) wystarczy sumować względem tych rozstawień macierzy, które nie zawierają zer (rozstawienie zawierające zero daje zerowy składnik sumy). Rozstawienia macierzy klatkowej postaci $\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{smallmatrix}\right)$ nie zawierające zer to dokładnie te rozstawienia, które pochodzą od połączenia dowolnego rozstawienia macierzy A z dowolnym rozstawieniem macierzy B. $\square$

Przykład 4

$$\det\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2\cdot(-1) = -2$$

Dla większej czytelności, w zapisie dużych macierzy często pomija się bloki zer (zostawiając puste miejsce), np. powyższe wyliczenie zapisuje się w postaci:

$$\det\begin{pmatrix}3 & 4 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 1 & 1 & 2\\ & & 1 & 0 & 1\\ & & 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2\cdot(-1) = -2$$

[3]Fakt ten można uogólnić na macierze złożone z więcej niż dwóch kwadratowych klatek (ułożonych wzdłuż przekątnej macierzy).

Fakt 2.11 można uogólnić na macierze kwadratowe złożone z większej liczby klatek, jak w następującym przykładzie:

Przykład 5

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & & & & \\ 3 & 1 & & & & \\ & & 7 & 2 & & \\ & & 2 & 0 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-14) \cdot (-4) \cdot 2 = 112$$

Zauważmy, że wzór (2.2) na wyznacznik macierzy diagonalnej można traktować jako szczególny przypadek wzoru na wyznacznik macierzy klatkowej (złożonej z n klatek rozmiaru 1×1).

Definicja 2.12: Przekształcenie n-liniowe

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Odwzorowanie $F : V \times \cdots \times V \to W$ (przeprowadzające układ n wektorów $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni V na jeden wektor przestrzeni W) nazywamy *liniowym względem każdej współrzędnej* (albo *n-liniowym*[4]) jeśli dla dowolnego indeksu k zachodzą warunki:

1) addytywność względem k-tej współrzędnej, tzn. dla dowolnych $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz dowolnego $v'_k \in V$ zachodzi warunek:

$$F(v_1, \ldots, v_k + v'_k, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n) + F(v_1, \ldots, v'_k, \ldots, v_n)$$

2) jednorodność względem k-tej współrzędnej, tzn. dla dowolnych $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek:

$$F(v_1, \ldots, t \cdot v_k, \ldots, v_n) = t \cdot F(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$$

Przykład 6

Sprawdź, że poniższe przekształcenia są dwuliniowe (liniowe względem każdej współrzędnej):

(a) iloczyn skalarny, czyli przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowane $F(u, v) = u \circ v$;

(b) iloczyn wektorowy, czyli przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zdefiniowane $F(u, v) = u \times v$.

Rozwiązanie. Addytywność iloczynu skalarnego/wektorowego względem każdej współrzędnej jest warunkiem, który w poprzednim semestrze nazywaliśmy *rozdzielnością iloczynu skalarnego/wektorowego względem dodawania*:

$$\begin{aligned} (u + u') \circ v = u \circ v + u' \circ v \qquad &\text{oraz} \qquad u \circ (v + v') = u \circ v + u \circ v' \\ (u + u') \times v = u \times v + u' \times v \qquad &\text{oraz} \qquad u \times (v + v') = u \times v + u \times v' \end{aligned}$$

natomiast jednorodność względem każdej współrzędnej oznacza następujący (również znany z poprzedniego semestru) warunek:

$$\begin{aligned} (tu) \circ v = t \cdot (u \circ v) \qquad &\text{oraz} \qquad u \circ (tv) = t \cdot (u \circ v) \\ (tu) \times v = t \cdot (u \times v) \qquad &\text{oraz} \qquad u \times (tv) = t \cdot (u \times v) \end{aligned}$$

[4] Stosowane jest również pojęcie *przekształcenie wieloliniowe*.

Wyznacznik macierzy rozmiaru $n \times n$ to odwzorowanie

$$\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$$

Ponieważ macierz $A \in M_{n\times n}$ możemy traktować jako układ n kolumn (czyli wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$), co zapisujemy $A = (A_1, \dots, A_n)$, gdzie $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ to kolumny macierzy A, więc odwzorowanie det możemy traktować jako odwzorowanie:

$$\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Dla takiego odwzorowania możemy rozważać pytanie o liniowość względem każdej współrzędnej.

Fakt 2.13: Wieloliniowość wyznacznika

Wyznacznik macierzy, traktowany jako odwzorowanie $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest liniowy względem każdej współrzędnej, tzn. dla dowolnego indeksu k zachodzą warunki:

1) addytywność względem k-tej współrzędnej, czyli dla dowolnych $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ oraz dowolnego $A'_k \in \mathbb{R}^n$

$$\det(A_1, \dots, A_k + A'_k, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A'_k, \dots, A_n)$$

2) jednorodność względem k-tej współrzędnej, czyli dla dowolnych $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ oraz dowolnego $t \in \mathbb{R}$

$$\det(A_1, \dots, t \cdot A_k, \dots, A_n) = t \cdot \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n)$$

Dowód. (1) Dla uproszczenia zapisu pokażemy liniowość względem pierwszej współrzędnej. Dowód liniowości względem pozostałych współrzędnych jest analogiczny. Wprowadźmy oznaczenia:

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \qquad A' = (A'_1, A_2, \dots, A_n) \qquad S = (A_1 + A'_1, A_2 \dots, A_n)$$

Każde rozstawienie wyrazów macierzy S (uporządkowane według kolumn) ma postać:

$$a_{i_1 1} + a'_{i_1 1} \qquad a_{i_2 2} \qquad \dots \qquad a_{i_n n}$$

a składnik sumy (2.1) związany z tym rozstawieniem jest równy:

$$\pm(a_{i_1 1} + a'_{i 1 1}) \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} = (\pm a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}) + (\pm a'_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n})$$

czyli jest sumą odpowiedniego składnika sumy (2.1) dla wyznacznika $\det A$ i odpowiedniego składnika sumy (2.1) dla wyznacznika $\det A'$. Stąd:

$$\det S = \det A + \det A'$$

co należało udowodnić.
(2) Pomnożenie wszystkich wyrazów pewnej kolumny przez t powoduje przemnożenie przez t wszystkich składników sumy (2.1), czyli przemnożenie przez t wyznacznika. □

Wniosek 2.14: Operacje elementarne a wyznacznik

Wyznacznik macierzy:

1) mnoży się przez t, jeśli pomnożymy wybraną kolumnę macierzy przez t;
2) nie zmienia się, jeśli dodamy krotność jednej kolumny macierzy do innej kolumny.

Powyższe własności prawdziwe są również, jeśli słowo *kolumna* zastąpimy słowem *wiersz*.

Dowód. (1) to inne sformułowanie Faktu 2.13(2).
(2) Niech $A = (A_1, \dots, A_n)$ będzie macierzą kwadratową o kolumnach $A_1, \dots, A_n$. Dla uproszczenia zapisu rozważymy sytuację, gdy t-krotność pierwszej kolumny dodajemy do drugiej kolumny (dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny), czyli gdy macierz:

$$A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

przekształcamy w macierz:

$$A' = (A_1, A_2 + tA_1, A_3, \dots, A_n)$$

Zgodnie z Faktem 2.13 (addytywność względem drugiej współrzędnej) otrzymujemy:

$$\det A' = \det(A_1, A_2 + tA_1, A_3, \dots, A_n) = \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) + \det(A_1, tA_1, A_3, \dots, A_n)$$

a zgodnie z Faktem 2.13 (jednorodność względem drugiej współrzędnej) oraz Wnioskiem 2.8:

$$= \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) + t \cdot \det(A_1, A_1, A_3, \dots, A_n) = \det A + t \cdot 0 = \det A$$

co należało udowodnić.
Zgodnie z Faktem 2.6 transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika, a ponieważ transpozycja zamienia kolumny na wiersze, a wiersze na kolumny, więc własności (1) i (2) są prawdziwe również dla wierszy macierzy. □

Przykład 7
Obliczyć wyznacznik macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z Wnioskiem 2.14 dodanie lub odjęcie krotności jednego wiersza od innego wiersza nie wpływa na wyznacznik macierzy. W związku z tym odejmując 4-krotność pierwszego wiersza od drugiego i 3-krotność pierwszego wiersza od czwartego, a następnie dodając drugi wiersz do trzeciego otrzymujemy:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

gdzie ostatni wyznacznik jest prosty do wyliczenia jako wyznacznik macierzy górnotrójkątnej.

W tym momencie potrafimy wyliczać wyznacznik macierzy $n \times n$:

- wypisując (zgodnie z definicją) wszystkie $n!$ rozstawień wyrazów macierzy (co w praktyce jest bardzo uciążliwe, chyba że, jak w przypadku macierzy górnotrójkątnej, niewiele jest rozstawień nie zawierających zera);
- dla macierzy pewnych specjalnych postaci, jak macierz diagonalna, górnotrójkątna lub macierz klatkowa;
- sprowadzając macierz, przy pomocy operacji elementarnych, do macierzy górnotrójkątnej (lub innej postaci, dla której wyznacznik łatwo jest obliczyć).

Wciąż brakuje nam jednak prostego algorytmu pozwalającego sprawnie wyliczać wyznacznik dowolnie skomplikowanej macierzy. Tym algorytmem jest przedstawione poniżej rozwinięcie wyznacznika względem dowolnie wybranego wiersza lub kolumny (tzw. rozwinięcie Laplace'a).

Fakt 2.15: Rozwinięcie Laplace'a

Dana jest macierz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ rozmiaru $n \times n$. Jeśli oznaczymy przez A_{ij} macierz rozmiaru $(n-1) \times (n-1)$ powstałą z macierzy A przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny[5], to:

1) dla każdego $i = 1, \ldots, n$ prawdziwy jest następujący wzór na *rozwinięcie wyznacznika względem i-tego wiersza*:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

2) dla każdego $j = 1, \ldots, n$ prawdziwy jest następujący wzór na *rozwinięcie wyznacznika względem j-tej kolumny*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

W skrócie powyższy algorytm można opisać następująco:

1) Wybierz dowolny wiersz lub kolumnę macierzy.
2) Dla każdego elementu a_{ij} wybranego wiersza/kolumny pomnóż a_{ij} przez wyznacznik macierzy powstałej przez usunięcie wiersza i kolumny zawierającej a_{ij} i dopisz znak odpowiadający pozycji a_{ij} na „szachownicy znaków”:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3) Dodaj wszystkie składniki otrzymane w punkcie 2.

Dowód. Udowodnimy wzór na rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza. Dowód dla rozwinięcia względem innego wiersza lub względem kolumny jest analogiczny.
Zauważmy, że każde rozstawienie wyrazów macierzy A składa się z elementu a_{1j} (wyraz z pierwszego wiersza) oraz pewnego rozstawienia wyrazów macierzy A_{1j}. Stąd zarówno lewa jak i prawa strona równości:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}$$

jest (zgodnie ze wzorem (2.1)) sumą iloczynów wszystkich rozstawień wyrazów macierzy A. Do sprawdzenia pozostaje jedynie, że znaki składników po lewej i po prawej stronie równości są jednakowe. Tę część dowodu pominiemy. □

Dla uproszczenia zapisu, wyznacznik macierzy A oznaczany jest również $|A|$. Jest to szczególnie wygodne przy wyliczaniu wyznacznika metodą Laplace'a.

[5]Innymi słowy: usuwając z macierzy A wiersz i kolumnę zawierające wyraz a_{ij} otrzymujemy macierz A_{ij}.

Przykład 8

Oblicz następujące wyznaczniki:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&5&1\\2&0&1&2\\1&3&1&0\\3&2&1&1\end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix}7&0&5&0\\4&1&0&0\\2&2&0&1\\0&1&0&3\end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie. Rozwijając względem pierwszej kolumny otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix}1&2&5&1\\2&0&1&2\\1&3&1&0\\3&2&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&1&2\\3&1&0\\2&1&1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2&5&1\\3&1&0\\2&1&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2&5&1\\0&1&2\\2&1&1\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}2&5&1\\0&1&2\\3&1&0\end{vmatrix}$$

a następnie rozwijając każdy z otrzymanych wyznaczników 3×3 względem pierwszej kolumny (i pomijając składniki zerowe):

$$= -3\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}5&1\\1&0\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}5&1\\1&2\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix}5&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$= 3 - 4 - 4 + 24 + 4 - 2 + 18 + 12 - 81 = -30$$

Jak widać obliczenia istotnie upraszczają się, ilekroć w kolumnie, względem której rozwijamy pojawia się wyraz 0. Wykorzystamy to przy obliczaniu drugiego wyznacznika, wybierając rozwinięcie względem trzeciej kolumny (zawierającej aż trzy zera):

$$\begin{vmatrix}7&0&5&0\\4&1&0&0\\2&2&0&1\\0&1&0&3\end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix}4&1&0\\2&2&1\\0&1&3\end{vmatrix} = 5\cdot\left(4\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}\right) = 70$$

Zwróćmy uwagę, że rozwinięcie Laplace'a przedstawia wyznacznik macierzy rozmiaru $n\times n$ w postaci sumy n wyznaczników macierzy rozmiaru $(n-1)\times(n-1)$, które z kolei w ten sam sposób można zamienić na $n(n-1)$ wyznaczników macierzy rozmiaru $(n-2)\times(n-2)$ itd., ostatecznie zamieniając na $n!$ wyznaczników macierzy rozmiaru 1×1 (czyli $n!$ składników, z których każdy jest iloczynem n liczb, podobnie jak we wzorze (2.1)). Żeby zmniejszyć liczbę składników (i, tym samym, uprościć obliczenia), warto przed zastosowaniem rozwinięcia Laplace'a zmodyfikować macierz przy pomocy operacji elementarnych opisanych we Wniosku 2.14. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 9

Obliczmy raz jeszcze wyznacznik:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&5&1\\2&0&1&2\\1&3&1&0\\3&2&1&1\end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Odejmując ostatnią kolumnę od pierwszej, a następnie odejmując podwojony trzeci wiersz od ostatniego i dodając podwojony pierwszy wiersz do ostatniego otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Teraz możemy rozwinąć względem pierwszej kolumny:

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -30$$

Poznamy jeszcze sposób na obliczanie wyznacznika jednej bardzo szczególnej macierzy – macierzy Vandermonde'a. Jest ona o tyle ważna, że pojawia się w wielu zastosowaniach, dlatego poniższy wzór pozwoli w przyszłości zaoszczędzić wielu obliczeń:

Fakt 2.16: Wyznacznik Vandermonde'a

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi warunek:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i) \tag{2.4}$$

gdzie iloczyn po prawej stronie wyliczany jest względem wszystkich par indeksów (i, j), gdzie $i < j$. W szczególności, powyższy wyznacznik jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami różne.

Dowód. Jeśli wśród liczb $a_1, \ldots, a_n$ są dwie jednakowe liczby, to wyznacznik macierzy wynosi 0 (dwie kolumny macierzy są jednakowe) i iloczyn po prawej stronie (2.4) jest równy 0. Załóżmy zatem, że liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami różne. Rozwijając względem ostatniej kolumny wyznacznik:

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix}$$

otrzymujemy wielomian zmiennej x stopnia $n-1$ o współczynniku przy najwyższej potędze wynoszącym:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$$

Co więcej, liczby $a_1, \ldots, a_{n-1}$ są pierwiastkami wielomianu P, gdyż $P(a_i) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ (wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych kolumnach). Wobec tego:

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1})$$

czyli wstawiając $x = a_n$ otrzymujemy:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \prod_{i=1}^{n} (a_n - a_i)$$

Wykorzystując powyższy wzór do przeprowadzenia dowodu indukcyjnego (indukcja względem rozmiaru macierzy), otrzymujemy wzór (2.4). □

Przykład 10

Oblicz

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Powyższy wyznacznik to wyznacznik Vandermonde'a, który zgodnie ze wzorem (2.4) jest równy:

$$(5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (3-1) \cdot (3-2) \cdot (2-1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 48$$

Wyznacznik macierzy rozmiaru $n \times n$ pozwala na sprawdzenie liniowej niezależności n wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w podobny sposób jak wyznaczniki macierzy rozmiarów 2×2 i 3×3 pozwalają na sprawdzenie liniowej niezależności, odpowiednio, 2 wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i 3 wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Fakt 2.17: Liniowa niezależność w $\mathbb{R}^n$ (podejście pierwsze)

Wektory $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$$

(tzn. gdy macierz o kolumnach $v_1, \ldots, v_n$ ma niezerowy wyznacznik).

Dowód. Załóżmy, że $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo zależne. Wówczas jeden z nich (dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że v_1) jest kombinacją liniową pozostałych. Odejmując od pierwszej kolumny macierzy $A = (v_1, \ldots, v_n)$ odpowiednie krotności pozostałych kolumn (co zgodnie z Wnioskiem 2.14 nie zmienia wyznacznika macierzy), pokazujemy, że $\det A = 0$:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, v_3, \ldots, v_n) \\ &= \det(\alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n, v_2, v_3, \ldots, v_n) \\ &= \cdots = \det(\alpha_n v_n, v_2, v_3, \ldots, v_n) = \det(0, v_2, v_3, \ldots, v_n) = 0 \end{aligned}$$

Niech teraz $v_1, \ldots, v_n$ będą liniowo niezależne. Stanowią one zatem bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, w szczególności wektor bazy standardowej e_1 jest ich kombinacją liniową, tzn.:

$$e_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

gdzie przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest niezerowy. Przyjmijmy, że $\alpha_1 \neq 0$ (rozumowanie w pozostałych przypadkach jest podobne). Wówczas mnożąc pierwszą kolumnę macierzy $A = (v_1, \ldots, v_n)$ przez α_1 (co mnoży wyznacznik macierzy przez α_1), a następnie dodając odpowiednie krotności pozostałych kolumn (co nie zmienia wyznacznika) otrzymujemy macierz:

$$A^{(1)} = (e_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

której kolumny również są liniowo niezależne (bo możemy z nich wygenerować bazę $v_1, \dots, v_n$), a ponadto $\det A^{(1)} \neq 0 \iff \det A \neq 0$. Postępując analogicznie z wektorami $e_2, \dots, e_n$ otrzymujemy ciąg macierzy:

$$A^{(i)} = (e_1, \dots, e_i, v_{i+1}, \dots, v_n), \text{ gdzie } i = 1, \dots, n$$

których kolumny są liniowo niezależne oraz

$$\det A \neq 0 \iff \det A^{(1)} \neq 0 \iff \cdots \iff \det A^{(n)} \neq 0$$

Ponieważ $A^{(n)} = (e_1, \dots, e_n) = I$, czyli $\det A^{(n)} = \det I = 1$, więc $\det A \neq 0$. □

Przykład 11

Sprawdź, czy wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.17 wystarczy sprawdzić, czy następująca macierz ma niezerowy wyznacznik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ macierz ta ma dwa jednakowe wiersze, więc jej wyznacznik jest zerowy, czyli kolumny są liniowo zależne.

Fakt 2.17 można uogólnić na dowolną skończenie wymiarową przestrzeń posługując się współrzędnymi wektora (w dowolnej bazie). Dowód tego uogólnienia jest analogiczny do dowodu Faktu 2.17.

Fakt 2.18: Liniowa niezależność gdy $\dim V < \infty$ (podejście pierwsze)

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n, a $\mathcal{B}$ jej bazą. Wektory $v_1, \dots, v_n \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det([v_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}}) \neq 0$$

(tzn. gdy macierz której kolumnami są współrzędne wektorów $v_1, \dots, v_n$ ma niezerowy wyznacznik).

Przykład 12

Sprawdź, czy wektory $x^3+2x^2-4x+1, x^2+2x+1, 3x-1, 2x+1 \in \mathbb{R}_3[x]$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.18 wybieramy dowolną bazę przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, np. $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ i sprawdzamy, czy następująca macierz ma niezerowy wyznacznik:

$$([x^3+2x^2-4x+1]_{\mathcal{B}}, [x^2+2x+1]_{\mathcal{B}}, [3x-1]_{\mathcal{B}}, [2x+1]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik ten jest niezerowy (wynosi 5), więc podane wektory są liniowo niezależne.

Fakt 2.19: Wzory Cramera

Dany jest układ n równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.5}$$

Macierz $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ nazywamy *macierzą główną* układu (2.5). Układ (2.5) ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Rozwiązanie jest wówczas dane wzorem:

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.6}$$

gdzie $A^{(i)}$ jest macierzą powstałą przez zastąpienie i-tej kolumny A przez $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Dowód. Zapiszmy układ (2.5) w postaci:

$$x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = b \tag{2.7}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_n$ to kolejne kolumny macierzy A. Wówczas:

$$\det A^{(1)} = \det(b, A_2, \ldots, A_n) = \det(x_1A_1 + \cdots + x_nA_n, A_2, \ldots, A_n)$$

i zgodnie z Faktem 2.13 (liniowość względem pierwszej współrzędnej):

$$\det A^{(1)} = x_1 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) + x_2 \det(A_2, A_2, \ldots, A_n) + \cdots + x_n \det(A_n, A_2, \ldots, A_n)$$

a ponieważ wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych kolumnach wynosi 0, więc:

$$\det A^{(1)} = x_1 \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = x_1 \det A \tag{2.8}$$

co w przypadku $\det A \neq 0$ dowodzi wzoru (2.6) dla $i = 1$. Podobnie dowodzimy tego wzoru dla $i = 2, \ldots, n$. W szczególności, gdy $\det A \neq 0$ układ (2.5) ma dokładnie jedno rozwiązanie.
W przypadku $\det A = 0$ kolumny $A_1, \ldots, A_n$ macierzy A są liniowo zależne (zgodnie z Faktem 2.17), a więc wektor b albo nie przedstawia się w postaci kombinacji liniowej wektorów $A_1, \ldots, A_n$ (tzn. układ (2.7) jest sprzeczny), albo przedstawia się na więcej niż jeden sposób (tzn. układ (2.7) jest nieoznaczony). □

Przykład 13

Rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2a + b + 3c - d = 4 \\ 4a + 2b + c + 5d = 24 \\ a + 2b + c + 2d = 9 \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wyznacznik główny powyższego układu wynosi:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

więc zgodnie ze wzorami Cramera układ ma jednoznaczne rozwiązanie. Ponieważ:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -1 \\ 24 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 24 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 24 & 5 \\ 1 & 2 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 24 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

więc

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Fakty 2.17 oraz 2.18 pokazują jak badać liniową niezależność wektorów skończenie wymiarowej przestrzeni. Istotna jest też jednak umiejętność weryfikacji liniowej niezależności układu wektorów nieskończenie wymiarowej przestrzeni $C^\infty(\mathbb{R})$. Szczególnie ważne będzie to przy rozwiązywaniu równań różniczkowych, dla których przestrzeń $C^\infty(\mathbb{R})$ jest głównym obiektem zainteresowania.

Lemat 2.20: Lemat Wrońskiego (liniowa niezależność w $C^\infty(\mathbb{R})$)

Dane są funkcje $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Wyznacznikiem Wrońskiego* lub *wrońskianem* funkcji $f_1, \ldots, f_n$ nazywamy wyznacznik:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Jeśli $W(x) \neq 0$ dla przynajmniej jednej liczby rzeczywistej x, to funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne.

Dowód. Gdyby funkcje $f_1, \ldots, f_n$ były liniowo zależne, to jedna z nich byłaby kombinacją liniową pozostałych. Załóżmy, że jest to funkcja f_1 (rozumowanie w pozostałych przypadkach jest podobne). Wówczas istnieją takie $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, że dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$f_1(x) = \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$$

Różniczkując obie strony równości otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \alpha_2 f_2'(x) + \cdots + \alpha_n f_n'(x) \\ f_1''(x) &= \alpha_2 f_2''(x) + \cdots + \alpha_n f_n''(x) \\ &\vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) &= \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} f_n(x) \\ f_n'(x) \\ \vdots \\ f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Zatem pierwsza kolumna macierzy Wrońskiego jest kombinacją liniową pozostałych, czyli (zgodnie z Faktem 2.17) $W(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wobec tego jeśli $W(x) \neq 0$ dla jakiegokolwiek x, to $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne.

$\square$

Przykład 14

Uzasadnij, że funkcje $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$ są liniowo niezależnymi elementami przestrzeni liniowej $C^\infty(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Wrońskian tego układu funkcji jest równy:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x \\ \cos x & 2\cos 2x & 3\cos 3x \\ -\sin x & -4\sin 2x & -9\sin 3x \end{vmatrix}$$

Chcemy wykazać, że $W(x) \neq 0$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że:

$$W(\tfrac{1}{2}\pi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

co na mocy Lematu 2.20 dowodzi liniowej niezależności badanych funkcji.

Dla zainteresowanych...

Podobnie jak w Rozdziale 1.1 rozważmy równanie różniczkowe:

$$f''' = f' \tag{2.10}$$

Zbiór funkcji spełniających równanie (2.10) jest przestrzenią liniową (podprzestrzenią $C^3(\mathbb{R})$):

$$V = \{f \in C^3(\mathbb{R}) : f''' = f'\}$$

Obliczymy wymiar przestrzeni V przy pomocy twierdzenia o indeksie. Przekształcenie liniowe $F : V \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem:

$$F(f) = \begin{pmatrix} f''(0) \\ f'(0) \\ f(0) \end{pmatrix}$$

jest (zgodnie z twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych) różnowartościowe i „na". Zatem F jest izomorfizmem, czyli $\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, a więc dowolne trzy liniowo niezależne elementy V stanowią bazę. Nietrudno zgadnąć trzy elementy tej przestrzeni: $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = 1$. Do wykazania ich liniowej niezależności potrzebujemy Lematu Wrońskiego:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^x & -e^{-x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Stąd każda funkcja spełniająca równanie (2.10) jest postaci:

$$f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma$$

Rozważmy teraz równanie różniczkowe z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 2 \\ f'''(x) = f'(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Zgodnie z powyższą analizą $f(x) = \alpha \cdot e^x + \beta \cdot e^{-x} + \gamma \cdot 1$. Z warunków $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ otrzymujemy $\alpha = \beta = 1$ oraz $\gamma = -2$, czyli $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$.

2.2 Macierz odwrotna

Definicja 2.21: Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy[6] $A \in M_{n\times n}$ nazywamy taką macierz $B \in M_{n\times n}$, że:

$$AB = BA = I \tag{2.11}$$

Macierz odwrotną do A oznaczamy A^{-1}. Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy *macierzą odwracalną*.

Spośród dwóch warunków podanych we wzorze (2.11) w odniesieniu do macierzy kwadratowych wystarczy sprawdzać tylko jeden. Podobne uproszczenie dotyczy wzoru (1.9), jeżeli stosujemy go sytuacji, gdy $\dim V = \dim W < \infty$. Dowody obu tych (przedstawionych poniżej) faktów pomijamy.

Fakt 2.22: Macierz odwrotna

Niech $A, B \in M_{n\times n}$. Wówczas macierze A i B są wzajemnie odwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest którykolwiek z warunków:

$$AB = I \qquad \text{lub} \qquad BA = I$$

(tzn. prawdziwość jednego z warunków pociąga prawdziwość drugiego).

Fakt 2.23: Przekształcenie odwrotne

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi tego samego[7] skończonego wymiaru (tzn. $\dim V = \dim W < \infty$), a $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ ich bazami. Wówczas:

1) Przekształcenia liniowe $F : V \to W$ oraz $G : W \to V$ są wzajemnie odwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest którykolwiek z warunków:

$$F \circ G = \mathrm{id}_W \qquad \text{lub} \qquad G \circ F = \mathrm{id}_V$$

(tzn. prawdziwość jednego z warunków pociąga prawdziwość drugiego).

2) Przekształcenie $F : V \to W$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ jest odwracalna.

3) Jeśli przekształcenie $F : V \to W$ jest odwracalne, to zachodzi wzór:

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \left(m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)\right)^{-1}$$

Dowód. Punkt (1) pozostawiamy bez dowodu. Dla dowodu (2) zauważmy, że zgodnie z (1) przekształcenia F i G są wzajemnie odwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $F \circ G = \mathrm{id}_W$, czyli:

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) \circ m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(G) = m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F \circ G) = m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) = I$$

co jest równoważne temu, że (kwadratowe) macierze $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ oraz $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(G)$ są wzajemnie odwrotne. W szczególności zachodzi (3). □

[6] Tylko macierze kwadratowe (i to nie wszystkie) są odwracalne.

[7] Zgodnie z Faktem 1.35 jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem odwracalnym (czyli izomorfizmem), to $\dim V = \dim W$.

Poniższy przykład pokazuje dlaczego w Fakcie 2.23 niezbędne jest założenie o skończonych wymiarach V i W.

Przykład 1

Rozważmy przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ zdefiniowane wzorem:

$$F(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$$

oraz przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ zdefiniowane wzorem:

$$G(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n x^{n+1} + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x$$

Nietrudno zauważyć, że $F \circ G = \mathrm{id}$, ale $G \circ F \neq \mathrm{id}$. Widzimy też, że F nie jest różnowartościowe, zaś G nie jest „na”, w szczególności F i G nie są odwracalne.

Zasadnicza część tego rozdziału poświęcona jest przedstawieniu dwóch algorytmów wyznaczania macierzy odwrotnej. Poniższy fakt prezentuje pierwszy z tych algorytmów.

Fakt 2.24: Wyznaczanie macierzy odwrotnej (podejście pierwsze)

Niech $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ będzie macierzą rozmiaru $n \times n$. Jeśli $\det A = 0$, to macierz A jest nieodwracalna. Jeśli $\det A \neq 0$, to macierz A jest odwracalna, a macierz odwrotna do A dana jest wzorem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +\det A_{11} & -\det A_{12} & +\det A_{13} & \cdots & \pm\det A_{1n} \\ -\det A_{21} & +\det A_{22} & -\det A_{23} & \cdots & \mp\det A_{2n} \\ +\det A_{31} & -\det A_{32} & +\det A_{33} & \cdots & \pm\det A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm\det A_{n1} & \mp\det A_{n2} & \pm\det A_{n3} & \cdots & +\det A_{nn} \end{pmatrix}^{\top} \tag{2.12}$$

gdzie A_{ij} to macierz powstała z macierzy A przez usunięcie wiersza i kolumny zawierających wyraz a_{ij}.

Wzór (2.12) można przedstawić w postaci 4-krokowego algorytmu:

1. Oblicz wyznacznik macierzy A rozmiaru $n \times n$.
2. Oblicz wyznaczniki wszystkich macierzy A_{ij} rozmiaru $(n-1) \times (n-1)$, powstałych z macierzy A przez usunięcie jednego wiersza i jednej kolumny, oraz utwórz macierz rozmiaru $n \times n$ złożoną z tych wyznaczników.
3. Wyrazom macierzy utworzonej w pkt. 2 dopisz znaki, zgodnie z „szachownicą znaków”:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

4. Transponuj otrzymaną w pkt. 3 macierz i przemnóż ją przez odwrotność wyznacznika z pkt. 1.

Dowód. Jeżeli $\det A = 0$, to zgodnie z Faktem 2.17 kolumny macierzy A są liniowo zależne, czyli przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (przekształcenie o macierzy A) nie jest „na” (kolumny macierzy A generują obraz $\mathrm{Im} F_A < \mathbb{R}^n$, który w tej sytuacji nie może być n-wymiarową przestrzenią). Przekształcenie F_A nie jest zatem odwracalne, czyli macierz A również nie jest odwracalna (Fakt 2.23).

Jeśli $\det A \neq 0$ to zgodnie z Faktem 2.22 wyznaczanie macierzy odwrotnej do A sprowadza się do znalezienia macierzy $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ takiej, że $A \cdot B = I$, czyli

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Równanie (2.13) mówi, w szczególności, że iloczyn macierzy A przez pierwszą kolumnę macierzy B to pierwsza kolumna macierzy I, czyli:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Traktując równanie (2.14) jako układ równań z niewiadomymi $b_{11}, \dots, b_{n1}$ otrzymujemy, zgodnie ze wzorami Cramera:

$$b_{i1} = \frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{1+i} \det A_{1i} \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

co jest zgodne z pierwszą kolumną macierzy (2.12). Analogiczne rozumowania przeprowadzone dla kolejnych kolumn macierzy B dowodzą pozostałej części wzoru (2.12). □

Przykład 2

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie.

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} +12 & -0 & +0 & -0 \\ -3 & +6 & -0 & +0 \\ +1 & -2 & +8 & -0 \\ -12 & +0 & -0 & +24 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie odwrotności macierzy w wielu wypadkach będą ułatwiać następujące dwa fakty:

Fakt 2.25: Odwrotność iloczynu macierzy

Jeśli macierze $A_1, \dots, A_k \in M_{n\times n}$ są odwracalne, to macierz $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ też jest odwracalna oraz:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1} \tag{2.15}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód dla $k = 2$. Dowód dla $k \geq 3$ jest analogiczny. Zauważmy, że:

$$(A_1A_2) \cdot (A_2^{-1}A_1^{-1}) = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_2^{-1}) \cdot A_1^{-1} = A_1 \cdot I \cdot A_1^{-1} = A_1 \cdot A_1^{-1} = I$$

czyli macierze A_1A_2 i $A_2^{-1}A_1^{-1}$ są wzajemnie odwrotne. □

Fakt 2.26: Odwrotność macierzy klatkowej

Dla dowolnych odwracalnych macierzy kwadratowych (klatek) $A_1, \ldots, A_k$ (niekoniecznie tego samego rozmiaru) odwrotność macierzy klatkowej wyznaczamy zgodnie z następującym wzorem:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k^{-1} \end{pmatrix}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód dla $k = 2$. Dowód dla $k \geq 3$ jest analogiczny. Nietrudno zauważyć, że jeśli $A_1, A_1' \in M_{m\times m}$ oraz $A_2, A_2' \in M_{n\times n}$, to

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1' & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_1' & 0 \\ 0 & A_2 A_2' \end{pmatrix}$$

Stąd[8]

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

□

Drugi sposób wyliczania macierzy odwrotnej będzie odwoływał się do tzw. operacji elementarnych. Operacje elementarne będą również ważne przy rozwiązywaniu dowolnych układów równań liniowych, dlatego definiujemy je od razu dla wszystkich macierzy prostokątnych.

Definicja 2.27: Operacje elementarne wierszowe

Operacją elementarną wierszową na macierzy prostokątnej A nazywamy każdą z następujących operacji:

1) zamiana miejscami dwóch wierszy,
2) przemnożenie wybranego wiersza przez niezerową liczbę,
3) dodanie do wybranego wiersza niezerowej krotności innego wiersza.

Fakt 2.28: Macierze elementarne (dla operacji wierszowych)

Każda operacja elementarna wierszowa zamienia macierz A na iloczyn $E \cdot A$, gdzie E jest pewną odwracalną macierzą kwadratową. Macierz E nazywamy *macierzą elementarną.*

Pominiemy formalny dowód tego faktu, zamiast tego pokazując jego działanie dla trzech przykładów operacji elementarnych na następującej macierzy A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

1. Zamiana miejscami drugiego i czwartego wiersza macierzy A jest reprezentowana przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej I przez zmianę położenia

[8] Zwróćmy uwagę, że oznaczenia I w tym dowodzie oznaczają trzy różne macierze identycznościowe: macierz identycznościową rozmiaru $m \times m$, macierz identycznościową rozmiaru $n \times n$ oraz macierz identycznościową rozmiaru $(m + n) \times (m + n)$.

drugiej i czwartej jedynki na przekątnej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

2. Przemnożenie drugiego wiersza macierzy A przez 3 jest reprezentowane przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej I przez zamianę drugiej jedynki na przekątnej na 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

3. Dodanie do trzeciego wiersza macierzy A 4-krotności drugiego wiersza jest reprezentowane przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej I przez zamianę zera na przecięciu trzeciego wiersza i drugiej kolumny na 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + 4a_{21} & a_{32} + 4a_{22} & a_{33} + 4a_{23} & a_{34} + 4a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Fakt 2.29: Wyznaczanie macierzy odwrotnej (podejście drugie)

Jeśli ciąg operacji elementarnych wierszowych przeprowadza macierz kwadratową A na macierz identycznościową I, to ten sam ciąg operacji przeprowadza macierz I na A^{-1}. Co więcej, dla każdej macierzy kwadratowej A istnieje ciąg operacji elementarnych wierszowych prowadzących albo do I (jeśli A odwracalna), albo do macierzy z zerowym wierszem lub zerową kolumną (jeśli A nieodwracalna).

W praktyce Fakt 2.29 będziemy stosować przekształcając przy pomocy elementarnych operacji wierszowych macierz rozmiaru $n \times 2n$:

$$(A|I) \quad \longrightarrow \quad (I|A^{-1})$$

tzn. jeśli z prawej strony macierzy $A \in M_{n\times n}$ dopiszemy macierz identycznościową $I \in M_{n\times n}$ a następnie przy pomocy elementarnych operacji wierszowych wykonywanych na powstałej macierzy $n \times 2n$ zamienimy lewą połowę macierzy na macierz identycznościową I, to prawa połowa macierzy zamieni się na macierz A^{-1}.

Dowód. Wykonując kolejne operacje elementarne wierszowe, reprezentowane przez macierze elementarne $E_1, \ldots, E_n$, otrzymujemy kolejno macierze:

$$A, \qquad E_1A, \qquad E_2E_1A, \qquad E_3E_2E_1A, \qquad \ldots, \qquad E_n \ldots E_3E_2E_1A$$

Jeśli powyższy ciąg operacji elementarnych prowadzi do macierzy identycznościowej I, czyli:

$$E_n \ldots E_3E_2E_1A = (E_n \ldots E_3E_2E_1) \cdot A = I$$

to zgodnie z Faktem 2.22 macierz $E_n \ldots E_3E_2E_1$ jest macierzą odwrotną do A, czyli:

$$A^{-1} = E_n \ldots E_3E_2E_1 = E_n \ldots E_3E_2E_1 \cdot I$$

Oznacza to, że macierz A^{-1} powstaje przez zastosowanie tego samego ciągu operacji elementarnych do macierzy identycznościowej I.
Jeśli ciąg operacji elementarnych wierszowych, reprezentowanych przez ciąg $E_1, \dots, E_n$ macierzy elementarnych, przekształca macierz A w macierz B mającą zerowy wiersz lub zerową kolumnę, to:

$$B = E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

Gdyby macierz A była odwracalna, to na mocy Faktu 2.25 odwracalna byłaby również macierz B (jako iloczyn macierzy odwracalnych), co prowadziłoby do sprzeczności ($\det B = 0$, więc zgodnie z Faktem 2.24 macierz B jest nieodwracalna). Wobec tego macierz A nie jest odwracalna.
Szczegóły dowodu istnienia ciągu operacji elementarnych wierszowych prowadzących do macierzy identycznościowej albo do macierzy z zerowym wierszem (lub kolumną) pominiemy, przedstawiając zamiast tego (w poniższych przykładach) algorytm, który dla dowolnej macierzy będzie prowadził do wyznaczenia szukanego ciągu operacji elementarnych. □

Przykład 3

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.29 dopisujemy z prawej strony rozważanej macierzy macierz identycznościową[9], a następnie wykonujemy serię operacji wierszowych.

$$\begin{array}{r} \\ -w_1 \\ -2w_1 \\ -3w_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Najpierw odejmujemy odpowiednie krotności pierwszego wiersza od pozostałych wierszy[10]:

$$\begin{array}{r} \\ \\ -3w_2 \\ -5w_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Następnie odejmujemy krotności drugiego wiersza od wierszy trzeciego i czwartego:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ -2w_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Następnie odejmujemy krotność trzeciego wiersza od ostatniego wiersza:

$$\begin{array}{r} +3w_4 \\ -w_4 \\ -w_4 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

W ten sposób sprowadziliśmy wyjściową macierz do postaci macierzy górnotrójkątnej (tzn. wyzerowaliśmy wszystkie wyrazy poniżej przekątnej). Teraz wyzerujemy wszystkie wyrazy powyżej przekątnej. Najpierw odejmujemy odpowiednie krotności ostatniego wiersza od pozostałych wierszy:

$$\begin{array}{r} \\ +\frac{1}{2}w_3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Następnie dodajemy odpowiednie krotności trzeciego wiersza do wierszy drugiego i pierwszego:

$$\begin{array}{r}+2w_2\\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

Wreszcie dodajemy odpowiednią krotność drugiego wiersza do pierwszego wiersza:

$$\begin{array}{r}\\ \cdot(-1)\\ \cdot(-\frac{1}{2})\\ \cdot(-1)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

W ten sposób otrzymaliśmy macierz diagonalną. Na końcu mnożymy każdy z wierszy przez odpowiednią (niezerową) liczbę tak, by otrzymać macierz identycznościową. co prowadzi do macierzy odwrotnej:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

czyli

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

W powyższym przykładzie postępowaliśmy według następującego algorytmu:

1. Przekształcamy daną macierz w macierz górnotrójkątną (z niezerowymi wyrazami na przekątnej), zerując wyrazy poniżej przekątnej w kolejnych kolumnach (od pierwszej do ostatniej).

2. Przekształcamy otrzymaną macierz górnotrójkątną w macierz diagonalną, zerując wyrazy powyżej przekątnej w kolejnych kolumnach (od ostatniej do pierwszej).

3. Przekształcamy otrzymaną macierz diagonalną w macierz identycznościową, mnożąc każdy wiersz przez odpowiednią liczbę.

W trakcie wykonywania tego algorytmu może się zdarzyć, że natrafimy na macierz, której jeden z wyrazów na przekątnej jest zerem. Jeśli macierz ta ma cały wiersz lub całą kolumnę zer, to zgodnie z Faktem 2.29 uzasadniliśmy, że badana macierz jest nieodwracalna. Jeśli macierz ma zero na przekątnej, ale nie ma zerowego wiersza ani kolumny, wykonywanie algorytmu można kontynuować po odpowiedniej zamianie miejscami dwóch wierszy (jedna z elementarnych operacji wierszowych), jak pokazuje kolejny przykład.

Przykład 4

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

[9] Pionowa kreska w powyższym zapisie nie ma żadnego formalnego znaczenia, pomaga jedynie oddzielić obie części powstałej macierzy.

[10] Operacje wierszowe zawsze wykonujemy po jednej (gdyż każda operacja wierszowa zmienia macierz), aczkolwiek możliwe jest zobrazowanie na jednym diagramie kilku kolejnych operacji.

Rozwiązanie. Postępujemy zgodnie z opisanym algorytmem:

$$\begin{array}{r} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Otrzymaliśmy macierz z zerem na przekątnej, z którym to problemem radzimy sobie zamieniając miejscami drugi i trzeci wiersz:

$$\begin{array}{r} \\ -w_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} +w_2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

czyli

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jako wniosek z Faktu 2.29 otrzymujemy następujące własności wyznacznika macierzy:

Wniosek 2.30: Własności wyznacznika

Dla macierzy $A, B \in M_{n\times n}$ zachodzi:

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
2) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że (1) jest spełnione jeśli A jest macierzą elementarną, tzn.

$$\det(EB) = \det E \cdot \det B \tag{2.16}$$

dla dowolnej macierzy $B \in M_{n\times n}$ i dowolnej elementarnej macierzy $E \in M_{n\times n}$. Jeśli macierz A jest odwracalna, to można ją przedstawić w postaci iloczynu macierzy elementarnych:

$$A = E_n \cdot \ldots \cdot E_1$$

Wówczas, stosując wielokrotnie wzór (2.16), otrzymujemy:

$$\det A = \det(E_n \cdot \ldots \cdot E_1) = \det E_n \cdot \ldots \cdot \det E_1$$
$$\det(AB) = \det(E_n \cdot \ldots \cdot E_1 B) = \det E_n \cdot \ldots \cdot \det E_1 \det B$$

Stąd $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Dowód w przypadku, gdy A nie jest odwracalna pomijamy. Wzór (2) jest szczególnym przypadkiem wzoru (1), dla $B = A^{-1}$. □

Przez analogię do operacji elementarnych wierszowych można zdefiniować operacje elementarne kolumnowe.

Definicja 2.31: Operacje elementarne kolumnowe

Operacją elementarną kolumnowymą na macierzy prostokątnej A nazywamy każdą z następujących operacji:

1) zamiana miejscami dwóch kolumn,
2) przemnożenie wybranej kolumny przez niezerową liczbę,
3) dodanie do wybranej kolumny niezerowej krotności innej kolumny.

Fakt 2.32: Macierze elementarne (dla operacji kolumnowych)

Każda operacja elementarna kolumnowa zamienia macierz A na iloczyn macierzy $A \cdot E$, gdzie E jest pewną odwracalną macierzą kwadratową. Macierz E nazywamy *macierzą elementarną*.

Pominiemy formalny dowód tego faktu, zamiast tego pokazując jego działanie dla trzech przykładów operacji elementarnych na następującej macierzy A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

1. Zamiana miejscami drugiej i czwartej kolumny jest reprezentowana przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej przez zmianę położenia drugiej i czwartej jedynki na przekątnej:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} & a_{32} \\ a_{41} & a_{44} & a_{43} & a_{42} \end{pmatrix}$$

2. Przemnożenie drugiej kolumny przez 3 jest reprezentowane przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej przez zamianę drugiej jedynki na przekątnej na 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 3a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 3a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 3a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

3. Dodanie do trzeciej kolumny 4-krotności drugiej kolumny jest reprezentowane przez macierz elementarną, która powstaje z macierzy identycznościowej przez zamianę zera na przecięciu drugiego wiersza i trzeciej kolumny na 4:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + 4a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + 4a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 4a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} + 4a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Jak widać macierze elementarne w Fakcie 2.32 (operacje kolumnowe) i macierze elementarne w Fakcie 2.28 (operacje wierszowe) to te same macierze. Mnożenie przez macierz elementarną z lewej strony prowadzi do operacji wierszowej, natomiast mnożenie z prawej strony – do operacji kolumnowej.
Operacje elementarne ułatwiają również weryfikowanie liniowej niezależności zbioru wektorów. Dotychczas (Fakty 2.17 i 2.18) poznaliśmy jedynie metodę sprawdzania liniowej niezależności zbioru wektorów złożonego z tylu wektorów ile wynosi wymiar przestrzeni (czyli sprawdzania czy podane wektory stanowią bazę). Uogólnienie tej metody na dowolne układy wektorów wymaga wprowadzenia pojęcia *rzędu macierzy*.

Definicja 2.33: Rząd wierszowy i kolumnowy

Rzędem (kolumnowym) macierzy $A \in M_{m\times n}$ nazywamy wymiar podprzestrzeni $\mathbb{R}^m$ rozpiętej przez kolumny A.
Rzędem (wierszowym) macierzy $A \in M_{m\times n}$ nazywamy wymiar podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpiętej przez wiersze A.

Powyższą definicję można wyrazić również następująco: rząd wierszowy (kolumnowy) macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy (kolumn) tej macierzy.

Przykład 5
Wyznaczyć rząd wierszowy i kolumnowy macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że

$$\dim \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \dim \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

co oznacza, że rząd kolumnowy macierzy A wynosi 2. Podobnie sprawdzamy, że

$$\dim \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \dim \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

co oznacza, że rząd wierszowy macierzy A wynosi 2.

W powyższym przykładzie nieprzypadkowo okazało się, że oba rzędy są równe – prawdziwy jest ogólny fakt, którego dowód wykracza poza ramy niniejszego skryptu:

Fakt 2.34: Rząd macierzy

Dla każdej macierzy prostokątnej A, rząd wierszowy i rząd kolumnowy są równe. Każdą z tych liczb nazywamy *rzędem* macierzy A i oznaczamy $\operatorname{rank} A$.

Wniosek 2.35: Maksymalny rząd macierzy

Jeśli $A \in M_{m\times n}$, to $\operatorname{rank} A \leq m$ oraz $\operatorname{rank} A \leq n$.

Dowód. Rząd macierzy jest równy zarówno jej rzędowi kolumnowemu, jak i rzędowi wierszowemu, czyli nie przekraca liczby jej wierszy, ani liczby jej kolumn. □

Wygodnym sposobem obliczania rzędu macierzy jest wyznaczanie *minorów* tej macierzy:

Definicja 2.36: Minor

Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy rozmiaru $k \times k$ powstałej przez usunięcie pewnej liczby wierszy i kolumn A.

Przykład 6

Jednym z minorów stopnia 3 macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

jest wyznacznik macierzy powstałej z macierzy A przez usunięcie pierwszej i trzeciej kolumny oraz trzeciego wiersza, czyli:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

Fakt 2.37: Rząd macierzy

Rząd macierzy (prostokątnej) A to największy stopień niezerowego minora tej macierzy.

Dowód. Wystarczy pokazać, że:

$$\operatorname{rank} A \geq k \iff \text{macierz } A \text{ ma niezerowy minor stopnia } k$$

Ponieważ rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn, więc $\operatorname{rank} A \geq k$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A ma k liniowo niezależnych kolumn $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, tzn. $\operatorname{rank}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = k$. Z kolei macierz $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ ma rząd k wtedy i tylko wtedy, gdy ma k liniowo niezależnych wierszy, czyli można z niej wybrać niezerowy minor stopnia k. Otrzymany minor jest równocześnie minorem macierzy A. □

Zauważmy, że o ile ustalenie, iż rząd macierzy A rozmiaru 5×4 wynosi 4 wymaga znalezienia *jakiegokolwiek* niezerowego minora stopnia 4 (jest to maksymalny stopnień minora macierzy A), o tyle ustalenie, że rząd macierzy A wynosi 3 wymaga znalezienia jakiegokolwiek niezerowego minora stopnia 3 oraz sprawdzenia, że *każdy* minor stopnia 4 jest zerowy (a takich minorów jest 5). Dlatego przed analizowaniem minorów wygodnie jest „przygotować” macierz, zgodnie z poniższym faktem.

Fakt 2.38: Operacje elementarne a rząd macierzy

Operacje elementarne (zarówno wierszowe jak i kolumnowe) nie zmieniają rzędu macierzy.

Dowód. Operacje wierszowe nie zmieniają liczby liniowo niezależnych wierszy, a operacje kolumnowe nie zmieniają liczby liniowo niezależnych kolumn. Ponieważ rząd wierszowy i rząd kolumnowy są równe rzędowi macierzy, więc żadna z tych operacji nie zmienia rzędu macierzy. □

Przykład 7

Wyznacz rząd macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Przy pomocy operacji elementarnych (wierszowych i kolumnowych) przekształcamy macierz, najpierw odejmując trzeci wiersz od czwartego wiersza:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

następnie odejmując pierwszą i czwartą kolumnę od ostatniej kolumny:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wreszcie odejmując krotności czwartej kolumny od pozostałych kolumn:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i dodając ostatni wiersz do wiersza pierwszego i drugiego:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ostatnia macierz ma niezerowy minor stopnia 4, więc $\operatorname{rank} A = 4$:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Wniosek 2.39: Liniowa niezależność w $\mathbb{R}^n$ (podejście drugie)

Wektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy $(v_1, \ldots, v_k)$ wynosi k (tzn. macierz ta ma niezerowy minor stopnia k).

Dowód. Rząd macierzy $(v_1, \ldots, v_k)$ jest równy $\operatorname{rank} \operatorname{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Rząd ten wynosi k wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne. $\square$

Przykład 8

Sprawdź, czy wektory $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie. Macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ma niezerowy minor (wyznacznik zaznaczonej na czerwono macierzy), więc jej rząd wynosi 3. Wobec tego kolumny tej macierzy są liniowo niezależne.

Wniosek 2.39 ma też wersję dotyczącą wektorów dowolnej przestrzeni liniowej:

Wniosek 2.40: Liniowa niezależność gdy $\dim V < \infty$ (podejście drugie)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B}$ jej dowolną bazą. Wówczas wektory $v_1, \ldots, v_k \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy $([v_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_k]_{\mathcal{B}})$ wynosi k (tzn. macierz ta ma niezerowy minor stopnia k).

Przykład 9

Sprawdź, czy wektory $x^3 + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 \in \mathbb{R}_3[x]$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie. Wybierzmy bazę $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Zapisując podane wektory w tej bazie jako kolumny macierzy, otrzymujemy macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

która, jak nietrudno sprawdzić, ma rząd 3. Podane wektory przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ są zatem liniowo niezależne.

2.3 Układy równań liniowych

Definicja 2.41: Układ równań liniowych

Jednorodnym układem m równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ nazywamy następujący układ (gdzie a_{ij} to dowolne liczby rzeczywiste):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Niejednorodnym układem m równań liniowych[11] z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ nazywamy następujący układ (gdzie a_{ij} oraz b_i to dowolne liczby rzeczywiste):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.18}$$

Układ (2.17) nazywamy układem jednorodnym *związanym* z układem niejednorodnym (2.18). W obu przypadkach macierz $A = (a_{ij})$ nazywamy *macierzą główną układu.* Macierz $(A|b)$ (macierz A z dopisaną kolumną wyrazów wolnych) nazywamy *macierzą rozszerzoną układu* (2.18).

Układ niejednorodny (2.18) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad AX = b$$

wobec czego rozwiązywanie układu sprowadza się do wyznaczania przeciwobrazu $F_A^{-1}[b]$ wektora $b \in \mathbb{R}^m$ przez przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane wzorem $F_A(X) = AX$. W szczególności zbiór rozwiązań układu jednorodnego (2.17) to $F_A^{-1}[0] = \ker F_A$. Dla uproszczenia notacji jądro przekształcenia F_A zadanego macierzą A będziemy nazywać *jądrem macierzy A* i oznaczać $\ker A$.

Fakt 2.42: Zbiór rozwiązań układu jednorodnego

Zbiór rozwiązań jednorodnego układu m równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$ o macierzy głównej $A = (a_{ij})$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

jest podprzestrzenią $\ker A < \mathbb{R}^n$. W szczególności układ jednorodny zawsze ma rozwiązanie (rozwiązanie zerowe: $x_1 = \dots = x_n = 0$).

Przed sformułowaniem analogicznego faktu dla układu niejednorodnego, wprowadzimy nowe pojęcie *warstwy podprzestrzeni.*

[11] Zauważmy, że jednorodny układ równań liniowych jest szczególnym przykładem niejedorodnego układu równań liniowych, gdy $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Definicja 2.43: Warstwa podprzestrzeni

Niech $W < V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V, a $v \in V$ dowolnym wektorem. *Warstwą* podprzestrzeni $W < V$ (ozn. $v + W$) nazywamy[12] zbiór wszystkich elementów postaci $v + w \in V$, dla wszystkich możliwych wyborów $w \in W$, tzn.

$$v + W = \{v + w : w \in W\} \subset V$$

O warstwie podprzestrzeni W myślimy jako o „przesunięciu równoległym” podprzestrzeni W o wektor v. Takie rozumienie utrwalają poniższe przykłady.

Przykład 1

Opisać warstwy podprzestrzeni $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\} < \mathbb{R}^2$.
Rozwiązanie. Przestrzeń W to prosta o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Każda warstwa tej podprzestrzeni to zbiór punktów postaci:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

czyli przesunięcie równoległe prostej W o wektor $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Równanie prostej (2.20) w postaci ogólnej przyjmuje postać $2x+3y+C = 0$ (dla każdej wartości C otrzymujemy inną warstwę).

Przykład 2

Opisać warstwy podprzestrzeni $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4y + z = 0\} < \mathbb{R}^3$.
Rozwiązanie. Przestrzeń W to płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.
Każda warstwa tej podprzestrzeni to zbiór punktów postaci:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

czyli przesunięcie równoległe płaszczyzny W o wektor $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$. Równanie płaszczyzny (2.21) w postaci ogólnej przyjmuje postać $3x - 4y + z + D = 0$ (dla każdej wartości D otrzymujemy inną warstwę).

Przykład 3

Opisać warstwy podprzestrzeni $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}\} < \mathbb{R}^3$.
Rozwiązanie. Przestrzeń W to prosta o równaniu kierunkowym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Każda warstwa tej podprzestrzeni to zbiór punktów postaci:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

czyli przesunięcie równoległe prostej W o wektor $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$.

[12] Warstwa elementu $v \in V$ podprzestrzeni $W < V$ to inaczej klasa abstrakcji elementu v dla relacji równoważności zdefiniowanej jako $v \sim v' \iff v - v' \in W$.

Przykład 4

Opisać warstwy podprzestrzeni $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ stała}\} < C(\mathbb{R})$
Rozwiązanie. Każda warstwa podprzestrzeni funkcji stałych jest postaci $f(x) + C$ (tzn. ustalona funkcja f + dowolna funkcja stała). Jest to dobrze znany przykład z analizy, gdzie całka nieoznaczona funkcji nie jest **funkcją**, tylko **warstwą podprzestrzeni funkcji stałych** (tzn. funkcją z dokładnością do dodania stałej). Zmienną C używaną przy wyliczaniu całki nieoznaczonej należy w tym kontekście interpretować nie jako liczbę, ale jako podprzestrzeń liniową (przestrzeń funkcji stałych).

Przykład 5

Szczególnym przypadkiem warstwy podprzestrzeni $W < V$ jest sama podprzestrzeń W, którą traktujemy jako warstwę $0 + W$ (czyli W przesunięta o wektor zerowy).

Przykład 6

Opisać warstwy podprzestrzeni $\{0\} < V$ oraz $V < V$.
Rozwiązanie. Warstwa $v + \{0\}$ to zbiór $\{v + 0\}$, czyli zbiór jednopunktowy. Dla każdego elementu $v \in V$ otrzymujemy zatem warstwę $\{v\}$. Z kolei podprzestrzeń V ma tylko jedną warstwę i jest nią V.

Interpretacja warstw podprzestrzeni $W < V$ jako „równoległych przesunięć” podprzestrzeni W wyjaśnia dlaczego warstwy są parami rozłączne i łącznie pokrywają całą przestrzeń V. Formalizuje to poniższy fakt:

Fakt 2.44: Warstwy podprzestrzeni

Warstwy podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V zadają rozkład przestrzeni V na parami rozłączne podzbiory, tzn. każdy element $v \in V$ należy do dokładnie jednej warstwy W (jest to warstwa $v + W$). *Wymiarem* warstwy $v + W$ nazywamy wymiar przestrzeni W.

Dowód. Każdy element $v \in V$ należy do przynajmniej jednej warstwy W (do warstwy $v + W$, która zawiera element $v + 0 = v$). Pokażemy, że żaden element nie należy do dwóch różnych warstw. Załóżmy, że $v \in v' + W$ (druga warstwa zawierająca v). Wówczas $v = v' + w$ dla pewnego $w \in W$, czyli $v - v' \in W$. Zatem:

- każdy element warstwy $v' + W$ jest postaci $v' + w = v + (v' - v) + w$, czyli należy do warstwy $v + W$, gdyż $(v' - v) \in W$ oraz $w \in W$;

- każdy element warstwy $v + W$ jest postaci $v + w = v' + (v - v') + w$, czyli należy do warstwy $v' + W$, gdyż $(v - v') \in W$ oraz $w \in W$.

Wobec tego $v + W = v' + W$, tzn. obie rozważane warstwy są równe. □

Przykład 7

Warstwy podprzestrzeni $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$ przestrzeni $V = \mathbb{R}^2$, to (zgodnie z Przykładem 1) proste o równaniach $2x + 3y + C = 0$, gdzie $C \in \mathbb{R}$. Proste te są parami rozłączne (są parami równoległe) i łącznie pokrywają całą płaszczyznę.

Pojęcie warstwy pozwala opisać zbiór rozwiązań układu niejednorodnego w sposób analogiczny do opisu zbioru rozwiązań układu jednorodnego podanego w Fakcie 2.42:

Fakt 2.45: Zbiór rozwiązań układu niejednorodnego

Zbiór rozwiązań niejednorodnego układu m równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o macierzy głównej $A = (a_{ij})$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.22}$$

jest warstwą $v + \ker A$, gdzie $\ker A$ to przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego z nim związanego, zaś $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ to dowolne rozwiązanie układu niejednorodnego (zwane *rozwiązaniem szczególnym* układu (2.22)).

Dowód. Niech $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ będzie rozwiązaniem układu niejednorodnego (2.22), czyli:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n = b_m \end{cases} \tag{2.23}$$

natomiast $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ – rozwiązaniem związanego z nim układu jednorodnego (2.19), czyli:

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + \cdots + a_{1n}w_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}w_1 + \cdots + a_{mn}w_n = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Dodając stronami odpowiadające sobie równania układów (2.23) i (2.24) otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_{11}(v_1 + w_1) + \cdots + a_{1n}(v_n + w_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}(v_1 + w_1) + \cdots + a_{mn}(v_n + w_n) = b_m \end{cases}$$

czyli $v + w = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ \vdots \\ v_n+w_n \end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem układu niejednorodnego (2.22). Ponieważ, zgodnie z Faktem 2.42, zbiór rozwiązań układu jednorodnego związanego z (2.22) to $\ker A$, więc każdy element warstwy $v + \ker A$ jest rozwiązaniem układu niejednorodnego (2.22).

Z drugiej strony, jeśli $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ oraz $v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$ są dwoma rozwiązaniami układu niejednorodnego (2.22), to:

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}v'_1 + \cdots + a_{1n}v'_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}v'_1 + \cdots + a_{mn}v'_n = b_m \end{cases}$$

Odejmując stonami odpowiadające sobie równania obu układów otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_{11}(v'_1 - v_1) + \cdots + a_{1n}(v'_n - v_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}(v'_1 - v_1) + \cdots + a_{mn}(v'_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

czyli $v' - v = \begin{pmatrix} v'_1 - v_1 \\ \vdots \\ v'_n - v_n \end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego związanego z (2.22), a więc $v' - v \in \ker A$. Stąd $v' \in v + \ker A$, czyli układ (2.22) nie ma żadnych rozwiązań poza znalezionymi już elementami warstwy $v + \ker A$. □

Fakty 2.42 i 2.45 wskazują następujący algorytm rozwiązywania niejednorodnego układu równań liniowych (2.22):

1. Wyznacz przestrzeń $\ker A$ rozwiązań układu jednorodnego związanego z (2.22).
2. Wyznacz jedno rozwiązanie (szczególne) v układu niejednorodnego (2.22).
3. Zbiorem rozwiązań (2.22) będzie warstwa $v + \ker A$.

Algorytm ten bywa wygodny w sytuacji, gdy mamy rozwiązać dużą liczbę układów równań liniowych różniących się jedynie prawymi stronami.

Przykład 8

Rozwiązać następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ jednorodny związany z powyższymi układami niejednorodnymi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

otrzymując rozwiązanie:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 5s+t \\ 2s-t \end{pmatrix}$$

Zgadujemy jakiekolwiek rozwiązanie szczególne każdego z układów równań, np. (odpowiednio) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stąd dostajemy rozwiązania ogólne każdego z układów (jako różne warstwy tej samej podprzestrzeni):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 5s+t \\ 2s-t+1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s+1 \\ 5s+t \\ 2s-t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 5s+t-2 \\ 2s-t \end{pmatrix}$$

Fakt 2.46: Przestrzeń ilorazowa

Dana jest przestrzeń liniowa V oraz jej podprzestrzeń $W < V$. Na zbiorze wszystkich warstw podprzestrzeni W możemy wprowadzić działania:

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W \qquad \text{oraz} \qquad \alpha(v + W) = \alpha v + W \tag{2.25}$$

(tzn. dodanie dwóch warstw to dodanie ich dowolnie wybranych reprezentantów, a mnożenie warstwy przez skalar to mnożenie przez skalar dowolnego reprezentanta). Zbiór warstw z tak określonymi działaniami tworzy przestrzeń liniową zwaną *przestrzenią ilorazową* i oznaczaną V/W. Wektorem zerowym przestrzeni ilorazowej jest warstwa $0 + W$, czyli W.

Powyższe stwierdzenie podajemy jako fakt, a nie jako definicję, gdyż sprawdzenia wymaga, że:

1) działania (2.25) są dobrze określone, tzn. wynik dodawania dwóch warstw (mnożenia warstwy przez skalar) nie zależy od wyboru reprezentantów (reprezentanta);
2) działania (2.25) spełniają aksjomaty przestrzeni liniowej z Definicji 1.1.

Sprawdzenie powyższych faktów pomijamy.

Przykład 9

Opisać przestrzeń ilorazową $\mathbb{R}^2/W$, gdzie $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$.
Rozwiązanie. Elementy przestrzeni ilorazowej to warstwy podprzestrzeni W, czyli zgodnie z Przykładem 1 proste o równaniach parametrycznych $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$. Suma warstw $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$ to warstwa $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} v_1+v_1' \\ v_2+v_2' \end{pmatrix}$, a iloczyn warstwy $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ przez liczbę α to warstwa $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Przykład 10

Całka nieoznaczona to przekształcenie liniowe: $F : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})/C$, gdzie $C < C(\mathbb{R})$ to podprzestrzeń funkcji stałych. Innymi słowy, całka nieoznaczona każdej funkcji ciągłej f przyporządkowuje **warstwę** podprzestrzeni funkcji stałych, np. $F(\cos x) = \sin x + C$, gdzie C to podprzestrzeń (a nie liczba).

Fakt 2.47: Wymiar przestrzeni ilorazowej

Niech $W < V$ będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Wówczas wymiar przestrzeni ilorazowej V/W wynosi:

$$\dim V/W = \dim V - \dim W \tag{2.26}$$

Dowód. Zauważmy, że przekształcenie $F : V \to V/W$ zdefiniowane jako $F(v) = v+W$ (przypisujące wektorowi $v \in V$ warstwę podprzestrzeni W zawierającą v) jest przekształceniem liniowym. Przekształcenie F jest „na" (czyli $\mathrm{Im} F = V/W$) oraz $\ker F = W$, więc zgodnie z twierdzeniem o indeksie:

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \mathrm{Im} F = \dim W + \dim V/W$$

co dowodzi wzoru (2.26) □

Niniejszy rozdział poświęcony jest rozwiązywaniu dowolnych układów równań liniowych. Ponieważ w praktyce często nie jest potrzebne pełne rozwiązanie, a jedynie informacja o istnieniu i liczbie rozwiązań, podzielimy ten problem na trzy części:

Pytanie 1 Czy rozważany układ jest niesprzeczny (tzn. ma przynajmniej jedno rozwiązanie)?

Pytanie 2 Ile rozwiązań ma rozważany układ?

Ponieważ niesprzeczny układ równań liniowych ma 1 albo ∞ rozwiązań, więc precyzyjniejszym pytaniem będzie: *Jaki jest wymiar przestrzeni (lub warstwy) rozwiązań układu?*

Pytanie 3 Jakie jest rozwiązanie ogólne układu?

Dotychczasowy rezultat (wzory Cramera) daje częściową odpowiedź w odniesieniu do układów n równań z n niewiadomymi. Oznaczając macierz główną takiego układu przez A, wiemy, że:

1. układ jest niesprzeczny, gdy $\det A \neq 0$ (nie mamy odpowiedzi w przypadku $\det A = 0$);
2. układ ma 1 rozwiązanie (0-wymiarowa przestrzeń/warstwa) $\iff$ $\det A \neq 0$;
3. w przypadku $\det A \neq 0$ rozwiązanie układu dane jest wzorem (2.6) (wzory Cramera).

Znamy również odpowiedź na Pytanie 1 w odniesieniu do dowolnego układu jednorodnego. Układ jednorodny jest zawsze niesprzeczny, gdyż $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ jest jego rozwiązaniem.
W ogólnym przypadku odpowiedź na Pytanie 1 daje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.48: Twierdzenie Kroneckera–Capellego (wersja 1)

Układ równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o macierzy głównej $A = (a_{ij})$ i macierzy rozszerzonej[13] $(A|b)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.27}$$

jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$$

Dowód. Układ (2.27) można zapisać w postaci wektorowej:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rozwiązywanie tego układu można zatem zinterpretować jako przedstawianie wektora b w postaci kombinacji liniowej kolumn macierzy A (rozwiązaniem są współczynniki otrzymanej kombinacji liniowej). Taka kombinacja liniowa istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy b jest kombinacją liniową kolumn macierzy A, czyli gdy $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$. □

Jeśli do macierzy A dołączymy jedną kolumnę (kolumnę b), to rząd macierzy A albo pozostanie niezmieniony, albo wzrośnie o jeden (zgodnie z Definicją 2.33 rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn – dołączenie jednej kolumny może zwiększyć tę liczbę najwyżej o jeden). W związku z tym Twierdzenie 2.48 można przeformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 2.49: Twierdzenie Kroneckera–Capellego (wersja 2)

Układ równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o macierzy głównej $A = (a_{ij})$ i macierzy rozszerzonej $(A|b)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A$$

oraz sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A + 1$$

[13] Podobnie jak przy wyznaczaniu macierzy odwrotnej, pionowa kreska oddzielająca macierz główną od kolumny wyrazów wolnych stosowana jest wyłącznie dla większej czytelności zapisu.

Przykład 11
Ustalić, czy poniższy układ równań jest niesprzeczny:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Operacje wierszowe i kolumnowe nie zmieniają rzędu macierzy, stąd dla macierzy głównej otrzymujemy:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Rząd macierzy głównej wynosi 3, bo maksymalny niezerowy minor jest stopnia 3. Rząd macierzy rozszerzonej nie może być równy 4, gdyż macierz ta ma tylko trzy wiersze, więc zgodnie z Twierdzeniem 2.49 badany układ jest niesprzeczny.

Przykład 12
Ustalić, czy poniższy układ równań jest niesprzeczny:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Operacje wierszowe i kolumnowe nie zmieniają rzędu macierzy, stąd dla macierzy głównej otrzymujemy:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Rząd macierzy głównej wynosi 2, bo maksymalny niezerowy minor jest stopnia 2. Podobne rachunki dla macierzy rozszerzonej dają rząd 3:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = 3$$

Wobec tego, zgodnie z Twierdzeniem 2.49 układ jest sprzeczny.

Intuicja związana z odpowiedzią na Pytanie 2 jest następująca: jeśli układ równań jest niesprzeczny, to wymiar przestrzeni (lub warstwy) rozwiązań jest równy minimalnej liczbie parametrów potrzebnych do opisania pojedynczego rozwiązania. Rozwiązując układ metodą podstawiania, każde równanie wykorzystujemy do zmniejszenia liczby niewiadomych o jeden. W związku z tym zazwyczaj rozwiązanie zawiera liczbę parametrów wynoszącą:

$$\text{liczba niewiadomych} - \text{liczba równań}$$

Jest to prawidłowy wynik, o ile wszystkie równania są liniowo niezależne (w szczególności liczba równań nie przekracza liczby niewiadomych). Poniższy fakt formalizuje i uogólnia tę intuicję:

Fakt 2.50: Zbiór rozwiązań układu równań liniowych

Dany jest układ m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.28}$$

gdzie $A = (a_{ij})$ jest macierzą główną układu. Jeśli układ (2.28) jest niesprzeczny, to zbiór jego rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$ wymiaru $n - \operatorname{rank} A$.

Dowód. Zgodnie z Faktem 2.45 zbiór rozwiązań jest warstwą podprzestrzeni $\ker A < \mathbb{R}^n$. Rozważmy przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o macierzy A. Obraz $\mathrm{Im}F_A$ jest generowany przez kolumny macierzy A, czyli $\dim \mathrm{Im}F_A = \operatorname{rank} A$. Zgodnie z twierdzeniem o indeksie:

$$n = \dim\ker F_A + \dim \mathrm{Im}F_A = \dim\ker A + \operatorname{rank} A$$

czyli

$$\dim\ker A = n - \operatorname{rank} A$$

Oznacza to, że zbiór rozwiązań, będący warstwą podprzestrzeni $\ker A$, ma wymiar $n - \operatorname{rank} A$. Zwróćmy uwagę, że powyższy rachunek odnosi się wyłącznie do układu, o którym uprzednio przekonaliśmy się (np. przez zastosowanie Twierdzenia Kroneckera–Capellego), że jest niesprzeczny. $\square$

Przykład 13

Wyznacz wymiar przestrzeni (warstwy) rozwiązań następującego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zaczynamy od ustalenia rzędów macierzy głównej i macierzy rozszerzonej układu, aby ustalić czy układ jest niesprzeczny:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 2$$

Ponieważ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = 2$, więc zgodnie z Twierdzeniem 2.49 układ jest niesprzeczny. Wobec tego zgodnie z Faktem 2.50 wymiar przestrzeni (warstwy) rozwiązań wynosi:

$$5 - \operatorname{rank} A = 5 - 2 = 3$$

Odpowiedzi na Pytanie 3 dostarczy metoda eliminacji Gaussa, opisana w kolejnym fakcie. Przed jej wprowadzeniem potrzebujemy opisać macierze pewnej szczególnej postaci.

Definicja 2.51: Macierz schodkowa

Macierz (prostokątną) nazywamy *macierzą schodkową*, jeśli każdy wiersz tej macierzy zaczyna się większą liczbą zer niż wiersz poprzedni (za wyjątkiem pierwszego wiersza, który nie ma poprzednika oraz wierszy złożonych z samych zer, których dowolna liczba może znajdować się na końcu macierzy). Pierwszy niezerowy wyraz w każdym niezerowym wierszu nazywamy *wyrazem wiodącym*.

Przykład 14

W każdej z poniższych macierzy schodkowych zaznaczono na czerwono wyrazy wiodące:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierzą schodkową jest także każda (kwadratowa) macierz górnotrójkątna, której wszystkie wyrazy na przekątnej są niezerowe (będą one wyrazami wiodącymi).

Fakt 2.52: Metoda eliminacji Gaussa

Rozwiązanie ogólne układu m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ o macierzy głównej $A = (a_{ij})$ oraz macierzy rozszerzonej $(A|b)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.29}$$

otrzymujemy postępując w następujący sposób:

1) Przy pomocy elementarnych operacji wierszowych sprowadzamy macierz rozszerzoną $(A|b)$ układu do postaci macierzy schodkowej $(A'|b')$.
2) Zapisujemy układ równań o macierzy rozszerzonej $(A'|b')$. Zmienne odpowiadające kolumnom A' zawierającym wyrazy wiodące nazywamy *zmiennymi zależnymi (związanymi)*, a pozostałe zmienne – *zmiennymi niezależnymi (wolnymi)*.
3) Wyrażamy zmienne związane przy pomocy zmiennych wolnych, otrzymując w ten sposób rozwiązanie ogólne układu.

Dowód. Elementarne operacje wierszowe (patrz Definicja 2.27) wykonane na macierzy rozszerzonej układu równań odpowiadają następującym przekształceniom tego układu równań:

1) zamiana miejscami dwóch równań,
2) przemnożenie wybranego równania (stronami) przez niezerową liczbę,
3) dodanie do wybranego równania niezerowej krotności innego równania.

Żadne z tych przekształceń nie zmienia zbioru rozwiązań układu, więc układ równań będący efektem wykonania kroków (1)–(2) procedury z Faktu 2.52 ma ten sam zbiór rozwiązań co pierwotny układ. Ponieważ macierz główna A' układu otrzymanego w kroku (2) ma postać schodkową, więc możliwe jest wyeliminowanie (przy pomocy metody podstawiania) wszystkich zmiennych zależnych, co prowadzi do rozwiązania ogólnego zawierającego wszystkie zmienne wolne jako parametry. □

Przykład 15

Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z metodą eliminacji Gaussa zaczynamy od sprowadzenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej. Zaznaczone na czerwono wyrazy, to wyrazy wiodące:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} {\color{red}1} & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & {\color{red}1} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Następnie zapisujemy nowy układ równań, dla którego otrzymana macierz to macierz rozszerzona układu:

$$\begin{cases} {\color{red}x_1} + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ {\color{red}x_2} - x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Z każdego z równań wyliczamy zaznaczoną zmienną zależną (zaczynając od ostatniego równania, a kończąc na pierwszym):

$$\begin{cases} {\color{red}x_2} = x_3 + x_4 \\ {\color{red}x_1} = -x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 1 = -3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 1 \end{cases}$$

Stąd (przyjmując zmienne wolne x_3, x_4 i x_5 za parametry s, t, u) otrzymujemy rozwiązanie ogólne układu:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s-4t-3v+1 \\ s+t \\ s \\ t \\ v \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z Faktem 2.45 otrzymaliśmy warstwę $v + W$ pewnej podprzestrzeni, $W < \mathbb{R}^4$, gdzie:

$$W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \text{oraz} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa (w odróżnieniu od Faktu 2.50) nie wymaga wcześniejszego sprawdzenia niesprzeczności układu. Jeśli zastosujemy tę metodę do układu sprzecznego, to w kroku (2) otrzymamy układ równań zawierający równanie sprzeczne, tak jak w poniższym przykładzie:

Przykład 16

Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z metodą eliminacji Gaussa zaczynamy od sprowadzenia macierzy rozszerzonej układu do postaci schodkowej:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&2&3&3&1\\2&3&3&5&6&2\\2&5&1&3&6&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&2&3&3&1\\0&1&-1&-1&0&0\\0&3&-3&-3&0&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&2&3&3&1\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&2\end{array}\right)$$

Następnie zapisujemy układ równań, dla którego otrzymana macierz jest macierzą rozszerzoną:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4+3x_5=1\\x_2-x_3-x_4=0\\0=2\end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ sprzeczny, a zatem wyjściowy układ równań również jest sprzeczny.

Definicja 2.53: Fundamentalny układ rozwiązań

Fundamentalnym układem rozwiązań układu jednorodnego nazywamy bazę przestrzeni rozwiązań tego układu (tzn. bazę $\ker A$, gdzie A jest macierzą główną układu).

Przykład 17

Znaleźć fundamentalny układ rozwiązań następującego jednorodnego układu równań:

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4+3x_5=0\\2x_1+3x_2+3x_3+5x_4+6x_5=0\\2x_1+5x_2+x_3+3x_4+6x_5=0\end{cases}$$

Rozwiązanie. Postępując podobnie jak w poprzednich przykładach wyznaczamy:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3s-4t-3u\\s+t\\s\\t\\u\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

czyli fundamentalny układ rozwiązań (bazę przestrzeni rozwiązań) stanowią wektory:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zgodnie z Faktem 2.42 zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych z n niewiadomymi opisuje pewną podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$, przy czym (zgodnie z Faktem 2.50) wymiar tej podprzestrzeni jest równy $n-k$, gdzie k to maksymalna liczba liniowo niezależnych równań układu. Prawdziwe jest również odwrotne stwierdzenie:

Fakt 2.54: Charakteryzacja podprzestrzeni

Każdą k-wymiarową podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ można opisać przy pomocy jednorodnego układu $n-k$ równań liniowych.

Pominiemy formalny dowód powyższego faktu, pokazując zamiast tego na konkretnym przykładzie algorytm wyznaczania takiego układu równań. Zwróćmy uwagę, że w przypadku układu z n niewiadomymi, składającego się z $n-k$ liniowo niezależnych równań przestrzeń rozwiązań ma wymiar $n-(n-k)=k$.

Przykład 18

Opisać przy pomocy układu równań liniowych podprzestrzeń $W = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Rozwiązanie. Podane wektory są liniowo niezależne (co można sprawdzić znajdując dla poniższej macierzy niezerowy minor stopnia 3):

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

wobec czego $\dim W = 3$. Zgodnie z Faktem 2.54 podprzestrzeń W można opisać przy pomocy jednorodnego układu $5 - 3 = 2$ równań liniowych. Każde z tych równań jest postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0 \tag{2.30}$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{R}$ i musi być spełnione przez każdy z wektorów:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Współczynniki każdego z szukanych równań (2.30) spełniają zatem warunki:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + 3a_5 = 0\\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 = 0\\ a_2 + 3a_3 + 2a_4 + a_5 = 0\end{cases} \tag{2.31}$$

Potrzebujemy wyznaczyć dwa liniowo niezależne równania postaci (2.30), czyli znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania układu (2.31) (współczynniki dwóch szukanych równań). Układ (2.31) rozwiązujemy metodą eliminacji Gaussa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + 3a_5 = 0\\ -a_2 - 2a_3 - 2a_5 = 0\\ a_3 + 2a_4 - a_5 = 0\end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a_3 = -2a_4 + a_5\\ a_2 = -2a_3 - 2a_5 = 4a_4 - 4a_5\\ a_1 = -2a_2 - a_3 - a_4 - 3a_5 = -7a_4 + 4a_5\end{cases}$$

Stąd

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7s+4t\\4s-4t\\-2s+t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-7\\4\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Fundamentalnym układem rozwiązań (2.30) są wektory $\begin{pmatrix}-7\\4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}4\\-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, stąd szukanym układem dwóch równań liniowych opisujących podprzestrzeń W jest:

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 0\end{cases} \tag{2.32}$$

Nietrudno sprawdzić, że układ (2.32) spełnia warunki zadania: wektory bazowe podprzestrzeni W spełniają każde z równań układu (2.32) (co wynika ze sposobu wyznaczania równań tego układu), a przestrzeń rozwiązań układu (2.32) ma wymiar $5 - 2 = 3$ (bo równania są liniowo niezależne), więc nie może być większa niż W.

Dla zainteresowanych...

Wśród równań różniczkowych wyróżniamy pewien szczególny typ równań, zwany *liniowymi równaniami różniczkowymi*, których rozwiązywanie wykorzystuje niektóre z metod algebry liniowej przedstawione w niniejszym rozdziale. *Niejednorodnym* liniowym równaniem różniczkowym drugiego stopnia[a] nazywamy równanie postaci:

$$f''(x) + a \cdot f'(x) + b \cdot f(x) = g(x) \tag{2.33}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są ustalonymi liczbami (parametrami), $g \in C(\mathbb{R})$ jest ustaloną funkcją (parametrem), a $f \in C^2(\mathbb{R})$ jest szukaną funkcją (niewiadomą). Równaniem *jednorodnym* związanym z równaniem niejednorodnym (2.33) jest równanie:

$$f''(x) + a \cdot f'(x) + b \cdot f(x) = 0 \tag{2.34}$$

Zauważmy, że przekształcenie $F : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem:

$$F(f) = f'' + af' + bf$$

jest przekształceniem liniowym, a zbiór rozwiązań równania (2.34) to jądro $\ker F$ tego przekształcenia. Z kolei zbiór rozwiązań równania (2.33) to warstwa $f + \ker F$ podprzestrzeni $\ker F < C^2(\mathbb{R})$, gdzie f jest dowolnym rozwiązaniem równania (2.33) (*rozwiązanie szczególne*). Na przykład zbiór rozwiązań równania:

$$f''(x) + f(x) = 2e^x \tag{2.35}$$

jest warstwą $f + \ker F$, gdzie f to dowolne rozwiązanie szczególne (np. $f(x) = e^x$), natomiast $\ker F$ to przestrzeń rozwiązań równania:

$$f''(x) + f(x) = 0$$

która, zgodnie ze wzorem (1.12), jest przestrzenią $\mathrm{Lin}\{\sin x, \cos x\}$. Wobec tego rozwiązanie ogólne równania (2.35) to:

$$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + e^x$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

[a] Równanie różniczkowe jest drugiego stopnia, jeśli najwyższy rząd pochodnej występującej w tym równaniu wynosi 2.

Rozdział 3

Diagonalizacja macierzy

W tym rozdziale będziemy zajmować się wyłącznie przekształceniami liniowymi $F : V \to V$ (dla których dziedzina i przeciwdziedzina są tą samą przestrzenią). Przekształcenia takie nazywamy *endomorfizmami*. Odwracalny endomorfizm nazywamy *automorfizmem*[1].

3.1 Wartości i wektory własne (rzeczywiste)

W niniejszym podrozdziale będziemy rozpatrywać jedynie przypadek rzeczywistych wartości własnych. Przypadek zespolonych wartości własnych rozpatrzymy w kolejnym podrozdziale.

Definicja 3.1: Wartości i wektory własne (rzeczywiste)

Niech V będzie przestrzenią liniową. *Wektor własny* przekształcenia liniowego $F : V \to V$ to wektor $v \in V$ spełniający warunek:

$$F(v) = \lambda \cdot v$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ. Jeśli $v \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* przekształcenia F, zaś v *wektorem własnym dla wartości własnej* λ. Wektor $v = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ. Zbiór wszystkich wektorów własnych dla wartości własnej λ nazywamy *przestrzenią własną* dla λ i oznaczamy V^{λ}.

Każda macierz $A \in M_{n\times n}$ wyznacza przekształcenie liniowe

$$F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ gdzie } F_A(X) = A \cdot X$$

Dla uproszczenia zapisu, wartości własne i wektory własne przekształcenia F_A będziemy nazywać wartościami własnymi i wektorami własnymi macierzy A, tzn. wektor $v \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{n\times n}$ dla wartości własnej λ, jeśli spełniony jest warunek:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Przykład 1

Znaleźć wartości własne, wektory własne oraz przestrzenie własne przekształcenia liniowego $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ zdefiniowanego wzorem: $F(A) = A^{\top}$.

[1] Przypomnijmy, że w Definicji 1.20 wprowadziliśmy pojęcie *homomorfizm* (jako synonim pojęcia *przekształcenie liniowe*), a w Definicji 1.34 wprowadziliśmy pojęcie *izomorfizm* (jako synonim pojęcia *odwracalne przekształcenie liniowe*). Wobec tego homomorfizm $F : V \to W$ nazywamy *endomorfizmem*, jeśli $V = W$, natomiast izomorfizm $F : V \to W$ nazywamy *automorfizmem*, jeśli $V = W$.

Rozwiązanie. Szukamy macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ spełniających dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ warunek:

$$A^\top = \lambda A \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a = \lambda a \\ b = \lambda c \\ c = \lambda b \\ d = \lambda d \end{cases}$$

Z pierwszego (i czwartego) równania otrzymujemy: $\lambda = 1$ lub $a = d = 0$. Pierwsza z możliwości prowadzi do przestrzeni własnej:

$$V^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Druga z możliwości ($a = d = 0$) prowadzi do układu równań:

$$\begin{cases} b = \lambda c \\ c = \lambda b \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $b = \lambda^2 b$ oraz $c = \lambda^2 c$, czyli $b = c = 0$ (co, w połączeniu z $a = d = 0$, daje wektor zerowy) lub $\lambda = \pm 1$. Przypadek $\lambda = 1$ już rozpatrzyliśmy. Przypadek $\lambda = -1$ prowadzi do przestrzeni własnej:

$$V^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

Przykład 2

Znaleźć wartości własne, wektory własne oraz przestrzenie własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ zdefiniowanego wzorem: $F(P)(x) = xP'(x)$.

Rozwiązanie. Jeśli oznaczymy $P(x) = ax^2 + bx + c$, to $F(P)(x) = 2ax^2 + bx$. Wektorem własnym jest wielomian spełniający dla pewnej niezerowej liczby λ warunek:

$$F(ax^2 + bx + c) = \lambda(ax^2 + bx + c) \qquad \text{czyli} \qquad 2ax^2 + bx = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$$

Powyższa równość, jako równość wielomianów, oznacza równość ich współczynników:

$$\begin{cases} 2a = \lambda a \\ b = \lambda b \\ 0 = \lambda c \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} \lambda = 2 \quad \text{lub} \quad a = 0 \\ \lambda = 1 \quad \text{lub} \quad b = 0 \\ \lambda = 0 \quad \text{lub} \quad c = 0 \end{cases}$$

Jeśli szukany wektor jest niezerowy (tzn. przynajmniej jeden z parametrów a, b, c jest niezerowy), to $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$ lub $\lambda = 2$. Stąd otrzymujemy:

(a) wektory własne $P(x) = c$ dla wartości własnej $\lambda = 0$ (tzn. $V^0 = \{c : c \in \mathbb{R}\}$),

(b) wektory własne $P(x) = bx$ dla wartości własnej $\lambda = 1$ (tzn. $V^1 = \{bx : b \in \mathbb{R}\}$),

(c) wektory własne $P(x) = ax^2$ dla wartości własnej $\lambda = 2$ (tzn. $V^2 = \{ax^2 : a \in \mathbb{R}\}$).

Przykład 3

Znaleźć wartości własne, wektory własne oraz przestrzenie własne przekształcenia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zdefiniowanego wzorem: $F(z) = \bar{z}$.

Rozwiązanie. Szukamy takich liczb $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, że

$$a - bi = \lambda(a + bi) \qquad \text{czyli} \qquad a - bi = (\lambda a) + (\lambda b)i$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone obu stron równania:

$$\begin{cases} a = \lambda a \\ -b = \lambda b \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \quad \text{lub} \quad a = 0 \\ \lambda = -1 \quad \text{lub} \quad b = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy:

(a) wektory własne $z = a$ dla wartości własnej $\lambda = 1$ (tzn. $V^1 = \{a : a \in \mathbb{R}\}$),

(b) wektory własne $z = ib$ dla wartości własnej $\lambda = -1$ (tzn. $V^{-1} = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$).

Fakt 3.2: Przestrzeń własna

Niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, a λ wartością własną F. Wówczas przestrzeń własna V^λ jest podprzestrzenią V (tzn. $V^\lambda < V$).

Dowód. Musimy pokazać zamkniętość V^λ na dodawanie i mnożenie przez skalary. Rozważmy dowolne wektory $v_1, v_2 \in V^\lambda$. Wówczas:

$$F(v_1) = \lambda v_1 \qquad \text{oraz} \qquad F(v_2) = \lambda v_2$$

i z addytywności F:

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

czyli $v_1 + v_2 \in V^\lambda$, co dowodzi zamkniętości V^λ na dodawanie. Podobnie sprawdzamy zamkniętość na mnożenie przez skalar. $\square$

Fakt 3.3: Przekrój przestrzeni własnych

Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ są wartościami własnymi przekształcenia liniowego $F : V \to V$, to

$$V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2} = \{0\}$$

Dowód. Jeśli $v \in V^{\lambda_1} \cap V^{\lambda_2}$, to:

$$F(v) = \lambda_1 v \qquad \text{oraz} \qquad F(v) = \lambda_2 v$$

czyli $\lambda_1 v = \lambda_2 v$, skąd (wobec $\lambda_1 \neq \lambda_2$) dostajemy $v = 0$. $\square$

Poniższy fakt pokazuje praktyczny sposób wyznaczania wartości własnych przekształcenia.

Fakt 3.4: Wielomian charakterystyczny

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{B}$ jej bazą. Wówczas wartości własne przekształcenia liniowego $F : V \to V$ to pierwiastki *wielomianu charakterystycznego* tego przekształcenia, czyli wielomianu:

$$\chi_F(\lambda) = \det(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I)$$

Wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy $\mathcal{B}$.

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie dowolną bazą przestrzeni V (jednakową dla dziedziny i przeciwdziedziny). Warunek $F(v) = \lambda v$ we współrzędnych ma postać $[F(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}}$, co zgodnie ze wzorem (1.3) można zapisać:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{czyli} \qquad m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Równanie (3.1) można przekształcić do postaci układu n równań liniowych z n niewiadomymi o macierzy głównej $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I$:

$$(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Liczba λ jest wartością własną F wtedy i tylko wtedy, gdy równanie (układ równań) (3.2) ma niezerowe rozwiązanie. Równanie to zawsze ma rozwiązanie zerowe, które zgodnie ze wzorem Cramera jest jedynym rozwiązaniem, gdy $\det(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I) \neq 0$. W przeciwnym razie równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie (w szczególności ma rozwiązanie niezerowe). Wobec tego wartości własne F to liczby λ spełniające warunek:

$$\det(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I) = 0$$

Z powyższego rozumowania wynika, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego nie zależą od bazy, ale to jeszcze nie dowodzi, że sam wielomian nie zależy od bazy (np. mogłoby się zdarzyć, że krotności pierwiastków zależą od bazy). Dlatego przytoczymy dodatkowy argument, pokazujący niezależność wielomianu charakterystycznego od wyboru bazy. Jeśli $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ są różnymi bazami przestrzeni V, to zgodnie ze wzorami (1.7) oraz (1.8) zachodzi:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = P \cdot (m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)) \cdot P^{-1}$$

gdzie $P = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$. Wobec tego:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) - \lambda I = (P \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot P^{-1}) - \lambda(P \cdot I \cdot P^{-1}) = P \cdot (m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I) \cdot P^{-1}$$

czyli

$$\det(m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) - \lambda I) = \det P \cdot \det(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I) \cdot (\det P)^{-1} = \det(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \lambda I)$$

tzn. wielomian charakterystyczny nie zależy od wyboru bazy. □

Przykład 4

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne przekształcenia $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zdefiniowanego $F(P) = P'$.

Rozwiązanie. W bazie $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ przekształcenie F ma macierz:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wobec tego wielomian charakterystyczny przekształcenia F to:

$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$$

Stąd jedyną wartością własną F jest $\lambda = 0$. Wektory własne dla $\lambda = 0$ to wielomiany spełniające warunek $P' = 0$, czyli wielomiany stałe.

Przykład 5

Wyznaczyć wartości własne i wektory własne przekształcenia $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ zdefiniowanego $F(A) = 2A + 3A^\top$.

Rozwiązanie. W bazie $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ przekształcenie F ma macierz:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wobec tego wielomian charakterystyczny przekształcenia F to:

$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2((2-\lambda)^2 - 9) = (\lambda - 5)^3(\lambda + 1)$$

czyli wartościami własnymi F są $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = -1$. Wektory własne dla λ_1 to macierze spełniające warunek $2A + 3A^\top = 5A$, czyli $A = A^\top$ (macierze symetryczne), zaś wektory własne dla $\lambda_2 = -1$ to macierze spełniające warunek $2A + 3A^\top = -A$, czyli $A = -A^\top$ (macierze antysymetryczne).

Wniosek 3.5: Liczba wartości własnych

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Wówczas F ma co najwyżej n rzeczywistych wartości własnych (licząc z krotnościami).

Dowód. Zgodnie z Faktem 3.4 wartości własne F to pierwiastki wielomianu charakterystycznego χ_F, który jest wielomianem stopnia $n = \dim V$. Zgodnie z Zasadniczym twierdzeniem algebry, taki wielomian ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami), czyli co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (również licząc z krotnościami). $\square$

Fakt 3.6: Liniowo niezależne wektory własne (podejście pierwsze)

Jeśli $v_1, \ldots, v_k \in V$ są niezerowymi wektorami własnymi przekształcenia $F : V \to V$ dla parami różnych wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, to wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne.

Dowód. Przeprowadzimy dowód dla przypadku, gdy $\dim V < \infty$ oraz wśród wartości własnych nie ma pary liczb przeciwnych. Dowód w ogólnym przypadku pominiemy. Przyjmijmy, że $0 \leq |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_k|$ (w razie potrzeby przenumerowując indeksy). Załóżmy (nie wprost), że wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo zależne. Wybierzmy taki wektor v_m będący kombinacją liniową pozostałych wektorów, że jego indeks jest największy z możliwych. Wówczas v_m przedstawia się jako kombinacja liniowa wektorów o niższych indeksach:

$$v_m = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1}$$

Ponieważ F jest odwzorowaniem liniowym, zaś $v_1, \ldots, v_k$ jego wektorami własnymi dla wartości własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, więc:

$$\begin{aligned} F(v_m) &= \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_{m-1} F(v_{m-1}) \\ \lambda_m v_m &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1} \end{aligned}$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} \lambda_m F(v_m) &= \alpha_1 \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} F(v_{m-1}) \\ \lambda_m^2 v_m &= \alpha_1 \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1}^2 v_{m-1} \end{aligned}$$

Kontynuując w ten sam sposób dostajemy dla dowolnego n naturalnego warunek:

$$\begin{aligned} \lambda_m^n v_m &= \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1}^n v_{m-1} \\ v_m &= \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n v_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n v_{m-1} \end{aligned}$$

Ponieważ $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dla $i = 1, \ldots, m-1$, więc wykonując przejście graniczne[2] otrzymujemy:

$$v_m = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{m-1} = 0$$

wbrew założeniu. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że rozważane wektory są liniowo niezależne. □

Twierdzenie 3.7: Twierdzenie o diagonalizacji macierzy (podejście pierwsze)

Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma parami różne wartości własne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, zaś $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ są jej niezerowymi wektorami własnymi, odpowiednio dla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to:

$$A = PDP^{-1}, \text{ gdzie } P = (v_1, \ldots, v_n),\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[2] Mówienie o granicy ciągu wektorów przestrzeni liniowej jest możliwe pod warunkiem wprowadzenia dodatkowej struktury przestrzeni euklidesowej (patrz Rozdział 4). Jednak w tym wypadku można odwołać się do współrzędnych wektorów $v_1, \ldots, v_m$ w dowolnie wybranej bazie i wykonać przejście graniczne na każdej współrzędnej z osobna.

Dowód. Oznaczmy współrzędne wektorów własnych jako:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

Wówczas:

$$P = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

Sprawdzamy rachunkowo, że macierze AP i PD mają jednakowe pierwsze kolumny:

$$AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} = Av_1 = \lambda_1 v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} \\ \lambda_2 v_{21} \\ \vdots \\ \lambda_n v_{n1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = PD \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podobnie sprawdzamy, że drugie, trzecie itd. kolumny macierzy AP i PD są jednakowe. Stąd

$$AP = PD$$

Na mocy Faktu 3.6 wektory $v_1, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne, czyli macierz P jest odwracalna. Stąd

$$A = PDP^{-1}$$

□

Twierdzenie 3.8: Twierdzenie o diagonalizacji macierzy (podejście drugie)

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ można zapisać w postaci diagonalnej (nazywamy ją wówczas *macierzą diagonalizowalną*):

$$A = PDP^{-1}, \text{ gdzie } P = (v_1, \ldots, v_n), \ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów własnych macierzy A, zaś $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ to wartości własne macierzy A, odpowiednio dla wektorów $v_1, \ldots, v_n$. W szczególności macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna, gdy ma n parami różnych wartości własnych.

Dowód. $\Leftarrow$ Jedynym miejscem w dowodzie Twierdzenia 3.7 wykorzystującym założenie, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ są parami różne było użycie Faktu 3.6 (potrzebnego do wykazania odwracalności macierzy P). W związku z tym, przy założeniu, że $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę $\mathbb{R}^n$, poprzedni dowód przepisuje się bez żadnych zmian.
$\Rightarrow$ Jeśli macierz A można zapisać w postaci (3.3), to $AP = PD$, czyli:

$$Av_1 = AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = PD \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

Podobnie sprawdzamy, że $Av_k = \lambda_k v_k$ dla $k = 2, \ldots, n$. □

Przykład 6
Zdiagonalizować następujące macierze:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy A to:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ -4 & 3-\lambda & 4 \\ -2 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

więc wartościami własnymi są $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Przestrzeń V^1 wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ to zbiór rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = x_1 \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = x_2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = x_3 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Podobnie wyznaczamy pozostałe przestrzenie własne: $V^2 = \{t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), t \in \mathbb{R}\}$, $V^3 = \{t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$. Stąd dostajemy diagonalizację:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Postępując podobnie dla macierzy B wyznaczamy wielomian charakterystyczny:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 21) = -(\lambda-3)^2(\lambda-7)$$

który tym razem ma podwójny pierwiastek. Przestrzenie własne dla wartości własnych $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 7$ to:

$$V^3 = \mathrm{Lin}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \qquad \text{oraz} \qquad V^7 = \mathrm{Lin}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

Zgodnie z Faktem 3.12 dostajemy diagonalizację:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Głównym celem przedstawiania macierzy w postaci diagonalnej jest ułatwienie potęgowania macierzy. Zastosowanie diagonalizacji do potęgowania macierzy pokazuje następujący fakt:

Fakt 3.9: Potęgowanie macierzy

Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}$ diagonalizuje się, tzn. zapisuje w postaci:

$$A = PDP^{-1} \text{ gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dla odwracalnej macierzy $P \in M_{n\times n}$, to dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi wzór:

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Dowód. Dla dowolnej macierzy D (nawet nie diagonalnej) zachodzi wzór:

$$(PDP^{-1})^k = \underbrace{PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1}}_{k} = P\,\underbrace{D \cdot D \cdot \ldots \cdot D}_{k}\,P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

Reszta wynika ze wzoru na potęgowanie macierzy diagonalnej. □

Przykład 7

Obliczyć potęgi macierzy:

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^n \qquad B^{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{10}$$

Rozwiązanie. Wykorzystując diagonalizację z Przykładu 6 otrzymujemy:

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n - 1 \\ 2 - 2\cdot 3^n & 3^n & 2\cdot 3^n - 2 \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} + 7^{10} & -3^{10} + 7^{10} \\ 0 & -3^{10} + 7^{10} & 3^{10} + 7^{10} \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że wyrazy macierzy A^n są kombinacjami liniowymi n-tych potęg wartości własnych macierzy A (które wynoszą 1, 2 i 3), a wyrazy macierzy B^{10} są kombinacjami liniowymi 10-tych potęg wartości własnych macierzy B (które wynoszą 3 i 7). Obserwację tę uogólnia następujący fakt:

Fakt 3.10: Potęgowanie macierzy

Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}$ jest diagonalizowalna, a jej wartościami własnymi (niekoniecznie różnymi) są $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, to każdy wyraz macierzy A^k jest postaci:

$$\alpha_1\lambda_1^k + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k \tag{3.4}$$

przy czym współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nie zależą od wykładnika k.

Dowód. Zgodnie z Faktem 3.9:

$$A^k = P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1} \tag{3.5}$$

przy czym wyrazy macierzy P i P^{-1} nie zależą od wykładnika k. Wymnażając trzy macierze po prawej stronie wzoru (3.5) otrzymujemy macierz, której każdy wyraz jest postaci (3.4), przy czym współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zależą wyłącznie od wyrazów macierzy P i P^{-1} (czyli są niezależne od wykładnika k). □

Twierdzenie o diagonalizacji macierzy można również sformułować w terminach przekształcenia:

Twierdzenie 3.11: Twierdzenie o diagonalizacji przekształcenia

Dana jest przestrzeń liniowa V, jej baza $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ oraz przekształcenie liniowe $F : V \to V$.

1) Macierz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia F w bazie $\mathcal{B}$ jest diagonalna wtedy i tylko wtedy, gdy baza $\mathcal{B}$ jest złożona z wektorów własnych przekształcenia F. Przekształcenie, które w pewnej bazie ma macierz diagonalną nazywamy *przekształceniem diagonalizowalnym.*

2) Jeśli wektory $b_1, \ldots, b_n$ są wektorami własnymi przekształcenia F, to dla każdej bazy $\mathcal{C}$ zachodzi:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = PDP^{-1}, \text{ gdzie } D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ oraz } P = ([b_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [b_n]_{\mathcal{C}})$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ to wartości własne przekształcenia F odpowiadające wektorom własnym $b_1, \ldots, b_n \in V$.

Dowód. (1) Skoro wektory bazy $\mathcal{B}$ są wektorami własnymi, to $F(b_i) = \lambda_i b_i$, dla $i = 1, \ldots, n$, skąd:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

(2) Zgodnie ze wzorem (1.8) zachodzi:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = PDP^{-1}$$

gdzie $P = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = ([b_1]_{\mathcal{C}}, \ldots, [b_n]_{\mathcal{C}})$ oraz $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. □

Przykład 8

Przekształcenie liniowe $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ dane jest wzorem $F(A) = A^\top$. Zdiagonalizować macierz $m_\mathcal{C}^\mathcal{C}(F)$ tego przekształcenia, gdzie $\mathcal{C} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Przykładem 1 przekształcenie F ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, dla których przestrzenie własne mają postać:

$$V^1 = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \right\} \qquad \text{oraz} \qquad V^{-1} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \right\}$$

Ponieważ $\dim V^1 + \dim V^{-1} = \dim M_{2\times 2}$, więc $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\right)$ jest bazą, w której przekształcenie jest diagonalizowalne, zatem zgodnie z Twierdzeniem 3.11:

$$m_\mathcal{C}^\mathcal{C}(F) = m_\mathcal{C}^\mathcal{B}(\mathrm{id}) \cdot m_\mathcal{B}^\mathcal{B}(F) \cdot m_\mathcal{B}^\mathcal{C}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}^{-1}$$

Dla sprawdzania diagonalizowalności macierzy lub przekształcenia wystarczy porównanie wymiarów przestrzeni własnych i krotności wartości własnych, co pokazuje Wniosek 3.15. Dla jego dowodu potrzebujemy następującego uogólnienia Faktu 3.6 (dowód tego uogólnienia wykracza poza ramy niniejszego skryptu):

Fakt 3.12: Liniowo niezależne wektory własne (podejście drugie)

Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ to parami różne wartości własne przekształcenia liniowego $F : V \to V$, zaś $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ to bazy przestrzeni własnych $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_k}$, to zbiór $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$ jest liniowo niezależnym zbiorem wektorów.

Oczywiście każda baza przestrzeni własnej składa się wyłącznie z wektorów własnych, więc zbiór $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$, o którym mowa w Fakcie 3.12 to zbiór złożony wyłącznie z wektorów własnych.

Definicja 3.13: Krotność wartości własnej

Krotnością wartości własnej λ przekształcenia liniowego $F : V \to V$ nazywamy krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego $\chi_F(x)$.

Fakt 3.14: Krotność wartości własnej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, a $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Wówczas dla dowolnej wartości własnej λ przekształcenia F zachodzi wzór:

$$1 \leq \dim V^\lambda \leq \text{krotność wartości własnej } \lambda \tag{3.6}$$

W szczególności, jeżeli λ jest jednokrotną wartością własną, to $\dim V^\lambda = 1$.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ będzie bazą przestrzeni własnej V^λ. Zatem $b_1, \ldots, b_k$ to wektory liniowo niezależne w V, czyli (zgodnie z Faktem 1.14) można je uzupełnić do bazy $\mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ przestrzeni V. W bazie $\mathcal{B}'$ przekształcenie F ma macierz następującej postaci:

$$m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny powyższej macierzy ma (co najmniej) k-krotny pierwiastek λ (co nietrudno zobaczyć rozwijając wyznacznik), więc krotność wartości własnej λ jest równa przynajmniej $k = \dim V^\lambda$. Z drugiej strony wymiar przestrzeni własnej musi wynosić przynajmniej 1 (bo jedyną przestrzenią liniową wymiaru 0 jest przestrzeń $\{0\}$). □

Wniosek 3.15: Diagonalizowalność przekształcenia (nad $\mathbb{R}$)

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Wówczas przekształcenie liniowe $F : V \to V$ jest diagonalizowalne (nad $\mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego χ_F są liczbami rzeczywistymi oraz dla każdego z nich zachodzi:

$$\dim V^\lambda = \text{krotność wartości własnej } \lambda$$

Dowód. Przyjmijmy $n = \dim V$. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ będą wszystkimi (rzeczywistymi) wartościami własnymi przekształcenia F. Zgodnie z Twierdzeniem 3.11 przekształcenie F jest diagonalizowalne wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń V ma bazę złożoną z wektorów własnych. Ponieważ maksymalny liniowo niezależny zbiór wektorów własnych przekształcenia F liczy:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \dim V^{\lambda_i}\right) \text{ elementów}$$

(z każdej przestrzeni własnej V^{λ_i} można wybrać najwyżej $\dim V^{\lambda_i}$ liniowo niezależnych wektorów, a zgodnie z Faktem 3.12 suma tych podzbiorów jest liniowo niezależnym podzbiorem V), więc przekształcenie F jest diagonalizowalne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sum_{i=1}^{k} \dim V^{\lambda_i} = n$$

Z drugiej strony, sumując nierówności (3.6) dla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{k} \dim V^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{k} (\text{krotność } \lambda_i) \leq n \tag{3.7}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika stąd, że suma krotności pierwiastków (rzeczywistych) wielomianu stopnia n (wielomianu charakterystycznego χ_F) nie przekracza n. Stąd F jest diagonalizowalne wtedy i tylko wtedy, gdy obie nierówności (3.7) są równościami, czyli:

$$\dim V^{\lambda_i} = \text{krotność } \lambda_i \ , \ \text{dla } i = 1, \dots, k$$

oraz wszystkie pierwiastki wielomianu χ_F są liczbami rzeczywistymi. □

Przykład 9

Wyznaczyć krotności wartości własnych oraz wymiary przestrzeni własnych macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

oraz ustalić czy macierze te są diagonalizowalne.
Rozwiązanie. Każda z macierzy ma wielomian charakterystyczy $\chi(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-5)^2$, więc $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 5$ są podwójnymi wartościami własnymi. Dla macierzy A:

$$\dim V^3 = 2 = \text{krotność wartości } 3 \qquad \text{oraz} \qquad \dim V^5 = 2 = \text{krotność wartości } 5$$

czyli macierz A jest diagonalizowalna. Dla macierzy B:

$$\dim V^3 = 2 = \text{krotność wartości } 3 \qquad \text{oraz} \qquad \dim V^5 = 1 < \text{krotność wartości } 5$$

czyli macierz B nie jest diagonalizowalna.

Przykład 10

Ustal czy przekształcenie $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zdefiniowane $F(P) = P'$ jest diagonalizowalne.
Rozwiązanie. Zgodnie z Przykładem 4 przekształcenie F ma 4-krotną wartość własną 0, ale $\dim V^0 = 1 < 4$. Wobec tego, zgodnie z Wnioskiem 3.15, przekształcenie F nie jest diagonalizowalne.

3.2 Wartości i wektory własne (zespolone)

W poprzednim semestrze wykorzystywaliśmy liczby zespolone do diagonalizacji takich macierzy A o wyrazach rzeczywistych, których wielomian charakterystyczny χ_A miał pierwiastki nierzeczywiste. Przeprowadzane rozumowania (np. dotyczące zastosowania diagonalizacji do potęgowania macierzy) były poprawne rachunkowo, ale nie było jasne skąd ta poprawność się bierze – otrzymywane nierzeczywiste wektory własne nie były elementami rozważanych przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ (z formalnego punktu widzenia nie były to zatem wektory własne). Wyjaśnienie tej kwestii wymaga wprowadzenia pojęcia *zespolonej przestrzeni liniowej*.

Definicja 3.16: Zespolona przestrzeń liniowa

Zespoloną przestrzenią liniową lub *przestrzenią liniową nad* $\mathbb{C}$ nazywamy zbiór V z dwoma operacjami:

1) dodawaniem elementów V,
2) mnożeniem elementów V przez liczby zespolone (które będziemy nazywać *skalarami*)

spełniającymi warunki podane w Definicjach 0.1, 0.5 i 0.6 z zaznaczeniem, że skalarami są liczby zespolone, czyli:

D1 dodawanie jest łączne, tzn.
$$\forall u, v, w \in V \;\; (u+v)+w = u+(v+w)$$
D2 istnieje element neutralny dodawania, tzn.
$$\exists 0 \in V \, \forall v \in V \;\; 0+v = v+0 = v$$
D3 dla każdego elementu istnieje element przeciwny, tzn.
$$\forall v \in V \, \exists (-v) \in V \;\; v+(-v) = (-v)+v = 0$$
D4 dodawanie jest przemienne, tzn.
$$\forall u, v \in V \;\; u+v = v+u$$
M1* mnożenie przez skalary i mnożenie skalarów są zgodne, tzn.
$$\forall v \in V \, \forall s, t \in \mathbb{C} \;\; (s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$$
M2* skalar $1 \in \mathbb{C}$ jest elementem neutralnym mnożenia przez skalary, tzn.
$$\forall v \in V \;\; 1 \cdot v = v$$
R* mnożenie przez skalary jest rozdzielne względem dodawania, tzn.
$$\forall u, v \in V \, \forall s, t \in \mathbb{C} \;\; [(s+t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u \quad \text{oraz} \quad t \cdot (u+v) = t \cdot u + t \cdot v]$$

Przykład 1 (przestrzeń $\mathbb{C}^n$)

Zbiór $\mathbb{C}^n$ układów n liczb zespolonych $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ wraz z dodawaniem i mnożeniem przez skalary określonymi następująco:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_1' \\ \vdots \\ z_n + z_n' \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot z_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot z_n \end{pmatrix}$$

to zespolona przestrzeń liniowa, w której elementem zerowym jest element $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zaś elementem przeciwnym do $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ to $\begin{pmatrix} -z_1 \\ \vdots \\ -z_n \end{pmatrix}$. Oczywiście $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$.

Przykład 2 (przestrzeń $M_{m\times n}(\mathbb{C})$)

Zbiór $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ macierzy rozmiaru $m \times n$ o wyrazach zespolonych z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez skalary jest zespoloną przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest macierz $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, a elementem przeciwnym do $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ jest $\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

Przykład 3 (przestrzenie $\mathbb{C}_n[x]$ oraz $\mathbb{C}[x]$)

Zbiór $\mathbb{C}_n[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej n o współczynnikach zespolonych oraz zbiór $\mathbb{C}[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych z dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianów przez skalary to zespolone przestrzenie liniowe. Elementem zerowym jest wielomian zerowy, a elementem przeciwnym do wielomianu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jest wielomian $-P(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0$.

Przykład 4

Przestrzeń funkcji zespolonych, czyli wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z działaniem dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez skalary:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

jest zespoloną przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest funkcja zerowa, tj. funkcja f taka, że $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Elementem przeciwnym do funkcji f jest funkcja $-f$, gdzie $(-f)(x) = -f(x)$.

Przykład 5

Przestrzeń wszystkich ciągów o wyrazach zespolonych z dodawaniem ciągów i mnożeniem ciągów przez skalary jest zespoloną przestrzenią liniową. Elementem zerowym jest ciąg stale równy zero, a elementem przeciwnym do ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciąg $(-a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Podobnie w miejsce pojęcia *przekształcenie liniowe* wprowadzamy pojęcie *zespolone przekształcenie liniowe*:

Definicja 3.17: Zespolone przekształcenie liniowe

Niech V i W będą zespolonymi przestrzeniami liniowymi. Przekształcenie $F : V \to W$ nazywamy *zespolonym przekształceniem liniowym*, jeśli dla dowolnych $u, v \in V$ oraz $t \in \mathbb{C}$ spełnione są warunki:

1) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ (zwany *warunkiem addytywności*)
2) $F(t \cdot v) = t \cdot F(v)$ (zwany *warunkiem jednorodności*)

Przykład 6

Dane są dwa przekształcenia:

(a) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, gdzie $F(\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)) = z_1 + z_2$,

(b) $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, gdzie $G(\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)) = z_1 + \bar{z}_2$.

Ustal czy F i G są rzeczywistymi przekształceniami liniowymi oraz czy są zespolonymi przekształceniami liniowymi.

Rozwiązanie. Nietrudno sprawdzić addytywność obu przekształceń:

$$F\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \end{pmatrix}\right) = z_1 + w_1 + z_2 + w_2 = F\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$G\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = G\left(\begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \end{pmatrix}\right) = z_1 + w_1 + \bar{z}_2 + \bar{w}_2 = G\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) + G\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)$$

Przekształcenie F spełnia warunek jednorodności zarówno dla skalarów rzeczywistych, jak i zespolonych, bo dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$ zachodzi:

$$F\left(\alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha z_1 + \alpha z_2 = \alpha(z_1 + z_2) = \alpha F\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

Natomiast przekształcenie G spełnia warunek jednorodności dla skalarów rzeczywistych, ale nie dla skalarów zespolonych, bo dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$G\left(\alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = G\left(\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha z_1 + \bar{\alpha}\bar{z}_2 = \alpha z_1 + \alpha \bar{z}_2 = \alpha G\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

ale np. dla $\alpha = i$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$ dostajemy:

$$G\left(i \begin{pmatrix} 0 \\ 2+i \end{pmatrix}\right) = G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1+2i \end{pmatrix}\right) = -1 - 2i \neq 1 + 2i = iG\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2+i \end{pmatrix}\right)$$

Wobec tego oba przekształcenia są rzeczywistymi przekształceniami liniowymi, ale jedynie F jest zespolonym przekształceniem liniowym.

Wszystkie fakty, wnioski i twierdzenia z poprzednich rozdziałów pozostają prawdziwe (a ich dowody nie ulegają istotnym zmianom), jeśli w ich sformułowaniach oraz we wszystkich definicjach:

- pojęcie *przestrzeni liniowej* zamienimy na pojęcie *zespolonej przestrzeni liniowej*,
- pojęcie *przekształcenia liniowego* zamienimy na pojęcie *zespolonego przekształcenia liniowego*,
- zbiór $\mathbb{R}$ oraz przestrzeń $\mathbb{R}^n$ zamienimy, odpowiednio, na zbiór $\mathbb{C}$ oraz przestrzeń $\mathbb{C}^n$,
- przestrzeń $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (oznaczaną dotychczas $M_{m\times n}$) zamienimy na przestrzeń $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Przykład 7

Zbiór $\mathbb{C}^3$ jest zespoloną przestrzenią liniową wymiaru 3. Jej baza to:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

bo każdy element przestrzeni $\mathbb{C}^3$ można przedstawić jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej elementów (3.8) ze współczynnikami zespolonymi:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Ten sam zbiór możemy również traktować jako **rzeczywistą** przestrzeń liniową i wówczas ma ona wymiar 6, a jej bazą jest:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

bo każdy element przestrzeni $\mathbb{C}^3$ można przedstawić jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej elementów (3.9) ze współczynnikami rzeczywistymi:

$$\begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$$

Ogólnie: zbiór $\mathbb{C}^n$ można traktować jako zespoloną przestrzeń liniową wymiaru n lub jako rzeczywistą przestrzeń liniową wymiaru $2n$.

W szczególności prawdziwa jest zespolona wersja Twierdzenia 3.8 oraz Wniosku 3.15:

Twierdzenie 3.18: Twierdzenie o diagonalizacji macierzy (wersja zespolona)

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ można zapisać w postaci diagonalnej:

$$A = PDP^{-1}, \text{ gdzie } P = (v_1, \dots, v_n), \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ tworzą bazę $\mathbb{C}^n$ złożoną z wektorów własnych macierzy A, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ to wartości własne macierzy A, odpowiednio dla wektorów $v_1, \dots, v_n$. Taka baza istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej wartości własnej λ_i macierzy A zachodzi warunek:

$$\text{krotność wartości własnej } \lambda_i \; = \dim V^{\lambda_i}$$

Zwróćmy uwagę, że każdą macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o wyrazach rzeczywistych) możemy traktować jako macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (o wyrazach zespolonych) co uzasadnia rachunki z ubiegłego semestru dotyczące diagonalizacji macierzy rzeczywistych z wykorzystaniem liczb zespolonych. Ponieważ będzie to sytuacja często spotykana w praktyce, nasza uwaga będzie się koncentrować przede wszystkich na diagonalizacji (w zespolonej przestrzeni liniowej) macierzy o wyrazach rzeczywistych.

Fakt 3.19: Zespolone wartości i wektory własne

Jeżeli macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ potraktujemy jako macierz o wyrazach zespolonych, to:

1) jeśli $\lambda \notin \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy A, to $\bar{\lambda}$ też jest wartością własną macierzy A oraz krotności λ i $\bar{\lambda}$ są jednakowe;
2) jeśli $v \in \mathbb{C}^n$ jest wektorem własnym dla wartości własnej λ, to $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ jest wektorem własnym dla wartości własnej $\bar{\lambda}$ (w szczególności $\dim V^{\lambda} = \dim V^{\bar{\lambda}}$).

Dowód. Jeśli v jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej $\lambda \notin \mathbb{R}$, to:

$$Av = \lambda v \tag{3.10}$$

Sprzęgając stronami równanie (3.10) i wykorzystując własności sprzężenia otrzymujemy:

$$\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

gdzie $\bar{A}$ powstaje z macierzy A przez zamianę każdego wyrazu na jego sprzężenie. Ponieważ macierz A ma wszystkie wyrazy rzeczywiste, więc $\bar{A} = A$, czyli

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

co oznacza, że $\bar{v}$ jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej $\bar{\lambda}$. W szczególności $\bar{\lambda}$ jest wartością własną macierzy A. □

Przykład 8

Wyznaczyć potęgę macierzy:

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{20}$$

Rozwiązanie. Macierz ma wielomian charakterystyczny:

$$\chi_A(\lambda) = ((1-\lambda)(3-\lambda)+5)((2-\lambda)(2-\lambda)+4) = (\lambda^2-4\lambda+8)^2$$

czyli zespolone wartości własne $\lambda_1 = \lambda_2 = 2+2i$ oraz $\lambda_3 = \lambda_4 = 2-2i$. Zespoloną przestrzeń własną dla wartości własnej $2+2i$ otrzymujemy rozwiązując równanie (układ równań):

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (2+2i) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x-5y = (2+2i)x \\ x+3y = (2+2i)y \\ 2z-2t = (2+2i)z \\ 2z+2t = (2+2i)t \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$V^{2+2i} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z Faktem 3.19 zespolona przestrzeń własna V^{2-2i} złożona jest ze sprzężeń wektorów zespolonej przestrzeni własnej V^{2+2i}, więc (bez żadnych dodatkowych rachunków) widzimy, że:

$$V^{2-2i} = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Stąd otrzymujemy diagonalizację macierzy A:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1+2i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2i & & & \\ & 2+2i & & \\ & & 2-2i & \\ & & & 2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+2i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ponieważ:

$$(2+2i)^{20} = \left(2\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})\right)^{20} = (2\sqrt{2})^{20}\cdot(\cos\tfrac{20\pi}{4} + i\sin\tfrac{20\pi}{4}) = -2^{30}$$
$$(2-2i)^{20} = (\overline{2+2i})^{20} = \overline{(2+2i)^{20}} = -2^{30}$$

więc macierz A^{20} jest równa:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1+2i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^{30} & & & \\ & -2^{30} & & \\ & & -2^{30} & \\ & & & -2^{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1+2i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{30} \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że pomimo pojawiających się liczb nierzeczywistych, otrzymaliśmy w wyniku macierz o wyrazach rzeczywistych. Jest to oczekiwana sytuacja, gdyż potęgujemy macierz, której wszystkie wyrazy są rzeczywiste.

Przykład 9

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o macierzy

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznacz macierz przekształcenia $F^{10} = \underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{10}$.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny przekształcenia to:

$$\chi_F(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4)$$

czyli wartości własne to $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{3}$. Wyznaczamy wektory własne:

$$v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1-i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \qquad v_3 = \overline{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1+i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Macierz przekształcenia F (w bazie standardowej $\mathcal{E}$) ma zatem postać:

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1+i\sqrt{3} & \\ & & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

zaś macierz przekształcenia F^{10} ma postać:

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F^{10}) = \begin{pmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & & \\ & (1+i\sqrt{3})^{10} & \\ & & (1-i\sqrt{3})^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Uwzględniając, że:

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})^{10} &= (2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}))^{10} = 2^{10}(\cos\tfrac{10\pi}{3} + i\sin\tfrac{10\pi}{3}) = -2^9 \cdot (1+i\sqrt{3}) \\ (1-i\sqrt{3})^{10} &= (\overline{1-i\sqrt{3}})^{10} = \overline{(1-i\sqrt{3})^{10}} = -2^9 \cdot (1-i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F^{10}) = 2^9 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy rzeczywistych przy pomocy liczb zespolonych ma tę wadę, że otrzymywane wektory własne są elementami zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$, a nie rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. O ile więc liczby zespolone pozwalają wyznaczyć potęgę macierzy lub macierz złożenia przekształceń $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to nie pomagają w zrozumieniu działania pojedynczego przekształcenia F (otrzymane zespolone wektory własne nie są elementami dziedziny $\mathbb{R}^n$ przekształcenia F). Kolejne twierdzenie ma na celu zaradzenie temu problemowi.

Twierdzenie 3.20: Klatkowa diagonalizacja nad $\mathbb{R}$

Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, traktowana jako macierz o wyrazach zespolonych, jest diagonalizowalna, to można ją przedstawić w postaci:

$$A = PDP^{-1} \text{ gdzie } D = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

przy czym D_i, $i = 1, \ldots, k$ są klatkami dwojakiego rodzaju:

1) każdej rzeczywistej wartości własnej λ macierzy A przypisana jest klatka $D_i = (\lambda)$ (rozmiaru 1×1), a odpowiadająca jej kolumna macierzy P to wektor własny dla λ;
2) każdej parze sprzężonych wartości własnych $\lambda = a + bi$, $\bar{\lambda} = a - bi$ macierzy A przypisana jest klatka $D_i = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (rozmiaru 2×2), a odpowiadające jej dwie kolumny macierzy P to wektory $u, w \in \mathbb{R}^n$, gdzie $u + wi \in \mathbb{C}^n$ oraz $u - wi \in \mathbb{C}^n$ to wektory własne, odpowiednio, dla λ i $\bar{\lambda}$.

Dowód. Przyjmijmy $n = 2$ (dowód w ogólnej sytuacji jest podobny). Macierz A ma zatem 2 zespolone wartości własne: λ_1 i λ_2. Jeśli $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to przedstawienie (3.11) jest rzeczywistą diagonalizacją macierzy. W przeciwnym przypadku, zgodnie z Faktem 3.19, wartości własne to $\lambda_1 = a + bi$ oraz $\lambda_2 = a - bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś odpowiadające im wektory własne to, odpowiednio, $v_1 = u + iw$ oraz $v_2 = u - iw$, gdzie $u, w \in \mathbb{R}^2$. Zgodnie z definicją wektorów własnych:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \qquad \text{czyli} \qquad A(u + iw) = (a + ib)(u + iw) = (au - bw) + i(bu + aw) \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \qquad \text{czyli} \qquad A(u - iw) = (a - ib)(u - iw) = (au - bw) - i(bu + aw) \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Au &= A\left(\tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2\right) = \tfrac{1}{2}Av_1 + \tfrac{1}{2}Av_2 = au - bw \\ Aw &= A\left(\tfrac{1}{2i}v_1 - \tfrac{1}{2i}v_2\right) = \tfrac{1}{2i}Av_1 - \tfrac{1}{2i}Av_2 = bu + aw \end{aligned}$$

Wobec tego, traktując macierz A jako macierz przekształcenia $F_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, w bazie $\mathcal{B} = (u, w)$ dostajemy macierz przekształcenia:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

czyli w bazie standardowej otrzymujemy:

$$A = m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F_A) = m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = P \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

gdzie

$$P = m_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = ([u]_{\mathcal{E}}, [w]_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

□

Przykład 10

Napisać klatkową rzeczywistą postać diagonalną macierzy obrotu R o kąt θ wokół punktu O:

$$m(R) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że macierz $m(R)$ ma już postać $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, dla $a = \cos\theta$, $b = -\sin\theta$, więc przedstawienie (3.11) to:

$$m(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Sprawdzimy, że algorytm z Twierdzenia 3.20 faktycznie prowadzi do powyższego przedstawienia. Wielomian charakterystyczny przekształcenia R to $\chi_R(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$. Jego pierwiastki to:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}) = \tfrac{1}{2}(2\cos\theta \pm \sqrt{-4\sin^2\theta}) = \tfrac{1}{2}(2\cos\theta \pm 2i\sin\theta) = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

Wobec tego wartości własne przekształcenia R to:

$$\lambda_1 = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta$$

Nietrudno wyliczyć, że odpowiadające im wektory własne to (z dokładnością do skalowania):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stąd:

$$m(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Zauważmy, że jeśli zamienimy kolejność wartości (i równocześnie wektorów) własnych, otrzymamy postać:

$$m(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

która również jest klatkową rzeczywistą diagonalizacją.

Przykład 11

Napisać klatkową rzeczywistą postać diagonalną macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Wyznaczone w Przykładzie 8 zespolone wartości własne i wektory własne macierzy A tworzą dwie pary sprzężonych wartości i wektorów własnych:

$$\lambda = 2 \pm 2i \qquad \text{wraz z} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \pm 2i \qquad \text{wraz z} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1\pm 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pm i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stąd klatkowa rzeczywista postać diagonalna to:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & & \\ -2 & 2 & & \\ & & 2 & 2 \\ & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wyznaczone w Przykładzie 9 zespolone wartości własne i wektory własne macierzy B to:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 & &\text{wraz z} & v_1 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \lambda_2 &= 1 + i\sqrt{3} & &\text{wraz z} & v_2 &= \left(\begin{smallmatrix} 1-i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + i \left(\begin{smallmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \lambda_3 &= 1 - i\sqrt{3} & &\text{wraz z} & v_3 &= \left(\begin{smallmatrix} 1+i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + i \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Stąd dostajemy klatkową rzeczywistą postać diagonalną:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \sqrt{3} \\ & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Zamianę postaci zespolonej diagonalizacji na postać rzeczywistą można łatwiej zrozumieć, jeśli zauważymy, że bazuje ona na utożsamieniu liczby zespolonej $a+ib \in \mathbb{C}$ z macierzą postaci $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, gdzie dodawanie i mnożenie liczb zespolonych odpowiada dodawaniu i mnożeniu macierzy:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \quad \text{vs.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad) \quad \text{vs.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$$

Klatkowa rzeczywista postać diagonalna nie będzie zbyt przydatna przy potęgowaniu macierzy (do tego celu znacznie lepiej nadaje się stosowana dotychczas diagonalizacja zespolona), ale pozwoli lepiej opisać i zrozumieć pojedyncze odwzorowanie $F : V \to V$. Do tego przydatne będą pojęcia *podprzestrzeni niezmienniczych* oraz *sumy prostej* podprzestrzeni.

Definicja 3.21: Podprzestrzeń niezmiennicza

Dana jest (rzeczywista lub zespolona) przestrzeń liniowa V oraz (rzeczywiste lub zespolone) przekształcenie liniowe $F : V \to V$. Podprzestrzeń $W < V$ nazywamy *podprzestrzenią F-niezmienniczą*, jeśli $F(w) \in W$ dla każdego $w \in W$ (tzn. podprzestrzeń W jest zamknięta na działanie przekształcenia F).
Jeśli ograniczymy dziedzinę przekształcenia F do pewnej F-niezmienniczej podprzestrzeni W, to otrzymamy przekształcenie $F|_W : W \to W$, które nazywamy *obcięciem przekształcenia F do podprzestrzeni W*.

Jeśli z kontekstu będzie jasno wynikać do jakiego przekształcenia liniowego się odnosimy, zamiast *podprzestrzeń F-niezmiennicza* będziemy mówić *podprzestrzeń niezmiennicza*.

Przykład 12

Niech λ będzie wartością własną przekształcenia liniowego $F : V \to V$. Sprawdzić, że przestrzeń własna V^λ jest podprzestrzenią F-niezmienniczą.
Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli $v \in V^\lambda$, to $F(v) = \lambda v \in V^\lambda$, gdyż V^λ (jak każda podprzestrzeń) jest zamknięta na mnożenie przez skalary.

Przykład 13

Dla każdego przekształcenia liniowego $F : V \to V$ podprzestrzenie $\{0\}$ i V są podprzestrzeniami F-niezmienniczymi.

Przykład 14

Znaleźć nietrywialne (tzn. inne niż podprzestrzeń zerowa i cała przestrzeń) podprzestrzenie niezmiennicze obrotu $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o kąt θ wokół prostej ℓ o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, a następnie wykorzystać te informacje do napisania macierzy przekształcenia F w dowolnie wybranej bazie.

Rozwiązanie. Nietrywialnymi podprzestrzeniami F-niezmienniczymi są:

- prosta ℓ o wektorze kierunkowym $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (jest to przestrzeń własna dla $\lambda = 1$),
- płaszczyzna π prostopadła do ℓ, czyli rozpięta przez wektory $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Oznaczmy $V_1 = \mathrm{Lin}\{b_1\}$ oraz $V_2 = \mathrm{Lin}\{b_2, b_3\}$. Obcięcie $F|_{V_1} : V_1 \to V_1$ to identycznościowe przekształcenie (jednowymiarowej) przestrzeni V_1. Obcięcie $F|_{V_2} : V_2 \to V_2$ to obrót o kąt θ w dwuwymiarowej przestrzeni V_2. Stąd, dla baz $\mathcal{B}_1 = (b_1)$ oraz $\mathcal{B}_2 = (b_2, b_3)$ mamy:

$$m_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(F|_{V_1}) = (1) \qquad m_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(F|_{V_2}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Stąd, oznaczając $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, otrzymujemy:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Przykład 15

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadane (w bazie standardowej) macierzą:

$$m(F) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć dwie 2-wymiarowe podprzestrzenie niezmiennicze $\mathbb{R}^4$, a następnie wyznaczyć macierze obcięć tych przekształceń do wyznaczonych podprzestrzeni (w odpowiednio dobranych bazach).

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że podprzestrzenią niezmienniczą jest każda z podprzestrzeni:

$$U = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\} \qquad \text{oraz} \qquad W = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Dla wyznaczenia macierzy przekształceń $F|_U : U \to U$ oraz $F|_W : W \to W$ potrzebujemy wybrać bazy U i W. Jeśli wybierzemy odpowiednie elementy bazy standardowej $\mathbb{R}^4$, tzn. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ dla U oraz $\mathcal{C} = (e_3, e_4)$ dla W, to:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F|_U) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F|_W) = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że są to dokładnie klatki macierzy $m(F)$.

Ostatnie dwa przykłady pokazują, że jeśli przestrzeń V rozłożymy na podprzestrzenie niezmiennicze $V_1, \dots, V_n$, to analizę przekształcenia liniowego $F : V \to V$ możemy przeprowadzać osobno dla każdej podprzestrzeni V_i, zaś macierz przekształcenia F (w odpowiednio dobranej bazie) będzie macierzą klatkową złożoną z klatek – macierzy przekształceń $F|_{V_i}$. Poniższa definicja formalizuje pojęcie rozkładu przestrzeni liniowej na podprzestrzenie (niekoniecznie niezmiennicze).

Definicja 3.22: Suma prosta

Przestrzeń liniowa V jest *sumą prostą* swoich podprzestrzeni $V_1, \dots, V_n < V$, co oznaczamy:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

jeśli każdy wektor $v \in V$ przedstawia się jednoznacznie w postaci

$$v = v_1 + \cdots + v_n, \quad \text{gdzie} \quad v_i \in V_i, \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n \tag{3.12}$$

Pojęcie sumy prostej (ozn. $\oplus$) należy odróżniać od pojęcia sumy kompleksowej (ozn. $+$) zdefiniowanej poniżej:

Definicja 3.23: Suma kompleksowa

Sumą kompleksową podzbiorów $A, B \subset V$ nazywamy zbiór:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \subset V$$

Przykładem sumy kompleksowej jest (wprowadzone wcześniej) pojęcie warstwy podprzestrzeni. Warstwa $v + W$ to formalnie suma kompleksowa $\{v\} + W$.
Suma kompleksowa $V_1 + V_2$ podprzestrzeni $V_1, V_2 < V$ to podprzestrzeń generowana przez V_1 i V_2. Suma prosta $V_1 \oplus V_2$ podprzestrzeni $V_1, V_2 < V$ to taka suma kompleksowa, której składniki spełniają pewne dodatkowe założenia (innymi słowy: jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $V = V_1 + V_2$, ale nie na odwrót).

Przykład 16

Pokazać, że jeśli $(b_1, \dots, b_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V, to V można rozłożyć na sumę prostą jednowymiarowych podprzestrzeni:

$$V = \operatorname{Lin}\{b_1\} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Lin}\{b_n\}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją bazy każdy element $v \in V$ przedstawia się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej:

$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

gdzie $\alpha_i b_i \in \operatorname{Lin}\{b_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Przykład 17

Pokazać, że przestrzeń $\mathbb{R}^3$ można rozłożyć na sumę prostą w następujący sposób:

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2, \quad \text{gdzie} \quad V_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right) : z \in \mathbb{R}\}$$

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że każdy wektor $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ przedstawia się jednoznacznie w postaci:

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$$

gdzie $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in V_1$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right) \in V_2$.

Przykład 16 stanowi motywację do następującej charakteryzacji sumy prostej podprzestrzeni:

Fakt 3.24: Suma prosta

Dana jest (skończenie wymiarowa) przestrzeń liniowa V i podprzestrzenie $V_1, \ldots, V_n < V$. Niech $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ będą bazami, odpowiednio, przestrzeni $V_1, \ldots, V_n$. Wówczas V rozkłada się w sumę prostą:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ jest bazą przestrzeni V.

Dowód. Rozpatrzmy przypadek $n = 2$ (przypadek $n \geq 3$ jest analogiczny). Jeśli $\mathcal{B}_1 = (b_1, \ldots, b_k)$ oraz $\mathcal{B}_2 = (b'_1, \ldots, b'_l)$ to bazy odpowiednio V_1 i V_2, to przedstawienie wektora $v \in V$ w postaci $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ oznacza przedstawienie:

$$v = (\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k) + (\alpha'_1 b'_1 + \cdots + \alpha'_l b'_l)$$

które jest jednoznaczne wtedy i tylko wtedy, gdy $(b_1, \ldots, b_k, b'_1, \ldots, b'_l)$ jest bazą V. □

Przykład 18

Pokazać, że $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, jeśli $V_1 < \mathbb{R}^3$ jest 1-wymiarową podprzestrzenią (tzn. prostą przechodzącą przez 0), zaś $V_2 < \mathbb{R}^3$ jest 2-wymiarową podprzestrzenią (tzn. płaszczyzną przechodzącą przez 0) taką, że prosta V_1 nie leży na płaszczyźnie V_2.
Rozwiązanie. Jeśli b_1 jest wektorem kierunkowym prostej V_1, zaś wektory b_2 i b_3 rozpinają płaszczyznę V_2, to układ (b_1, b_2, b_3) jest bazą $\mathbb{R}^3$.

Przykład 19

Pokazać, że przestrzeń $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ można rozłożyć na sumą prostą:

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

Rozwiązanie. Bazą pierwszej przestrzeni jest $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, zaś bazą drugiej przestrzeni jest $\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Nietrudno sprawdzić, że $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ jest bazą przestrzeni $M_{2\times 2}$.

Fakt 3.25: Suma prosta podprzestrzeni niezmienniczych

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś $F : V \to V$ przekształceniem liniowym. Jeżeli dla F-niezmienniczych podprzestrzeni $V_1, \ldots, V_n < V$ zachodzi:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

to macierz F ma postać klatkową:

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix}, \qquad \text{gdzie} \quad M_i = m^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_i}(F|_{V_i})$$

dla baz $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ przestrzeni, odpowiednio, $V_1, \ldots, V_n$ oraz bazy $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n$ przestrzeni V.

Dowód. Przedstawimy dowód w szczególnym przypadku, gdy $V = V_1 \oplus V_2$ oraz $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ (dowód w przypadku ogólnym jest podobny). Niech $\mathcal{B}_1 = (b_1, b_2)$ oraz $\mathcal{B}_2 = (b_3, b_4)$ będą bazami, odpowiednio, podprzestrzeni V_1 i V_2. Wówczas $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ jest bazą przestrzeni V. Ponieważ V_1 jest podprzestrzenią F-niezmienniczą, więc $F(b_1), F(b_2) \in V_1$, czyli:

$$F(b_1) = a_{11}b_1 + a_{21}b_2 \qquad \text{oraz} \qquad F(b_2) = a_{12}b_1 + a_{22}b_2$$

dla pewnych $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Podobnie, ponieważ V_2 jest podprzestrzenią F-niezmienniczą, więc $F(b_3), F(b_4) \in V_2$, czyli

$$F(b_3) = a'_{11}b_3 + a'_{21}b_4 \qquad \text{oraz} \qquad F(b_4) = a'_{12}b_3 + a'_{22}b_4$$

dla pewnych $a'_{11}, a'_{12}, a'_{21}, a'_{22} \in \mathbb{R}$. W tej sytuacji:

$$m_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(F|_{V_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad m_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(F|_{V_2}) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

natomiast

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & 0 & a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

□

Przykład 20

Napisać macierz przekształcenia $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ takiego, że $F(x^2+1) = x^2+x+1$, $F(x) = 3x$ oraz $F(x^3+1) = F(1) = x^3$:

(a) w dowolnie wybranej bazie,

(b) w bazie $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że podprzestrzenie $U = \operatorname{Lin}\{x, x^2+1\}$ oraz $W = \operatorname{Lin}\{x^3+1, 1\}$ są F-niezmiennicze. Wybierzmy bazę $\mathcal{B}_1 = (x, x^2+1)$ dla przestrzeni U oraz bazę $\mathcal{B}_2 = (x^3+1, 1)$ dla przestrzeni W. Zauważmy, że $\mathcal{B} = (x, x^2+1, x^3+1, 1)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$. Stąd:

$$\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$$

oraz

$$m_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(F|_U) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad m_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(F|_W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wobec tego:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zgodnie ze wzorem (1.8) macierz przekształcenia F w bazie $\mathcal{C}$ ma postać:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Fakt 3.26: Podprzestrzeń dopełnicza

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Dla dowolnej podprzestrzeni $W < V$ istnieje podprzestrzeń $W' < V$ (zwana *podprzestrzenią dopełniczą do* W) taka, że:

$$V = W \oplus W'$$

Zazwyczaj jest wiele różnych podprzestrzeni dopełniczych do ustalonej podprzestrzeni.

Dowód. Wybierzmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ przestrzeni W. Jest to zbiór liniowo niezależny w V, więc można go uzupełnić do bazy $\mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ przestrzeni V. Wówczas przestrzeń $W' = \mathrm{Lin}\{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ jest, zgodnie z Faktem 3.24, podprzestrzenią dopełniczą do W. Ponieważ uzupełnienie bazy W do bazy V można wykonać na wiele różnych sposobów, więc podprzestrzeni dopełniczych również (zazwyczaj) jest wiele. □

3.3 Twierdzenie Jordana

Jak wiemy z poprzednich rozdziałów, sprawne wyliczanie potęg macierzy, wymaga zapisania macierzy w postaci diagonalnej. Niestety, nie wszystkie macierze są diagonalizowalne, nawet przy użyciu liczb zespolonych (pamiętamy, że problem z diagonalizacją pojawia się, jeśli wymiar jakiejkolwiek przestrzeni własnej V^λ jest mniejszy od krotności wartości własnej λ). Niniejszy rozdział poświęcony będzie postępowaniu z takimi właśnie macierzami. Rozpoczniemy od pewnych szczególnych przykładów macierzy niediagonalizowalnych.

Przykład 1

Sprawdzić diagonalizowalność następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Wszystkie rozważane macierze to macierze górnotrójkątne o jednej wartości własnej (odpowiednio: 3, 5, 2 i 7), krotności większej niż 1. Każda z nich ma 1-wymiarową przestrzeń własną (generowaną, odpowiednio, przez wektory: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$). W związku z tym żadna z tych macierzy nie jest diagonalizowalna.

Przykład 2

Niech λ będzie liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć wzory na n-te potęgi następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Każda z tych macierzy ma jedną (wielokrotną) wartość własną λ i 1-wymiarową przestrzeń własną V^λ, nie jest więc diagonalizowalna. Wyliczając kolejne potegi:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \qquad B^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \qquad B^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \qquad C^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

nietrudno znaleźć ogólny wzór:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad C^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

który następnie można udowodnić indukcyjnie. Przeprowadzenie dowodu indukcyjnego pozostawiamy czytelnikowi.

Można zauważyć, że wyrazy pojawiające się w potęgach macierzy z Przykładu 1, to kolejne składniki rozwinięcia dwumianu Newtona:

$$(\lambda+1)^n = \lambda^n + n\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} + \binom{n}{3}\lambda^{n-3} + \cdots + n\lambda + 1$$

więc nietrudno uogólnić otrzymane wzory na macierze rozmiaru 5×5 i większe. Macierze z z Przykładu 1 nazywane są *klatkami Jordana*. Istnienie prostego wzoru na n-tą potęgę klatki Jordana powoduje, że macierz złożona z klatek Jordana będzie dobrym substytutem macierzy diagonalnej. Podane poniżej Twierdzenie Jordana to uogólnienie Twierdzenia o diagonalizacji macierzy obejmujące wszystkie (bez wyjątku) macierze kwadratowe (dla macierzy diagonalizowalnych wszystkie klatki $J_1, \ldots, J_k$ będą rozmiaru 1×1). Dowód Twierdzenia Jordana jest bardzo skomplikowany i wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Twierdzenie 3.27: Twierdzenie Jordana[3] (wersja macierzowa)

Każdą macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ możemy przedstawić w następującej postaci, zwanej *przedstawieniem Jordana*:

$$A = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ dla } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są wartościami własnymi (niekoniecznie różnymi) macierzy A, natomiast $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest macierzą odwracalną. Macierze J_i nazywamy *klatkami Jordana*, a macierz J *macierzą Jordana* lub *postacią Jordana macierzy* A.

Twierdzenie 3.28: Twierdzenie Jordana (wersja przekształceniowa)

Niech V będzie skończenie wymiarową zespoloną przestrzenią liniową. Dla każdego przekształcenia liniowego $F : V \to V$ istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V (zwana *bazą jordanowską*) taka, że:

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}, \text{ gdzie } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są wartościami własnymi (niekoniecznie różnymi) macierzy A. Wówczas dla dowolnej bazy $\mathcal{C}$ przestrzeni V zachodzi:

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(F) = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ gdzie } P = m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$$

[3] Twierdzenie Jordana to rezultat francuskiego matematyka Camille Jordana. Nie należy mylić autora twierdzenia ze znanym koszykarzem, którego nazwisko ma taką samą pisownię (ale inną wymowę!) lub z rzeką w państwie Izrael.

Przykład 3

Przykłady macierzy Jordana to:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & & \\ 0 & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dalsza część niniejszego rozdziału będzie poświęcona wyznaczaniu przedstawienia Jordana macierzy, które nie są diagonalizowalne. Pierwszym krokiem jest wyznaczenie postaci Jordana macierzy (czyli macierzy Jordana J):

Fakt 3.29: Postać Jordana macierzy

Postać Jordana $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ dla każdej wartości własnej λ macierzy A spełnia następujące warunki::

1) liczba wystąpień λ na przekątnej macierzy J jest równa krotności wartości własnej λ (innymi słowy: wyrazy na przekątnej macierzy J to wartości własne macierzy A liczone z krotnościami);
2) liczba klatek Jordana macierzy J dla λ (wliczając w to ewentualne klatki rozmiaru 1×1) jest równa $\dim V^{\lambda}$.

Dowód. (1) Zauważmy, że:

$$A - \lambda I = PJP^{-1} - P(\lambda I)P^{-1} = P(J - \lambda I)P^{-1}$$

czyli

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det P \cdot \det(J - \lambda I) \cdot (\det P)^{-1} = \det(J - \lambda I) = \chi_J(\lambda)$$

Zatem wielomian charakterystyczny macierzy A jest równy wielomianowi charakterystycznemu macierzy J. Z kolei macierz J jest macierzą górnotrójkątną, więc wyrazy na przekątnej to dokładnie pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego (z krotnościami).
(2) Zauważmy, że każda klatka Jordana dla λ wyznacza jeden (z dokładnością do skalowania) wektor własny dla λ. Stąd liczba klatek dla λ to wymiar przestrzeni własnej dla λ. □

Fakt 3.30: Jednoznaczność postaci Jordana

Postać Jordana $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zmiany kolejności klatek Jordana.

Z Faktu 3.29 wynika, że wyrazy na przekątnej macierzy J oraz liczba klatek Jordana dla każdej wartości własnej λ są jednoznacznie wyznaczone przez macierz A. Jest to pierwszy krok w kierunku dowodu Faktu 3.30, aczkolwiek niewystarczający dla dowodu jednoznaczności, co pokazuje poniższy przykład (obie macierze Jordana mają jednakowe przekątne i jednakową liczbę klatek Jordana dla wartości własnej 2):

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 \\ & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pełny dowód Faktu 3.30 wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Przykład 4

Wyznaczyć wszystkie możliwe postaci Jordana J macierzy A, której wielomianem charakterystycznym jest:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^3(\lambda - 5)$$

Rozwiązanie. Przekątna macierzy J zawiera pierwiastki wielomianu charakterystycznego macierzy A, czyli dwie 2, trzy 3 i jedną 5. Liczba klatek Jordana dla $\lambda = 2$ oraz dla $\lambda = 3$ zależy od wymiarów przestrzeni własnych $\dim V^2$ oraz $\dim V^3$. Dla $\lambda = 5$ jest tylko jedna klatka Jordana, gdyż zgodnie z Faktem 3.14 zachodzi $\dim V^5 = 1$. Wobec tego macierz J jest (z dokładnością do zmiany kolejności klatek) jedną z następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ & 2 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 &&&& \\ 0 & 2 &&&& \\ && 3 &&& \\ &&& 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ & 2 &&&& \\ && 3 & 1 && \\ && 0 & 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 &&&& \\ 0 & 2 &&&& \\ && 3 & 1 && \\ && 0 & 3 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ & 2 &&&& \\ && 3 & 1 & 0 & \\ && 0 & 3 & 1 & \\ && 0 & 0 & 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 &&&& \\ 0 & 2 &&&& \\ && 3 & 1 & 0 & \\ && 0 & 3 & 1 & \\ && 0 & 0 & 3 & \\ &&&&& 5 \end{pmatrix}$$

Przykład 5

Wyznaczyć postać Jordana J macierzy A, której wielomian charakterystyczny to $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^3(\lambda - 5)^2$, a przestrzenie własne mają wymiary: $\dim V^2 = 2$ i $\dim V^5 = 1$.
Rozwiązanie. Przekątna macierzy J zawiera pierwiastki wielomianu charakterystycznego A, czyli trzy 2 i dwie 5. Liczba klatek Jordana dla $\lambda = 2$ wynosi $\dim V^2 = 2$, natomiast liczba klatek dla $\lambda = 5$ wynosi $\dim V^5 = 1$. Stąd J (z dokładnością do zmiany kolejności klatek) to:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 &&& \\ 0 & 2 &&& \\ && 2 && \\ &&& 5 & 1 \\ &&& 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Przykład 6

Wyznaczyć postać Jordana J każdej z następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Dla macierzy A wyznaczamy wielomian charakterystyczny $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ oraz wartości własne dla jedynej wartości własnej:

$$V^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Ponieważ $\dim V^2 = 1$, więc macierz J składa się z jednej klatki Jordana, skąd $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dla macierzy B wielomian charakterystyczny to $\chi_B(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$. Ponieważ $\lambda = 2$ jest jednokrotną wartością własną, więc $\dim V^2 = 1$. Wyliczając V^3 otrzymujemy:

$$V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

skąd $\dim V^3 = 1$, czyli macierz J ma jedną klatkę Jordana dla $\lambda = 3$ i jedną klatkę Jordana dla $\lambda = 2$. Zatem:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ 0 & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Trudniejszą kwestią od wyznaczania postaci Jordana J jest wyznaczanie macierzy P z przedstawienia Jordana $A = PJP^{-1}$, czyli wyznaczanie bazy jordanowskiej (zgodnie z Twierdzeniem 3.28, jeśli $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ są kolumnami macierzy P, to w bazie $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ przekształcenie $F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ma macierz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A) = J$). W ogólnym przypadku algorytm wyznaczania macierzy P jest trudny, dlatego w niniejszym skrypcie ograniczymy się do sytuacji, gdy dla każdej wartości własnej λ jest tylko jedna klatka Jordana i rozmiar tej klatki nie przekracza 3×3.

Fakt 3.31: Baza jordanowska

Niech macierz $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ będzie postacią Jordana macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Jeśli każda klatka Jordana macierzy J przynależy do innej wartości własnej i rozmiar żadnej klatki nie przekracza 3×3, to bazę jordanowską $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}^n$ (tzn. kolumny macierzy P w przedstawieniu $A = PJP^{-1}$) wyznaczamy następująco:

1) jeśli $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, to bazę jordanowską wyznacza następujący układ warunków:

$$\begin{cases} Ab_1 = \lambda b_1 \\ Ab_2 = b_1 + \lambda b_2 \end{cases} \tag{3.13}$$

2) jeśli $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, to bazę jordanowską wyznacza następujący układ warunków:

$$\begin{cases} Ab_1 = \lambda b_1 \\ Ab_2 = b_1 + \lambda b_2 \\ Ab_3 = b_2 + \lambda b_3 \end{cases} \tag{3.14}$$

3) jeśli $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \vdots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$, to bazę jordanowską wyznacza następujący układ warunków:

(a) warunek $Ab_i = \lambda_i b_i$ dla każdego wektora b_i odpowiadającego klatce (λ_i),

(b) warunek (3.13) dla każdej pary b_i, b_{i+1} odpowiadającej klatce $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$,

(c) warunek (3.14) dla każdej trójki b_i, b_{i+1}, b_{i+2} odpowiadającej klatce $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Dowód. Przyjmując $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, przekształcenie $F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o macierzy A ma w bazie

$\mathcal{B}$ macierz:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A) = J$$

Stąd $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oznacza:

$$\begin{cases} F_A(b_1) = \lambda b_1 \\ F_A(b_2) = b_1 + \lambda b_2 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} Ab_1 = \lambda b_1 \\ Ab_2 = b_1 + \lambda b_2 \end{cases}$$

natomiast $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oznacza:

$$\begin{cases} F_A(b_1) = \lambda b_1 \\ F_A(b_2) = b_1 + \lambda b_2 \\ F_A(b_3) = b_2 + \lambda b_3 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} Ab_1 = \lambda b_1 \\ Ab_2 = b_1 + \lambda b_2 \\ Ab_3 = b_2 + \lambda b_3 \end{cases}$$

Pozostaje jedynie sprawdzić, że para niezerowych wektorów spełniających warunek (3.13) (trójka niezerowych wektorów spełniających warunek (3.14)) jest bazą. Dowód tej części pomijamy. Podobne rozumowanie przeprowadzamy w sytuacji, gdy macierz J składa się z więcej niż jednej klatki Jordana, pod warunkiem, że dla każdej wartości własnej λ macierzy A macierz J ma tylko jedną klatkę Jordana i rozmiar tej klatki nie przekracza rozmiaru 3×3. □

Przykład 7

Przedstaw macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w postaci Jordana.

Rozwiązanie. Zaczniemy od wyznaczenia postaci Jordana J macierzy A. Wielomian charakterystyczny macierzy A to $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$, więc jedyną (potrójną) wartością własną macierzy A jest $\lambda = 2$. Przestrzeń własna dla wartości własnej $\lambda = 2$ to:

$$V^2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ x \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Zatem $\dim V^2 = 1$, czyli postać Jordana J to:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zgodnie ze wzorem (3.14) kolumny b_1, b_2, b_3 macierzy $P = (b_1, b_2, b_3)$ mają spełniać warunki:

$$\begin{cases} Ab_1 = 2b_1 \\ Ab_2 = b_1 + 2b_2 \\ Ab_3 = b_2 + 2b_3 \end{cases}$$

Wektor b_1 jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej 2, stąd możemy przyjąć np. $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Uwzględniając ten wybór, z drugiego równania wyznaczamy $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ 1 \\ x_2-1 \end{smallmatrix}\right)$. Możemy przyjąć np. $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Uwzględniając ten wybór, z trzeciego równania wyznaczamy $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ 1 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Możemy przyjąć np. $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Stąd (przykładową) bazą spełniającą warunki zadania (bazą jordanowską) jest baza $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$, czyli przedstawienie Jordana macierzy A to:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Przykład 8

Wyznacz postać Jordana i bazę jordanowską każdej z następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. (a) Zgodnie z wyliczeniami z Przykładu 6:

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Oznaczając $P = (b_1, b_2)$ wyznaczamy bazę jordanowską zgodnie ze wzorem (3.13):

$$\begin{cases} Ab_1 = 2b_1 \\ Ab_2 = b_1 + 2b_2 \end{cases}$$

Wektor b_1 jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej $\lambda = 2$, więc możemy przyjąć, zgodnie z wyliczeniem z Przykładu 6, że $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas z drugiego równania wyliczamy $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

skąd $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ x_2+1 \end{smallmatrix}\right)$. Możemy przyjąć $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, co daje następujące przedstawienie Jordana:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

(b) Zgodnie z wyliczeniami z Przykładu 6:

$$B = P \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ 0 & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Oznaczając $P = (b_1, b_2, b_3)$ wyznaczamy bazę jordanowską zgodnie z Faktem 3.31(3):

$$\begin{cases} Bb_1 = 3b_1 \\ Bb_2 = b_1 + 3b_2 \\ Bb_3 = 2b_3 \end{cases}$$

Wektor b_1 to wektor własny dla wartości własnej 3, a wektor b_3 to wektor własny dla wartości własnej 2. Zgodnie z wyliczeniami z Przykładu 6 możemy przyjąć $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$. Nietrudno wyliczyć, że $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}x_3\\x_3\\0\end{smallmatrix}\right)$, np. $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Wektor $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{smallmatrix}\right)$ wyliczamy z drugiego równania:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\-2 & 4 & 3\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

skąd $\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x_2\\2x_2-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Możemy przyjąć np. $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, co daje przedstawienie Jordana:

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 1 & \\0 & 3 & \\ & & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

Fakt 3.32: Potęgowanie macierzy

Jeśli $A = PJP^{-1}$, gdzie $A, J, P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, to $A^k = PJ^kP^{-1}$ dla dowolnej liczby naturalnej k.

Dowód. Dla dowolnej macierzy J zachodzi wzór:

$$(PJP^{-1})^k = \underbrace{PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} \cdot \ldots \cdot PJP^{-1}}_{k} = P\underbrace{J \cdot J \cdot \ldots \cdot J}_{k}P^{-1} = PJ^kP^{-1}$$

□

Przykład 9

Obliczyć:

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}^n \qquad B^9 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\-2 & 4 & 3\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}^9$$

Rozwiązanie. Korzystając z przedstawień Jordana z Przykładu 8 dostajemy:

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2^n - n2^{n-1} & n2^{n-1}\\-n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1}\end{pmatrix}\\
B^9 &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & \\0 & 3 & \\ & & 2\end{pmatrix}^9\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^9 & 9\cdot 3^8 & \\0 & 3^9 & \\ & & 2^9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}-3^9 + 2^{10} & 3^9 - 2^9 & 4\cdot 3^9 - 2^9\\-2\cdot 3^9 + 2^{10} & 2\cdot 3^9 - 2^9 & 7\cdot 3^9 - 2^9\\0 & 0 & 3^9\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.4 Zastosowania diagonalizacji

Ważne zastosowanie diagonalizacji macierzy (oraz jej uogólnień, jak twierdzenie Jordana), to rozwiązywanie rekurencji liniowych (tzn. wyznaczanie zwartego wzoru ciągu zadanego rekurencyjnie).

Przykład 1

Ciąg (a_n) zadany jest następującą rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$$

Kolejnymi wyrazami tego ciągu są zatem: 0, 1, 5, 19, 65, ... Znajdź (zwarty) wzór na a_n.
Rozwiązanie. Każdy wyraz ciągu zależy tylko od dwóch poprzednich wyrazów. Jeśli zatem będziemy rozpatrywać wektory $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to każdy wektor będzie zależał tylko od poprzedniego wektora i zależność tę będzie można zapisać warunkiem:

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1}$$

W związku z tym:

$$v_n = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{n-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 v_{n-2} = \cdots = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n v_0 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dla wyznaczenia wzoru na a_n potrzeba więc obliczyć n-tą potęgę macierzy. Postępujemy jak w poprzednim przykładzie. Wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

Jego pierwiastki to $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$, a odpowiadające im wektory własne to (jak nietrudno wyliczyć) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Diagonalizacja macierzy przyjmuje zatem postać:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wobec tego

$$v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy

$$a_n = 3^n - 2^n$$

Przykład 2

Wyznaczyć zwarty wzór ciągu a_n danego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 6 \\ a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2}, \text{ gdy } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rekurencję powyższą można zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obliczając potęgę macierzy dostajemy:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 2^{n+2} + (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} - 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 3^n - 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

czyli $a_n = 3^n - 2^n + (-1)^n$.

Przykład 3

Wyznaczyć zwarty wzór ciągu a_n danego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rekurencję tę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Stosując wielokrotnie powyższy wzór otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wyznaczamy diagonalizację macierzy:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Skąd

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+1} - 3^{n+1} \\ 3 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

czyli $a_n = 3 \cdot 2^n - 3^n$. Zwróćmy uwagę, że powyższy algorytm dla dowolnych wartości a_0 i a_1 prowadzi do wzoru postaci $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$.

Przykład 4

Wyznaczyć zwarty wzór ciągu b_n danego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_1 = 8 \\ b_{n+1} = 4b_n - 4b_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rekurencję tę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Stosując wielokrotnie powyższy wzór otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tym razem macierz nie jest diagonalizowalna, ale możemy wyznaczyć jej postać Jordana:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Skąd

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+4) \cdot 2^{n+1} \\ (n+3) \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

czyli $b_n = (n+3) \cdot 2^n$. Zwróćmy uwagę, że powyższy algorytm dla dowolnych wartości b_0 i b_1 prowadzi do wzoru postaci $b_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n2^n$.

Przykład 5

Wyznaczyć zwarty wzór ciągu c_n danego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} c_0 = 2 \\ c_1 = 5 \\ c_2 = 15 \\ c_{n+1} = 5c_n - 8c_{n-1} + 4c_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rekurencję tę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \end{pmatrix}$$

Stosując wielokrotnie powyższy wzór otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz nie jest diagonalizowalna, ale możemy wyznaczyć jej postać Jordana:

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 0 & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Skąd

$$\begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \\ 0 & 2^n & \\ & & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2n+3)\cdot 2^{n+2}+3 \\ (2n+1)\cdot 2^{n+1}+3 \\ (2n-1)\cdot 2^n+3 \end{pmatrix}$$

czyli $c_n = (2n-1)\cdot 2^n + 3$. Zwróćmy uwagę, że powyższy algorytm dla dowolnych wartości c_0, c_1 i c_2 prowadzi do wzoru postaci $c_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n2^n + \gamma \cdot 1^n$.

Przykład 6

Wyznaczyć zwarty wzór ciągu d_n danego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} d_0 = 2 \\ d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_{n+1} = 6d_n - 12d_{n-1} + 8d_{n-2}, \ \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rekurencję tę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ d_n \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \end{pmatrix}$$

Stosując wielokrotnie powyższy wzór otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz nie jest diagonalizowalna, ale możemy wyznaczyć jej postać Jordana:

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Skąd

$$\begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n^2+n)\cdot 2^{n+2} \\ (n^2-n)\cdot 2^{n+1} \\ (n^2-3n+2)\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

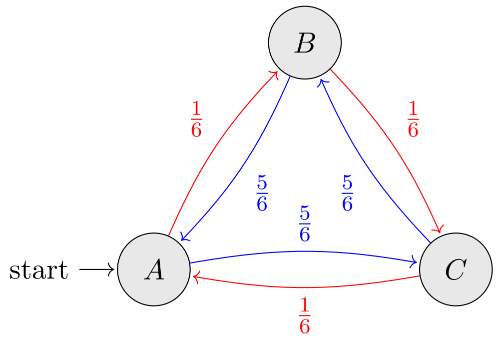
czyli $d_n = (n^2 - 3n + 2)\cdot 2^n$. Zwróćmy uwagę, że powyższy algorytm dla dowolnych wartości d_0, d_1 i d_2 prowadzi do wzoru postaci $d_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n2^n + \gamma \cdot n^2 2^n$.

Kolejne dwa przykłady to zadania z rachunku prawdopodobieństwa, które prowadzą do układu rekurencji liniowych, których rozwiązanie wymaga potęgowania macierzy. Pojawiające się w rozwiązaniach schematy nazywamy *łańcuchami Markowa* albo *procesami Markowa z czasem dyskretnym.*

Przykład 7

Plansza do jednoosobowej gry składa się z trzech pól: A, B, C położonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Dysponujemy jednym pionkiem, który początkowo jest ustawiony na polu A. Każdy ruch polega na wykonaniu rzutu kostką i przesunięciu pionka o jedno pole

w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy wypadnie 6, a w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdy wypadnie inny wynik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po wykonaniu 10 ruchów pionek znajdzie się znów na polu A?
Rozwiązanie. Powyższą sytuację można zobrazować na następującym diagramie:



gdzie każdy ruch oznaczony jest strzałką opisaną prawdopodobieństwem jego wykonania. Niech a_n, b_n i c_n oznaczają prawdopodobieństwa znalezienia się po n ruchach, odpowiednio, na polu A, B i C. Wówczas:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}c_n \\ c_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \end{cases}$$

co można zapisać w postaci wektorowej:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Szukane prawdopodobieństwo a_{10} można wyliczyć przy pomocy potęgowania macierzy:

$$\begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \\ c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.304 \\ 0.378 \\ 0.319 \end{pmatrix}$$

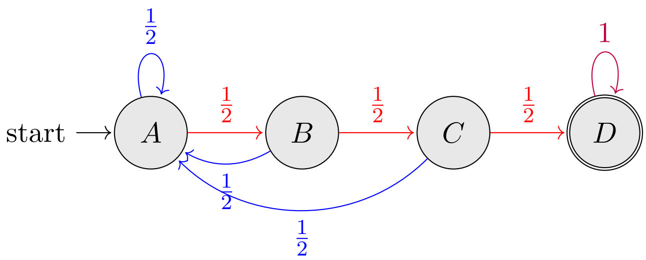
Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi $a_{10} \approx 30.4\%$.

Przykład 8

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonując 20 rzutów monetą wyrzucimy (przynajmniej raz) 3 orły pod rząd?
Rozwiązanie. Po każdym rzucie monetą znajdujemy się w jednej z następujących sytuacji (które możemy zobrazować jako pola na planszy do jednoosobowej gry):

(A) w ostatnim rzucie wypadła reszka (lub nie rzuciliśmy jeszcze ani razu),
(B) w ostatnim rzucie wypadł orzeł, a w przedostatnim – reszka,
(C) w ostatnich dwóch rzutach wypadły orły, a przed nimi – reszka,
(D) wyrzuciliśmy już (kiedykolwiek) trzy orły pod rząd.

Na początku (przed wykonaniem pierwszego rzutu) znajdujemy się na polu A, naszym celem jest dotarcie na pole D, a każdy rzut przenosi nas zgodnie z niebieską strzałką (jeśli wypadnie reszka) lub czerwoną strzałką (jeśli wypadnie orzeł), za wyjątkiem pola D (na którym pozostajemy niezależnie od wyniku rzutu):



Oznaczmy przez a_n, b_n, c_n, d_n prawdopodobieństwa znalezienia się po n rzutach, odpowiednio, na polu A, B, C, D. Wówczas:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + d_n \end{cases}$$

co można zapisać w postaci wektorowej:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

Szukane prawdopodobieństwo d_{20} można wyliczyć przy pomocy potęgowania macierzy:

$$\begin{pmatrix} a_{20} \\ b_{20} \\ c_{20} \\ d_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.116 \\ 0.063 \\ 0.034 \\ 0.787 \end{pmatrix}$$

($a_0 = 1$ oraz $b_0 = c_0 = d_0 = 0$, gdyż przed wykonaniem pierwszego rzutu znajdujemy się na polu A). Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi $d_{20} \approx 78.7\%$.

Macierze, które pojawiają się w powyższych dwóch przykładach to tzw. *(lewe) macierze stochastyczne*. Zauważmy, że takie macierze mają wyrazy nieujemne (wyrazy oznaczają prawdopodobieństwa przejścia), zaś suma wyrazów w każdej kolumnie wynosi 1 (jest to łączne prawdopodobieństwo „wyjścia” z ustalonego stanu).

Ostatni przykład zastosowań diagonalizacji macierzy (oraz twierdzenia Jordana) dotyczy rozwiązywania układów liniowych równań różniczkowych. Zaczniemy od przypomnienia następującego faktu z analizy matematycznej:

Fakt 3.33: Szereg Taylora dla e^x

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Nazwiązując do tego faktu zdefiniujemy eksponens macierzy:

Definicja 3.34: Eksponens macierzy

Eksponensem macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (oznaczanym $\exp A$ lub e^A) nazywamy następującą macierz:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Przykład 9

Obliczyć e^A oraz e^B dla następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n-1}}{n!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Fakt 3.35: Eksponens macierzy

Jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ oraz $A = PJP^{-1}$, gdzie $P, J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, to:

$$e^A = e^{PJP^{-1}} = P \cdot e^J \cdot P^{-1}$$

Dowód.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (PJP^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PJ^nP^{-1} = P \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n \right) \cdot P^{-1} = P \cdot e^J \cdot P^{-1}$$

□

Przykład 10

Wyznaczyć eksponens następujących macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 3.35 wystarczy zdiagonalizować macierz (lub, w przypadku macierzy niediagonalizowalnych, sprowadzić do postaci Jordana), a następnie wyznaczyć eksponens dla macierzy diagonalnej (lub macierzy Jordana). Macierz A diagonalizuje się w następujący sposób:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

stąd, korzystając z wyliczeń z Przykładu 9:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^3 - e^2 & e^2 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^2 & 2e^2 - e^3 \end{pmatrix}$$

Macierz B można zapisać w postaci Jordana:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

stąd, korzystając z wyliczeń z Przykładu 9:

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dla zainteresowanych...

Pojęcie eksponensa macierzy gra istotną rolę przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. Najprostsze równanie różniczkowe to równanie postaci:

$$f'(x) = af(x)$$

a jego rozwiązanie to (nietrudno zgadnąć) $f(x) = e^{ax} \cdot C$ (gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą). W podobny sposób, przy pomocy eksponensa macierzy, rozwiązujemy liniowe układy równań różniczkowych. Rozważmy układ równań różniczkowych z niewiadomymi f i g:

$$\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + g(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

Układ (3.15) można zapisać w postaci wektorowej:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

gdzie pochodną wektora obliczamy dla każdej współrzędnej z osobna. Wówczas rozwiązanie dane jest wzorem:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = e^{x \cdot A} \cdot C \text{ dla } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie C jest dowolnym wektorem z $\mathbb{R}^2$ (tak, by powyższe mnożenie miało sens). Diagonalizując macierz xA otrzymujemy:

$$xA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

skąd, zgodnie z Faktem 3.35, dostajemy:

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{3x} - e^{2x} & e^{2x} - e^{3x} \\ 2e^{3x} - 2e^{2x} & 2e^{2x} - e^{3x} \end{pmatrix}$$

czyli, przyjmując $C = \binom{\alpha}{\beta}$:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = e^{xA} \cdot C = \begin{pmatrix} \alpha(2e^{3x} - e^{2x}) + \beta(e^{2x} - e^{3x}) \\ \alpha(2e^{3x} - 2e^{2x}) + \beta(2e^{2x} - e^{3x}) \end{pmatrix}$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określone funkcje f i g spełniają układ (3.15).

Rozdział 4

Przestrzeń euklidesowa

4.1 Iloczyn skalarny

W poprzednich rozdziałach nie pojawiło się żadne z pojęć: *długość*, *odległość*, *kąt*, *prostopadłość*, *rzut prostokątny*. Żadnego z tych pojęć nie da się zdefiniować w przestrzeni liniowej, dopóki nie zostanie ona „wzbogacona” o kolejną operację – *iloczyn skalarny*. Nowa struktura („rozszerzona” przestrzeń liniowa) zwana będzie *przestrzenią euklidesową*.

Definicja 4.1: Przestrzeń euklidesowa

Przestrzenią euklidesową nazywamy (rzeczywistą) przestrzeń liniową V z dodatkową operacją zwaną *iloczynem skalarnym*, przypisującą (uporządkowanej) parze wektorów (u, v) liczbę $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ tak, że spełnione są następujące warunki:

S1 *symetryczność*, tzn. dla dowolnych $u, v \in V$ zachodzi warunek:

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

S2 *dwuliniowość* (czyli liniowość względem każdej współrzędnej), tzn. dla dowolnych $u, v, w \in V$ oraz dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzą warunki:

$$\begin{array}{ccc} \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle & \text{oraz} & \langle tu, v\rangle = t\langle u, v\rangle \\ \langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle & \text{oraz} & \langle u, tv\rangle = t\langle u, v\rangle \end{array}$$

S3 *dodatnia określoność*, tzn. dla dowolnego $v \in V$ zachodzi warunek:

$$\langle v, v\rangle \geq 0, \text{ przy czym } \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$$

Przykład 1 (standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$)

Sprawdzić, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z dodatkową operacją:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \tag{4.1}$$

(zwaną *standardowym iloczynem skalarnym na* $\mathbb{R}^n$) jest przestrzenią euklidesową.
Rozwiązanie. Zamiana x na y oraz y na x nie zmienia powyższego wzoru (symetryczność). Jeśli potraktujemy $y_1, \ldots, y_n$ jako parametry, to otrzymamy liniową funkcję zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ (liniowość względem pierwszej współrzędnej). Podobnie otrzymujemy liniowość względem drugiej współrzędnej. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

przy czym równość zachodzi jedynie dla $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (dodatnia określoność).

Przykład 2 (niestandardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$)
Sprawdzić, że operacja na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zdefiniowana następująco:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

jest iloczynem skalarnym (i tym samym wyznacza na $\mathbb{R}^2$ strukturę przestrzeni euklidesowej).
Rozwiązanie. Symetryczność i dwuliniowość sprawdzamy jak w Przykładzie 1. Dodatnia określoność wynika z tego, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$$

przy czym równość zachodzi jedynie gdy $x_1 + x_2 = x_2 = 0$, czyli $x_1 = x_2 = 0$.

Przykład 3 (niestandardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$)
Zdefiniowana na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dwuargumentowa funkcja:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_iy_j \tag{4.2}$$

inaczej zapisywana jako:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^TAY$$

jest dwuliniowa dla dowolnej macierzy A (dowolnych a_{ij}), a symetryczna dla symetrycznej macierzy A (gdy $a_{ij} = a_{ji}$ dla dowolnych i, j). Funkcja (4.2) jest więc iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$ dla dowolnej symetrycznej dodatnio określonej (spełniającej warunek (S3)) macierzy A. Metodę weryfikowania dodatniej określoności macierzy poznamy w Rozdziale 4.2.

Przykład 4
Sprawdzić, że funkcja:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$.
Rozwiązanie. Symetryczność jest oczywista. Addytywność względem pierwszej współrzędnej wynika z własności całki:

$$\langle P + P', Q \rangle = \int_0^1 (P(x) + P'(x))Q(x)dx = \int_0^1 P(x)Q(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)dx = \langle P, Q \rangle + \langle P', Q \rangle$$

Podobnie dowodzimy addytywności względem drugiej współrzędnej oraz jednorodności względem każdej współrzędnej. Dla sprawdzenia dodatniej określoności zauważmy, że:

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(x)dx \geq 0$$

gdyż całka z nieujemnej funkcji jest nieujemna. Powyższa całka jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy całkujemy funkcję zerową, tzn. $P(x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$, co oznacza, że P jest wielomianem zerowym (tylko wielomian zerowy przyjmuje wartość 0 w każdym punkcie przedziału $[0, 1]$).

Przykład 5
Sprawdzić, że funkcja:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$.
Rozwiązanie. Rozumowanie jest takie jak w Przykładzie 4.

Przykład 6
Sprawdzić, że funkcja:

$$\langle f, g\rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx$$

jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $C[a, b]$.
Rozwiązanie. Rozumowanie jest takie jak w Przykładzie 4 z tą różnicą, że w odróżnieniu od niezerowego wielomianu, niezerowa funkcja może przyjmować wartość 0 na pewnym przedziale. Dlatego należy osobno uzasadnić spełnienie warunku:

$$\langle f, f\rangle = 0 \quad\iff\quad f = 0$$

Dla funkcji ciągłej f równość $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = 0$ dla każdego $x \in [a, b]$. W przestrzeni $C[a, b]$ oznacza to, że f jest funkcją zerową.

Przykład 7
Sprawdzić, że funkcja:

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx$$

nie jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $C(\mathbb{R})$.
Rozwiązanie. Jedyny warunek iloczynu skalarnego, który nie jest spełniony, to warunek

$$\langle f, f\rangle = 0 \quad\iff\quad f = 0$$

Nietrudno wskazać ciągłą funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która na całym przedziale $[0, 1]$ przyjmuje wartość 0, a poza tym przedziałem wartości niezerowe. Wówczas $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$, ale $f \neq 0$.

Iloczyn skalarny pozwala zdefiniować takie pojęcia jak *długość wektora*, *odległość punktów*, i *kąt między wektorami* (w tym *prostopadłość (ortogonalność) wektorów*).

Definicja 4.2: Długość wektora

Dana jest przestrzeń euklidesowa V. *Długością* wektora $v \in V$ nazywamy nieujemną liczbę określoną następującym wzorem:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Odległością punktów $u, v \in V$ nazywamy długość wektora $u - v$, tzn.

$$d(v, u) = |u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

Zwróćmy uwagę, że długość wektora jest dobrze zdefiniowana dzięki własności dodatniej określoności iloczynu skalarnego oraz że jedynym wektorem długości 0 jest wektor zerowy. Zauważmy też, że Definicja 4.2 jest motywowana własnościami iloczynu skalarnego w przestrzeniach $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Podobnie, motywacją dla definicji miary kąta między (niezerowymi) wektorami dowolnej przestrzeni euklidesowej jest następujący wzór dotyczący wektorów w przestrzeniach $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\cos\angle(u,v)\cdot|u|\cdot|v| = \langle u,v\rangle \tag{4.3}$$

Wzór (4.3) można przyjąć za definicję miary kąta między wektorami dowolnej przestrzeni euklidesowej (co zrobimy w Definicji 4.4), o ile sprawdzimy, że wartość $\cos\angle(u,v)$ wyliczona z tego wzoru należy do przedziału $[-1,1]$ dla dowolnych (niezerowych) wektorów u i v. Do tego potrzebny jest następujący fakt:

Fakt 4.3: Nierówność Schwarza

Dla dowolnych wektorów $u,v\in V$ przestrzeni euklidesowej V zachodzi warunek:

$$|\langle u,v\rangle| \le |u|\cdot|v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe.

Dowód. Iloczyn skalarny jest dodatnio określony, więc dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ zachodzi:

$$0 \le |u-tv|^2 = \langle u-tv, u-tv\rangle = \langle u,u\rangle - 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle \tag{4.4}$$

Skoro funkcja kwadratowa $f(t) = \langle u,u\rangle - 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne, to jej wyróżnik spełnia warunek $\Delta \le 0$, czyli:

$$4\langle u,v\rangle^2 - 4\langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle \le 0$$

co po przekształceniu przyjmuje postać:

$$\langle u,v\rangle^2 \le \langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$$

a więc

$$|\langle u,v\rangle| \le |u|\cdot|v|$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$, czyli funkcja $f(t) = |u-tv|^2$ ma miejsce zerowe. To jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $u = tv$ dla pewnego $t\in\mathbb{R}$, czyli gdy wektory u i v są współliniowe. □

Definicja 4.4: Kąt między wektorami

Dana jest przestrzeń euklidesowa V. *Kątem* między niezerowymi wektorami $u,v\in V$ nazywamy liczbę θ z przedziału $[0,\pi]$ daną wzorem:

$$\theta = \arccos\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\cdot|v|}$$

Wektory u i v nazywamy *ortogonalnymi* (lub *prostopadłymi*) jeśli $\theta = \frac{\pi}{2}$, czyli $\langle u,v\rangle = 0$.

Nierówność Schwarza zapewnia, że jest to poprawna definicja, tzn. liczba $\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\cdot|v|}$ należy do przedziału $[-1,1]$. Drugim wnioskiem z nierówności Schwarza jest nierówność trójkąta:

Fakt 4.5: Nierówność trójkąta

Dla dowolnych wektorów $u,v\in V$ przestrzeni euklidesowej V zachodzi:

$$|u+v| \le |u|+|v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $u = tv$ lub $v = tu$ dla pewnego $t\ge 0$.

Dowód. Z dwuliniowości iloczynu skalarnego oraz nierówności Schwarza otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2 \\ &\leq |u|^2 + 2|u|\cdot|v| + |v|^2 = (|u|+|v|)^2\end{aligned}$$

skąd

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

□

Przykład 8

Wyznacz długości boków AB i AC oraz miarę kąta przy wierzchołku A trójkąta o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ (ze standardowym iloczynem skalarnym).

Rozwiązanie. Boki trójkąta wyznaczone są przez wektory:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Długości tych boków to:

$$\begin{aligned}|AB| =& \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{0^2+1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \\ |AC| =& \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{1^2+3^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{12}\end{aligned}$$

Miara kąta przy wierzchołku A wynosi:

$$\arccos \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \arccos \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 3 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Przykład 9

W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym danym wzorem $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ dane są wektory $P(x) = x$ oraz $Q(x) = x^2 - 1$. Wyznacz długości tych wektorów oraz sprawdź, czy są one prostopadłe.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}|P| =& \sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ |Q| =& \sqrt{\langle Q, Q\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2-1)^2 dx} = \frac{2\sqrt{30}}{15}\end{aligned}$$

Wektory te **nie są** prostopadłe, gdyż:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 x(x^2-1)dx = -\frac{1}{4} \neq 0$$

Przykład 10

Rozważmy te same wektory i te same pytania co w Przykładzie 9, ale tym razem w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym danym wzorem $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

Rozwiązanie.

$$|P| = \sqrt{\langle P, P\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$|Q| = \sqrt{\langle Q, Q\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2-1)^2 dx} = \frac{4\sqrt{30}}{15}$$

Wektory te **są** prostopadłe, gdyż:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} x(x^2-1)dx = 0$$

Przykład 11 (szeregi Fouriera)

W przestrzeni euklidesowej $C[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

dane są wektory $f_n(x) = \cos nx$, $n = 0, 1, \ldots$ (w tym $f_0(x) = 1$) oraz $g_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Wyznacz długości tych wektorów oraz uzasadnij, że są one parami prostopadłe.

Rozwiązanie. Dla $n > 0$ mamy:

$$|f_n| = \sqrt{\langle \cos nx, \cos nx\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2nx)dx} = \sqrt{\pi}$$

$$|g_n| = \sqrt{\langle \sin nx, \sin nx\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2nx)dx} = \sqrt{\pi}$$

Natomiast dla $n = 0$:

$$|f_0| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 dx} = \sqrt{2\pi}$$

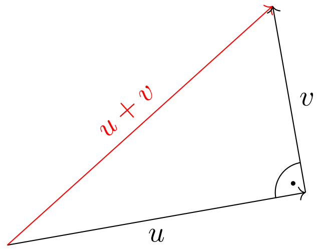
Prostopadłość (ortogonalność) wynika z następującego rachunku (gdzie w pierwszych dwóch wierszach zakładamy dodatkowo, że $n \neq m$):

$$\langle f_n, f_m\rangle = \sqrt{\langle \cos nx, \cos mx\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)dx} = 0$$

$$\langle g_n, g_m\rangle = \sqrt{\langle \sin nx, \sin mx\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)dx} = 0$$

$$\langle f_n, g_m\rangle = \sqrt{\langle \cos nx, \sin mx\rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\sin(n+m)x - \sin(n-m)x)dx} = 0$$

W dowolnej przestrzeni euklidesowej prawdziwe jest również Twierdzenia Pitagorasa. Jego sformułowanie jest motywowane następującym rysunkiem z $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:



Fakt 4.6: Twierdzenie Pitagorasa

W przestrzeni euklidesowej V dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ takich, że $u \perp v$, zachodzi:

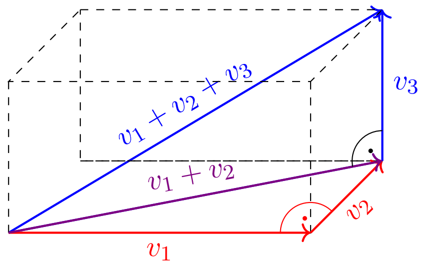
$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

Dowód. Prostopadłość wektorów u i v oznacza, że $\langle u, v\rangle = 0$, skąd otrzymujemy:

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = |u|^2 + |v|^2$$

□

Twierdzenie to ma wielowymiarowe uogólnienie, motywowane wzorem na długość przekątnej prostopadłościanu:



$$|v_1+v_2+v_3|^2 = |v_1+v_2|^2 + |v_3|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$$

Fakt 4.7: Uogólnione Twierdzenie Pitagorasa

W przestrzeni euklidesowej V dla dowolnych **parami prostopadłych** wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ zachodzi:

$$|v_1 + \ldots + v_n|^2 = |v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2$$

Dowód. Z dwuliniowości iloczynu skalarnego wektory $v_1 + \ldots + v_k$ oraz v_{k+1} są prostopadłe dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

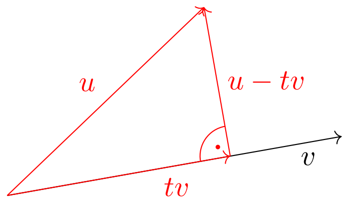
$$\langle v_1 + \ldots + v_k, v_{k+1}\rangle = \langle v_1, v_{k+1}\rangle + \ldots + \langle v_k, v_{k+1}\rangle = 0 + \ldots + 0 = 0$$

Wobec tego, z Twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
|v_1 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n|^2 &= |v_1 + \ldots + v_{n-2} + v_{n-1}|^2 + |v_n|^2 \\
&= |v_1 + \ldots + v_{n-2}|^2 + |v_{n-1}|^2 + |v_n|^2 \\
&\ldots \\
&= |v_1|^2 + \ldots + |v_{n-2}|^2 + |v_{n-1}|^2 + |v_n|^2
\end{aligned}$$

□

Dysponując pojęciem ortogonalności (prostopadłości), możemy zdefiniować rzut ortogonalny (prostopadły) wektora na wektor. Definicja poniższa motywowana jest następującym rysunkiem dotyczącym przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$:



Definicja 4.8: Rzut na wektor

Dana jest przestrzeń euklidesowa V. *Rzutem ortogonalnym (prostopadłym)* wektora $u \in V$ na niezerowy wektor $v \in V$ (albo na podprzestrzeń $\text{Lin}\{v\} < V$) nazywamy taki wektor tv że $u - tv \perp v$. Rzut wektora u na wektor v oznaczamy $p_v(u)$.

Fakt 4.9: Rzut na wektor (podejście pierwsze)

Jeśli $v \in V$ jest niezerowym wektorem przestrzeni euklidesowej V, to dla każdego wektora $u \in V$ istnieje dokładnie jeden wektor $p_v(u)$ i dany jest on wzorem:

$$p_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \tag{4.5}$$

Ponadto przekształcenie $p_v : V \to V$ jest przekształceniem liniowym.

Dowód. Ponieważ $u - tv \perp v$, więc rzut $p_v(u) = tv$ wektora u na wektor v spełnia warunek:

$$0 = \langle u - tv, v\rangle = \langle u, v\rangle - t\langle v, v\rangle$$

skąd

$$t = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

co dowodzi (4.5). Addytywność przekształcenia p_v wynika z (4.5):

$$p_v(u + u') = \frac{\langle u + u', v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \frac{\langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v + \frac{\langle u', v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = p_v(u) + p_v(u')$$

Podobnie sprawdzamy jednorodność p_v, co łącznie dowodzi liniowości p_v. □

Fakt 4.10: Rzut na wektor (podejście drugie)

Dana jest przestrzeń euklidesowa V. Rzut wektora $u \in V$ na niezerowy wektor $v \in V$ to (jedyny) taki punkt podprzestrzeni $\text{Lin}\{v\} < V$, który jest najbliższy punktowi u.

Dowód. Dla ułatwienia rachunków, zamiast szukać minimimum odległości, będziemy szukać minimum kwadratu odległości:

$$(d(tv, u))^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle$$

Powyższa funkcja jest funkcją kwadratową zmiennej $t \in \mathbb{R}$ i ma dodatni współczynnik przy t^2, więc minimum przyjmuje w dokładnie jednym punkcie:

$$t = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Wobec tego minimum odległości realizuje (jako jedyny) punkt będący rzutem u na v:

$$tv = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v = p_v(u)$$

□

Wyznaczanie rzutu na dowolną podprzestrzeń jest bardziej skomplikowane. Opiszemy rzut na podprzestrzeń W jako sumę rzutów na wektory pewnej bazy przestrzeni W, ale baza ta musi mieć tę własność, że jej wektory są parami prostopadłe. Bazę taką nazywamy *bazą ortogonalną*.

Definicja 4.11: Baza ortogonalna

Bazę $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ przestrzeni euklidesowej nazywamy:

1) *ortogonalną*, jeśli wektory $b_1, \ldots, b_n$ są parami prostopadłe,
2) *ortonormalną*, jeśli wektory $b_1, \ldots, b_n$ są parami prostopadłe oraz każdy z nich ma długość 1.

Sprawdzenie, czy układ parami ortogonalnych wektorów stanowi bazę jest wyjątkowo proste dzięki następującej obserwacji:

Fakt 4.12: Liniowa niezależność wektorów ortogonalnych

Jeśli $v_1, \ldots, v_n \in V$ to parami ortogonalne niezerowe wektory przestrzeni euklidesowej V, to są one liniowo niezależne. W szczególności, jeśli $n = \dim V$, to stanowią one bazę V.

Dowód. Rozważmy zerującą się kombinację liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego oraz wzajemnej ortogonalności rozważanych wektorów otrzymujemy:

$$0 = \langle 0, v_1\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_1\rangle = \alpha_1\langle v_1, v_1\rangle + \cdots + \alpha_n\langle v_n, v_1\rangle = \alpha_1\langle v_1, v_1\rangle = \alpha_1|v_1|^2$$

Ponieważ v_1 jest niezerowy, więc $\alpha_1 = 0$. Podobnie dowodzimy, że $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, co świadczy o liniowej niezależności wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n$. □

Fakt 4.13: Istnienie bazy ortogonalnej

Każda skończenie wymiarowa przestrzeń eukldesowa V ma bazę ortogonalną. Co więcej, dowolny układ niezerowych parami ortogonalnych wektorów V można uzupełnić do bazy.

Dowód. Niech $b_1 \in V$ będzie dowolnym niezerowym wektorem. Jeśli $\dim V = 1$, to (b_1) jest bazą ortogonalną. Jeśli $\dim V \geq 2$, rozważmy przekształcenie liniowe $F_1 : V \to \mathbb{R}^1$ zdefiniowane wzorem:

$$F_1(v) = \langle v, b_1\rangle$$

Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim\ker F_1 = \dim V - \dim \mathrm{Im} F_1 \geq \dim V - \dim \mathbb{R}^1 \geq 1$$

czyli istnieje niezerowy wektor $b_2 \in \ker F_1$, tzn. $\langle b_2, b_1\rangle = 0$. Stąd (b_1, b_2) to układ liniowo niezależnych wektorów parami ortogonalnych, więc jeśli $\dim V = 2$ to stanowi on bazę V. Jeśli $\dim V \geq 3$, rozważmy przekształcenie liniowe $F_2 : V \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowane wzorem:

$$F_2(v) = \begin{pmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \langle v, b_2\rangle \end{pmatrix}$$

Z twierdzenia o indeksie:

$$\dim\ker F_2 = \dim V - \dim \mathrm{Im} F_2 \geq \dim V - \dim \mathbb{R}^2 \geq 1$$

czyli istnieje niezerowy wektor $b_3 \in \ker F_2$, tzn. $\langle b_3, b_2\rangle = \langle b_3, b_1\rangle = 0$. Stąd (b_1, b_2, b_3) to układ liniowo niezależnych wektorów parami ortogonalnych, więc jeśli $\dim V = 3$, to stanowi on bazę V. Jeśli $\dim V \geq 4$, kontynuujemy to postępowanie aż do uzyskania bazy przestrzeni V.
Zauważmy, że powyższe postępowanie można rozpocząć zamiast od pojedynczego niezerowego wektora b_1, od dowolnego układu niezerowych parami ortogonalnych wektorów V. To dowodzi drugiej części faktu. □

Definicja 4.14: Dopełnienie ortogonalne

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, zaś $W < V$ jej podprzestrzenią. Wówczas *dopełnieniem ortogonalnym* podprzestrzeni W nazywamy zbiór:

$$W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W \ \langle v, w\rangle = 0\}$$

Fakt 4.15: Dopełnienie ortogonalne

Niech V będzie dowolną skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś W jej podprzestrzenią. Wówczas $W^\perp$ jest podprzestrzenią V oraz

$$V = W \oplus W^\perp \tag{4.6}$$

Dowód. Dla ustalenia, że $W^\perp$ jest podprzestrzenią należy sprawdzić zamkniętość na dodawanie i na mnożenie przez skalary. Jeśli $v_1, v_2 \in W^\perp$, to dla każdego $w \in W$ zachodzi:

$$\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle = 0 + 0 = 0$$

czyli $v_1 + v_2 \in W^\perp$. Podobnie sprawdzamy zamkniętość na mnożenie przez skalary.
Dla dowodu (4.6), niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_k)$ będzie bazą ortogonalną W (która istnieje na mocy Faktu 4.13). Zgodnie z tym samym faktem bazę tę można rozszerzyć do bazy $(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ będącej bazą ortogonalną V. Wówczas dowolny element $v \in V$ przedstawia się jednoznacznie w postaci:

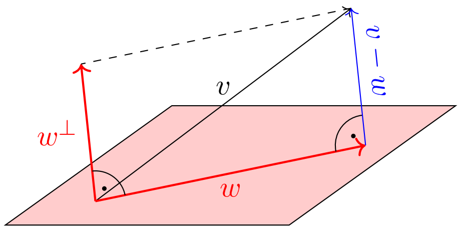
$$v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k + \alpha_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \alpha_n b_n$$

dla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, czyli przedstawia się jednoznacznie w postaci:

$$v = w + w^\perp, \qquad \text{gdzie} \qquad w \in W,\ w^\perp \in W^\perp$$

przyjmując $w = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k$ oraz $w^\perp = \alpha_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \alpha_n b_n$. To dowodzi (4.6). □

W Definicji 4.8 rozważaliśmy rzut ortogonalny na 1-wymiarową podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej. Kolejna definicja opisuje rzut ortogonalny na podprzestrzeń dowolnego wymiaru. Motywacją dla tej definicji jest obrazek związany z rzutem ortogonalnym na płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$:



Definicja 4.16: Rzut na podprzestrzeń

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś $W < V$ jej podprzestrzenią. *Rzutem ortogonalnym (prostopadłym)* wektora $v \in V$ na podprzestrzeń W nazywamy taki wektor $w \in W$, że $v - w \in W^{\perp}$. Rzut wektora v na podprzestrzeń W oznaczamy $p_W(v)$.

Fakt 4.17: Rzut na podprzestrzeń (podejście pierwsze)

Niech W będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V. Wówczas dla każdego wektora $v \in V$ istnieje jednoznaczny rozkład[1]:

$$v = w + w^{\perp}, \text{ gdzie } w \in W,\ w^{\perp} \in W^{\perp} \tag{4.7}$$

oraz $w = p_W(v)$. Ponadto przekształcenie $p_W : V \to V$ jest przekształceniem liniowym.

Dowód. Istnienie jednoznacznego rozkładu (4.7) wynika z Faktu 4.15. Przy takim przedstawieniu $P_W(v) = w$, bo $v - w = w^{\perp} \in W^{\perp}$.
Dla pokazania addytywności przekształcenia p_W rozważmy rozkład (4.7) dla dowolnych wektorów $v_1, v_2 \in V$:

$$v_1 = w_1 + w_1^{\perp} \qquad \text{oraz} \qquad v_2 = w_2 + w_2^{\perp}$$

Wówczas:

$$(v_1 + v_2) = (w_1 + w_2) + (w_1^{\perp} + w_2^{\perp})$$

co jest rozkładem (4.7) dla wektora $v_1 + v_2$ (gdyż $w_1 + w_2 \in W$ oraz $w_1^{\perp} + w_2^{\perp} \in W^{\perp}$, co jest konsekwencją tego, że W i $W^{\perp}$ są zamknięte na dodawanie). Stąd:

$$p_W(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = p_W(v_1) + p_W(v_2)$$

Podobnie sprawdzamy jednorodność p_W. □

Fakt 4.18: Rzut na podprzestrzeń (podejście drugie)

Jeśli $W < V$ jest podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V, zaś $v \in V$ dowolnym wektorem, to $p_W(v)$ jest punktem W najbliższym punktowi v.

Dowód. Niech $v = w + w^{\perp}$ będzie rozkładem (4.7). Dla dowolnego wektora $w' \in W$, wektory $w - w' \in W$ i $w^{\perp} \in W^{\perp}$ są prostopadłe, więc z Twierdzenia Pitagorasa:

$$|w^{\perp} + (w - w')|^2 = |w^{\perp}|^2 + |w - w'|^2$$

Wobec tego

$$\left(d(v, w')\right)^2 = |v - w'|^2 = |w^{\perp} + (w - w')|^2 = |w^{\perp}|^2 + |w - w'|^2 \geq |w^{\perp}|^2 = (d(v, w))^2$$

[1] W odróżnieniu od oznaczenia $W^{\perp}$, które wskazuje na przestrzeń jednoznacznie wyznaczoną przez przestrzeń W, oznaczenie $w^{\perp}$ należy traktować jakie samo oznaczenie jak w', w'', w_1, $\hat{w}$ itd.

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $w' = w = p_W(v)$. Oznacza to, że $w = p_W(v)$ to (jedyny) punkt podprzestrzeni W najbliższy punktowi v. $\square$

Fakt 4.19: Rzut na podprzestrzeń (podejście trzecie)

Niech V będzie przestrzenią euklidesową, $W < V$ jej podprzestrzenią, a $(b_1, \dots, b_k)$ bazą ortogonalną W. Wówczas dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi wzór:

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} p_{b_i}(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i \tag{4.8}$$

Jeśli, dodatkowo, baza $(b_1, \dots, b_k)$ jest ortonormalna, to wzór (4.8) przyjmuje postać:

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i \rangle b_i \tag{4.9}$$

Dowód. Zgodnie z Faktem 4.13 bazę ortogonalną $(b_1, \dots, b_k)$ przestrzeni W można rozszerzyć do bazy ortogonalnej $(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n)$ przestrzeni V. Wówczas dowolny wektor $v \in V$ przedstawia się w postaci:

$$v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k + \alpha_{k+1} b_{k+1} + \ldots + \alpha_n b_n \tag{4.10}$$

oraz zgodnie z Faktem 4.17:

$$p_W(v) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k$$

Ze wzoru (4.10) otrzymujemy dla $i = 1, \dots, n$:

$$p_{b_i}(v) = \frac{\langle v, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = \frac{\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\langle b_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = \alpha_i \frac{\langle b_i, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i = \alpha_i b_i$$

Wobec tego:

$$p_W(v) = p_{b_1}(v) + \ldots + p_{b_k}(v)$$

co kończy dowód wzoru (4.8). Wzór (4.9) jest szczególnym przypadkiem (4.8) w sytuacji, gdy $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ dla $i = 1, \dots, k$. $\square$

Przykład 12

W przestrzeni euklidesowej $C[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

dane są wektory $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \dots$, $\cos nx$, $\sin nx$. Uzasadnić, że wektory te stanowią bazę ortonormalną pewnej podprzestrzeni $W < C[0, 2\pi]$.

Rozwiązanie. Rozważany iloczyn skalarny różni się od iloczynu rozważanego w Przykładzie 11 jedynie współczynnikiem $\frac{1}{\pi}$. Wobec tego wszystkie iloczyny skalarne w niniejszym przykładzie będą π razy mniejsze od iloczynów skalarnych z Przykładu 11, w szczególności wszystkie długości będą $\sqrt{\pi}$ razy mniejsze. Wobec tego wektory 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \dots$, $\cos nx$, $\sin nx$ są parami ortogonalne i wszystkie za wyjątkiem pierwszego mają długości 1, natomiast długość wektora $f_0(x) = 1$ wynosi $\sqrt{2}$. Stąd po przeskalowaniu pierwszego wektora otrzymujemy ortonormalny układ wektorów, czyli bazę ortonormalną pewnej (skończenie wymiarowej) podprzestrzeni[2] $W < C[0, 2\pi]$.

Przykład 13 (Szeregi Fouriera)

W przestrzeni euklidesowej $C[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $f \in C[0, 2\pi]$ na podprzestrzeń

$$W = \mathrm{Lin}\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z Przykładem 12, wektory $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x, \dots, \cos nx$, $\sin nx$ stanowią bazę ortonormalną W, więc dla dowolnego $f \in C[0, 2\pi]$, zgodnie ze wzorem (4.9):

$$p_W(f)(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 =& \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} f(x)dx \\ a_k =& \langle f, \cos kx\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ b_k =& \langle f, \sin kx\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Jest to dobrze znany z analizy matematycznej wzór na rozwinięcie funkcji f w tzw. szereg Fouriera.

Wniosek 4.20: Współrzędne wektora w bazie ortonormalnej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, a $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jej bazą **ortonormalną**. Wówczas:

1) jeśli $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, to $|v| = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}$;
2) jeśli $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ oraz $u = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n$, to $\langle v, u\rangle = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.

Dowód. Ponieważ

$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1, \text{ gdy } i = j \\ 0, \text{ gdy } i \neq j \end{cases}$$

więc

$$\langle v, u\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

co dowodzi punktu (2). Punkt (1) jest szczególnym przypadkiem punktu (2), gdyż $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. □

[2]Nieskończony układ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ nie stanowi bazy przestrzeni $C[0, 2\pi]$, gdyż wymiar tej przestrzeni jest nieprzeliczalny. Rozważania dotyczące baz przestrzeni nieskończenie wymiarowych wykraczają poza zakres niniejszego skryptu.

Fakt 4.19 powoduje zapotrzebowanie na konstruowanie baz ortogonalnych (lub nawet ortonormalnych). Standardowym narzędziem do konstruowania takich baz jest ortogonalizacja Grama–Schmidta.

Fakt 4.21: Ortogonalizacja Grama–Schmidta

Dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej V poniższa procedura (zwana *ortogonalizacją Grama–Schmidta*) prowadzi do bazy ortonormalnej:

1) wyznaczamy **dowolną** bazę $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V;
2) wektory $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ wyznaczone według wzoru:

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_2 = b_2 - p_{b'_1}(b_2) \\ b'_3 = b_3 - p_{b'_1}(b_3) - p_{b'_2}(b_3) \\ \vdots \\ b'_n = b_n - p_{b'_1}(b_n) - p_{b'_2}(b_n) - \dots - p_{b'_{n-1}}(b_n) \end{cases} \tag{4.11}$$

czyli (rozwijając wzór na rzut wektora na wektor):

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 \\ b'_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b_3, b'_2 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2 \\ \vdots \\ b'_n = b_n - \frac{\langle b_n, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b_n, b'_2 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2 - \dots - \frac{\langle b_n, b'_{n-1} \rangle}{\langle b'_{n-1}, b'_{n-1} \rangle} b'_{n-1} \end{cases} \tag{4.12}$$

stanowią bazę **ortogonalną** przestrzeni V;
3) wektory $\mathcal{B}'' = (b''_1, \dots, b''_n)$ wyznaczone według wzoru:

$$b''_1 = \frac{b'_1}{|b'_1|} \qquad b''_2 = \frac{b'_2}{|b'_2|} \qquad \dots \qquad b''_n = \frac{b'_n}{|b'_n|}$$

stanowią bazę **ortonormalną** przestrzeni V.

Dowód. Z (4.12) wynika, że każdy z wektorów $b_1, \dots, b_n$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $b'_1, \dots, b'_n$, co wobec $V = \mathrm{Lin}\{b_1, \dots, b_n\}$ oznacza, że $\mathcal{B}'$ jest n-elementowym zbiorem generującym przestrzeń V wymiaru n. Stąd $\mathcal{B}'$ jest bazą V. Pozostaje pokazać, że jest to baza ortogonalna.

Pokażemy przez indukcję względem k, że wektory $b'_1, \dots, b'_k$ są parami ortogonalne. Jest to oczywiste dla $k = 1$. Jeśli natomiast wektory $b'_1, \dots, b'_k$ są parami ortogonalne, to stanowią bazę przestrzeni:

$$W_k = \mathrm{Lin}\{b'_1, \dots, b'_k\}$$

Wówczas, zgodnie z (4.11) oraz Faktem 4.19:

$$b_{k+1} = b'_{k+1} + p_{W_k}(b_{k+1})$$

czyli

$$b'_{k+1} \in W_k^{\perp}$$

w szczególności $b'_{k+1} \perp b'_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$, co oznacza, że wektory $b'_1, \dots, b'_k, b'_{k+1}$ są parami ortogonalne. Na mocy zasady indukcji matematycznej $\mathcal{B}'$ jest bazą ortogonalną.

Wektory $b''_1, \ldots, b''_n$ to znormalizowane wektory bazy ortogonalnej $\mathcal{B}'$, więc baza $\mathcal{B}''$ jest bazą ortonormalną.

$\square$

Przykład 14

W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$. Wyznaczyć:

(a) bazę ortogonalną przestrzeni W.

(b) bazę ortonormalną przestrzeni W.

Rozwiązanie. Zaczynamy od wyznaczenia jakiejkolwiek bazy, np.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zgodnie z metodą Grama-Schmidta wyznaczamy:

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b'_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b'_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b_3, b'_2 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{cases}$$

otrzymując w ten sposób bazę ortogonalną. Dla wyznaczenia bazy ortonormalnej, normalizujemy otrzymane wektory:

$$b''_1 = \frac{b'_1}{|b'_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b''_2 = \frac{b'_2}{|b'_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b''_3 = \frac{b'_3}{|b'_3|} = \sqrt{\frac{6}{7}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Przykład 15

Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Wyznaczyć:

(a) bazę ortogonalną tej przestrzeni,

(b) bazę ortonormalną tej przestrzeni.

Rozwiązanie. Zaczynamy od wyznaczenia jakiejkolwiek bazy, np. $b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = x^2$. Zgodnie z metodą Grama-Schmidta wyznaczamy:

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 = 1 \\ b'_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 dx}{\int_0^1 1^2 dx} \cdot 1 = x - \frac{1}{2} \\ b'_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, b'_1 \rangle}{\langle b'_1, b'_1 \rangle} b'_1 - \frac{\langle b_3, b'_2 \rangle}{\langle b'_2, b'_2 \rangle} b'_2 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_0^1 1^2 dx} \cdot 1 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot (x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx} \cdot (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{cases}$$

otrzymując w ten sposób bazę ortogonalną. Dla wyznaczenia bazy ortonormalnej, normalizujemy otrzymane wektory:

$$\begin{cases} b_1'' = \frac{b_1'}{|b_1'|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1^2 dx}} \cdot 1 = 1 \\ b_2'' = \frac{b_2'}{|b_2'|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}} \cdot (x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3} \cdot (2x - 1) \\ b_3'' = \frac{b_3'}{|b_3'|} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 dx}} \cdot (x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5} \cdot (6x^2 - 6x + 1) \end{cases}$$

Dla zainteresowanych...

Załóżmy, że badamy pewną cechę opisywaną liczbami rzeczywistymi[a] (np. wzrost, poziom hemoglobiny we krwi, poziom IQ) w dużej populacji. Przyjmijmy, że średnia wartość badanej cechy w całej populacji wynosi μ, zaś odchylenie standardowe wartości tej cechy wynosi σ, przy czym nie znamy wartości μ ani σ. Próbujemy oszacować wartości obu tych parametrów poprzez wylosowanie n osobników z populacji i ustalenie wartości $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ badanej cechy dla tych osobników. Innymi słowy, losujemy wektor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Średnią μ szacujemy przy pomocy średniej próbkowej:

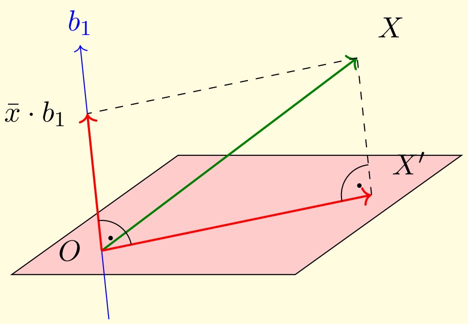
$$\mu \approx \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \bar{x}$$

co możemy opisać jako rzutowanie wektora X na wektor $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$p_{b_1}(X) = \frac{\langle X, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

Oznaczmy $W = \mathrm{Lin}\{b_1\}$. Wówczas $W^\perp$ jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, a rzut wektora X na $W^\perp$ służy do szacowania odchylenia standardowego σ:

$$|p_{W^\perp}(X)|^2 = |X - p_W(X)|^2 = \left| \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix} \right|^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$



Wektor b_1 możemy rozszerzyć do bazy ortogonalnej $(b_1, \ldots, b_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Wobec tego:

$$p_{W^\perp}(X) = p_{b_2}(X) + \cdots + p_{b_n}(X)$$

Zgodnie z Twierdzeniem Pitagorasa, z uwagi na ortogonalność bazy:

$$|p_{W^\perp}(X)|^2 = |p_{b_2}(X)|^2 + \cdots + |p_{b_n}(X)|^2$$

Przy wykorzystaniu wiedzy z zakresu rachunku prawdopodobieństwa można wykazać, że średni kwadrat długości rzutu wektora X na dowolny wektor prostopadły do b_1 wynosi σ^2. Stąd otrzymujemy szacowanie:

$$|p_{W^\perp}(X)|^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \approx (n-1)\sigma^2$$

czyli

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

(nazywane *próbkowym odchyleniem standardowym*). Zwróćmy uwagę, iż (wbrew oczekiwaniom) w powyższym wzorze mianownik ułamka wynosi $n-1$, nie zaś n.

[a] Powyższe rozważania dotyczą wyłącznie zmiennych losowych o tzw. *rozkładzie normalnym*.

4.2 Forma kwadratowa

W niniejszym rozdziale zajmiemy się (nietypowo dla algebry liniowej) funkcjami kwadratowymi, a dokładnie wielomianami kwadratowymi wielu zmiennych. Zaczniemy od zdefiniowania wielomianu wielu zmiennych.

Definicja 4.22: Wielomian wielu zmiennych

(Rzeczywistym) wielomianem zmiennnych $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy funkcję $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie $P(x_1, \ldots, x_n)$ jest kombinacją liniową *jednomianów*, tzn. funkcji postaci:

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}, \text{ gdzie } k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \tag{4.13}$$

Stopniem jednomianu (4.13) nazywamy liczbę $k_1 + \cdots + k_n$, a stopniem wielomianu P nazywamy najwyższy ze stopni tworzących go jednomianów.

Przykład 1

Ustalić stopnie każdego z następujących wielomianów wielu zmiennych:

$$P(x,y,z) = -2x^3+3x^2yz-5x^2z^3, \quad Q(x,y) = x^4+7x^3y^2-y^3, \quad R(x,y,z,t) = 2xyzt-x-y-z$$

Rozwiązanie. Wielomian P ma stopień 5 (jednomian najwyższego stopnia to $-5x^2z^3$). Wielomian Q ma stopień 5 (jednomian najwyższego stopnia to $7x^3y^2$). Wielomian R ma stopień 4 (jednomian najwyższego stopnia to $2xyzt$).

Przykład 2

Ogólna postać wielomianu dwóch zmiennych stopnia pierwszego to:

$$P(x,y) = ax + by + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

gdzie przynajmniej jedna z liczb a i b jest niezerowa. Ogólna postać wielomianu dwóch zmiennych stopnia drugiego to:

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

gdzie przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest niezerowa.

Definicja 4.23: Wielomian jednorodny

Wielomian wielu zmiennych nazywamy *wielomianem jednorodnym*, jeśli jest sumą jednomianów tego samego stopnia.

Przykład 3

Ogólna postać **jednorodnego** wielomianu trzech zmiennych stopnia pierwszego to:

$$P(x,y,z) = ax + by + cz, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Ogólna postać **jednorodnego** wielomianu trzech zmiennych stopnia drugiego to:

$$P(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx, \quad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

Inny sposób opisu wielomianów jednorodnych prezentuje następujący fakt:

Fakt 4.24: Wielomian jednorodny

Wielomian P zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ jest wielomianem jednorodnym stopnia k wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$P(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k \cdot P(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.14}$$

Dowód. Jednomian spełnia warunek (4.14) wtedy i tylko wtedy, gdy jest stopnia k. Stąd warunek (4.14) jest spełniony dla dowolnego wielomianu jednorodnego stopnia k. Sprawdzenie, że wielomiany niejednorodne nie spełniają warunku (4.14) pomijamy. □

Niniejszy rozdział poświęcony będzie badaniu jednorodnych wielomianów stopnia drugiego (tzn. jednorodnych wielomianów kwadratowych). Zauważmy, że:

Fakt 4.25: Jednorodny wielomian kwadratowy

Jeśli $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest jednorodnym wielomianem stopnia drugiego zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, to jest on postaci:

$$P(X) = X^\top \cdot A \cdot X, \text{ gdzie } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

dla pewnej **symetrycznej** macierzy A. Co więcej, macierz A jest jednoznacznie wyznaczona przez wielomian P.

Dowód. Ogólna postać wielomianu jednorodnego stopnia drugiego to:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

który to warunek można zapisać jako:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

przy czym współczynniki a_{ij} nie są wyznaczone jednoznacznie przez wielomian P, gdyż wyrazy $a_{ij}x_ix_j$ oraz $a_{ji}x_jx_i$ są nierozróżnialne z uwagi na przemienność mnożenia liczb rzeczywistych. Niemniej sumy współczynników $a_{ij} + a_{ji}$ (dla $i \neq j$) oraz współczynniki a_{ii} są już wyznaczone jednoznacznie. Stąd, przy dodatkowym założeniu, że macierz $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ jest macierzą symetryczną (tzn. $a_{ij} = a_{ji}$ dla dowolnych i, j), macierz A jest wyznaczona jednoznacznie. □

Przykład 4

Zapisz wielomian $P(x, y, z) = 2x^2 - 6xy + 8yz + y^2 + 3z^2$ w postaci (4.15).
Rozwiązanie.

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Postać (4.15) stanowi motywację do następującej definicji *formy kwadratowej* na dowolnej przestrzeni liniowej (forma kwadratowa na $\mathbb{R}^n$ to inaczej jednorodny wielomian kwadratowy n zmiennych rzeczywistych):

Definicja 4.26: Forma kwadratowa

Niech V będzie (rzeczywistą) przestrzenią liniową wymiaru n. *Formą kwadratową* na V nazywamy funkcję $Q : V \to \mathbb{R}$, która dla pewnej[3] bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V ma postać:

$$Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{B}} \tag{4.16}$$

gdzie $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą symetryczną. Macierz A nazywamy *macierzą formy Q w bazie $\mathcal{B}$* i oznaczamy $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = A$.

Powyższą definicję można przeformułować w następujący sposób: forma kwadratowa to jednorodny wielomian drugiego stopnia, którego zmiennymi są współrzędne w pewnej bazie. Z tego też powodu będziemy również (dla uproszczenia) posługiwać się zapisem $Q(x_1, \ldots, x_n)$ dla oznaczenia $Q(x_1b_1 + \ldots + x_nb_n)$, gdzie $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ jest ustaloną bazą przestrzeni V.

Przykład 5

Sprawdź, że funkcja $Q : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ dana wzorem $Q(P) = (P(2))^2$ jest formą kwadratową.
Rozwiązanie. Przekształcenie Q jest zdefiniowane następująco:

$$Q(ax^2 + bx + c) = (4a + 2b + c)^2 = 16a^2 + 4b^2 + c^2 + 16ab + 4bc + 8ca$$

czyli jest jednorodnym wielomianem kwadratowym zmiennych a, b, c, które są współrzędnymi w bazie $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$. Inaczej:

$$Q(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [ax^2+bx+c]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot [ax^2+bx+c]_{\mathcal{B}}$$

Przykład 6

Sprawdź, że funkcja $Q : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $Q(A) = \det A$ jest formą kwadratową.
Rozwiązanie. Przekształcenie Q jest zdefiniowane następująco:

$$Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

czyli jest jednorodnym wielomianem kwadratowym zmiennych a, b, c, d które są współrzędnymi w bazie $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Inaczej:

$$\begin{aligned} Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Definicja 4.26 zawiera dwie niejasności:

[3] Jak sprawdzimy w niniejszym rozdziale wzór (4.16) jest spełniony dla dowolnej bazy przestrzeni V, choć macierz A zależy od wyboru bazy. Oznaczenie $A = m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$ podkreśla zależność wyrazów macierzy A od wyboru bazy $\mathcal{B}$.

1) nie precyzuje, czy macierz $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$ formy kwadratowej Q jest jednoznacznie wyznaczona (mogłoby się zdarzyć, że różne macierze dają ten sam wzór formy – sytuacja taka rzeczywiście miałaby miejsce, gdyby nie dodatkowe założenie o symetryczności macierzy formy);
2) nie precyzuje, czy wzór formy kwadratowej (4.16) zachodzi dla każdej bazy (przy odpowiednio dobranej macierzy), czy jedynie dla niektórych baz.

Obie te kwestie rozstrzygają poniższe dwa fakty.

Fakt 4.27: Macierz formy kwadratowej

Macierz $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ we wzorze (4.16) jest wyznaczona jednoznacznie przez funkcję Q, a jej wyrazy można wyznaczyć z następujących wzorów:

$$a_{ii} = Q(b_i), \text{ dla } i = 1, \dots, n \tag{4.17}$$
$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(Q(b_i + b_j) - Q(b_i) - Q(b_j)), \text{ dla } i \neq j \tag{4.18}$$

gdzie $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$.

Dowód. Wzory (4.17) i (4.18) pokazują, że funkcja Q jednoznacznie wyznacza wyrazy macierzy $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$. Prawdziwość wzoru (4.17) dla $i = 1$ wynika z następującego rachunku:

$$Q(b_1) = [b_1]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [b_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}$$

Dla pokazania wzoru (4.18) w przypadku $i = 1$ i $j = 2$ zauważmy, że:

$$Q(b_1 + b_2) = [b_1 + b_2]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [b_1 + b_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$$

co wobec (4.17) oraz symetryczności macierzy A implikuje:

$$a_{12} = a_{21} = \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) = \tfrac{1}{2}(Q(b_1 + b_2) - Q(b_1) - Q(b_2))$$

Prawdziwość wzorów w pozostałych przypadkach sprawdzamy analogicznie. □

Fakt 4.28: Macierz formy kwadratowej w różnych bazach

Forma kwadratowa Q zadana wzorem (4.16) dla pewnej bazy $\mathcal{B}$ jest równocześnie dla dowolnej bazy $\mathcal{C}$ przestrzeni V zadana wzorem:

$$Q(v) = [v]_{\mathcal{C}}^{\top} \cdot m^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(Q) \cdot [v]_{\mathcal{C}} \tag{4.19}$$

gdzie macierz $m^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(Q)$ spełnia warunek:

$$m^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(Q) = \left(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right)^{\top} \cdot m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \tag{4.20}$$

Dowód. Zgodnie ze wzorami (4.16) oraz (1.5):

$$\begin{aligned} Q(v) &= [v]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \left(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \cdot [v]_{\mathcal{C}}\right)^{\top} \cdot m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) \cdot (m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \cdot [v]_{\mathcal{C}}) \\ &= [v]_{\mathcal{C}}^{\top} \cdot \left(\left(m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right)^{\top} \cdot m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) \cdot m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})\right) \cdot [v]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy wzór (4.19) dla macierzy $m^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(Q)$ zadanej wzorem (4.20). □

Wygodniejszym sposobem definiowania formy kwadratowej oraz badania jej macierzy jest odwołanie się do pojęcia *formy dwuliniowej*. Forma dwuliniowa to inne określenie na (omawiane już) przekształcenie dwuliniowe lub przekształcenie liniowe względem każdej z obu współrzędnych.

Definicja 4.29: Forma dwuliniowa

Niech V będzie (rzeczywistą) przestrzenią liniową wymiaru n. *Formą dwuliniową* na V nazywamy odwzorowanie $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$, które jest dwuliniowe (tzn. liniowe względem każdej współrzędnej). Formę taką nazywamy *symetryczną*, jeśli $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ dla dowolnych $v, w \in V$.

Fakt 4.30: Macierz formy dwuliniowej

Jeśli $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ jest formą dwuliniową na przestrzeni liniowej V, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bazą przestrzeni V, to:

$$\Phi(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{B}} \tag{4.21}$$

dla macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, gdzie $a_{ij} = \Phi(b_i, b_j)$. Macierz A nazywamy *macierzą formy* Φ *w bazie* $\mathcal{B}$ i oznaczamy $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)$. Forma dwuliniowa jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz jest symetryczna.

Dowód. Niech $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Jeśli $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ oraz $w = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n$, to z dwuliniowości otrzymujemy:

$$\Phi(v, w) = \Phi(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n, y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} \Phi(b_i, b_j) x_i y_j$$

co, przyjmując oznaczenia $A = (a_{ij})$, gdzie $a_{ij} = \Phi(b_i, b_j)$, można zapisać jako:

$$\Phi(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$

□

Wniosek 4.31: Forma dwuliniowa stowarzyszona z formą kwadratową

Niech V będzie (skończenie wymiarową) przestrzenią liniową. Jeśli $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ jest symetryczną formą dwuliniową na V, to funkcja $Q : V \to \mathbb{R}$ zdefiniowana:

$$Q(v) = \Phi(v, v), \text{ dla każdego } v \in V$$

jest formą kwadratową oraz $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)$ dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V. Formę dwuliniową Φ nazywamy *stowarzyszoną* z formą kwadratową Q. Ponadto dla każdej formy kwadratowej Q istnieje dokładnie jedna symetryczna forma dwuliniowa Φ stowarzyszona z Q.

Dowód. Wstawiając $w = v$ we wzorze (4.21) otrzymujemy wzór (4.16), co dowodzi, że $Q(v) = \Phi(v, v)$ jest formą kwadratową oraz, że $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi)$ dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ (zauważmy, że wykorzystujemy tu założenie o symetryczności formy Φ). Jednoznaczność macierzy formy kwadratowej (Fakt 4.27) dowodzi, że dla każdej formy kwadratowej Q istnieje jednoznacznie wyznaczona stowarzyszona z nią symetryczna forma dwuliniowa Φ. □

Symetryczne formy dwuliniowe oraz formy kwadratowe są na tyle mocno związane ze sobą, że często używamy tego samego oznaczenia na formę kwadratową oraz stowarzyszoną z nią formę dwuliniową, stosując równocześnie zapis $Q(v)$ (w odniesieniu do formy kwadratowej) oraz $Q(v, w)$ (w odniesieniu do stowarzyszonej z nią formy dwuliniowej).

Przykład 7

Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}_2[x]$, gdzie iloczyn skalarny dany jest wzorem:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$$

Sprawdź, że odwzorowanie $Q : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem $Q(P) = |P|^2$ jest formą kwadratową.

Rozwiązanie. Odwzorowanie $Q : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem:

$$Q(P_1, P_2) = \langle P_1, P_2 \rangle$$

jest symetryczną formą dwuliniową. Wobec tego $Q(P) = \langle P, P \rangle = |P|^2$ jest stowarzyszoną z nią formą kwadratową.

Przykład 8

Wyznacz symetryczą formę dwuliniową $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stowarzyszoną z formą kwadratową $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem:

$$Q(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2$$

Rozwiązanie. Forma kwadratowa oraz stowarzyszona z nią symetryczna forma dwuliniowa mają taką samą macierz. Macierzą formy kwadratowej Q (w bazie standardowej $\mathcal{E}$) jest:

$$m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$$

Symetryczna forma dwuliniowa stowarzyszona z Q ma taką samą macierz, czyli:

$$\Phi(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = ax_1y_1 + bx_2y_2 + \frac{c}{2}x_1y_2 + \frac{c}{2}x_2y_1$$

Twierdzenie 4.32: Diagonalizacja formy kwadratowej

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, zaś $Q : V \to \mathbb{R}$ formą kwadratową. Wówczas istnieje taka baza $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, w której forma Q diagonalizuje się, tzn. $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$ jest macierzą diagonalną. Innymi słowy dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$Q(x_1b_1 + \cdots + x_nb_n) = \alpha_1x_1^2 + \cdots + \alpha_nx_n^2 \tag{4.22}$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są pewnymi ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami dotyczącymi oznaczeń, wzór (4.22) będziemy również zapisywać w uproszczonej postaci:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1x_1^2 + \cdots + \alpha_nx_n^2 \tag{4.23}$$

Korzystając z zapisu (4.23) formy kwadratowej, twierdzenie o diagonalizacji można wysłowić: dla każdego jednorodnego wielomianu kwadratowego n zmiennych istnieje taka liniowa zamiana współrzędnych, że w nowych współrzędnych wielomian nie ma wyrazów mieszanych.

Dowód tego twierdzenia przyjmuje postać algorytmu zwanego *metodą Lagrange'a*, który polega na wielokrotnym wykonywaniu liniowej zamiany współrzędnych (czyli zmiany bazy), aż do uzyskania bazy, w której forma ma macierz diagonalną.

Fakt 4.33: Metoda Lagrange'a

Niech Q będzie jednorodnym wielomianem kwadratowym zmiennych $x_1, \dots, x_n$. Poniższy algorytm prowadzi do takiej liniowej zamiany współrzędnych, że w nowych współrzędnych wielomian Q nie ma wyrazów mieszanych.

1) Wybieramy taką zmienną x_i, która we wzorze wielomianu Q występuje w wyrazie kwadratowym ($a_{ii}x_i^2$) oraz w przynajmniej jednym wyrazie mieszanym ($a_{ij}x_ix_j$, $i \neq j$) i przy pomocy liniowej zamiany współrzędnych zamieniamy zmienną x_i na x_i', która występuje już wyłącznie w wyrazie kwadratowym.

   Krok (1) powtarzamy dla kolejnych współrzędnych dopóki jest to możliwe. Jeśli wielomian wciąż zawiera wyrazy mieszane, a wykonanie kroku (1) nie jest możliwe (tzn. nie ma zmiennej występującej równocześnie w wyrazie kwadratowym i wyrazie mieszanym), wykonujemy krok (2).

2) Jeśli we wzorze wielomianu Q występuje wyraz mieszany αx_ix_j, $\alpha \neq 0$, ale żadna ze zmiennych x_i, x_j nie występuje w wyrazie kwadratowym, wykonujemy następujące podstawienie:

$$\begin{cases} x_i = x_i' + x_j' \\ x_j = x_i' - x_j' \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x_i' = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_j \\ x_j' = \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_j \end{cases}$$

   które prowadzi do zamiany $x_ix_j = (x_i')^2 - (x_j')^2$, po czym wracamy do kroku (1).

Zamiast formalnego dowodu poprawności metody Lagrange'a, pokażemy jej działanie na dwóch przykładach.

Przykład 9

Zdiagonalizować formę kwadratową $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, która w bazie standardowej $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ma wzór:

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 6yz + 8zx$$

i podaj bazę, w której forma Q przyjmuje wyznaczoną postać diagonalną.

Rozwiązanie. Zgodnie z krokiem (1) metody Lagrange'a wybieramy zmienną x. Żeby usunąć wyrazy mieszane zawierające x „zwijamy w kwadrat" wszystkie składniki zawierające x:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) =& 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 6yz + 8zx \\ =& 2(x + y + 2z)^2 - 2y^2 - 8z^2 - 8yz + 3y^2 - z^2 + 6yz \\ =& 2(x + y + 2z)^2 + y^2 - 9z^2 - 2yz \end{aligned}$$

po czym wprowadzamy nową współrzędną $x' = x + y + 2z$:

$$=2(x')^2 + y^2 - 9z^2 - 2yz$$

Następnie powtarzamy tę samą procedurę ze zmienną y:

$$\begin{aligned} =& 2(x')^2 + y^2 - 9z^2 - 2yz \\ =& 2(x')^2 + (y - z)^2 - z^2 - 9z^2 \\ =& 2(x')^2 + (y')^2 - 10(z')^2 \end{aligned}$$

gdzie $y' = y - z$ oraz $z' = z$ (podstawienie $z' = z$ nie było konieczne, ale pozwoli nam jasno odróżnić nowe współrzędne od starych). W ten sposób znaleźliśmy nowe współrzędne (x', y', z')

(które są współrzędnymi w pewnej nowej bazie $\mathcal{B}' = (b_1', b_2', b_3')$), w których forma Q ma postać diagonalną. Pozostaje pytanie jak przetłumaczyć zamianę współrzędnych na zamianę bazy. Zauważmy, że nowe współrzędne można wyrazić przy pomocy starych w następujący sposób:

$$\begin{cases} x' = x + y + 2z \\ y' = y - z \\ z' = z \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Powyższą równość można w następujący sposób zapisać przy użyciu baz:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{E}} \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$$

Wektory nowej bazy b_1', b_2', b_3' mają zatem współrzędne:

$$[b_1']_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[b_2']_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[b_3']_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizację formy z użyciem kroku (2) metody Lagrange'a pokazuje drugi przykład.

Przykład 10

Zdiagonalizuj formę kwadratową $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, która w bazie standardowej $\mathcal{E}$ ma wzór:

$$Q(x, y, z) = xy + yz$$

i podaj bazę, w której przyjmuje wyznaczoną postać diagonalną.

Rozwiązanie. Ponieważ krok (1) metody Lagrange'a jest niewykonalny z uwagi na brak wyrazów kwadratowych, wykonujemy podstawienie z kroku (2), tzn. $x = x' + y'$, $y = x' - y'$, czyli $x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) =& xy + yz \\ =& (x' + y')(x' - y') + (x' - y')z \\ =& (x')^2 - (y')^2 + x'z - y'z \end{aligned}$$

Następnie wykonujemy krok (1), „zwijając w kwadrat" wyrazy zawierające x':

$$=(x' + \tfrac{1}{2}z)^2 - \tfrac{1}{4}z^2 - (y')^2 - y'z$$

i wykonujemy podstawienie $x'' = x' + \frac{1}{2}z$:

$$=(x'')^2 - \tfrac{1}{4}z^2 - (y')^2 - y'z$$

Ponownie wykonujemy krok (1), „zwijając w kwadrat" wyrazy zawierające y':

$$=(x'')^2 - (y' + \tfrac{1}{2}z)^2$$

i wykonujemy podstawienie $y'' = y' + \frac{1}{2}z$:

$$=(x'')^2 - (y'')^2$$

Nowe współrzędne można wyrazić przy pomocy starych (przyjmujemy $z'' = z' = z$) w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wobec tego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

czyli dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^3$:

$$[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{B}''}$$

Stąd wektory nowej bazy $\mathcal{B}'' = (b_1'', b_2'', b_3'')$ (w której współrzędnymi są x'', y'', z'') to:

$$b_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definicja 4.34: Dodatnia/ujemna określoność

Niech V będzie przestrzenią liniową. Formę kwadratową $Q : V \to \mathbb{R}$ nazywamy:

1) *dodatnio określoną*, jeśli $Q(v) > 0$ dla każdego $v \neq 0$,
2) *ujemnie określoną*, jeśli $Q(v) < 0$ dla każdego $v \neq 0$,
3) *dodatnio półokreśloną*, jeśli $Q(v) \geq 0$ dla każdego v,
4) *ujemnie półokreśloną*, jeśli $Q(v) \leq 0$ dla każdego v.

Symetryczną macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy *macierzą dodatnio/ujemnie określoną/półokreśloną*, jeśli wspomnianą własność ma forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dla której A jest macierzą w bazie standardowej.

Przykład 11

Sprawdzić czy forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ dana wzorem $Q(P) = (P(2))^2$ jest dodatnio określona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem:

$$\Phi(P_1, P_2) = P_1(2) \cdot P_2(2)$$

jest symetryczną formą dwuliniową, a zatem $Q(P) = \Phi(P, P)$ jest formą kwadratową. Dla dowolnego P zachodzi $Q(P) \geq 0$, ale warunek $Q(P) = 0$ zachodzi dla niektórych niezerowych wielomianów. Wobec tego forma Q nie jest dodatnio określona, ale jest dodatnio półokreślona.

Fakt 4.35: Dodatnia/ujemna określoność

Niech V będzie (skończenie wymiarową) przestrzenią liniową, zaś $Q : V \to \mathbb{R}$ formą kwadratową. Jeśli $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ jest taką bazą, że:

$$m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

to forma Q jest:

1) *dodatnio określona* $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$,
2) *ujemnie określona* $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$,
3) *dodatnio półokreślona* $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$,
4) *ujemnie półokreślona* $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$.

Dowód. Dla dowolnego wektora $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ otrzymujemy:

$$Q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} \cdot m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2$$

Forma Q jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(v) > 0$ dla dowolnego niezerowego wektora v, czyli

$$\lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2 > 0$$

dla dowolnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, które nie są jednocześnie równe 0. Warunek ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, co dowodzi (1). Podobnie dowodzimy (2)–(4). □

Wygodną metodą sprawdzania dodatniej/ujemnej określoności macierzy jest kryterium Sylvestera, opierające się na wyznaczaniu minorów głównych macierzy formy (w dowolnie wybranej bazie).

Definicja 4.36: Minor główny

Minorem głównym stopnia k macierzy A nazywamy minor powstały przez wybranie pierwszych k wierszy i pierwszych k kolumn macierzy A.

Przykład 12

Wyznacz wszystkie minory główne macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Minory główne powyższej macierzy to:

$$\det\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 6, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 19$$

Fakt 4.37: Kryterium Sylvestera

Macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest:

1) dodatnio określona $\iff$ wszystkie minory główne macierzy A są dodatnie,
2) ujemnie określona $\iff$ wszystkie minory główne macierzy A stopni nieparzystych są ujemne oraz wszystkie minory główne stopni parzystych są dodatnie.

Kryterium Sylvestera jest natychmiastowe dla macierzy diagonalnych. Dowód tego kryterium wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Przykład 13

Sprawdź, które z poniższych macierzy są dodatnio określone, a które są ujemnie określone:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-2&3&0\\3&-5&1\\0&1&-6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}7&3&2\\3&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Stosujemy kryterium Sylwestera Dla pierwszej macierzy otrzymujemy:

$$\det(1) = 1 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix} = 1 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&7\end{pmatrix} = 2 > 0$$

czyli jest to macierz dodatnio określona.
Dla drugiej macierzy otrzymujemy:

$$\det(-2) = -2 < 0 \qquad \det\begin{pmatrix}-2&3\\3&-5\end{pmatrix} = 1 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix}-2&3&0\\3&-5&1\\0&1&-6\end{pmatrix} = -4 < 0$$

czyli jest to macierz ujemnie określona.
Dla trzeciej macierzy otrzymujemy:

$$\det(7) = 7 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix}7&3\\3&1\end{pmatrix} = -2 < 0$$

czyli nie jest to ani macierz dodatnio określona, ani ujemnie określona.

Pojęcie dodatniej/ujemnej określoności można uogólnić wprowadzając pojęcie *sygnatury* formy kwadratowej:

Definicja 4.38: Sygnatura formy

Niech V będzie przestrzenią liniową, $n = \dim V$, a $Q : V \to \mathbb{R}$ formą kwadratową. Wybierzmy bazę $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ przestrzeni V, w której forma Q dagonalizuje się, tzn.

$$m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Wówczas *sygnaturą* formy kwadratowej $Q : V \to \mathbb{R}$ nazywamy parę liczb naturalnych (p, q), gdzie p i q to odpowiednio liczba dodatnich i ujemnych wyrazów na przekątnej macierzy (4.24), tzn. $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$ oraz $\lambda_{p+q+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Dla upewnienia się o prawidłowości powyższej definicji niezbędny jest następujący fakt, którego dowód pomijamy:

Fakt 4.39: Sygnatura formy

Sygnatura formy kwadratowej $Q : V \to \mathbb{R}$ nie zależy od wyboru bazy. W szczególności, jeśli forma Q jest dodatnio (ujemnie) określona, to jej macierz $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$ w dowolnej bazie $\mathcal{B}$ jest dodatnio (ujemnie) określona.

Przykład 14

Wyznaczyć sygnaturę następujących form kwadratowych:

(a) $Q_1(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 6yz + 8zx$

(b) $Q_2(x, y, z) = xy + yz$

Rozwiązanie. W Przykładach 9 i 10 znaleźliśmy bazy w których formy Q_1 i Q_2 są diagonalne:

$$\begin{aligned} Q_1(x', y', z') &= 2(x')^2 + (y')^2 - 10(z')^2 \\ Q_2(x'', y'', z'') &= (x'')^2 - (y'')^2 \end{aligned}$$

Stąd sygnatura formy Q_1 to $(2, 1)$, zaś sygnatura formy Q_2 to $(1, 1)$.

Dla zainteresowanych...

Ekstrema (różniczkowalnej) funkcji jednej zmiennej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można wyznaczać przy pomocy badania pochodnych funkcji f. Pamiętamy, że:

(A) jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$,

(B) jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) > 0$, to funkcja f ma minimum w punkcie x_0,

(C) jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) < 0$, to funkcja f ma maximum w punkcie x_0.

Podobny fakt jest prawdziwy dla funkcji wielu zmiennych, ale wymaga to uogólnienia pojęcia pochodnej na funkcje wielu zmiennych. Pochodna funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zmiennych $x_1, \dots, x_n$ w ustalonym punkcie $P \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem:

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oznacza pochodną funkcji f traktowaną jako funkcja (jednej) zmiennej x_i (pozostałe zmienne traktowane są jako parametry). Na przykład dla funkcji $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ otrzymujemy pierwszą pochodną:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y \\ 3y^2 + x \end{pmatrix}$$

Druga pochodna funkcji wielu zmiennych jest macierzą[a]:

$$D^2(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

gdzie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}$$

Na przykład dla funkcji $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ otrzymujemy drugą pochodną:

$$D^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

Dla funkcji wielu zmiennych warunki (A), (B), (C) uogólniają się w następujący sposób:

(A′) jeśli funkcja f ma w punkcie P ekstremum lokalne, to $Df(P) = 0$,

(B′) jeśli $Df(P) = 0$ oraz $D^2 f(P) > 0$, to funkcja f ma minimum w punkcie P,

(C′) jeśli $Df(P) = 0$ oraz $D^2 f(P) < 0$, to funkcja f ma maximum w punkcie P.

gdzie równości w punktach (A′), (B′), (C′) oznaczają równość wektorów, zaś nierówności w punktach (B′), (C′) oznaczają dodatnią/ujemną określoność macierzy. Na przykład funkcja $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ ma minimum w punkcie $P = \binom{-1/3}{-1/3}$, gdyż:

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gdzie powyższa macierz jest (zgodnie z kryterium Sylvestera) macierzą ujemnie określoną.

[a] Standardowe oznaczenie na $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ to $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

4.3 Twierdzenie spektralne

Ponieważ w przestrzeni euklidesowej zdefiniowaliśmy pojęcie długości, więc możemy również uogólnić (znane z przekształceń $\mathbb{R}^2$ oraz przekształceń $\mathbb{R}^3$) pojęcie izometrii:

Definicja 4.40: Izometria liniowa

Izometrią liniową przestrzeni euklidesowej V nazywamy takie przekształcenie liniowe $F : V \to V$, które zachowuje odległości, tzn. spełniające dla dowolnych $u, v \in V$ warunek:

$$d(u,v) = d(F(u), F(v))$$

Definicję 4.40 można również wysłowić: izometria liniowa to przekształcenie liniowe zachowujące długości wektorów, co pokazuje poniższy fakt:

Fakt 4.41: Izometria liniowa

Przekształcenie liniowe $F : V \to V$ przestrzeni euklidesowej V jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje długości wektorów, tzn. gdy dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi:

$$|v| = |F(v)| \tag{4.25}$$

Dowód. $\Rightarrow$ Izometria liniowa (jak każde przekształcenie liniowe) spełnia warunek $F(0) = 0$, więc dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi:

$$|F(v)| = d(F(v), 0) = d(F(v), F(0)) = d(v, 0) = |v|$$

czyli F zachowuje długości wektorów.
$\Leftarrow$ Z drugiej strony, jeśli F jest liniowe i zachowuje długości wektorów, to dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ zachodzi:

$$d(u,v) = |u - v| = |F(u - v)| = |F(u) - F(v)| = d(F(u), F(v))$$

czyli F jest izometrią. □

W Definicji 4.40 wymagaliśmy od izometrii jedynie zachowywania odległości (w szczególności długości wektorów), ale nie wymagaliśmy zachowywania kątów (w szczególności iloczynu skalarnego). Poniższy fakt tłumaczy brak tego wymogu, pokazując jak wyliczyć iloczyn skalarny przy pomocy długości wektorów:

Fakt 4.42: Iloczyn skalarny

Dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ przestrzeni euklidesowej V zachodzi warunek:

$$\langle u, v\rangle = \tfrac{1}{4}(|u+v|^2 - |u-v|^2) \tag{4.26}$$

Dowód. Korzystając z własności iloczynu skalarnego otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|u+v|^2 - |u-v|^2 =& \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle \\ =& (\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle) - (\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle) = 4\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

co dowodzi wzoru (4.26). □

Wniosek 4.43: Iloczyn skalarny

Każda izometria liniowa przestrzeni euklidesowej zachowuje iloczyn skalarny oraz zachowuje miary kątów.

Dowód. Niech $F : V \to V$ będzie dowolną izometrią liniową przestrzeni euklidesowej V. Zgodnie z (4.25) przekształcenie F zachowuje długości wektorów, więc zgodnie ze wzorem (4.26) zachowuje również iloczyn skalarny:

$$\begin{aligned}\langle F(u), F(v)\rangle =& \tfrac{1}{4}(|F(u) + F(v)|^2 - |F(u) - F(v)|^2)\\ =& \tfrac{1}{4}(|F(u + v)|^2 - |F(u - v)|^2) = \tfrac{1}{4}(|u + v|^2 - |u - v|^2) = \langle u, v\rangle\end{aligned}$$

Skoro zaś F zachowuje długości wektorów oraz iloczyn skalarny, to zachowuje również miary kątów (w szczególności ortogonalność wektorów), gdyż:

$$\angle(F(u), F(v)) = \arccos \frac{\langle F(u), F(v)\rangle}{|F(u)| \cdot |F(v)|} = \arccos \frac{\langle u, v\rangle}{|u| \cdot |v|} = \angle(u, v)$$

□

Przykład 1

Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Sprawdź, czy jest izometrią liniową przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zdefiniowane wzorem:

$$F(\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} y\\ z\\ t\\ x\end{smallmatrix}\right)$$

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora $v = \left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{smallmatrix}\right)$ zachodzi:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = |F(v)|$$

Wobec tego przekształcenie F zachowuje długości wektorów, czyli jest izometrią.

Przykład 2

Dana jest przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}_3[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Sprawdź, czy jest izometrią liniową przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zdefiniowane:

$$F(ax^2 + bx + c) = bx^2 + cx + a$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $P(x) = x^2$ mamy:

$$|P| = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{ale} \qquad |F(P)| = \sqrt{\int_0^1 1dx} = 1$$

czyli F nie zachowuje długości wektorów. Nie jest zatem izometrią.

Definicja 4.44: Macierz izometrii

Macierzą izometrii albo *macierzą ortogonalną*[4] nazywamy taką macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, że przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym) jest izometrią (liniową).

Fakt 4.45: Macierz izometrii

Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ następujące warunki są równoważne:

1) A jest macierzą ortogonalną (macierzą izometrii),
2) kolumny macierzy A tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej[5] $\mathbb{R}^n$,
3) wiersze macierzy A tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej[5] $\mathbb{R}^n$,
4) A jest odwracalna i $A^{-1} = A^\top$.

Dowód. Niech $A = (A_1, \dots, A_n)$, gdzie $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ to kolumny macierzy A. Zauważmy, że warunek (4) można zapisać jako $A^\top A = I$. Ponieważ każdy wyraz macierzy $A^\top A$ jest postaci $A_i^\top \cdot A_j = \langle A_i, A_j\rangle$, więc warunek $A^\top A = I$ jest równoważny stwierdzeniu:

$$\langle A_i, A_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

co dowodzi równoważności (4) $\iff$ (2). Podobnie (przekształcając warunek (4) do postaci $AA^\top = I$) dowodzimy równoważności (4) $\iff$ (3).
Dla zakończenia dowodu wystarczy udowodnić równoważność (1) $\iff$ (2). Jeśli macierz A jest macierzą izometrii, to zachowuje długości wektorów (Fakt 4.41) i miary kątów (Wniosek 4.43), czyli jej kolumny (jako obrazy wektorów bazy standardowej) są długości 1 i parami prostopadłe (bo takie warunki spełniają wektory bazy standardowej). To dowodzi (1) $\Rightarrow$ (2). Z drugiej strony, jeśli kolumny macierzy A tworzą bazę ortonormalną, to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\left| A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| = \left\langle A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \langle x_1A_1 + \dots + x_nA_n, x_1A_1 + \dots + x_nA_n\rangle$$
$$= \sum_{1\le i,j\le n} x_ix_j\langle A_i, A_j\rangle = \sum_{1\le i\le n} x_i^2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right|$$

czyli przekształcenie F_A zachowuje długości wektorów, a zatem A jest macierzą izometrii. To dowodzi (2) $\Rightarrow$ (1). □

Przykład 3

Uzupełnić następującą macierz do macierzy ortogonalnej:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & a \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & d \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Pierwsze trzy kolumny macierzy mają długości 1 oraz są parami ortogonalne. Macierz będzie zatem ortogonalna, jeśli czwarta kolumna będzie miała długość 1 i będzie ortogonalna do każdej z trzech pierwszych kolumn. Wobec tego:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 0 \\ -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

[4] Zwróćmy uwagę na pewną niekonsekwencję w nazewnictwie, widoczną w Fakcie 4.45: macierz jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej kolumny tworzą bazę ortonormalną $\mathbb{R}^n$ (nie zaś bazę ortogonalną).
[5] Ze standardowym iloczynem skalarnym.

Rozwiązując powyższy układ równań dostajemy następujące rozwiązania:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Głównym twierdzeniem niniejszego rozdziału jest Twierdzenie spektralne. Jego dowód wymaga wprowadzenia pojęcia *zespolonej przestrzeni euklidesowej*, które jest zespoloną wersją pojęcia *przestrzeń euklidesowa* w takim samym sensie jak pojęcie *zespolona przestrzeń liniowa* jest zespoloną wersją pojęcia *przestrzeń liniowa*.

Definicja 4.46: Zespolona przestrzeń euklidesowa

Zespoloną przestrzenią euklidesową nazywamy zespoloną przestrzeń liniową V z dodatkową operacją zwaną *zespolonym iloczynem skalarnym*, przypisującą (uporządkowanej) parze wektorów (u, v) liczbę $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$ tak, że spełnione są następujące warunki:

S1 *hermitowskość*, tzn. dla dowolnych $u, v \in V$ zachodzi warunek:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

S1.5 *półtoraliniowość*, tzn. dla dowolnych $u, v, w \in V$ oraz dowolnego $t \in \mathbb{C}$ zachodzą warunki:

$$\begin{aligned} \langle u + v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \text{oraz} \quad \langle tu, v\rangle = t\langle u, v\rangle \\ \langle u, v + w\rangle &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \text{oraz} \quad \langle u, tv\rangle = \bar{t}\langle u, v\rangle \end{aligned}$$

S3 *dodatnia określoność*, tzn. dla dowolnego $v \in V$ zachodzi warunek:

$$\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \text{ przy czym } \langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$$

Zwróćmy uwagę, że własność (S1.5) z Definicji 4.46 różni się od własności (S2) z Definicji 4.1 jedynie sprzężeniem w warunku:

$$\langle u, tv\rangle = \bar{t}\langle u, v\rangle \tag{4.27}$$

które odróżnia definicję zespolonego iloczynu skalarnego od rzeczywistego iloczynu skalarnego. W związku z tą modyfikacją zespolony iloczyn skalarny nie jest dwuliniowy (bo nie jest jednorodny względem drugiej współrzędnej). Modyfikację tę wymusza warunek (S3), który ma zapewniać, że długość wektora w zespolonej przestrzeni euklidesowej będzie (nieujemną) liczbą rzeczywistą (podobnie jak moduł liczby zespolonej). Gdyby warunek (S1.5) zamienić na odpowiednik warunku (S2), dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ zachodziłaby równość:

$$|zv|^2 = \langle zv, zv\rangle = z^2\langle v, v\rangle = z^2 \cdot |v|^2 \tag{4.28}$$

co stałoby w sprzeczności z założeniem, że zarówno $|v|$, jak i $|zv|$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Dzięki sprzężeniu w warunku (S1.5) równość (4.28) przyjmuje postać:

$$|zv|^2 = \langle zv, zv\rangle = z \cdot \bar{z}\langle v, v\rangle = |z|^2 \cdot |v|^2$$

co pozostaje w zgodzie z założeniem, że $|v|$ i $|zv|$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi.

Przykład 4

Sprawdzić, że zdefiniowana na przestrzeni $\mathbb{C}^n$ operacja:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \tag{4.29}$$

jest zespolonym iloczynem skalarnym. Operacja ta nazywana jest *standardowym (zespolonym) iloczynem skalarnym* na $\mathbb{C}^n$.

Rozwiązanie. Symetryczność oraz liniowość względem pierwszej współrzędnej jest oczywista. Sprawdzimy pozostałe warunki:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1+y_1' \\ \vdots \\ y_n+y_n' \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i + y_i'} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ty_1 \\ \vdots \\ ty_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{ty_i} = \bar{t} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = \bar{t} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dodatnia określoność wynika z faktu, że $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ oraz jest równa zero dla $z = 0$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Przykład 5

Sprawdzić, że zdefiniowana na przestrzeni $\mathbb{C}_n[x]$ operacja:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)\overline{Q(x)}dx$$

jest zespolonym iloczynem skalarnym.

Rozwiązanie. Sprawdzenie warunków (S1) i (S1.5) pozostawiamy czytelnikowi. Sprawdzimy warunek dodatniej określoności (S3). Zauważmy, że:

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(x)\overline{P(x)}dx = \int_0^1 |P(x)|^2 dx$$

co, jako całka z nieujemnej funkcji rzeczywistej, jest nieujemną liczbą rzeczywistą, przy czym całka jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $P(x) = 0$ dla każdego $0 \leq x \leq 1$. W przypadku wielomianu jest to równoważne stwierdzeniu, że P jest wielomianem zerowym.

W rozdziale 3.2 zauważaliśmy, że diagonalizując macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, której wielomian ma nierzeczywiste pierwiastki możemy ją potraktować jako macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, zamieniając rzeczywistą przestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ na zespoloną przestrzeń liniową $\mathbb{C}^n$. Podobne uogólnienie jest możliwe również w odniesieniu do przestrzeni euklidesowych: zauważmy, że zespolony iloczyn skalarny wektorów $u, v \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ (zdefiniowany wzorem (4.29)) pokrywa się z rzeczywistym iloczynem skalarnym (zdefiniowanym wzorem (4.1)). Równocześnie warunek (S1.5) zastosowany w sytuacji, gdy $u, v \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ oraz $t \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jest warunkiem (S2). Podejście takie będzie kluczowe przy dowodzie poniższego faktu, który jest głównym narzędziem wykorzystywanym w dowodzie Twierdzenia spektralnego.

Fakt 4.47: Sprzężenie

Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^\top v\rangle \tag{4.30}$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. W szczególności, jeśli macierz A jest **symetryczna**, to:

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \tag{4.31}$$

Co więcej, wzory (4.30) i (4.31) pozostają prawdziwe, jeśli $u, v \in \mathbb{C}^n$ oraz $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{C}^n$, pod warunkiem, że $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (tzn. dopuszczamy zespolone wektory, ale macierz pozostaje rzeczywista).

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych wektorów $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$ można zapisać w postaci:

$$\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^\top \cdot Y$$

gdzie mnożenie oznacza mnożenie macierzy. Wobec tego:

$$\langle Au, v\rangle = (Au)^\top \cdot v = (u^\top \cdot A^\top) \cdot v = u^\top \cdot (A^\top \cdot v) = \langle u, A^\top v\rangle$$

Podobnie standardowy iloczyn skalarny na $\mathbb{C}^n$ można zapisać w postaci:

$$\langle X, Y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = X^\top \cdot \bar{Y}$$

skąd, ponieważ $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ implikuje $\bar{A} = A$, dostajemy:

$$\langle Au, v\rangle = (Au)^\top \cdot \bar{v} = (u^\top \cdot A^\top) \cdot \bar{v} = u^\top \cdot (A^\top \cdot \bar{v}) = u^\top \cdot \overline{A^\top \cdot v} = \langle u, A^\top v\rangle$$

□

Twierdzenie 4.48: Twierdzenie spektralne (wersja macierzowa)

Jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą symetryczną, to

$$A = UDU^{-1} = UDU^\top \tag{4.32}$$

gdzie $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą diagonalną, a $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą ortogonalną. Innymi słowy, macierz symetryczna diagonalizuje się nad $\mathbb{R}$ w pewnej bazie ortonormalnej.

Dowód. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie dowolną wartością własną macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (traktowanej jako macierz o wyrazach zespolonych), zaś $v \in \mathbb{C}^n$ niezerowym wektorem własnym dla λ. Wówczas $Av = \lambda v$ i stosując wzór (4.31) otrzymujemy:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Ponieważ $\langle v, v\rangle \neq 0$ (wektor v jest niezerowy), więc $\lambda = \bar{\lambda}$, czyli $\lambda \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że wszystkie wartości własne macierzy A są rzeczywiste, czyli A diagonalizuje się nad $\mathbb{R}$.

Niech teraz v i w będą wektorami własnymi dla różnych wartości własnych, odpowiednio, λ i μ (o których wiemy już, że są liczbami rzeczywistymi), tzn. $Av = \lambda v$ oraz $Aw = \mu w$. Ze wzoru (4.31) otrzymujemy:

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

Stąd $\lambda\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$, co wobec $\lambda \neq \mu$ oznacza $\langle v, w\rangle = 0$, czyli wektory v i w są prostopadłe. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy A są pojedyncze, dowodzi to, że każda baza złożona z wektorów własnych A jest bazą ortogonalną, a po odpowiednim przeskalowaniu wektorów można z niej uzyskać bazę ortonormalną. Wówczas diagonalizacja macierzy A ma postać (4.32) (macierz U, jako macierz, której kolumny są parami prostopadłymi wektorami długości 1, jest macierzą izometrii, czyli $U^{-1} = U^\top$). Dowód w przypadku wielokrotnych wartości własnych pomijamy. □

Twierdzenie 4.48 można przeformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 4.49: Twierdzenie spektralne (wersja przekształceniowa)

Jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą symetryczną, to przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizuje się w bazie ortonormalnej, tzn. istnieje taka ortonormalna baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, że $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ jest macierzą diagonalną.

Dowód. We wzorze (4.32) przyjmijmy, że $U = (u_1, \ldots, u_n)$, tzn. $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ to kolumny macierzy U. Wówczas $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ jest bazą ortonormalną $\mathbb{R}^n$. Oznaczając przez $\mathcal{E}$ bazę standardową $\mathbb{R}^n$ otrzymujemy:

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A) = m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id) \cdot m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F_A) \cdot m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = U^{-1} \cdot A \cdot U = U^{-1} \cdot UDU^{-1} \cdot U = D$$

czyli $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ jest macierzą diagonalną. □

Przed sformułowaniem wersji wektorowej twierdzenia spektralnego, musimy przyjrzeć się mnożeniu „pionowych” i „poziomych” wektorów:

Fakt 4.50: Macierz (kwadratowa) rzędu 1

Niech $u, v \in \mathbb{R}^n$. Wówczas:

1) $u^\top \cdot v = \langle u, v\rangle$ jest liczbą rzeczywistą,
2) $u \cdot v^\top$ jest macierzą rozmiaru $n \times n$, która to macierz ma rząd 1 (o ile $u \neq 0$ i $v \neq 0$).

Dowód. Niech $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Wówczas:

$$u^\top \cdot v = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$$

$$u \cdot v^\top = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

W otrzymanej w drugim przypadku macierzy każda kolumna krotnością wektora u, co oznacza, że rząd tej macierzy wynosi 1 (o ile u i v to wektory niezerowe). □

Fakt 4.51: Macierz kwadratowa $AB^\top$

Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz $A = (A_1, \dots, A_n)$ i $B = (B_1, \dots, B_n)$ będą przedstawieniami macierzy w postaci ciągu kolumn (tzn. $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathbb{R}^n$). Wówczas:

$$A \cdot B^\top = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot B_i^\top \tag{4.33}$$

Dowód. Pokażemy dowód dla $n = 2$. Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny. Oznaczmy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} A \cdot B^\top &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{12} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Przykład 6

Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Zapisz iloczyn $AB^\top$ w postaci (4.33).

Rozwiązanie.

$$A = (A_1, A_2), \qquad \text{gdzie} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B = (B_1, B_2), \qquad \text{gdzie} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie ze wzorem (4.33):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = AB^\top = A_1B_1^\top + A_2B_2^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 4.52: Twierdzenie spektralne (wersja wektorowa)

Jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą symetryczną, to:

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^\top + \dots + \lambda_n u_n u_n^\top \tag{4.34}$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ to wartości własne A (z krotnościami), zaś $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ to odpowiadające im wektory własne z pewnej ortonormalnej bazy.

Dowód. Wzór (4.32) z macierzowej wersji Twierdzenia spektralnego można zapisać w postaci:

$$A = UDU^\top = (UD) \cdot U^\top = (\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) \cdot (u_1, \dots, u_n)^\top$$

gdzie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ oraz $U = (u_1, \dots, u_n)$, czyli zgodnie ze wzorem (4.33):

$$A = \lambda_1 u_1 \cdot u_1^\top + \dots + \lambda_n u_n \cdot u_n^\top$$

gdzie $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ stanowią bazę ortonormalną $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów własnych macierzy A, zaś $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ to wartości własne odpowiadające $u_1, \dots, u_n$. □

W 4.33 pokazaliśmy algorytm diagonalizacji formy kwadratowej zwany *metodą Lagrange'a*. Twierdzenie spektralne dostarcza nam drugi algorytm diagonalizacji formy kwadratowej.

Twierdzenie 4.53: Diagonalizacja formy kwadratowej w bazie ortonormalnej

Niech $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową, zaś $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ będzie **ortonormalną** bazą $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów własnych (symetrycznej) macierzy $m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q)$ (gdzie $\mathcal{E}$ to baza standardowa $\mathbb{R}^n$). Wówczas:

$$m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ to wartości własne przypisane wektorom własnym $b_1, \dots, b_n$. W szczególności, jeśli (p, q) jest sygnaturą formy Q, to p jest liczbą dodatnich, a q liczbą ujemnych wartości własnych macierzy $m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q)$.

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem spektralnym:

$$m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) = UDU^{-1} = UDU^\top$$

gdzie $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ oraz $U = m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = (b_1, \dots, b_n)$. Zgodnie ze wzorem (4.20) oraz faktem $U^\top = U^{-1}$ otrzymujemy:

$$m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = (m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}))^\top \cdot m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) \cdot m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = U^\top \cdot UDU^{-1} \cdot U = U^{-1}U \cdot D \cdot U^{-1}U = D$$

Sygnatura formy Q to liczba dodatnich/ujemnych liczb na przekątnej diagonalnej macierzy $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q)$, czyli, w tym przypadku, liczba dodatnich/ujemnych wartości własnych maciery $m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q)$. □

Wniosek 4.54: Dodatnia/ujemna określoność a wartości własne

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną. Wówczas A jest:

1) *dodatnio określona* $\iff$ wszystkie wartości własne macierzy A są dodatnie,
2) *ujemnie określona* $\iff$ wszystkie wartości własne macierzy A są ujemne,
3) *dodatnio półokreślona* $\iff$ wszystkie wartości własne macierzy A są nieujemne,
4) *ujemnie półokreślona* $\iff$ wszystkie wartości własne macierzy A są niedodatnie.

Dowód. Jest to bezpośredni wniosek z Faktu 4.35 oraz Twierdzenia 4.53. □

Przykład 7

Zdiagonalizuj w bazie ortonormalnej oraz wyznacz sygnaturę następującej formy kwadratowej:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy wartości własne i wektory własne (symetrycznej) macierzy formy:

$$m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Otrzymujemy $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ oraz $v_1 = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wobec tego:

$$Q(x', y', z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 = 5(x')^2 + 2(y')^2 - (z')^2$$

gdzie $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$ to współrzędne w bazie ortonormalnej (v_1, v_2, v_3). Sygnatura tej formy to $(2, 1)$.

4.4 Rozkład SVD

Dotychczas zajmowaliśmy się przede wszystkim badaniem macierzy kwadratowych, gdyż tylko do badania takich macierzy można było zastosować nasze główne narzędzie – diagonalizację (oraz jej uogólnienie, czyli Twierdzenie Jordana). W niniejszym rozdziale pokażemy jak wykorzystać diagonalizację oraz Twierdzenie spektralne do analizy macierzy prostokątnych. Pierwszym krokiem w tym kierunku będzie przekształcenie macierzy prostokątnej w pewną macierz kwadratową (najlepiej symetryczną), którą umiemy diagonalizować.

Fakt 4.55: Konstrukcja macierzy kwadatowych

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą prostokątną. Wówczas:

1) macierze $AA^\top \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ oraz $A^\top A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są kwadratowymi macierzami symetrycznymi;
2) wszystkie wartości własne macierzy $AA^\top$ i $A^\top A$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi (tzn. macierze te są dodatnio półokreślone);
3) niezerowe wartości własne macierzy $AA^\top$ i $A^\top A$ są takie same i mają takie same krotności;
4) jeśli v jest wektorem własnym macierzy $A^\top A$ dla niezerowej wartości własnej λ to $u = Av$ jest wektorem własnym macierzy $AA^\top$ dla wartości własnej λ.

Dowód. (1) Symetryczność macierzy wynika z następującego rachunku:

$$(AA^\top)^\top = (A^\top)^\top \cdot A^\top = AA^\top$$
$$(A^\top A)^\top = A^\top \cdot (A^\top)^\top = A^\top A$$

(2) Ponieważ macierze $AA^\top$ i $A^\top A$ są (kwadratowymi) macierzami symetrycznymi, więc zgodnie z Twierdzeniem spektralnym wszystkie ich wartości własne są rzeczywiste. Niech zatem $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną macierzy $A^\top A$, zaś $v \in \mathbb{R}^n$ odpowiadającym jej (niezerowym) wektorem własnym. Wówczas $A^\top Av = \lambda v$, więc dla $u = Av \in \mathbb{R}^m$ ze wzoru (4.30) dostajemy:

$$\lambda|v|^2 = \lambda\langle v, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, A^\top Av\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle u, u\rangle = |u|^2$$

skąd

$$\lambda = \frac{|u|^2}{|v|^2} \geq 0$$

Uzasadnienie dla macierzy $AA^\top$ jest analogiczne.
(3) i (4) Niech $v \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem własnym macierzy $A^\top A$ dla wartości własnej $\lambda > 0$. Oznacza to, że:

$$A^\top Av = \lambda v$$

Wówczas:

$$(AA^\top) \cdot (Av) = A(A^\top Av) = A \cdot \lambda v = \lambda \cdot Av$$

czyli wektor $u = Av$ jest wektorem własnym macierzy $AA^\top$ dla wartości własnej λ. Wektor u jest wektorem niezerowym, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $\lambda v = A^\top Av = A^\top \cdot 0 = 0$, wbrew założeniu. Wobec tego λ jest wartością własną macierzy $AA^\top$. Podobnie pokazujemy, że każda niezerowa wartość własna macierzy $AA^\top$ jest również wartością własną macierzy $A^\top A$. Sprawdzenie, że krotności niezerowych wartości własnych macierzy $AA^\top$ i $A^\top A$ są jednakowe, pomijamy. □

Przykład 1

Dla każdej z podanych macierzy A wyznaczyć macierze $AA^\top$ i $A^\top A$ oraz ich wartości własne.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. (a) Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ mamy:

$$AA^\top = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Jedyną wartością własną macierzy 1×1 jest jej jedyny wyraz, czyli $\lambda_1 = 14$. Dla drugiej macierzy otrzymujemy $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(b) Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mamy:

$$AA^\top = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad A^\top A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Obie macierze mają wartości własne $\lambda_1 = 9$ i $\lambda_2 = 4$.

(c) Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ mamy:

$$AA^\top = \begin{pmatrix} 40 & 8 & -28 \\ 8 & 16 & -20 \\ -28 & -20 & 34 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad A^\top A = \begin{pmatrix} 45 & -27 \\ -27 & 45 \end{pmatrix}$$

Pierwsza z macierzy ma wartości własne $\lambda_1 = 72$, $\lambda_2 = 18$ i $\lambda_3 = 0$, zaś druga ma wartości własne $\lambda_1 = 72$, $\lambda_2 = 18$.

Rozważaną dotychczas (kwadratową) macierz diagonalną będziemy traktować jako szczególny przypadek prostokątnej macierzy diagonalnej:

Definicja 4.56: Prostokątna macierz diagonalna

Prostokątną macierzą diagonalną nazywamy taką macierz $\Sigma = (s_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, dla której $s_{ij} = 0$ dla wszystkich takich par indeksów (i, j), że $i \neq j$.

Oczywiście macierz diagonalna (kwadratowa) to szczególny przypadek prostokątnej macierzy diagonalnej. Przykłady prostokątnych macierzy diagonalnych, które nie są macierzami kwadratowymi to:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Niniejszy rozdział poświęcony będzie uogólnieniu Twierdzeń 4.48, 4.49 i 4.52 na macierze prostokątne. Prostokątna macierz diagonalna będzie w tych uogólnieniach pełniła taką samą rolę, jak macierz diagonalna w przywoływanych twierdzeniach.

Fakt 4.57: Prostokątna macierz diagonalna

Niech $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ będzie prostokątną macierzą diagonalną, a niezerowe wyrazy na jej przekątnej to $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Wówczas każda z macierzy $\Sigma\Sigma^\top$ oraz $\Sigma^\top\Sigma$ jest (kwadratową) macierzą diagonalną, a niezerowe wyrazy na jej przekątnej to $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$.

Dowód. Wykonując mnożenie otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_n^2 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Podobna sytuacja ma miejsce, gdy wymnożymy czynniki w odwrotnej kolejności. □

Poniższe twierdzenie można traktować jako uogólnienie Twierdzenia spektralnego (Twierdzenia 4.48) na przypadek macierzy prostokątnych.

Twierdzenie 4.58: Rozkład SVD (wersja macierzowa)

Dla dowolnej macierzy (prostokątnej) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ istnieje rozkład (zwany *rozkładem według wartości osobliwych* lub *SVD*[6]):

$$A = U\Sigma V^\top \tag{4.35}$$

gdzie $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ to prostokątna macierz diagonalna[7], natomiast $U \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ i $V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ to (kwadratowe) macierze ortogonalne. Ponadto:

1) niezerowe wyrazy $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ na przekątnej macierzy Σ to pierwiastki z niezerowych wartości własnych macierzy $AA^\top$ (i równocześnie $A^\top A$),
2) kolumny $u_1, \ldots, u_k$ macierzy U to wektory własne macierzy $AA^\top$ odpowiadające wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$,
3) kolumny $v_1, \ldots, v_k$ macierzy V to wektory własne macierzy $A^\top A$ odpowiadające wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$,
4) zachodzi warunek $\sigma_i u_i = Av_i$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Liczby $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ nazywamy *wartościami osobliwymi* macierzy A.

Zauważmy, że jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą symetryczną (kwadratową) (tzn. $A^\top = A$), to wzór (4.35) przyjmuje postać:

$$A = UDU^\top = UDU^{-1}$$

gdzie D jest kwadratową macierzą diagonalną, a kolumny $u_1, \ldots, u_n$ macierzy U to wektory własne macierzy $AA^\top = A^\top A = A^2$ odpowiadające wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, czyli wektory własne macierzy A odpowiadające wartościom własnym $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Oznacza to, że dla macierzy symetrycznych (kwadratowych) wartości osobliwe są tym samym co wartości własne, a wzór (4.35) jest tożsamy ze wzorem (4.32).

[6] SVD to skrót od *Singular Values Decomposition*, czyli *rozkład według wartości osobliwych*.

[7] Tradycyjnie przyjmujemy, że wartości na przekątnej macierzy Σ są uporządkowane od największej do najmniejszej, w szczególności wyrazy zerowe znajdują się na końcu przekątnej.

Dowód. Ze wzoru (4.35), uwzględniwszy, że $U^\top = U^{-1}$ oraz $V^\top = V^{-1}$ (gdyż U i V to macierze ortogonalne) wynika:

$$AA^\top = (U\Sigma V^\top)(U\Sigma V^\top)^\top = U\Sigma(V^\top V)\Sigma^\top U^\top = U(\Sigma\Sigma^\top)U^\top = UD'U^{-1} \tag{4.36}$$

$$A^\top A = (U\Sigma V^\top)^\top(U\Sigma V^\top) = V\Sigma^\top(U^\top U)\Sigma V^\top = V(\Sigma^\top\Sigma)V^\top = VDV^{-1} \tag{4.37}$$

Macierze $AA^\top \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ i $A^\top A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są macierzami kwadratowymi, natomiast macierze $D' = \Sigma\Sigma^\top \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ oraz $D = \Sigma^\top\Sigma \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są, zgodnie z Faktem 4.57, (kwadratowymi) macierzami diagonalnymi, których niezerowe wyrazy to $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$. Wobec tego (4.36) i (4.37) to diagonalizacje macierzy $AA^\top$ i $A^\top A$. W szczególności prawdziwe są własności (1), (2), (3). Z (4.35) wynika również:

$$AV = (U\Sigma V^\top)\cdot V = U\Sigma\cdot(V^{-1}V) = U\Sigma$$

skąd otrzymujemy (4) (kolumnami macierzy AV są wektory $Av_1, \ldots, Av_k$, a kolumnami macierzy $U\Sigma$ są wektory $\sigma_1 u_1 \ldots, \sigma_k u_k$).
Z drugiej strony warunki (1)–(4) wyznaczają macierze U, V, Σ, za wyjątkiem tych kolumn macierzy U i V, które odpowiadają zerowym wyrazom macierzy Σ. Ponieważ wartości tych kolumn nie wpływają na wynik iloczynu $U\Sigma V^\top$, więc rozkład (4.35) można skonstruować w następujący sposób:

1) diagonalizujemy macierz symetryczną $A^\top A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tzn. przedstawiamy w postaci $A^\top A = VDV^{-1}$, tak żeby macierz $V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ była macierzą ortogonalną (tzn. wektory własne $v_1, \ldots, v_n$ tworzyły bazę ortonormalną), a wyrazy na przekątnej macierzy D były uporządkowane malejąco – w ten sposób wyznaczamy macierz V;
2) przyjmujemy za $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ macierz, której niezerowymi wyrazami $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ na przekątnej są pierwiastki niezerowych wyrazy macierzy D;
3) przyjmujemy za kolumny $u_1, \ldots, u_k$ macierzy U wektory $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i$ i uzupełniamy w dowolny sposób do macierzy ortogonalnej (tzn. do bazy ortonormalnej).

Jedynym pozostałym do sprawdzenia warunkiem jest to, że otrzymane wektory $u_1, \ldots, u_k$ są parami prostopadłe i mają długości 1:

$$\langle u_i, u_j\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle Av_i, Av_j\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, A^\top Av_j\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, \sigma_j^2 v_j\rangle = \begin{cases} 0, \text{ gdy } i \neq j \\ 1, \text{ gdy } i = j \end{cases}$$

□

Przykład 2
Wyznaczyć wartości osobliwe każdej z poniższych macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Jedyną wartością własną macierzy $AA^\top = (14)$ jest $\lambda_1 = 14$, więc jedyna wartość osobliwa macierzy A to $\sigma_1 = \sqrt{14}$.
Wartości własne macierzy $BB^\top = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ to $\lambda_1 = 9$ i $\lambda_2 = 4$, więc wartości osobliwe macierzy B to $\sigma_1 = 3$ i $\sigma_2 = 2$.
Wartości własne macierzy $CC^\top = \begin{pmatrix} 40 & 8 & -28 \\ 8 & 16 & -20 \\ -28 & -20 & 34 \end{pmatrix}$ to $\lambda_1 = 72$, $\lambda_2 = 18$ i $\lambda_3 = 0$, więc

wartości osobliwe macierzy C to $\sigma_1 = 6\sqrt{2}$ i $\sigma_2 = 3\sqrt{2}$.
Zwróćmy uwagę, że zamiast macierzy $AA^\top$, $BB^\top$ i $CC^\top$ w powyższych rachunkach moglibyśmy użyć macierzy $A^\top A$, $B^\top B$ i $C^\top C$.

Przykład 3
Sprawdź, które z poniższych rozkładów to rozkłady SVD:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^\top \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^\top$$

Rozwiązanie. W każdym z podanych rozkładów mnożenie macierzy jest wykonalne. Ponadto środkowa macierz (potencjalna macierz Σ) jest prostokątną macierzą diagonalną o nieujemnych wyrazach, a skrajne macierze (potencjalne U i $V^\top$) są macierzami kwadratowymi. Pozostaje do sprawdzenia, czy skrajne macierze są macierzami ortogonalnymi, tzn. mają kolumny parami prostopadłe i długości 1. Jest to prawdą w odniesieniu do rozkładu macierzy A (zatem jest to rozkład SVD), natomiast nie jest to prawdą w odniesieniu do rozkładu macierzy B (zatem nie jest to rozkład SVD).

Przykład 4
Wyznacz rozkład SVD macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 20 & 10 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wartościami własnymi macierzy $A^\top A = \begin{pmatrix} 468 & 324 \\ 324 & 657 \end{pmatrix}$ są $\lambda_1 = 900$ oraz $\lambda_2 = 225$. Stąd wartościami osobliwymi macierzy A są $\sigma_1 = 30$ oraz $\sigma_2 = 15$. Wobec tego:

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^\top$$

Wektory własne macierzy $A^\top A$ to $\binom{3}{4}$ i $\binom{-4}{3}$. Kolumny macierzy V muszą być długości 1, stąd po unormowaniu tych wektorów otrzymujemy $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Zgodnie z Twierdzeniem 4.58(4) dostajemy $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} \cdot Av_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ oraz $u_2 = \frac{1}{\sigma_2} \cdot Av_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Stąd:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & u_{13} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & u_{23} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^\top$$

Wektor $u_3 = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$ jest dowolnym wektorem, dla którego macierz U jest ortogonalna, np. $u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Poniższe twierdzenie jest przekształceniową wersją Twierdzenia 4.58 i można je traktować jako uogólnienie Twierdzenia 4.49.

Twierdzenie 4.59: Rozkład SVD (wersja przekształceniowa)

Dla dowolnego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ istnieją: baza ortonormalna $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz baza ortonormalna $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$ takie, że $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ jest prostokątną macierzą diagonalną.

Dowód. Niech $A = m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F)$ będzie macierzą przekształcenia F w bazach standardowych $\mathcal{E}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{E}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Zgodnie z Twierdzeniem 4.58:

$$m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) = U\Sigma V^\top$$

Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą (ortonormalną) przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożoną z kolumn macierzy V, zaś $\mathcal{C}$ – bazą (ortonormalną) przestrzeni $\mathbb{R}^m$ złożoną z kolumn macierzy U. Wówczas:

$$m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{id}) = U \qquad \text{oraz} \qquad m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = V$$

Zgodnie ze wzorem (1.8):

$$m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = m^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) \cdot m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) \cdot m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = U^{-1} \cdot U\Sigma V^\top \cdot V = \Sigma \cdot V^{-1}V = \Sigma$$

co oznacza, że $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F)$ jest prostokątną macierzą diagonalną. □

Fakty 4.50(2) oraz 4.51 można uogólnić na macierze prostokątne. Dowody tych uogólnień są analogiczne do dowodów przywoływanych faktów:

Fakt 4.60: Macierz rzędu 1

Niech $u \in \mathbb{R}^m$ oraz $v \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$u \cdot v^\top \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \tag{4.38}$$

jest macierzą rzędu 1 (o ile $u \neq 0$ i $v \neq 0$). Co więcej, każda macierz rzędu 1 jest postaci (4.38), dla pewnych wektorów u i v.

Fakt 4.61: Macierz prostokątna $AB^\top$

Niech $A = (A_1, \ldots, A_k) \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ oraz $B = (B_1, \ldots, B_k) \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ będą dowolnymi macierzami. Wówczas:

$$A \cdot B^\top = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot B_i^\top \tag{4.39}$$

Fakt 4.60 można w następujący sposób uogólnić:

Fakt 4.62: Macierz rzędu co najwyżej k

Niech $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^m$ oraz $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Oznaczmy $U = (u_1, \ldots, u_k) \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ oraz $V = (v_1, \ldots, v_k) \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$. Wówczas:

$$U \cdot V^\top = u_1v_1^\top + \cdots + u_kv_k^\top \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \tag{4.40}$$

jest macierzą rzędu co najwyżej k. Co więcej, każda macierz rzędu co najwyżej k jest postaci (4.40), dla pewnych wektorów $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$.

Dowód. Wzór (4.40) otrzymujemy ze wzoru (4.39). Macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ jest rzędu co najwyżej k wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej kolumna jest kombinacją liniową pewnych (ustalonych) wektorów $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^m$. Wobec tego macierz:

$$P = u_1 v_1^\top + \cdots + u_k v_k^\top$$

jest rzędu co najwyżej k, bo każda jej kolumna jest kombinacją liniową wektorów $u_1, \ldots, u_k$. Z drugiej strony każdą macierz rzędu co najwyżej k można zapisać w postaci (4.40), gdzie $u_1, \ldots, u_k$ to wektory rozpinające przestrzeń kolumn macierzy, a współrzędne wektorów $v_1, \ldots, v_k$ to współczynniki odpowiednich kombinacji liniowych. □

Twierdzenie 4.63: Rozkład SVD (wersja wektorowa)

Dana jest macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Niech $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$ będą wszystkimi niezerowymi wartościami osobliwymi macierzy A (licząc z krotnościami). Wówczas:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\top + \cdots + \sigma_k u_k v_k^\top \tag{4.41}$$

gdzie $u_1, \ldots, u_k$ to parami prostopadłe wektory własne długości 1 macierzy $AA^\top$ odpowiadające, odpowiednio, wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$, natomiast $v_1, \ldots, v_k$ to parami prostopadłe wektory własne długości 1 macierzy $A^\top A$ odpowiadające, odpowiednio, wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$.

Dowód. Wzór (4.41) to po prostu wzór (4.35) przepisany z użyciem wzoru (4.39). Przyjmując za $V = (v_1, \ldots, v_n)$ oraz $U = (u_1, \ldots, u_m)$ macierze z rozkładu SVD:

$$A = U\Sigma V^\top$$

otrzymujemy $U\Sigma = (\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_m u_m)$, gdzie, jeśli $m > k$, przyjmujemy $\sigma_{k+1} = \ldots = \sigma_m = 0$. Wobec tego, zgodnie ze wzorem (4.39):

$$A = U\Sigma V^\top = (\sigma_1 u_1, \ldots, \sigma_m u_m) \cdot (v_1, \ldots, v_n)^\top = \sigma_1 u_1 v_1^\top + \cdots + \sigma_k u_k v_k^\top$$

□

Fakt 4.62 w połączeniu ze wzorem (4.41) częściowo wyjaśnia następujące ważne twierdzenie (które pozostawimy bez dowodu):

Twierdzenie 4.64: Eckarta–Younga o aproksymacji macierzą niskiego rzędu

Dana jest macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Niech $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > 0$ będą wszystkimi niezerowymi wartościami osobliwymi macierzy A (licząc z krotnościami). Wówczas najlepszym przybliżeniem macierzy A macierzą rzędu $r < k$ jest:

$$A \approx \sigma_1 u_1 v_1^\top + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\top$$

gdzie $u_1, \ldots, u_k$ to parami prostopadłe wektory własne długości 1 macierzy $AA^\top$ odpowiadające, odpowiednio, wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$, natomiast $v_1, \ldots, v_k$ to parami prostopadłe wektory własne długości 1 macierzy $A^\top A$ odpowiadające, odpowiednio, wartościom własnym $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$.

Przykład 5

Dany jest rozkład SVD macierzy $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 \\ -6 & -12 & -3 \\ -2 & -4 & -13 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{\top}$$

Znajdź najlepsze przybliżenie A macierzą rzędu 2.
Rozwiązanie. Powyższy rozkład SVD można zapisać w postaci:

$$A = 24 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{\top} + 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{\top} + 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{\top}$$

Zgodnie z Twierdzeniem 4.64 otrzymujemy przybliżenie macierzą rzędu 2:

$$A \approx 24 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{\top} + 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że żaden wyraz otrzymanego przybliżenia nie różni się o więcej niż 2 od oryginalnej macierzy A.

Drugim ważnym zastosowaniem rozkładu SVD jest problem wyznaczania wektora, który jest najbardziej wydłużany przez przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadane macierzą $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Innymi słowy, szukamy niezerowego wektora $v \in \mathbb{R}^n$, dla którego „współczynnik wydłużania" przez przekształcenie F_A:

$$t_v = \frac{|Av|}{|v|}$$

jest największy. Zauważmy, że współczynnik ten jest jednakowy dla współliniowych wektorów, gdyż:

$$t_{\alpha v} = \frac{|A \cdot \alpha v|}{|\alpha v|} = \frac{|\alpha \cdot Av|}{|\alpha \cdot v|} = \frac{|\alpha| \cdot |Av|}{|\alpha| \cdot |v|} = \frac{|Av|}{|v|} = t_v$$

Wobec tego w rzeczywistości szukamy nie pojedynczego wektora, ale kierunku, w którym wektory wydłużane są najbardziej. Rozwiązanie tego problemu podaje następujący fakt:

Fakt 4.65: Wektory osobliwe

Dana jest macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Niech $A = U\Sigma V^{\top}$ będzie rozkładem SVD macierzy A, gdzie $V = (v_1, \ldots, v_n)$. Wówczas:

$$\max_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|Av|}{|v|} = \sigma_1$$

gdzie σ_1 to największa wartość osobliwa macierzy A oraz maksimum to jest osiągane dla wektorów współliniowych z wektorem v_1 (przypisanym do wartości osobliwej σ_1).

Przykład 6

Znajdź wektor najbardziej wydłużany przez przekształcenie $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, gdzie macierz A jest macierzą z Przykładu 3.

Rozwiązanie. Wykorzystując rozkład SVD z Przykładu 3 otrzymujemy, że szukanym wektorem jest każdy wektor równoległy do $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (tzn. do wektora macierzy V odpowiadającego największej z wartości osobliwych), czyli tym samym każdy wektor równoległy do $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zauważmy, że zgodnie z Faktem 4.65:

$$|A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 36 \\ -36 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix}| = 72 = 24 \cdot |\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}|$$

czyli znaleziony wektor jest wydłużany przez przekształcenie F_A dokładnie 24 razy (gdzie 24 to największa z wartości osobliwych macierzy A).

Dla zainteresowanych...

Innym zastosowaniem rozkładu SVD jest przybliżone rozwiązywanie liniowych układów równań. Rozważmy następujący przykład: odbiornik GPS próbuje wyznaczyć swoje położenie w oparciu o sygnał z satelitów. W pewnym uproszczeniu działa on w ten sposób, że znając położenie $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ i-tego satelity ($i = 1, \dots, n$) oraz wyznaczając (w oparciu o zmierzony czas upływający od nadania sygnału przez satelitę do jego odebrania przez odbiornik GPS) odległość d_i od i-tego satelity, wyznacza swoje położenie $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = d_1^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = d_2^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 + (z-c_n)^2 = d_n^2 \end{cases}$$

Jest to układ równań kwadratowych, ale odejmując stronami pierwsze równanie od każdego z pozostałych otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = d_1^2 \\ 2(a_1-a_2)x + 2(b_1-b_2)y + 2(c_1-c_2)z = (d_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - (d_1^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2(a_1-a_n)x + 2(b_1-b_n)y + 2(c_1-c_n)z = (d_n^2 - a_n^2 - b_n^2 - c_n^2) - (d_1^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) \end{cases}$$

Pomińmy chwilowo pierwsze równanie i skupmy się na pozostałym układzie $(n-1)$ równań z 3 niewiadomymi. Zauważmy, że dla $n-1=3$ nasz układ (najprawdopodobniej) ma jednoznaczne rozwiązanie, natomiast dla $n-1>3$ z dużym prawdopodobieństwem jest to układ sprzeczny (problemem są niedokładności pomiarów). Moglibyśmy pominąć „nadmiarowe" równania, ale oznaczałoby to pozbycie się części zebranych informacji (podczas gdy oczekujemy, że położenie wyznaczone w oparciu o sygnał z większej liczby satelitów będzie dokładniejsze). Problem sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad AX = b$$

w sytuacji, gdy $m > n$ (równań jest więcej niż niewiadomych), a równania są prawdziwe „z pewną dokładnością” (co jest typową sytuacją w praktyce). Wobec „przybliżonej” prawdziwości równań nie szukamy zmiennych $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ spełniających badany układ (z uwagi na dużą liczbę równań układ najpewniej jest sprzeczny), tylko zmiennych „najlepiej pasujących” do tego układu. Formalizując: zamiast szukać X spełniającego układ:

$$AX - b = 0$$

szukamy X, dla którego długość wektora $|AX - b|$ jest najmniejsza. Rozwiązanie takie podaje następujący fakt:

Fakt 4.66: Pseudo-odwrotność macierzy prostokątnej

Dana jest macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ oraz wektor $b \in \mathbb{R}^m$. Niech

$$A = U\Sigma V^\top$$

będzie rozkładem SVD macierzy A, a $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ kolejnymi niezerowymi wyrazami na przekątnej macierzy $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Oznaczmy przez $\Sigma^+ \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ prostokątną macierz diagonalną, której kolejnymi niezerowymi wyrazami na przekątnej są $\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_k^{-1}$. Wówczas wektor $X \in \mathbb{R}^n$, dla którego długość $|AX - b|$ jest najmniejsza, to wektor:

$$X = V\Sigma^+U^\top \cdot b$$

Macierz $A^+ = V\Sigma^+U^\top$ nazywamy *pseudo-odwrotnością* macierzy A.

Zauważmy, że jeśli Σ jest odwracalną macierzą kwadratową (tzn. macierzą kwadratową o niezerowych wyrazach na przekątnej), to $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$ oraz:

$$X = V\Sigma^{-1}U^\top \cdot b = V\Sigma^{-1}U^{-1} \cdot b = (U\Sigma V^{-1})^{-1} \cdot b = (U\Sigma V^\top)^{-1} \cdot b = A^{-1}b$$

co jest rozwiązaniem równania $AX = b$.
Rozważmy teraz przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} 10x + 8y + 5z = 9 \\ -6x - 12y - 3z = 0 \\ -2x - 4y - 13z = 0 \\ -2x + 8y + 11z = -6 \end{cases} \tag{4.42}$$

Układ (4.42) jest układem sprzecznym, gdyż układ złożony z pierwszych trzech równań ma jedno rozwiązanie: $x = 1.5$, $y = -0.75$, $z = 0$, ale rozwiązanie to nie spełnia czwartego równania. Potraktujmy wobec tego układ (4.42) jako przybliżony układ równań i wyznaczmy „najlepiej pasujące” rozwiązanie. W tym celu wyznaczamy rozkład SVD macierzy A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^\top$$

oraz pseudo-odwrotność macierzy A:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \frac{13}{144} & \frac{1}{48} & -\frac{5}{144} & -\frac{11}{144} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{72} & \frac{1}{24} & -\frac{5}{72} & \frac{1}{72} \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$X = A^+ b = A^+ \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.271 \\ -0.583 \\ 0.042 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że dla $x = 1.271$, $y = -0.583$, $z = 0.042$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} 10x + 8y + 5z = 8.25 \\ -6x - 12y - 3z = -0.75 \\ -2x - 4y - 13z = -0.75 \\ -2x + 8y + 11z = -6.75 \end{cases}$$

Zadania

0 STRUKTURY ALGEBRAICZNE

Dodawanie (abstrakcyjne). Mnożenie (abstrakcyjne). Mnożenie przez skalar (abstrakcyjne). Potęgowanie. Zbiory z dwoma lub trzema działaniami. Przykłady: wektory, macierze, funkcje, wielomiany, ciągi.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyznacz sumę funkcji $f+g$, iloczyn funkcji $f \cdot g$ oraz wynik mnożenia funkcji przez skalar $2 \cdot f$ dla następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, (b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$.

2. Wyznacz sumę ciągów $(a_n)_{n=0}^{\infty} + (b_n)_{n=0}^{\infty}$, iloczyn ciągów $(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot (b_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz wynik mnożenia ciągu przez skalar $3 \cdot (a_n)_{n=0}^{\infty}$ dla następujących ciągów:

(a) $a_n = 2n+1$, $b_n = n^2 - n$, (b) $a_n = 3^n$, $b_n = 2^n$.

3. Wyznacz sumę macierzy $A+B$, iloczyn macierzy $A \cdot B$ oraz wynik mnożenia macierzy przez skalary $2 \cdot A$ dla następujących macierzy:

(a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Wyznacz potęgi A^2 i A^3 dla następujących macierzy:

(a) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Zadania domowe

5. Niech M będzie zbiorem wszystkich macierzy o wyrazach rzeczywistych. Które z trzech operacji (dodawanie macierzy, mnożenie macierzy, mnożenie macierzy przez skalary) są zdefiniowane na następujących zbiorach:

(a) M, (b) $M_{n \times n}$, (c) $M_{m \times n}$, dla $m \neq n$.

6. Które z trzech operacji (dodawanie wielomianów, mnożenie wielomianów, mnożenie wielomianów przez skalary) są zdefiniowane na następujących zbiorach wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:

(a) $\mathbb{R}[x]$ (wszystkie wielomiany),

(b) $\mathbb{R}_n[x]$ (wielomiany stopnia nie większego niż n),

(c) wielomiany stopnia równego n.

7. Które z trzech operacji (dodawanie funkcji, mnożenie funkcji, mnożenie funkcji przez skalary) są zdefiniowane na zbiorze wszystkich funkcji postaci:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

8. Które z wymienionych podzbiorów zbioru $C(\mathbb{R})$ ciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są zamknięte na dodawanie, które są zamknięte na mnożenie, a które są zamknięte na mnożenie przez skalary:

(a) zbiór $C^1(\mathbb{R})$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których pochodna f' istnieje i jest ciągła,

(b) zbiór $C^2(\mathbb{R})$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których druga pochodna f'' istnieje i jest ciągła,

(c) zbiór $C^\infty(\mathbb{R})$ funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których istnieją pochodne wszystkich rzędów,

(d) zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są ograniczone,

(e) zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są nieograniczone,

(f) zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$,

(g) zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

9. Które z wymienionych podzbiorów zbioru $M_{3\times 3}$ macierzy rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych są zamknięte na dodawanie, które są zamknięte na mnożenie, a które są zamknięte na mnożenie przez skalary:

(a) zbiór macierzy diagonalnych,

(b) zbiór macierzy górnotrójkątnych,

(c) zbiór macierzy symetrycznych,

(d) zbiór macierzy o wyznaczniku 1,

(e) zbiór macierzy o śladzie 0.

10. Które z wymienionych podzbiorów zbioru ciągów o wyrazach rzeczywistych są zamknięte na dodawanie, które są zamknięte na mnożenie, a które są zamknięte na mnożenie przez skalary:

(a) zbiór ciągów zbieżnych,

(b) zbiór ciągów rozbieżnych,

(c) zbiór ciągów ograniczonych,

(d) zbiór ciągów nieograniczonych,

(e) zbiór ciągów o granicy 0,

(f) zbiór ciągów o granicy 1.

11. Ustal, które z poniższych zbiorów są zamknięte na dodawanie i mnożenie przez skalar:

(a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(3) = 0\}$,

(b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(3) = 1\}$,

(c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(3) \geq f(0)\}$,

(d) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) \geq 0\}$,

(e) $\{(a_n) : a_3 = 1\}$,

(f) $\{(a_n) : a_2 = a_5 = 0\}$,

(g) $\{(a_n) : a_1 + a_2 + a_7 = 0\}$,

(h) $\{(a_n) : a_1 + a_2 + a_7 = 1\}$,

(i) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$,

(j) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$,

(k) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0\}$,

(l) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 1\}$,

(m) $\{P \in \mathbb{R}[x] : P'(2) = 0\}$,

(n) $\{P \in \mathbb{R}[x] : P'(2) = 3\}$,

(o) $\{P \in \mathbb{R}[x] : P'(-1) + P(1) = 0\}$,

(p) $\{P \in \mathbb{R}[x] : P'(1) + P'(-1) = 4\}$,

(q) $\{A \in M_{3\times 3} : \operatorname{tr} A = 0\}$,

(r) $\{A \in M_{3\times 3} : \operatorname{tr} A = 1\}$,

(s) $\{A \in M_{3\times 3} : \det A = 0\}$,

(t) $\{A \in M_{3\times 3} : A = -A^\top\}$.

Zadania egzaminacyjne

12. Jeśli na zbiorze S zdefiniowane jest dodawanie i mnożenie przez skalary, to *kombinacją liniową* elementów $a, b \in S$ ze współczynnikami $s, t \in \mathbb{R}$ nazywamy element $s \cdot a + t \cdot b \in S$. Przedstaw:

(a) wielomian x^2+5x-2 w postaci kombinacji liniowej wielomianów x^2+1, $2x-1$, x^2+x+1,

(b) wielomian $x^3 + x^2 - 1$ w postaci kombinacji liniowej wielomianów $x^3 + x^2 + x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x + 1$, 1,

(c) macierz $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) macierz $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) funkcję $f(x) = \frac{2}{x(x+1)}$ w postaci kombinacji liniowej funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ i $h(x) = \frac{1}{x+1}$,

(f) funkcję $f(x) = \frac{x+3}{x(x+1)}$ w postaci kombinacji liniowej funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$ i $h(x) = \frac{1}{x+1}$.

(g) ciąg $a_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } 2|n \\ 1, & \text{gdy } 2\nmid n \end{cases}$ w postaci kombinacji liniowej ciągów $b_n = 1$ i $c_n = (-1)^n$,

13. Podaj przykład zbioru S z dodawaniem określonym w takim sposób, że S jest zamknięty na dodawanie, ale nie jest zamknięty na branie elementu przeciwnego.

Zadania z gwiazdką

14. Czy iloczyn wektorowy na $\mathbb{R}^3$ jest mnożeniem w rozumieniu Definicji 0.3?

15. Uzasadnij, że zbiór ciągów $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniających równanie rekurencyjne:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ dla każdego } n \geq 0$$

jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary.

1.1 PRZESTRZEŃ LINIOWA

Przestrzeń liniowa. Podprzestrzeń. Baza i wymiar. Współrzędne wektora.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wskaż bazę i wyznacz wymiar każdej z poniższych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\mathbb{R}^3$, (c) $\mathbb{R}_2[x]$, (d) $\mathbb{R}_3[x]$, (e) $M_{2\times 2}$, (f) $M_{3\times 3}$,

2. Wymień:

(a) wszystkie podprzestrzenie wymiaru 1 przestrzeni $\mathbb{R}^2$,

(b) wszystkie podprzestrzenie wymiaru 1 i 2 przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

3. Podaj po kilka przykładów podprzestrzeni każdej z następujących przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{R}^4$, (b) $\mathbb{R}_2[x]$, (c) $M_{2\times 2}$.

4. Wykorzystując rozwiązania zadań 8–11 z rozdziału 0 ustal, które z ze zbiorów wymienionych w tych zadaniach są przestrzeniami liniowymi.

5. Sprawdź, że każdy z poniższych zbiorów jest przestrzenią liniową, a następnie oblicz wymiar i wyznacz bazę tej przestrzeni:

(a) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(0) = 0\}$,

(b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$,

(c) $\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3\}$,

(d) $\{A \in M_{2\times 2} : \operatorname{tr} A = 0\}$,

(e) $\{A \in M_{3\times 3} : A = A^\top\}$,

(f) $\{A \in M_{3\times 3} : A \text{ jest diagonalna}\}$.

6. Wyznacz współrzędne podanego wektora w każdej z podanych baz:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$,

(b) $1 + x + x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, $\mathcal{C} = (1, x - 2, x^2 - 2x)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$,

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$, $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$,

Zadania domowe

7. Wskaż bazę i wyznacz wymiar każdej z poniższych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{R}^n$, (b) $\mathbb{R}_n[x]$, (c) $M_{m\times n}$, (d) $\mathbb{C}$.

8. Wskaż kilka przykładów podprzestrzeni wymiaru 1 oraz wymiaru 2 każdej z następujących przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{R}^4$, (b) $\mathbb{R}_2[x]$, (c) $M_{2\times 2}$.

9. Podaj po kilka przykładów podprzestrzeni każdej z następujących przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{R}^n$, (b) $\mathbb{R}_n[x]$, (c) $\mathbb{R}[x]$, (d) $M_{n\times n}$, (e) $C(\mathbb{R})$, (f) $C(0,1)$.

10. Sprawdź, że każdy z poniższych zbiorów jest przestrzenią liniową, a następnie oblicz wymiar i wyznacz bazę tej przestrzeni:

(a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$,
(b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 5y = 0\}$,
(c) $\{P \in \mathbb{R}_2[x] : P'(2) = 0\}$,
(d) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P'(-1) = P(1) = 0\}$,
(e) $\{P \in \mathbb{R}_4[x] : P(1) = P'(1) = P''(1)\}$,
(f) $\{A \in M_{3\times 3} : A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0\}$,

11. Podaj kilka przykładów takich zbiorów D i C, dla których na zbiorze wszystkich funkcji postaci $f : D \to C$ można wprowadzić strukturę przestrzeni liniowej.

12. Dla podanej przestrzeni liniowej V, jej bazy $\mathcal{B}$ oraz wektora $v \in V$ wyznacz współrzędne $[v]_{\mathcal{B}}$ wektora v w bazie $\mathcal{B}$.

(a) $V = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right))$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $V = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0\}$, $\mathcal{B} = (x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$,

(c) $V = \{A \in M_{2\times 2} : A^\top = A\}$, $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right))$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Zadania egzaminacyjne

13. Podaj wszystkie wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których podany podzbiór jest podprzestrzenią:

(a) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f'(a) = b\} \subset C^1(\mathbb{R})$

(b) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : axP'(x) + bP(x) = c\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

14. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Zidentyfikuj poniższe zbiory oraz uzasadnij, że są one podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$.

(a) $U = \{v \in \mathbb{R}^3 \colon F(v) = 0\}$,

(b) $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \colon F(v) = \lambda v\}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pewną ustaloną liczbą,

(c) $W = \{F(v) \colon v \in \mathbb{R}^3\}$.

15. Uzasadnij, że:

(a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\} < \mathbb{R}^n$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(x_0) = 0\} < C(\mathbb{R})$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$,

16. Wyznacz wszystkie podprzestrzenie przestrzeni:

(a) $\mathbb{R}^3$;

(b) $\mathbb{R}_1[x]$,

(c) $V = \{A \in M_{2\times 2} : A^\top = A\}$.

Zadania z gwiazdką

17. Uzasadnij, że $\{(a_n) : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ dla } n \geq 0\}$ jest przestrzenią liniową. Jaki jest wymiar tej przestrzeni?

1.2 BAZA

Zbiór generujący i zbiór liniowo niezależny. Dwie charakteryzacje liniowej niezależności. Wyznaczanie bazy.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź, które z poniższych zbiorów generują zadaną przestrzeń liniową:

(a) $x^2 + x + 1, x, 1 \in \mathbb{R}_2[x]$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3.$

2. Sprawdź, które z poniższych układów wektorów są liniowo niezależne:

(a) $x^2 + x, x + 1, x^2 - 1 \in \mathbb{R}_2[x]$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$

3. Wyznacz bazę i wymiar każdej z podanych przestrzeni liniowych.

(a) $\mathrm{Lin}\{x^2 + x + 1, x^2 - x + 1, 4x^2 + 2x + 4\} < \mathbb{R}_2[x]$

(b) $\mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\} < \mathbb{R}^4$

4. Przedstaw każdą z poniższych przestrzeni liniowych w postaci $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$.

(a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$

(b) $\{A \in M_{2\times 2} : A^\top = -A\}$

(c) $\{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(0) = 0\}$

Zadania domowe

5. Sprawdź, które z poniższych zbiorów generują zadaną przestrzeń liniową:

(a) $x^2 + x + 1, x + 2, x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3.$

6. Sprawdź, które z poniższych układów wektorów są liniowo niezależne:

(a) $1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3 \in \mathbb{R}[x]$,

(b) $\sin x, \cos x, \sin 2x \in C(\mathbb{R})$,

(c) $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x \in C(\mathbb{R})$.

7. Uzasadnij, że każdy z poniższych układów wektorów generuje podaną przestrzeń. Z każdego z tych układów wybierz bazę, a następnie wyznacz współrzędne w tej bazie podanego wektora.

(a) $x^2 + x + 1, x^2 - x + 2, 2x - 1, x^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x]$ oraz $P(x) = 2x^2 + 5x$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \{A \in M_{2\times 2} : A = A^\top\}$ oraz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

8. Uzasadnij, że każdy z poniższych układów wektorów to układ liniowo niezależny. Każdy z tych układów rozszerz do bazy, a następnie wyznacz współrzędne w tej bazie podanego wektora.

(a) $x^3+1, x^2+1 \in \mathbb{R}_3[x]$ oraz $P(x) = x^3+2x^2-x+1$,

(b) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ oraz $v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ oraz $A = \begin{pmatrix}1&3\\0&5\end{pmatrix}$,

9. Wyznacz bazę i wymiar każdej z podanych przestrzeni liniowych.

(a) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\} < \mathbb{R}^3$

(b) $\mathrm{Lin}\{x^3-2x+1, x^2-x, x^3+x^2-x-1, x-1\} < \mathbb{R}_3[x]$

(c) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3&2\\2&3\end{pmatrix}\right\} < M_{2\times 2}$

10. Uzasadnij, że podany układ wektorów stanowi bazę podanej przestrzeni liniowej.

(a) $(x^4+2x^3+3x^2+1, x^3+x^2-5x+2, x^2+7x-3, x+8, 1)$, $V = \mathbb{R}_4[x]$,

(b) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $V = \mathbb{R}^4$.

11. Przedstaw każdy z poniższych zbiorów w postaci przekroju dwóch lub więcej podprzestrzeni przestrzeni liniowej V i wywnioskuj stąd, że są one również podprzestrzeniami V.

(a) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(2) = P(3) = 0\}$,

(b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = f''(0) = 0\}$,

(c) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = x_1+3x_2+2x_3+4x_4 = x_1+5x_2-x_3+7x_4 = 0\right\}$.

12. Przedstaw każdą z poniższych przestrzeni liniowych w postaci $\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

(a) $\{A \in M_{2\times 2} : A = A^\top\}$

(b) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\right\}$

Zadania egzaminacyjne

13. Wskaż wszystkie wartości parametrów a i b, dla których podane wektory są liniowo niezależne:

(a) $ax^2+x+1,\ bx+1,\ x \in \mathbb{R}_2[x]$

(b) $\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&b\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

14. Dana jest przestrzeń liniowa $V = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\right\}$. Podaj taki układ wektorów przestrzeni V, który:

(a) jest liniowo niezależny, ale nie jest bazą;

(b) jest zbiorem generującym, ale nie jest bazą.

15. Podaj przykład takich wektorów $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, że każde dwa z nich tworzą zbiór liniowo niezależny, ale wszystkie trzy tworzą zbiór liniowo zależny.

Zadania z gwiazdką

16. Wskaż nieskończony liniowo niezależny zbiór wektorów w każdej z poniższych przestrzeni oraz ustal, czy wskazany zbiór jest zbiorem generującym:

(a) $\mathbb{R}[x]$, (b) $C(\mathbb{R})$, (c) $\{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}\}$.

1.3 PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Przekształcenia liniowe. Obraz i jądro. Twierdzenie o indeksie. Różnowartościowość i „na" dla przekształceń liniowych. Macierz przekształcenia. Macierze zmiany bazy. Macierz złożenia przekształceń. Izomorfizm.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź, które z poniższych przekształceń są przekształceniami liniowymi. Dla przekształceń liniowych, których dziedzina i przeciwdziedzina są skończonego wymiaru napisz macierz przekształcenia (w dowolnie wybranych bazach).

(a) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=x+2y-3z$, (b) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=x+1$,

(c) $F:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x)=P'(x)$, (d) $F:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x]$, $F(P)(x)=xP(x)$,

(e) $F:M_{2\times 2}\to M_{2\times 2}$, $F(A)=2\cdot A^\top$, (f) $F:M_{2\times 2}\to\mathbb{R}$, $F(A)=\det A$,

(g) $F:C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $F(f)=f(2)+f(3)$, (h) $F:C(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, $F(f)=\begin{pmatrix}f(2)\\f(3)\end{pmatrix}$.

2. Napisz macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia liniowego F w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, jeśli:

(a) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $F\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+2y\\x+y-z\end{pmatrix}$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$,

(b) $F:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x)=xP'(x)$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=(x^2,x,1)$,

(c) $F:M_{2\times 2}\to M_{2\times 2}$, $F(A)=2A+3A^T$, $\mathcal{B}=\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$,

(d) $F:M_{2\times 2}\to\mathbb{R}$, $F(A)=\operatorname{tr}A$, $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}=(1)$.

3. Napisz macierze zmiany bazy $m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ oraz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ dla następujących baz:

(a) $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ dla $\mathbb{R}^3$,

(b) $\mathcal{B}=(x^2,x,1)$ oraz $\mathcal{B}'=(x^2+2x,x+1,1)$ dla $\mathbb{R}_2[x]$,

(c) $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ oraz $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$ dla $M_{2\times 2}$

4. Dla każdej z poniższych przestrzeni wskaż izomorfizm z odpowiednią przestrzenią $\mathbb{R}^n$:

(a) $\mathbb{R}_n[x]$, (b) $M_{m\times n}$, (c) $\mathbb{C}$.

Zadania domowe

5. Sprawdź, które z poniższych przekształceń są przekształceniami liniowymi. Dla przekształceń liniowych, których dziedzina i przeciwdziedzina są skończonego wymiaru napisz macierz przekształcenia (w dowolnie wybranych bazach).

(a) $F:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_4[x]$, $F(P)(x)=P(x)\cdot(x^2+1)$,

(b) $F:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_4[x]$, $F(P)(x)=P(x)+(x^2+1)$,

(c) $F:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^3$, $F(P)=\begin{pmatrix}P(0)\\P(1)\\P(2)\end{pmatrix}$,

(d) $F:M_{2\times 2}\to M_{2\times 2}$, $F(A)=A-A^\top$,

(e) $F:M_{2\times 2}\to M_{2\times 2}$, $F(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$,

(f) $F:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $F(f)(x)=f(x)\cdot\sin x$,

(g) $F:C^1(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$, $F(f)=f'+f$,

(h) $F:\{(a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n) \text{ zbieżny}\}\to\mathbb{R}$, $F((a_n))=\lim_{n\to\infty}a_n$.

6. Napisz macierze przekształceń liniowych z zadania 2 w następujących bazach:

(a) $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$,

(b) $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = (x^2 + 2x, x + 1, 1)$,

(c) $\mathcal{B}' = \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$,

(d) $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C}' = (1)$.

7. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ma macierz:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}1&2&0\\3&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

Napisz macierze zmiany bazy $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ i $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ oraz macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ tego przekształcenia w bazie $\mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

8. Przekształcenie $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ w bazach $\mathcal{B} = (1, 2 - x, x + x^2, x^3)$ i $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ ma macierz:

$$m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&1&2&0\end{pmatrix}$$

Wyznacz:

(a) $F(1 + x + x^2)$, (b) $F(1 - 3x + x^3)$, (c) $F(x)$.

9. Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych wyznacz przestrzenie $\ker F$ i $\mathrm{Im} F$, ich bazy oraz ich wymiary. Ustal, które z przekształceń są różnowartościowe, które są „na”, a które są bijekcjami.

(a) $F : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $F(A) = A + A^\top$,

(b) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $F(P)(x) = xP'(x)$,

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}2x+y\\y+3z\end{pmatrix}\right)$,

(d) $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = z + \bar{z}$.

10. Napisz jawnym wzorem przekształcenie $G \circ F$ (pamiętając o podaniu dziedziny i przeciwdziedziny) dla następujących par przekształceń liniowych:

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = (x + 1) \cdot P''(x)$ oraz $G : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $G(P) = \begin{pmatrix}P(1)\\P(2)\end{pmatrix}$,

(b) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, $F(P) = \begin{pmatrix}P(0)\\P'(0)\\P''(0)\end{pmatrix}$ oraz $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = x + y + z$.

(c) $F : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $F(A) = A + 2A^\top$ oraz $G : M_{2\times2} \to \mathbb{R}$, $G(A) = \operatorname{tr} A$,

11. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowane $F(P) = \begin{pmatrix}P(1)\\P(2)\end{pmatrix}$ oraz przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times2}$ zdefiniowane $G(v) = v \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}^\top$.

(a) Napisz wzór przekształcenia $G \circ F$.

(b) Napisz macierze przekształceń $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$, $m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G)$, $m_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F)$ dla baz $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.

(c) Sprawdź prawdziwość wzoru (1.7) w rozważanym przykładzie.

Zadania egzaminacyjne

12. Napisz przekształcenie liniowe, którego jądrem jest podana przestrzeń oraz wyznacz wymiar tej przestrzeni. Pamiętaj o podaniu dziedziny i przeciwdziedziny.

(a) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$,

(b) $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$,

(c) $\{P \in \mathbb{R}_4[x] : P'(2) = 0\}$,

(d) $\{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = P(2) = 0\}$,

(e) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : xP'''(x) + P''(x) = 0\}$,

(f) $\{P \in \mathbb{R}_5[x] : P(-x) = P(x)\}$,

(g) $\{A \in M_{2\times 2} : A = A^\top\}$,

(h) $\{A \in M_{2\times 2} : A = 2 \cdot A^\top\}$.

(i) $\{f \in C^1(\mathbb{R}) : f(1) + f'(1) = 0\}$,

(j) $\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

13. Dana jest przestrzeń liniowa V, jej baza $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ oraz przekształcenie liniowe $F : V \to V$. Macierz przekształcenia F ma postać:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wyznacz $F(b_1 + b_2 + b_3)$.

14. Podaj przykład macierzy (w bazie standardowej) takiego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, którego jądrem jest prosta $\{t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\}$, a obrazem płaszczyzna o równaniu $2x + y - z = 0$. Sprawdź, że podana macierz spełnia zadane warunki.

15. Podaj wszystkie wartości parametrów c i d, dla których przekształcenie $F : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zdefiniowane wzorem $F(f)(x) = f(x + c) + d$ jest przekształceniem liniowym.

16. Dla każdej z poniższych przestrzeni wskaż izomorfizm z odpowiednią przestrzenią $\mathbb{R}^n$:

(a) $V = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$,

(b) $V = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0\}$,

(c) $V = \{A \in M_{2\times 2} : \operatorname{tr} A = 0\}$.

Zadania z gwiazdką

17. Udowodnij, że jeśli $v_1, \ldots, v_n \in V$ to układ liniowo zależnych wektorów, a $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ jest liniowo zależnym układem wektorów. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla układu liniowo niezależnego?

18. Niech P będzie wielomianem stopnia co najwyżej 5.

(a) Uzasadnij, że jeśli $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 0$, to P jest wielomianem zerowym.

(b) Definiując odpowiednie przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}^6$ i używając twierdzenia o indeksie wywnioskuj, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_6$ istnieje (jedyny) wielomian P stopnia co najwyżej 5 taki, że $P(1) = a_1, P(2) = a_2 \ldots, P(6) = a_6$.

19. Dany jest następujący układ równań, gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Wykaż, że zbiór rozwiązań $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tego układu jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz że wymiar tej podprzestrzeni wynosi przynajmniej $n - m$.

2.1 WYZNACZNIK MACIERZY

Wyznacznik macierzy. Wyznacznik macierzy klatkowej. Przekształcenie wieloliniowe. Wieloliniowość wyznacznika. Wpływ operacji elementarnych na wyznacznik. Rozwinięcie Laplace'a. Wyznacznik Vandermonde'a. Liniowa niezależność n wektorów w przestrzeni wymiaru n. Wzory Cramera. Lemat Wrońskiego.

Zadania rozgrzewkowe

1. Oblicz następujące wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

2. Uprość przy pomocy operacji elementarnych, a następnie oblicz następujące wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

3. Rozwiąż następujące układy równań przy pomocy metody Cramera:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ -3x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ 5x - 2y - 2t = 7 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3y - z = 2 \\ 4z + 3s = 1 \\ 2s - t = -1 \\ x + z + t = 1 \end{cases}$

4. Sprawdź przy pomocy wyznacznika, czy następujące układy wektorów stanowią bazę odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$,

5. Oblicz wyznacznik macierzy każdego z poniższych przekształceń w dowolnie wybranych bazach:

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $F(P)(x) = xP'(x)$,

(b) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P) = P(x) + P'(x) + P''(x)$,

(c) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $F(A) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$,

6. Przy pomocy wzorów Cramera znajdź wielomian stopnia co najwyżej 3, którego wykres przechodzi przez punkty: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 19 \end{smallmatrix}\right)$. W obliczeniach wykorzystaj wzór na wyznacznik Vandermonde'a.

Zadania domowe

7. Oblicz następujące wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

8. Uprość przy pomocy operacji elementarnych, a następnie oblicz następujące wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9. Ustal jak zmieni się wyznacznik macierzy rozmiaru $n \times n$, jeśli:

(a) każdy wyraz macierzy zamienimy na przeciwny,

(b) każdy wyraz macierzy przemnożymy przez niezerową liczbę $t \in \mathbb{R}$,

(c) kolumny macierzy ustawimy w odwrotnym porządku,

(d) cyklicznie zmienimy porządek wierszy macierzy, przenosząc pierwszy wiersz poniżej ostatniego.

10. Jak szybko obliczyć wyznacznik macierzy, w której:

(a) jedna z kolumn jest krotnością innej kolumny,

(b) jeden z wierszy jest krotnością innego wiersza?

11. Sprawdź, przy pomocy Lematu Wrońskiego, czy następujące układy elementów przestrzeni $C(\mathbb{R})$ są liniowo niezależne.

(a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$,

(b) $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$,

(c) $\sin x$, $\sin 2x$, $\cos x$, $\cos 2x$,

(d) $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$,

(e) e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}.

12. Wykorzystując wzór na wyznacznik Vandermonde'a wykaż, że dla dowolnych $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden wielomian P stopnia co najwyżej 4 spełniający warunek $P(1) = a$, $P(2) = b$, $P(4) = c$, $P(7) = d$, $P(8) = e$.

13. Sprawdź przy pomocy odpowiedniego wyznacznika, czy podane układy wektorów są układami wektorów liniowo niezależnych:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$,

(b) $1 + x + x^3, 2 - x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, 2x - x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$.

Zadania egzaminacyjne

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których wektory: $x^2 + px + 1, 2x^2 - x + 1, x^2 + 3x + 2 \in \mathbb{R}_2[x]$ są liniowo niezależne.

15. Wiadomo, że:

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 5c & 0 & 2c \\ d & 2d & 3d & d \end{pmatrix} = p$$

Wyraź przy pomocy p następujący wyznacznik:

$$\det \begin{pmatrix} a & a+b & 2d & 0 \\ a & a+2b & 4d & 5c \\ a & a & 6d & 0 \\ a & a & 2d & 2c \end{pmatrix}$$

16. Które z poniższych przekształceń są liniowe względem każdej współrzędnej?

(a) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(v, w) = v \circ w$,

(b) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $F(v, w) = v \times w$,

(c) $F : M_{n\times n} \times M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, gdzie $F(A, B) = AB$,

(d) $F : M_{n\times n} \times M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, gdzie $F(A, B) = A + B$,

(e) $F : C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, gdzie $F(f, g) = f \cdot g$.

17. Dane są wielomiany $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}_n[x]$, gdzie stopień wielomianu P_k wynosi k, dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Jaką postać ma macierz $A = ([P_0]_{\mathcal{B}}, [P_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [P_n]_{\mathcal{B}})$ dla bazy $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ i jakie ma to konsekwencje dla liniowej niezależności wektorów $P_0, P_1, \ldots, P_n$?

Zadania z gwiazdką

18. Uogólnij Fakt 2.11 w następujący sposób: dla dowolnych kwadratowych klatek $A \in M_{n\times n}$, $B \in M_{m\times m}$ oraz dowolnej prostokątnej klatki $C \in M_{n\times m}$ zachodzi wzór:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

19. Uzasadnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia $\leq n$, którego wykres przechodzi przez punkty $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$, o ile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są parami różne.

2.2 MACIERZ ODWROTNA

Macierz odwrotna. Przekształcenie odwrotne. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą operacji elementarnych. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą wyznacznikową. Operacje elementarne (wierszowe i kolumnowe) i ich macierze. Rząd macierzy. Minor. Liniowa niezależność k wektorów w przestrzeni wymiaru n.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyznacz macierz odwrotną do każdej z poniższych macierzy na dwa sposoby: (1) przy pomocy wyznaczników, (2) przy pomocy operacji elementarnych wierszowych:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Wyznacz macierz odwrotną do każdej z poniższych macierzy, korzystając z jej postaci klatkowej.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

3. Obliczając rząd odpowiedniej macierzy ustal, czy następujące układy wektorów to układy wektorów liniowo niezależnych:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$

4. Wskaż niezerowy minor maksymalnego stopnia dla każdej z poniższych macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Wyznacz rząd każdej z poniższych macierzy, zaczynając od uproszczenia macierzy przy pomocy operacji elementarnych:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Zadania domowe

6. Ustal rząd każdej z poniższych macierzy i wyznacz macierz odwrotną (jeśli istnieje).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 17 & 2 \end{pmatrix}$

7. Napisz taką macierz elementarną, że przemnożenie przez nią macierzy prostokątnej 3×4:

(a) zamienia drugi i trzeci wiersz,

(b) zamienia drugą i trzecią kolumnę,

(c) mnoży drugi wiersz przez 5,

(d) mnoży drugą kolumnę przez 5,

(e) dodaje do drugiego wiersza 4-krotność trzeciego wiersza,

(f) dodaje do drugiej kolumny 4-krotność trzeciej kolumny.

8. Dla każdej macierzy elementarnej E z zadania 7 znajdź macierz E^{-1}, sprawdź, że macierz E^{-1} też jest macierzą elementarną oraz podaj operację elementarną związaną z macierzą E^{-1}.

9. Podaj przykład odwracalnego przekształcenia liniowego $F : V \to W$ lub uzasadnij, że takie przekształcenie nie istnieje, jeśli:

(a) $V = M_{2\times 2}$, $W = \mathbb{R}^5$

(b) $V = M_{2\times 3}$, $W = M_{3\times 2}$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}_3[x]$

(d) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $W = \mathbb{R}^4$

10. Sprawdź, czy następujące wektory są liniowo niezależne, zapisując je w dowolnie wybranej bazie i wskazując niezerowy minor maksymalnego stopnia:

(a) $1 + x + 2x^3, 2 + x^2 + 2x^3, 1 - x^2 + x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

Zadania egzaminacyjne

11. Dla każdego z poniższych przekształceń napisz macierz przekształcenia F (w dowolnie wybranych bazach) oraz (jeśli przekształcenie jest odwracalne) wzór przekształcenia F^{-1} i macierz przekształcenia F^{-1} (w dowolnie wybranych bazach).

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $F(P)(x) = xP'(x) + P(1)$,

(b) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, $F(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(-1) \end{pmatrix}$,

(c) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $F(A) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $F : \mathbb{R}^2 \to W$, $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ -y-2x \end{pmatrix}$, gdzie $W = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

12. Uzasadnij, że dla dowolnych odwracalnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}$ zachodzą warunki:

(a) $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$

(b) $(ABA^{-1})^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$

13. Dana jest macierz postaci $P = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, gdzie $A, B \in M_{n\times n}$ to kwadratowe klatki. Wyraź $\operatorname{rank} P$ przy pomocy $\operatorname{rank} A$ i $\operatorname{rank} B$.

Zadania z gwiazdką

14. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, a $F : V \to V$ – przekształceniem liniowym. Wykorzystując wzór (1.8) uzasadnij, że wyznacznik macierzy $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia F jest taki sam dla każdego wyboru bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V.

15. Uzasadnij, że dla dowolnych kwadratowych klatek $A, C \in M_{m\times m}$ oraz $B, D \in M_{n\times n}$ zachodzi warunek:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & BD \end{pmatrix}$$

16. Jak rozpoznać czy macierz górnotrójkątna jest odwracalna? Uzasadnij, że macierz odwrotna do macierzy górnotrójkątnej (jeśli istnieje) jest macierzą górnotrójkątną.

2.3 UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Rozwiązywanie jednorodnego i niejednorodnego układu równań liniowych. Warstwa podprzestrzeni. Przestrzeń ilorazowa. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Metoda eliminacji Gaussa. Fundamentalny układ rozwiązań. Opis podprzestrzeni $\mathbb{R}^n$ przy pomocy układu równań liniowych.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź niesprzeczność poniższych układów równań i ustal (w odniesieniu do układów niesprzecznych) wymiar zbioru rozwiązań.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_6 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_5 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 4 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_5 = 4 \\ x_2 + x_3 - 3x_6 = 5 \\ 2x_2 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Znajdź rozwiązanie ogólne każdego z poniższych układów równań.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 7x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

3. Rozwiązując odpowiedni jednorodny układ równań liniowych wyznacz jądro przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o następującej macierzy (w bazie standardowej):

(a) $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. Rozwiązując odpowiedni niejednorodny układ równań liniowych wyznacz przeciwobraz wektora $v \in \mathbb{R}^3$, przez przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, gdzie:

(a) $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ (b) $m(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Zadania domowe

5. W każdym z niesprzecznych układów z zadania 1 zmień prawe strony tak, aby otrzymać układ sprzeczny lub uzasadnij, że jest to niemożliwe.

6. Wykorzystując wynik zadania 2, podaj rozwiązanie ogólne układu równań:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$

7. Znajdź jednorodny układ równań liniowych, dla którego wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań i który składa się z dokładnie:

(a) dwóch równań, (b) trzech równań, (c) czterech równań.

8. Znajdź bazę każdej z poniższych przestrzeni, a następnie opisz te przestrzenie przy pomocy układu (jednego lub więcej) równań liniowych.

(a) $U = \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} 2\\1\\-4\\8\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-4\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\3\\-3\\8\\-2 \end{pmatrix}\} < \mathbb{R}^5$ (b) $W = \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} -2\\1\\7\\7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\5\\2\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-4\\5\\2 \end{pmatrix}\} < \mathbb{R}^4$

9. Pewien układ równań liniowych z 3 niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jaka może być liczba równań w tym układzie? Podaj wszystkie możliwości.

Zadania egzaminacyjne

10. Rozwiązaniem pewnego liniowego układu równań z niewiadomymi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jest zbiór:

$$\left\{ \begin{pmatrix} p+q+1\\2p-3r+2\\p+q+r\\1\\p+r \end{pmatrix},\ \text{gdzie } p, q, r \in \mathbb{R} \right\}$$

Z ilu równań może się składać ten układ równań? Podaj wszystkie możliwości.

11. Podaj takie wartości p i q, aby zbiorem rozwiązań poniższego układu równań była warstwa 2-wymiarowej podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + px_4 = q \end{cases}$$

12. Stosując metodę eliminacji Gaussa, wyznacz rozwiązanie ogólne układu w zależności od wartości parametru t.

(a) $\begin{cases} ta + b + c + d = 1 \\ a + tb + c + d = 1 \\ a + b + tc + d = 1 \\ a + b + c + td = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2a + b + c + d = 0 \\ a + 2b + 2c + d = t \\ 2a + 3b - 2c + 4d = t + 3 \\ a + 4b - c + 4d = t^2 \end{cases}$

13. Wykorzystując wynik zadania 8 opisz przy pomocy układu (jednego lub więcej) równań liniowych następujące zbiory:

(a) $\begin{pmatrix} 1\\2\\0\\1\\1 \end{pmatrix} + \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} 2\\1\\-4\\8\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-4\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\3\\-3\\8\\-2 \end{pmatrix}\}$ (b) $\begin{pmatrix} 1\\3\\1\\1 \end{pmatrix} + \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} -2\\1\\7\\7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\5\\2\\5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\-4\\5\\2 \end{pmatrix}\}$

14. Dany jest układ m równań liniowych z n niewiadomymi. Oznaczmy przez A macierz główną tego układu. Czy układ ten może być sprzeczny, jeśli:

(a) $m < n$ (b) $m = n$ (c) $m > n$
(d) $\operatorname{rank} A = m$ (e) $\operatorname{rank} A = n$ (f) układ jest jednorodny

15. Dany jest niesprzeczny układ m równań liniowych z n niewiadomymi. Czy układ ten może mieć dokładnie jedno rozwiązanie i czy musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli:

(a) $m < n$ (b) $m = n$ (c) $m > n$
(d) $\operatorname{rank} A = m$ (e) $\operatorname{rank} A = n$ (f) układ jest jednorodny

Zadania z gwiazdką

16. Uzasadnij, że jeśli liniowy układ równań ma więcej niż jedno rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele.

17. Uzasadnij, że w dowolnym niejednorodnym układzie m równań liniowych z n niewiadomymi, dla którego $m > n$ można tak zmienić prawe strony równań, by otrzymać układ sprzeczny.

18. Dana jest macierz $A \in M_{m\times n}$. Uzasadnij, że zbiór $W = \{b \in \mathbb{R}^m : AX = b \text{ niesprzeczny}\}$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^m$. Uzasadnij, że $\dim W = \operatorname{rank} A$.

19. Uzasadnij, że $W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k)}(0) = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $C^\infty(\mathbb{R})$ oraz że każda warstwa W jest postaci: $g + W = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f(0) = g(0), f'(0) = g'(0), \ldots, f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)\}$ dla pewnej funkcji $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zinterpretuj rozwijanie funkcji g w szereg Tayora jako wyznaczanie jedynego wielomianu stopnia co najwyżej k w warstwie $g + W$.

3.1 WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE (RZECZYWISTE)

Wartości i wektory własne. Przestrzeń własna. Twierdzenie o diagonalizacji macierzy (nad $\mathbb{R}$). Warunek diagonalizowalności macierzy. Potęgowanie macierzy.

Zadania rozgrzewkowe

1. Znajdź wartości własne i przestrzenie własne dla każdej z poniższych macierzy

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Ustal, które z macierzy z zadania 1 są diagonalizowalne i je zdiagonalizuj.

3. Oblicz następujące potęgi macierzy

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{5}$

4. Wyznacz (rzeczywiste) wartości własne i przestrzenie własne następujących przekształceń liniowych:

(a) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $F(P) = P'$

(b) $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = A^\top$

(c) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ x_4+x_1 \end{pmatrix}$

5. Wyznacz wszystkie pierwiastki każdego z następujących wielomianów:

(a) $x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$, (b) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$,

(c) $x^3 - 2x + 1$.

Zadania domowe

6. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i przestrzenie własne każdego z poniższych przekształceń:

(a) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \\ z+t \\ z-t \end{pmatrix}$

(b) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $F(A) = 2A + A^T$

(c) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = P(2x + 1)$

(d) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = xP'(x) + P''(x)$

7. Dla każdego przekształcenia z zadania 6 podaj taką bazę $\mathcal{B}$, w której przekształcenie F ma macierz diagonalną (oraz podaj tę macierz).

8. Napisz macierz rozmiaru 4×4 o wartościach własnych $-1, 1, 0, 2$ i odpowiadających im wektorach własnych $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Napisz diagonalizację macierzy rozmiaru 4×4, której przestrzeniami własnymi są: $V^1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x = y = z = t\}$ i $V^2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : 2x + 3y + z + t = 0\}$, a następnie wylicz tę macierz.

10. Napisz macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ spełniającego następujące warunki: $F(x^2 + x) = 2x^2 + 2x$, $F(x - 1) = 1 - x$, $F(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$:

(a) w bazie $\mathcal{B}$ złożonej z wektorów własnych (wskaż tę bazę),

(b) w bazie $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

11. Oblicz potęgi następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} -6 & 15 & 7 \\ -3 & 8 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^n$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}^n$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n$

12. Uzasadnij, że wartościami własnymi macierzy górnotrójkątnej są wyrazy na przekątnej macierzy.

13. Wyznacz wartości własne i przestrzenie własne oraz sprawdź diagonalizowalność każdej z poniższych macierzy.

(a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Zadania egzaminacyjne

14. Dla każdego z podanych przekształceń liniowych $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ sprawdź, które z następujących wektorów: $\sin x$, $\sin 2x$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\sin \frac{1}{x}$, e^x, e^{2x}, e^{-x}, e^{x^2}, 1, x, x^2 są wektorami własnymi. Podaj wartości własne znalezionych przekształceń przypisane do tych wektorów.

(a) $F(f)(x) = f'(x)$ (b) $F(f)(x) = f''(x)$ (c) $F(f)(x) = f(x + \pi)$

15. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, którego jądro spełnia warunek: $\ker F = \operatorname{Lin}\{x^2 + x + 1, 2x^2 - x - 1\}$. Co wiadomo o wartościach własnych i wektorach własnych przekształcenia F? Napisz macierz dowolnego niezerowego przekształcenia o tej własności:

(a) w dowolnie wybranej bazie $\mathcal{B}$ (podaj tę bazę),

(b) w bazie $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$.

Zacznij od napisania diagonalizacji macierzy przekształcenia.

16. Podaj wszystkie wartości parametrów p i q, dla których macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & p & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

17. Dane jest przekształcenie liniowe $F : V \to V$ przestrzeni liniowej V. Niech $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ będzie taką bazą V, że:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Które z wektorów bazowych są wektorami własnymi i dla jakich wartości własnych?

18. Podaj macierz (w bazie standardowej) dowolnego przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które spełnia następujące warunki:

- nie jest diagonalizowalne,
- nie jest różnowartościowe,
- jedną z jego wartości własnych jest 3,
- wektory $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ są jego wektorami własnymi.

Zadania z gwiazdką

19. Uzasadnij, że jeśli wielomian charakterystyczny macierzy ma tylko jeden pierwiastek, to macierz ta jest diagonalizowalna jedynie wtedy, gdy jest diagonalna.

20. Wykaż, że jeśli v jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej λ, a P jest macierzą odwracalną, to Pv jest wektorem własnym macierzy PAP^{-1} dla wartości własnej λ. Wywnioskuj stąd, że wymiary przestrzeni własnych macierzy A i PAP^{-1} są jednakowe.

21. Wykorzystaj zadania 20 i 13 do podania różnych przykładów macierzy niediagonalizowalnych, rozmiaru 2×2, 3×3 i 4×4.

3.2 WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE (ZESPOLONE)

Zespolona przestrzeń liniowa. Zespolone przekształcenie liniowe. Twierdzenie o diagonalizacji macierzy (nad $\mathbb{C}$). Warunek diagonalizowalności macierzy. Klatkowa diagonalizacja nad $\mathbb{R}$. Podprzestrzeń niezmiennicza. Suma prosta. Suma kompleksowa. Podprzestrzeń niezmiennicza.

Zadania rozgrzewkowe

1. Podaj wymiar i wskaż bazę każdej z następujących przestrzeni: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}_n[x]$, $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ traktowanych jako:

(a) rzeczywiste przestrzenie liniowe,

(b) jako zespolone przestrzenie liniowe.

2. Sprawdź, czy podany układ wektorów jest bazą zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^3$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}$

3. Dla których z poniższych par podprzestrzeni $W, U < \mathbb{R}^3$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$?

(a) $W = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0\}$

(b) $W = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0\}$

(c) $W = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}$

4. Oblicz następujące potęgi macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{10}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{8}$

(c) $\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^{6}$

Zadania domowe

5. Które z poniższych zbiorów (ze standardowo zdefiniowanymi działaniami) tworzą zespoloną przestrzeń liniową:

(a) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(b) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

(c) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(d) zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

6. Które z poniższych przekształceń są rzeczywistymi przekształceniami liniowymi rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$, a które są zespolonymi przekształceniami liniowymi zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$. Napisz macierze tych przekształceń, które są liniowe, w dowolnie wybranych bazach (wskaż te bazy).

(a) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} z_1+z_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix}$

(b) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} iz_1+z_2 \\ z_1-iz_2 \end{pmatrix}$

(c) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

(d) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (1+i)z_1 \\ (1-i)z_2 \end{pmatrix}$

7. Napisz zespoloną diagonalizację oraz rzeczywistą klatkową diagonalizację następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -5 & 6 & -2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Dla każdej z macierzy z zadania 7 podaj taką bazę zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^3$, w której macierz ta diagonalizuje się oraz taką bazę rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$, w której macierz ta ma postać klatkową diagonalną.

9. Czy prawdą jest, że:

(a) $\mathbb{R}^3 = \{\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) : x+y+z=0\} \oplus \mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 2\\ 1\end{smallmatrix}\right)\}$,

(b) $M_{2\times 2} = \{A \in M_{2\times 2} : A \text{ diagonalna}\} \oplus \{A \in M_{2\times 2} : \operatorname{tr} A = 0\}$,

(c) $M_{2\times 2} = \{A \in M_{2\times 2} : A^\top = A\} \oplus \{A \in M_{2\times 2} : A^\top = -A\}$,

(d) $\mathbb{R}_2[x] = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P'' = 0\} \oplus \{ax^2 + ax + a,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

10. Znajdź jakąkolwiek przestrzeń dopełniczą każdej z poniższych podprzestrzeni $W < V$, tzn. taką podprzestrzeń $W' < V$, że $V = W \oplus W'$.

(a) $\mathrm{Lin}\{1+x, x^2\} < \mathbb{R}_2[x]$,

(b) $\mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 2\end{smallmatrix}\right)\} < \mathbb{R}^4$.

Zadania egzaminacyjne

11. Ustal, które z podanych poniżej zbiorów są podprzestrzeniami rzeczywistej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$, a które są podprzestrzeniami zespolonej przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^2$. Dla każdej podprzestrzeni podaj wymiar i bazę.

(a) $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1\\ z_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : 2z_1 + z_2 = 0\}$

(b) $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1\\ z_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : (i+1)z_1 + (i-1)z_2 = 0\}$

(c) $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1\\ z_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = \bar{z}_2\}$

(d) $\{\left(\begin{smallmatrix} z_1\\ z_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : z_1 + \bar{z}_2 = 0\}$

12. Wektor $v = \left(\begin{smallmatrix} 2+i\\ 1+i\end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (traktowanej jako macierz zespolona) dla wartości własnej $\lambda = i$. Oblicz: $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2\\ 1\end{smallmatrix}\right)$

13. Wyznacz wszystkie podprzestrzenie F-niezmiennicze (rzeczywistej) przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$, gdzie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest następującym (rzeczywistym) przekształceniem liniowym:

(a) obrót o kąt 60° wokół prostej ℓ o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 3\\ 5\end{smallmatrix}\right)$,

(b) odbicie względem płaszczyzny π o równaniu $2x + 3y - z = 0$.

14. Dla których przekształceń z zadania 13 przestrzeń $\mathbb{R}^3$ można przedstawić (w nietrywialny sposób) w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni F-niezmienniczych? Podaj to przedstawienie oraz podaj bazę $\mathcal{B}$, w której przekształcenie F ma macierz w postaci klatkowej.

15. Wyznacz wszystkie podprzestrzenie F_A-niezmiennicze (rzeczywistej) przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$, gdzie $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ jest (rzeczywistym) przekształceniem liniowym o następującej macierzy A:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$

3.3 TWIERDZENIE JORDANA

Twierdzenie Jordana. Wyznaczanie postaci Jordana macierzy i bazy jordanowskiej.

Zadania rozgrzewkowe

1. Zaznacz klatki Jordana i oblicz n-tą potęgę każdej z następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2. Wyznacz postać Jordana macierzy, dla której wielomian charakterystyczny oraz przestrzenie własne spełniają warunki:

(a) $\chi(\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda)^3$, $\dim V^3 = 2$, $\dim V^1 = 1$

(b) $\chi(\lambda) = -\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)^2$, $\dim V^0 = 1$, $\dim V^{-2} = 2$

(c) $\chi(\lambda) = (\lambda+1)^4(\lambda-2)^2$, $\dim V^{-1} = 3$, $\dim V^2 = 1$

3. Wyznacz postać Jordana oraz bazę jordanowską dla każdej z poniższych macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Oblicz potęgi następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{20}$ (c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}^{n}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{100}$

5. Oblicz n-tą potęgę każdej z następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zadania domowe

6. Podaj postać Jordana macierzy 4×4, dla której wielomian charakterystyczny $\chi(x)$ i przestrzenie własne są następujące:

(a) $\chi(x) = (x-2)^3(x-3)$, $V^2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - 2t = 0\}$,

$V^3 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = 2t\}$

(b) $\chi(x) = (x-1)^2(x+1)^2$, $V^1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y + z = z + t = 0\}$,

$V^{-1} = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = x = y = z\}$

7. O macierzy $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ wiadomo, że jej jedynymi wartościami własnymi są 2 i 3, a jej przestrzenie własne to:

$$V^2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) : x + y = y + z = z + t\} \quad V^3 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{smallmatrix}\right) : x = 2y = 3z = 4t\}$$

Podaj wszystkie możliwe postaci Jordana J macierzy A (z dokładnością do zamiany kolejności klatek).

8. Podaj przykład macierzy 5×5, dla której:

(a) jedyne wartości własne to $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = 7$, a przestrzenie własne mają wymiary: $\dim V^4 = 1$, $\dim V^7 = 2$,

(b) jedyną wartością własną jest λ, a przestrzeń własna ma wymiar: $\dim V^\lambda = 3$.

9. Wyznacz postać Jordana i bazę jordanowską każdej z następujących macierzy.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Oblicz A^n, gdzie A jest jedną z poniższych macierzy.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$

Zadania egzaminacyjne

11. Ustal wszystkie wartości parametru p, dla których macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ diagonalizuje się oraz podaj postać Jordana macierzy A dla tych wartości p, dla których macierz A się nie diagonalizuje.

12. Wyznacz wszystkie wartości parametrów a i b, dla których postacią Jordana macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest macierz $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

13. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ w bazie $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ma macierz:

$$m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spośród wektorów b_1, b_2, b_3, b_4 wybierz bazę pewnej F-niezmienniczej podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$, której wymiar wynosi:

(a) 1 (b) 2 (c) 3

14. Podaj wszystkie pary przestrzeni V_i i V_j, dla których $\mathbb{R}_2[x] = V_i \oplus V_j$, jeśli:

$$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = 0\} \qquad V_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = P'(1)\}$$

$$V_3 = \mathrm{Lin}\{x^2 - 1\} \qquad V_4 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

15. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ zadane wzorem: $F(P) = P'$. Podaj przykład takiej F-niezmienniczej podprzestrzeni $W < \mathbb{R}_3[x]$, że $\dim W = 2$.

16. Czy do wyznaczenia postaci Jordana macierzy A wystarczy znajomość wielomianu charakterystycznego oraz wymiarów wszystkich przestrzeni własnych, jeśli macierz A:

(a) ma rozmiar 3×3 lub mniejszy

(b) ma rozmiar 4×4

(c) ma wszystkie wartości własne krotności 3 lub mniej

(d) ma wartość własną krotności 4

17. Podaj przykład macierzy rozmiaru 3×3, która nie jest diagonalizowalna, nie jest górnotrójkątna, ma wartości własne 1 i 2 oraz $\dim V^1 = \dim V^2 = 1$.

18. Macierz $J \in M_{n\times n}$ jest macierzą Jordana, dla której 1 jest jednokrotną wartością własną, a wszystkie pozostałe wartości własne $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniają warunek $|\lambda| < 1$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} J^n$.

Zadania z gwiazdką

19. Uzasadnij, że jeśli wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\chi_A(\lambda) = \lambda^4$, to zachodzi wzór: $A^4 = 0$.

20. Macierz A spełnia warunek $A^n = I$ dla pewnego $n > 1$. Udowodnij, że A jest diagonalizowalna. Jakie wartości własne może mieć macierz A?

21. Macierz $A \in M_{n\times n}$ ma jednokrotną wartość własną 1, a wszystkie pozostałe wartości własne $\lambda \in \mathbb{C}$ macierzy A spełniają warunek $|\lambda| < 1$. Uzasadnij, że macierz $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ ma rząd 1.

3.4 ZASTOSOWANIA DIAGONALIZACJI

Rozwiązywanie rekurencji liniowych. Układy rekurencji liniowych. Łańcuchy Markowa. Eksponens macierzy.

Zadania rozgrzewkowe

1. Zastosuj metodę potęgowania macierzy do rozwiązania poniższych rekurencji.

(a) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}, \ n \geq 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 9 \\ b_{n+1} = 6b_n - 9b_{n-1}, \ n \geq 1 \end{cases}$

2. Wyznacz eksponens każdej z następujących macierzy:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Zadania domowe

3. Zastosuj metodę potęgowania macierzy do rozwiązania poniższych rekurencji.

(a) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+1} = 6a_n - 12a_{n-1} + 8a_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} b_0 = 4 \\ b_1 = 9 \\ b_2 = 17 \\ b_{n+1} = 4b_n - 5b_{n-1} + 2b_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} c_0 = 2 \\ c_1 = -2 \\ c_2 = -4 \\ c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1} - 2c_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$

4. Zastosuj metodę potęgowania macierzy do rozwiązania poniższych układów rekurencji.

(a) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2b_n, \ n \geq 0 \\ b_{n+1} = 2a_n - 2b_n, \ n \geq 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_0 = 3 \\ b_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - b_n, \ n \geq 0 \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n, \ n \geq 0 \end{cases}$

5. Plansza do pewnej jednoosobowej gry składa się z czterech pól będących wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Początkowo pionek znajduje się na polu A. Wyznacz prawdopodobieństwo znalezienia się po 10 ruchach z powrotem na polu A, jeśli zasady wykonywania każdego ruchu są następujące:

(a) rzucamy monetą i jeśli wypadnie orzeł przesuwamy się o 1 pole w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a jeśli wypadnie reszka przesuwamy się o 1 pole w kierunku przeciwnym;

(b) rzucamy kostką i jeśli wyrzucimy 1 lub 2 przesuwamy się o 1 pole w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a jeśli wypadnie 3, 4, 5 lub 6 przesuwamy się o 1 pole w kierunku przeciwnym;

(c) rzucamy kostką i jeśli wyrzucimy 1 lub 2 przesuwamy się o 1 pole w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jeśli wypadnie 3, 4 lub 5 przesuwamy się o 1 pole w kierunku przeciwnym, a jeśli wypadnie 6 – nie przemieszczamy pionka.

W przypadku (c) do wykonania obliczeń użyj serwisu WolframAlpha.

6. Rzucamy 20 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w którymkolwiek momencie wypadły:

(a) 4 reszki pod rząd;

(b) 3 jednakowe wyniki pod rząd.

Do wyliczenia potęgi odpowiedniej macierzy użyj serwisu WolframAlpha.

7. Wyznacz eksponens każdej z następujących macierzy:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Zadania egzaminacyjne

8. Każdy ciąg spełniający równanie rekurencyjne:

$$a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1$$

jest postaci:

$$a_n = \alpha \cdot p^n + \beta \cdot q^n$$

dla pewnych parametrów $\alpha, \beta, p, q \in \mathbb{R}$. Wyznacz te z parametrów, których wyznaczenie jest możliwe.

9. Rzucamy 30 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

(a) ani razu w dwóch kolejnych rzutach nie wypadł ten sam wynik;

(b) ani razu w dwóch kolejnych rzutach nie wypadły liczby różniące się o 1;

(c) ani razu szóstka nie wypadła bezpośrednio po wyrzuceniu piątki;

Do wyliczenia potęgi odpowiedniej macierzy użyj serwisu WolframAlpha.

Zadania z gwiazdką

10. Wykorzystaj diagonalizację macierzy o zespolonych wartościach własnych do wyprowadzenia zwartego wzoru ciągu zadanego rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \text{ gdy } n \geq 0 \end{cases}$$

11. Macierz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ ma wielomian charakterystyczny $\chi_A(x) = -(x-2)(x-5)^2$. Wykaż, że każdy wyraz macierzy A^n jest postaci:

(a) $\alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 5^n$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ niezależnych od n, jeśli $\dim V^5 = 2$;

(b) $\alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 5^n + \gamma \cdot n5^n$ dla $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ niezależnych od n, jeśli $\dim V^5 = 1$.

4.1 ILOCZYN SKALARNY

Przestrzeń euklidesowa. Iloczyn skalarny. Długość wektora. Nierówność Schwarza. Kąt między wektorami. Nierówność trójkąta. Rzut wektora na wektor. Dopełnienie ortogonalne. Rzut wektora na podprzestrzeń. Baza ortogonalna i baza ortonormalna. Metoda ortogonalizacji Grama–Schmidta.

Zadania rozgrzewkowe

1. Oblicz długości podanych wektorów oraz kąty między nimi w podanych przestrzeniach euklidesowych:

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(b) $x, 1+x, x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

2. Sprawdź, która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

(a) $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$

(b) $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_3$

(c) $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_3$

(d) $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

3. Znajdź rzut wektora $v \in V$ na wektor $w \in V$ w poniższych przestrzeniach euklidesowych.

(a) $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$, gdzie $V = \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(b) $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$ oraz $\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$,

(c) $v = x+1$, $w = x^2$, gdzie $V = \mathbb{R}_2[x]$ oraz $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.

4. Znajdź bazę ortonormalną następujących przestrzeni euklidesowych:

(a) $\mathbb{R}_1[x]$ z iloczynem skalarnym $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$,

(b) $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(c) $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

5. Uzupełnij do bazy ortogonalnej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ (ze standardowym iloczynem skalarnym) następujące układy wektorów:

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

6. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym danym wzorem $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$. Skonstruuj bazę ortonormalną $\mathbb{R}_2[x]$ stosując metodę Grama–Schmidta do bazy $(1, x, x^2)$.

Zadania domowe

7. Ustal, która z poniższych funkcji jest iloczynem skalarnym na podanej przestrzeni liniowej:

(a) $\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1)$, gdzie $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$,

(b) $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$, gdzie $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

(c) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx$, gdzie $f, g \in C[0,1]$.

8. Dane są punkty $A, B, C \in \mathbb{R}^5$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3\\2\\0\\2\\0 \end{pmatrix}$.

(a) Sprawdź, że trójkąt ABC jest prostokątny.

(b) Wyznacz długości boków trójkąta ABC i sprawdź, że spełniają Twierdzenie Pitagorasa.

(c) Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta ABC i sprawdź, że cosinus każdego z kątów ostrych jest równy ilorazowi długości odpowiedniej przyprostokątnej i długości przeciwprostokątnej trójkąta.

9. Znajdź ortogonalną bazę następujących podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$ (ze standardowym iloczynem skalarnym):

(a) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 2\\1\\1\\-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\0\\4\\-8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8\\4\\-4\\3 \end{pmatrix}\}$,

(b) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 3\\0\\1\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\0\\-3\\9 \end{pmatrix}\}$,

(c) $\{\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 2x+y+z = 0\}$.

10. Znajdź dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ każdej z poniższych podprzestrzeni $W < V$:

(a) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\1 \end{pmatrix}\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(b) $W = \mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\1 \end{smallmatrix}\right)\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(c) $W = \mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1\\1 \end{smallmatrix}\right)\}$, gdzie $V = \mathbb{R}^2$ oraz $\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1\\x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1\\y_2 \end{smallmatrix}\right) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$,

(d) $W = \mathrm{Lin}\{1, x\}$, gdzie $V = \mathbb{R}_2[x]$ oraz $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

11. Wyznacz bazę ortogonalną podanej podprzestrzeni $W < V$, a następnie znajdź rzut ortogonalny wektora $v \in V$ na podprzestrzeń W i odległość wektora v od podprzestrzeni W.

(a) $v = \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\3 \end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\1 \end{pmatrix}\}$, $V = \mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

(b) $v = 1 + x^2$, $W = \mathrm{Lin}\{1 + x, x + x^2\}$, $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

Zadania egzaminacyjne

12. Wektory $v, w \in V$ spełniają warunki: $|v| = 2$, $|w| = 4$ oraz $|v + w| = 3$. Rozpisując wyrażenie $\langle v + w, v + w \rangle$ oblicz $\langle v, w \rangle$.

13. W przestrzeni euklidesowej V dane są wektory $u, v, w \in V$. Wiedząc, że u, v, w są parami prostopadłe, oraz $|u| = 1$, $|v| = 2$, $|w| = 3$, wyznacz długość wektora $u + v + w$.

14. Dana jest przestrzeń euklidesowa V oraz wektory $v, w \in V$. Wiemy, że $|v| = 1$ oraz $|w| = 2$. Wiedząc, że $p_v(w) = v$, wyznacz $p_w(v)$.

15. Znajdź bazę dopełnienia ortogonalnego każdej z przestrzeni z zadania 9.

16. Wyznacz macierz (w bazie standardowej) rzutu ortogonalnego $p_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ na podprzestrzeń W zadaną wzorem: $W = \{\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}$

17. Opisz przestrzeń $W^\perp$, jeśli podprzestrzeń $W < \mathbb{R}^4$ zadana jest poniższym układem równań, a na $\mathbb{R}^4$ jest standardowy iloczyn skalarny.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

18. Dana jest przestrzeń $C[0, 2\pi]$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $f(x) = x$ na podprzestrzeń $W = \mathrm{Lin}\{1, \sin x, \cos x\}$.

19. Podaj przykład macierzy takiego rzutu ortogonalnego $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ na pewną 2-wymiarową podprzestrzeń $W < \mathbb{R}^4$ taką, że $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$.

Zadania z gwiazdką

20. Dana jest przestrzeń euklidesowa V oraz jej baza ortonormalna $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Niech $W < V$ będzie 2-wymiarową podprzestrzenią. Uzasadnij, że suma kwadratów długości rzutów wektorów bazy $\mathcal{B}$ na podprzestrzeń W wynosi 2.

21. Dana jest przestrzeń euklidesowa V oraz jej baza (b_1, b_2, b_3). Uzasadnij, że jeżeli $w, w' \in V$ spełniają warunek $\langle w, b_i\rangle = \langle w', b_i\rangle$ dla każdego $i = 1, 2, 3$, to $w = w'$.

4.2 FORMA KWADRATOWA

Wielomian wielu zmiennych. Wielomian jednorodny. Forma kwadratowa. Forma dwuliniowa. Macierz formy kwadratowej/dwuliniowej. Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Lagrange'a. Dodatnia/ujemna określoność. Kryterium Sylvestera. Sygnatura formy.

Zadania rozgrzewkowe

1. Napisz macierze poniższych form kwadratowych na $\mathbb{R}^3$ w bazie standardowej:

(a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_3^2 - x_1x_3$

(b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

(c) $Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1x_3 + x_1x_2$

(d) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$

2. Napisz symetryczne formy dwuliniowe stowarzyszone z formami kwadratowymi wymienionymi zadaniu 1.

3. Wyznacz stopień każdego z poniższych wielomianów i ustal czy jest to wielomian jednorodny.

(a) $W(x, y, z) = x^2yz + x^3y + z^4$

(b) $W(x, y, z, t) = x^2y + y^2z + z^2t + xyzt$

(c) $W(x, y, z, t) = x^6 + x^3y^2z + x^2yz^2t$

(d) $W(x, y, z) = x^4 + xyz^3 + y^2z^2$

4. Ustal, które z poniższych macierzy są dodatnio określone lub ujemnie określone.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Dla jakich wartości λ następujące formy są dodatnio określone:

(a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3$

(b) $5x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

Zadania domowe

6. Które z poniższych funkcji są symetrycznymi formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych? Napisz ich macierze w wybranych przez siebie bazach, zbadaj dodatnią określoność oraz napisz stowarzyszoną formę kwadratową.

(a) $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\Phi(x, y) = x^\top y$,

(b) $\Phi : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \times M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$: $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$,

(c) $\Phi : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \times M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$: $\Phi(A, B) = \det(AB)$,

(d) $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$: $\Phi(P_1, P_2) = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$.

7. Zdiagonalizuj każdą z poniższych form kwadratowych na $\mathbb{R}^3$ metodą Lagrange'a. Podaj bazę, w której zdiagonalizowałeś formę oraz sygnaturę tej formy.

(a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2$,

(b) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz - 2yz - z^2$,

(c) $Q(x, y, z) = xy + xz$,

(d) $Q(x, y, z) = x^2 + 2xz - 2xy + y^2$.

8. Forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ma w bazie $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$ ma następującą macierz:

$$m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Napisz wzór formy kwadratowej Q oraz wzór stowarzyszonej z nią formy dwuliniowej we współrzędnych (x', y', z') związanych z bazą $\mathcal{B}$.

(b) Wyznacz macierz formy kwadratowej Q w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$ i sprawdź prawdziwość wzoru (4.20).

(c) Napisz wzór formy kwadratowej Q oraz wzór stowarzyszonej z nią formy dwuliniowej we współrzędnych (x, y, z) związanych z bazą standardową.

9. Dla jakich wartości parametru λ poniższe macierze są dodatnio lub ujemnie określone?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

10. Sprawdź bez powoływania się na macierz formy, które z poniższych form kwadratowych są dodatnio (pół)określone, a które są ujemnie (pół)określone.

(a) $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3z^2$ (b) $Q(x, y, z) = x^2 - 3xz + y^2 - 2xy - z^2$

(c) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz$ (d) $Q(x, y, z) = -2x^2 + 2xy - y^2$

11. Dana jest forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 - 2xz$. Znajdź macierz formy Q:

(a) w bazie standardowej (b) w bazie $\mathcal{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$

i sprawdź prawdziwość wzoru (4.20)

12. Wyznacz sygnaturę formy kwadratowej $\det : V \to \mathbb{R}$ dla przestrzeni V:

(a) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (b) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^\top\}$

(c) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = -A^\top\}$ (d) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\0 & c\end{smallmatrix}\right)\}$

Zadania egzaminacyjne

13. Czy istnieje taka forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że $Q(e_1) > 0$, $Q(e_2) > 0$, ale $Q(e_1 + e_2) < 0$, gdzie (e_1, e_2) to baza standardowa $\mathbb{R}^2$?

14. Wyznacz podprzestrzeń $W < \mathbb{R}^3$ (maksymalnego wymiaru) taką, że forma kwadratowa $Q : W \to \mathbb{R}$ zdefiniowana $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$ jest:

(a) dodatnio określona, (b) dodatnio półokreślona,

(c) ujemnie określona, (d) ujemnie półokreślona,

15. Czy kryterium Sylvestera uogólnia się (przez zamianę ostrych nierówności na słabe) na przypadek dodatniej/ujemnej półokreśloności? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.

16. Podaj przykład formy kwadratowej $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, które spełnia ma sygnaturę $(1, 1)$ oraz spełnia warunki: $Q(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)) > 0$ i $Q(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)) < 0$. Podaj wzór formy:

(a) w dowolnie wybranej bazie, (b) w bazie standardowej.

Zadania z gwiazdką

17. Uzasadnij, że każda forma kwadratowa na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ ma w pewnej bazie taką macierz diagonalną, której każdy wyraz na przekątnej to 1, -1 lub 0.

18. Uzasadnij, że jeżeli $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są macierzami dodatnio określonymi, to $A + B$ też jest macierzą dodatnio określoną.

19. Dana jest przestrzeń liniowa V wymiaru 2 oraz forma kwadratowa $Q : V \to \mathbb{R}$. Udododnij, że jeśli istnieją takie wektory $v_1, v_2 \in V$, że $Q(v_1) < 0$ oraz $Q(v_2) > 0$, to sygnatura formy Q wynosi $(1, 1)$.

4.3 TWIERDZENIE SPEKTRALNE

Izometria liniowa. Macierz ortogonalna. Zespolona przestrzeń euklidesowa. Twierdzenie spektralne. Diagonalizacja formy kwadratowej w bazie ortonormalnej.

Zadania rozgrzewkowe

1. Podaj przykład diagonalizowalnej macierzy rozmiaru 3×3, wśród której wyrazów są cztery jedynki i pięć dwójek.

2. Wyznacz wszystkie wektory własne następujących macierzy symetrycznych, a następnie sprawdź, że można z nich wybrać bazę ortogonalną odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Uzupełnij podane poniżej macierze (na wszystkie możliwe sposoby) do macierzy ortogonalnych.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & * \\ \frac{4}{5} & * \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & * \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & * \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

4. Dla każdej macierzy A otrzymanej w zadaniu 3 sprawdź, że $A^\top$ oraz A są wzajemnie odwrotne.

5. Oblicz iloczyny macierzy $u \cdot v^\top$ oraz $u^\top \cdot v$ jeśli:

(a) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (b) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (c) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

6. Wyznacz iloczyn skalarny $\langle u, v\rangle$, jeśli $u, v \in \mathbb{C}^n$, gdzie przestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest wyposażona w standardowy iloczyn skalarny oraz:

(a) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ i \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1+2i \\ 1-i \end{smallmatrix}\right)$ (b) $u = v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{smallmatrix}\right)$ (c) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \\ i+1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2+i \\ 3-i \\ 2i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Zadania domowe

7. Znajdź bazę ortogonalną wektorów własnych dla każdej z poniższych macierzy symetrycznych. Dla której z tych macierzy można również wskazać taką bazę wektorów własnych, która nie jest ortogonalna?

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 24 & 0 \\ 24 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sprawdź, które z poniższych przekształceń liniowych są izometriami liniowymi.

(a) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = P(1-x)$, gdzie $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$,

(b) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $F(P)(x) = (x+1) \cdot P'(x)$, gdzie $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$,

9. Czy istnieje izometria liniowa przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$, która:

(a) wektor x przeprowadza na wektor x^2,

(b) wektor x przeprowadza na wektor ax^2 dla pewnego $a \in \mathbb{R}$,

(c) parę wektorów $(1, x)$ przeprowadza na parę wektorów (ax, bx^3) dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$,

(d) podprzestrzeń $\mathrm{Lin}\{1, x\} < \mathbb{R}_3[x]$ przeprowadza na podprzestrzeń $\mathrm{Lin}\{x, x^3\} < \mathbb{R}_3[x]$.

10. Czy istnieje macierz symetryczna, która nie jest diagonalna, a dla której (nieprostopadłe) wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ są wektorami własnymi? Jeśli tak, podaj przykład takiej macierzy.

11. Dla następujących wektorów zespolonej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}^4$ (wyposażonej w standardowy iloczyn skalarny): $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\i\\0\end{smallmatrix}\right)$ $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\i\\-i\end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}1-i\\0\\1+i\\1-i\end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix}i\\-1\\1+i\\i\end{smallmatrix}\right)$

(a) wskaż wszystkie pary wektorów ortogonalnych,

(b) wyznacz długości wszystkich wektorów.

12. Zapisz iloczyn macierzy $A \cdot B^\top$ w postaci (4.33), a następnie wykonaj mnożenia i sprawdź prawdziwość użytego wzoru.

(a) $A = \begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 5\end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\3 & 1 & 4\\7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\2 & 2 & 1\\5 & 0 & 6\end{pmatrix}$

13. Niech V będzie (zespoloną) przestrzenią liniową złożoną ze wszystkich funkcji ciągłych $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$. Sprawdź, które z poniższych funkcji zadają na V strukturę zespolonej przestrzeni euklidesowej.

(a) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(b) $\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$

(c) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$

14. Sprawdź, które z poniższych macierzy są macierzami ortogonalnymi, a następnie wyznacz odwrotności znalezionych macierzy ortogonalnych.

(a) $\begin{pmatrix}\frac13 & \frac23 & \frac23\\ \frac23 & -\frac23 & \frac13\\ \frac23 & \frac13 & -\frac23\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}\frac13 & \frac23 & \frac23\\ \frac23 & -\frac23 & \frac13\\ \frac23 & \frac13 & \frac23\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\\ \frac12 & \frac12 & -\frac12 & -\frac12\\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & -\frac12\\ -\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\\ -\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}$

15. Dla każdej z poniższych form kwadratowych wyznacz bazę ortonormalną, w której forma się diagonalizuje, napisz tę diagonalizację oraz podaj sygnaturę tej formy.

(a) $Q(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$

(b) $Q(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$

Zadania egzaminacyjne

16. Podaj przykład takiej rzeczywistej macierzy 3×3, która spełnia (jednocześnie) następujące warunki:

- ma trzy, parami prostopadłe, (rzeczywiste) wektory własne,
- jednym z jej wektorów własnych jest wektor $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$,
- wektor v jest wektorem własnym dla wartości własnej 2.

17. Obrazem wektora $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ przy pewnej izometrii liniowej $\mathbb{R}^3$ jest wektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jaki wektor może być obrazem wektora $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ przy tej samej izometrii?

Zadania z gwiazdką

18. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Uzasadnij, że jeśli istnieje baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych macierzy A, to macierz A jest symetryczna.

19. Uzasadnij, że jeśli u jest (rzeczywistym) wektorem własnym macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dla wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$, zaś v jest (rzeczywistym) wektorem własnym macierzy $A^\top$ dla wartości własnej $\mu \in \mathbb{R}$ oraz $\lambda \neq \mu$, to wektory u i v są prostopadłe.

20. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową, zaś $F : V \to V$ izometrią liniową. Uzasadnij, że jeśli $W < V$ jest podprzestrzenią F-niezmienniczą, to $W^\perp < V$ też jest podprzestrzenią F-niezmienniczą.

21. Czy istnieje liniowa izometria $\mathbb{R}^4$, która każdą prostą przechodzącą przez 0 przeprowadza na prostą do niej prostopadłą? Podaj przykład lub udowodnij, że takie przekształcenie nie istnieje.

4.4 ROZKŁAD SVD

Rozkład SVD. Twierdzenie Eckarta–Younga o aproksymacji macierzą niskiego rzędu. Wartości i wektory osobliwe.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyznacz macierze $A^\top A$ oraz $AA^\top$, sprawdź, że są one symetryczne i ustal, które z nich mają rząd 1, jeśli macierz A ma postać:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

2. Dla każdej macierzy A z zadania 1 wyznacz:

(a) wartości własne i wektory własne macierzy $A^\top A$,

(b) wartości własne i wektory własne macierzy $AA^\top$,

(c) wartości osobliwe i wektory osobliwe macierzy A.

3. Macierz A, dla której rozkład SVD jest podany poniżej, zapisz w postaci (4.41) oraz sprawdź dla niej prawdziwość przywołanego wzoru:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^\top$$

4. Podaj najlepszą aproksymację macierzy A z zadania 3 macierzą A' rzędu 1 (zgodnie z Twiedzeniem Eckarta–Younga), a następnie wyznacz różnicę $A - A'$.

Zadania domowe

5. Macierz B, dla której rozkład SVD jest podany poniżej, zapisz w postaci (4.41) oraz sprawdź dla niej prawdziwość przywołanego wzoru:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top$$

6. Podaj najlepszą aproksymację macierzy B z zadania 5 macierzą B' rzędu 1 oraz macierzą B'' rzędu 2 (zgodnie z Twiedzeniem Eckarta–Younga). Wyznacz różnice $B - B'$ oraz $B - B''$.

7. Wyznacz wszystkie takie (niezerowe) wektory $v \in \mathbb{R}^3$, dla których iloraz $\frac{|Bv|}{|v|}$ jest maksymalny, gdzie B jest macierzą z zadania 5. Ile wynosi wartość tego ilorazu?

8. Wyznacz rozkład SVD dla każdej macierzy z zadania 1. Zapisz rozkład zarówno w postaci macierzowej, jak i w postaci wektorowej.

Zadania egzaminacyjne

9. Znajdź bazę ortonormalną $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz bazę ortonormalną $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ tak, żeby macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowanego wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x + 4y - 2z \\ -3x + 6z \end{pmatrix}$$

w tych bazach była prostokątną macierzą diagonalną. Napisz macierz $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$.

10. Czy dla danej macierzy A, macierze U, Σ, V w rozkładzie SVD: $A = U\Sigma V^\top$ są jednoznacznie wyznaczone?

11. Dany jest rozkład SVD macierzy $A = U\Sigma V^\top \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Jak wygląda rozkład SVD macierzy $A^\top \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$?

12. Dla jakich macierzy kwadratowych rozkład SVD jest diagonalizacją macierzy?

13. Poniżej podano rozkład SVD macierzy A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^\top$$

Zdiagonalizuj macierz $AA^\top$ (tzn. zapisz w postaci PDP^{-1}).

Odpowiedzi

0.1.

(a) $(f+g)(x) = \sin x + x^2,\ \ (f\cdot g)(x) = x^2 \sin x,\ \ (2f)(x) = 2\sin x,$

(b) $(f+g)(x) = e^x + e^{2x},\ \ (f\cdot g)(x) = e^{3x},\ \ (2f)(x) = 2e^x.$

0.2.

(a) $a_n + b_n = n^2 + n + 1,\ \ a_n \cdot b_n = 2n^3 - n^2 - n,\ \ 3\cdot a_n = 6n + 3,$

(b) $a_n + b_n = 3^n + 2^n,\ \ a_n \cdot b_n = 6^n,\ \ 3\cdot a_n = 3^{n+1}.$

0.3.

(a) $A + B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ \ A\cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 3 \end{smallmatrix}\right),\ \ 2A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right),$

(b) $A + B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right),\ \ A\cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right),\ \ 2A = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right).$

0.4.

(a) $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right),\ \ A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{smallmatrix}\right),$ (b) $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 8 & -6 \\ 6 & 8 \end{smallmatrix}\right),\ \ A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 18 & -26 \\ 26 & 18 \end{smallmatrix}\right).$

0.5.

(a) mnożenie przez skalary,

(b) dodawanie, mnożenie, mnożenie przez skalary,

(c) dodawanie, mnożenie przez skalary.

0.6.

(a) dodawanie, mnożenie, mnożenie przez skalary,

(b) dodawanie, mnożenie przez skalary,

(c) żadne.

0.7.

(a) dodawanie, mnożenie, mnożenie przez skalar,

(b) dodawanie, mnożenie, mnożenie przez skalar,

(c) dodawanie, mnożenie przez skalar,

(d) dodawanie, mnożenie przez skalar,

0.8.

(a) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(b) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(c) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(d) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(e) nie jest zamknięty na żadną z operacji,

(f) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(g) zamknięty na mnożenie.

0.9.

(a) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(b) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(c) zamknięty na dodawanie oraz na mnożenie przez skalary,

(d) zamknięty na mnożenie,

(e) zamknięty na dodawanie oraz na mnożenie przez skalary.

0.10.

(a) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(b) nie jest zamknięty na żadną z operacji,

(c) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(d) nie jest zamknięty na żadną z operacji,

(e) zamknięty na dodawanie, na mnożenie oraz na mnożenie przez skalary,

(f) zamknięty na mnożenie.

0.11.

(a) Tak (b) Nie (c) Nie (d) Nie (e) Nie (f) Tak (g) Tak (h) Nie (i) Nie (j) Tak

(k) Tak (l) Nie (m) Tak (n) Nie (o) Tak (p) Nie (q) Tak (r) Nie (s) Nie (t) Tak

0.12.

(a) $(x^2 + 5x - 2) = 2 \cdot (x^2 + 1) + 3 \cdot (2x - 1) - 1 \cdot (x^2 + x + 1)$,

(b) $(x^3 + x^2 - 1) = 1 \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) + 0 \cdot (x^2 + x + 1) - 1 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (1)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right) = 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) - 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 5 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) - 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + 3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) $a_n = \frac{1}{2} \cdot b_n - \frac{1}{2} \cdot c_n$,

(f) $f = 2 \cdot g - 2 \cdot h$,

(g) $f = 3 \cdot g - 2 \cdot h$.

0.13. np. $\mathbb{N}$.

0.14. Nie.

1.1.1.

(a) wymiar 2, baza np. $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$,

(b) wymiar 3, baza np. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

(c) wymiar 3, baza np. $1, x, x^2$,

(d) wymiar 4, baza np. $1, x, x^2, x^3$,

(e) wymiar 4, baza np. $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$,

(f) wymiar 9, baza np. macierze z jednym wyrazem 1 i pozostałymi wyrazami 0,

1.1.2.

(a) proste przechodzące przez 0 (wymiar 1),

(b) proste przechodzące przez 0 (wymiar 1) oraz płaszczyzny przechodzące przez 0 (wymiar 2).

1.1.4. zadanie 8: (a), (b), (c), (d), (f)
zadanie 9: (a), (b), (c), (e)
zadanie 10: (a), (c), (e)
zadanie 11: (a), (f), (g), (j), (k), (m), (o), (q), (t)

1.1.5.

(a) wymiar 3, baza np. $\mathcal{B} = (x, x^2, x^3)$,

(b) wymiar 2, baza np. $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$,

(c) wymiar 2, baza np. $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$,

(d) wymiar 3, baza np. $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right))$,

(e) wymiar 6, baza np. $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right))$,

(f) wymiar 3, baza np. $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right))$.

1.1.6.

(a) $[\left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right)$, $[\left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$,

(b) $[1 + x + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $[1 + x + x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}$,

(c) $[\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}$, $[\begin{pmatrix}8\\7\\4\end{pmatrix}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,

(d) $[\left(\begin{smallmatrix}3&1\\1&5\end{smallmatrix}\right)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\5\end{pmatrix}$, $[\left(\begin{smallmatrix}3&1\\1&5\end{smallmatrix}\right)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$

1.1.7.

(a) wymiar n, baza np. $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$,

(b) wymiar $n + 1$, baza np. $1, x, x^2, \ldots, x^n$,

(c) wymiar mn, baza np. macierze z jednym wyrazem 1 i pozostałymi wyrazami 0,

(d) wymiar 2, baza np. $1, i$.

1.1.8.

(a) np. $\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$ (wymiar 1), $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ (wymiar 2),

(b) np. $\{ax^2 : a \in \mathbb{R}\}$, $\{ax + a : a \in \mathbb{R}\}$ (wymiar 1),
$\{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\{ax^2 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ (wymiar 2),

(c) np. $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R}\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{R}\}$ (wymiar 1),
$\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\}$ (wymiar 2).

1.1.10.

(a) wymiar 2, baza np. $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$,

(b) wymiar 1, baza np. $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -4 \end{smallmatrix}\right))$,

(c) wymiar 2, baza np. $\mathcal{B} = (1, x^2 - 4x)$,

(d) wymiar 2, baza np. $\mathcal{B} = (x^3 - 3x + 2, x^2 + 2x - 3)$,

(e) wymiar 3, baza np. $\mathcal{B} = (x^2 + 1, x^3 + 3x + 2, x^4 + 8x + 3)$,

(f) wymiar 6, baza np. $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix})$.

1.1.11. np. $C = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{C}$, zaś D dowolne.

1.1.12.

(a) $[v]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1.1.13.

(a) a dowolne, $b = 0$,

(b) a, b – dowolne, $c = 0$.

1.1.14.

(a) przeciwobraz punktu $0 \in \mathbb{R}^3$ przez przekształcenie F;

(b) przestrzeń własna przekształcenia F dla wartości własnej λ (lub zbiór $\{0\}$, jeśli λ nie jest wartością własną);

(c) obraz przekształcenia F.

1.1.16.

(a) przestrzenie $\{0\}$ i $\mathbb{R}^3$ oraz dowolna prosta przechodząca przez 0 i dowolna płaszczyzna przechodząca przez 0;

(b) przestrzenie $\{0\}$ i $\mathbb{R}_1[x]$ oraz dowolny zbiór postaci $\{t \cdot (ax + b), t \in \mathbb{R}\}$, gdzie $ax + b$ jest dowolnie wybranym wielomianem.

(c) przestrzenie $\{0\}$ i V, dowolny zbiór postaci $\{tA, t \in \mathbb{R}\}$, gdzie A jest dowolną macierzą symetryczną 2×2 oraz dowolny zbiór postaci $\{sA + tB, t \in \mathbb{R}\}$, gdzie A i B to dowolne macierze symetryczne 2×2.

1.1.17. Wymiar wynosi 2.

1.2.1.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Tak.

1.2.2.

(a) Nie. (b) Tak. (c) Tak.

1.2.3.

(a) baza (x^2+x+1, x^2-x+1), wymiar 2,

(b) baza $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, wymiar 2.

1.2.4.

(a) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(b) $\mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$

(c) $\mathrm{Lin}\{x, x^2\}$

1.2.5.

(a) Tak (b) Nie (c) Nie

1.2.6.

(a) Tak (b) Tak (c) Nie

1.2.7.

(a) np. $\mathcal{B} = (x^2+x+1, 2x-1, x^2+1)$, $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,

(b) np. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

(c) np. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$, $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

1.2.8.

(a) np. $\mathcal{B} = (x^3+1, x^2+1, x, 1)$, $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$,

(b) np. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(c) np. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$,

1.2.9.

(a) baza $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$, wymiar 2;

(b) baza $(x^3-2x+1, x^2-x, x-1)$, wymiar 3;

(c) baza $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$, wymiar 2.

1.2.11.

(a) $\{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(2) = 0\} \cap \{P \in \mathbb{R}_3[x] : P(3) = 0\}$

(b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0\} \cap \{f \in C(\mathbb{R}) : f'(0) = 0\} \cap \{f \in C(\mathbb{R}) : f''(0) = 0\}$,

(c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} \cap \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1+3x_2+2x_3+4x_4 = 0\} \cap \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 0\}$.

1.2.12.

(a) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

(b) $\mathrm{Lin}\{x^3 - 1, x^2 - 1, x - 1\}$

(c) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

1.2.13.

(a) $a \neq 0$, b dowolne,

(b) $a \neq 1$ lub $b \neq 1$.

1.2.14.

(a) np. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(b) np. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2.15. np. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.16.

(a) np. $1, x, x^2, x^3, \ldots$ jest zbiorem liniowo niezależnym i generującym równocześnie (czyli bazą);

(b) np. funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots$, gdzie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją kawałkami liniową taką, że $f(n) = 1$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ (nie jest to zbiór generujący);

(c) np. zbiór ciągów, które mają jeden z wyrazów równy 1, a pozostałe wyrazy równe 0 (nie jest to zbiór generujący).

1.3.1.

(a) Tak, np. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ w bazach standardowych,

(b) Nie,

(c) Tak, np. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ w bazach $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ i $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$,

(d) Tak, np. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazach $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ i $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$,

(e) Tak, np. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ w bazach $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$,

(f) Nie,

(g) Tak,

(h) Tak.

1.3.2.

(a) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.3.

(a) $m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $m_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ oraz $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

1.3.4.

(a) $F : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,

(b) $F : M_{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$, $F(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,

(c) $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $F(a+bi) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.5.

(a) Tak. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dla $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

(b) Nie.

(c) Tak. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ dla $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(d) Tak. $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dla $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$.

(e) Tak. $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dla $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$

(f) Tak.

(g) Tak.

(h) Tak.

1.3.6.

(a) $m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(d) $m_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.7. $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 2 \\ 12 & 8 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.8.

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.9.

(a) $\ker F = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim \ker F = 1$, $\mathrm{Im} F = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\dim \mathrm{Im} F = 3$, nie jest różnowartościowe, nie jest „na”, nie jest bijekcją,

(b) $\ker F = \{d : d \in \mathbb{R}\}$, $\dim \ker F = 1$, $\mathrm{Im} F = \{ax^3 + bx^2 + cx : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\dim \mathrm{Im} F = 3$, nie jest różnowartościowe, nie jest „na”, nie jest bijekcją,

(c) $\ker F = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y = y + 3z = 0\}$, $\dim \ker F = 1$, $\mathrm{Im} F = \mathbb{R}^2$, $\dim \mathrm{Im} F = 2$, nie jest różnowartościowe, jest „na”, nie jest bijekcją,

(d) $\ker F = \{bi : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim \ker F = 1$, $\mathrm{Im} F = \{a : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim \mathrm{Im} F = 1$, nie jest różnowartościowe, nie jest „na”, nie jest bijekcją.

1.3.10.

(a) $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $(G \circ F)(P) = \left(\begin{smallmatrix} 2P''(1) \\ 3P''(2) \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $G \circ F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$, $(G \circ F)(P) = P(0) + P'(0) + P''(0)$,

(c) $G \circ F : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $(G \circ F)(A) = 3 \operatorname{tr} A$.

1.3.11.

(a) $(G \circ F)(P) = \left(\begin{smallmatrix} P(1) & 2P(1) \\ P(2) & 2P(2) \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{smallmatrix}\right)$

1.3.12.

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = x + 2y$, $\dim \ker F = 1$,

(b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x-y \\ y-z \end{smallmatrix}\right)$, $\dim \ker F = 1$,

(c) $F : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$, $F(P) = P'(2)$, $\dim \ker F = 4$,

(d) $F : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $F(P) = \left(\begin{smallmatrix} P(1) \\ P(2) \end{smallmatrix}\right)$, $\dim \ker F = 1$,

(e) $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $F(P)(x) = xP'''(x) + P''(x)$, $\dim \ker F = 2$,

(f) $F : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}_5[x]$, $F(P)(x) = P(x) - P(-x)$, $\dim \ker F = 3$,

(g) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $F(A) = A - A^\top$, $\dim \ker F = 3$,

(h) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $F(A) = A - 2A^\top$, $\dim \ker F = 0$,

(i) $F : C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(f) = f(1) + f'(1)$, $\dim \ker F = \infty$,

(j) $F : \{(a_n)_{n=1}^{\infty}, (a_n) \text{ zbieżny } \} \to \mathbb{R}$, $F((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} a_n$ $\dim \ker F = \infty$.

1.3.13. $3b_1 + 2b_2 + 3b_3$

1.3.14. $\begin{pmatrix} a & c & -a-c \\ b & d & -b-d \\ 2a+b & 2c+d & -2a-b-2c-d \end{pmatrix}$ dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1.3.15. c dowolne, $d = 0$

1.3.16.

(a) np. $F: V \to \mathbb{R}^2$, $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$,

(b) np. $F: V \to \mathbb{R}^3$, $F(ax^3 + bx^2 + cx - (a+b+c)) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$,

(c) np. $F: V \to \mathbb{R}^3$, $F(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.17. Nie.

1.3.18. *Wskazówka*: $F(P) = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(6) \end{pmatrix}$.

1.3.19. *Wskazówka*: zastosuj twierdzenie o indeksie.

2.1.1.

(a) -20, (b) -4, (c) 1, (d) 35.

2.1.2.

(a) -12, (b) -1, (c) -8, (d) 0.

2.1.3.

(a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = -2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ s = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

2.1.4.

(a) Tak. (b) Tak. (c) Nie.

2.1.5.

(a) 0, (b) 1, (c) 4.

2.1.6. $2x^3 - 9x^2 + 7x + 7$

2.1.7.

(a) 30, (b) -75, (c) -40.

2.1.8.

(a) 4, (b) 0, (c) 4.

2.1.9.

(a) przemnoży się przez $(-1)^n$,

(b) przemnoży się przez t^n,

(c) przemnoży się przez $(-1)^{[n/2]}$,

(d) przemnoży się przez $(-1)^{n-1}$.

2.1.10. Oba wyznaczniki wynoszą 0.

2.1.11.
(a) Tak. (b) Nie. (c) Tak. (d) Tak. (e) Tak.

2.1.12.

2.1.13.
(a) Tak, (b) Tak, (c) Tak.

2.1.14. $p \neq 2/3$

2.1.15. $-2p$

2.1.16.
(a) Tak, (b) Tak, (c) Tak, (d) Nie, (e) Tak.

2.1.17. Macierz A jest górnotrójkątna i ma niezerowy wyznacznik. Wektory $P_0, P_1, \ldots, P_n$ są liniowo niezależne.

2.1.18. *Wskazówka*: Zauważ, że dowód Faktu 2.11 stosuje się również do tej sytuacji.

2.1.19. *Wskazówka*: Napisz odpowiedni układ równań i posługując się wzorami Cramera oraz wyznacznikiem Vandermonde'a uzasadnij, że ma on dokładnie jedno rozwiązanie.

2.2.1.
(a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{13}{5} & 4 \\ \frac{1}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{9}{5} & -2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$

2.2.2.
(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

2.2.3.
(a) Tak. (b) Nie.

2.2.4.
(a) minor stopnia 3 (b) minor stopnia 2 (c) minor stopnia 2

2.2.5.
(a) 2 (b) 3 (c) 2

2.2.6.
(a) rząd 4, macierz odwrotna $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{4} & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(b) rząd 3,

(c) rząd 4, macierz odwrotna $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 7 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -6 & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$

(d) rząd 2.

2.2.7.

(a) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (c) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (d) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (e) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ (f) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&4&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$

2.2.8.

(a) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)$, zamienia drugi i trzeci wiersz,

(b) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$, zamienia drugą i trzecią kolumnę,

(c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, mnoży drugi wiersz przez $\frac{1}{5}$,

(d) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{5}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, mnoży drugą kolumnę przez $\frac{1}{5}$,

(e) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$, odejmuje od drugiego wiersza 4-krotność trzeciego wiersza,

(f) $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-4&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right)$, odejmuje od drugiej kolumny 4-krotność trzeciej kolumny.

2.2.9.

(a) nie istnieje,

(b) $F : V \to W,\ F(A) = A^\top$,

(c) nie istnieje,

(d) $F : V \to W,\ F(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\\d\end{smallmatrix}\right)$.

2.2.10.

(a) Tak. (b) Tak. (c) Tak.

2.2.11.

(a) $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{smallmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \begin{pmatrix}1&-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $F^{-1}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + (d - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c)$,

(b) $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&-1&1\end{smallmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right))$, $F^{-1}(\left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}\right)) = a + \frac{b-c}{2}x + \frac{b+c-2a}{2}x^2$,

(c) $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{smallmatrix}1&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&0\end{smallmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\1&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))$, $F^{-1}(\left(\begin{smallmatrix}x&y\\z&t\end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix}\frac{y}{2}&\frac{2x-y}{2}\\\frac{t}{2}&\frac{2z-t}{2}\end{pmatrix}$

(d) $m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(F) = \left(\begin{smallmatrix}-1&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(F^{-1}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right))$, $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right))$, $F^{-1}(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\-x-y\end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}(x+2y)\\\frac{1}{3}(x-y)\end{pmatrix}$

2.2.12. *Wskazówka*: zastosuj wzór (2.15).

2.2.13. $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

2.2.14. *Wskazówka*: wykorzystaj fakt, że $m^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = (m^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}))^{-1}$.

2.2.16. Gdy wszystkie wyrazy na przekątnej macierzy są niezerowe. *Wskazówka*: wykorzystaj wzór wyznacznikowy na macierz odwrotną.

2.3.1.

(a) niesprzeczny, wymiar 2

(b) niesprzeczny, wymiar 1

(c) sprzeczny

2.3.2.

(a) $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\2\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\\-3\\0\\1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3\\1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\-2\\4\\-1\\3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$

2.3.3.

(a) $\ker F = \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\0 \end{pmatrix}\}$

(b) $\ker F = \operatorname{Lin}\{\begin{pmatrix} -3\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\3\\-1\\1 \end{pmatrix}\}$

2.3.4.

(a) $t\begin{pmatrix} 1\\2\\0\\1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}$

(b) $s\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}$

2.3.5. Np. zmienić 3 na 4 w ostatnim równaniu pierwszego układu. W drugim jest to niemożliwe. Trzeci jest sprzeczny.

2.3.6.

(a) $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\2\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1\\1\\-2\\1\\-1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3\\1\\1\\-1\\-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$

2.3.7.

(a) np. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (b) np. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (c) np. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.3.8.

(a) np. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ (b) np. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2.3.9. 3 lub więcej

2.3.10. 2 lub więcej

2.3.11. $p = 5$, $q = 3$

2.3.12.

(a) $a = b = c = d = \frac{1}{t+3}$ dla $t \notin \{1, -3\}$, $d = -a - b - c + 1$ dla $t = 1$, układ sprzeczny dla $t = -3$

(b) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ dla $t = -1$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{24}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ -3 \end{pmatrix}$ dla $t = 3$, sprzeczny dla $t \notin \{-1, 3\}$

2.3.13.

(a) np. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ (b) np. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$

2.3.14.

(a) Tak. (b) Tak. (c) Tak. (d) Nie. (e) Tak. (f) Nie.

2.3.15.

(a) Nie może. (b) Może, nie musi. (c) Może, nie musi. (d) Może, nie musi.
(e) Musi. (f) Może, nie musi.

2.3.16. *Wskazówka*: przestrzeń liniowa wymiaru 0 składa się z jednego elementu, a przestrzeń liniowa wymiaru dodatniego składa się z nieskończenie wielu elementów.

2.3.17. *Wskazówka*: użyj Twierdzenia Kroneckera–Capelli.

2.3.18. *Wskazówka*: uzasadnij, że kolumny macierzy A stanowią bazę przestrzeni W.

3.1.1.

(a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 4$, $V^1 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^2 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^3 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^4 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\}$.

(b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, $V^0 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $V^1 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^{-2} = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $V^1 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $V^3 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^5 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(d) $\lambda_1 = 1$, $V^1 = \text{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

3.1.2.

(a) $\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&0&2&6\\ 0&0&0&6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&3&0\\ 0&0&0&4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&0&2&6\\ 0&0&0&6 \end{pmatrix}^{-1}$

(b) nie jest diagonalizowalna

(c) $\begin{pmatrix} -1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&-1&0&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&3&0\\ 0&0&0&5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&0&1&0\\ 1&0&1&0\\ 0&-1&0&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}^{-1}$

(d) nie jest diagonalizowalna

3.1.3.

(a) $\begin{pmatrix} 3^{100} & 3^{100}-1 & 3^{100}-2^{100}\\ 0&1&0\\ 0&0&2^{100} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2^{49}&2^{49}\\ 0&0&2^{49}&2^{49} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 121&122&0&0\\ 122&121&0&0\\ 0&0&1562&1563\\ 0&0&1563&1562 \end{pmatrix}$

3.1.4.

(a) $\lambda_1 = 0$, $V^0 = \mathrm{Lin}\{1\}$,

(b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $V^1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a&b\\ b&c \end{smallmatrix}\right), a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $V^{-1} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0&b\\ -b&0 \end{smallmatrix}\right), b \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $V^2 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}\}$, $V^0 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}\}$.

3.1.5.

(a) 1, 5, -2, -3

(b) 1, -1, -2, -3,

(c) 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3.1.6.

(a) $\chi_F(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 6$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, $\lambda_4 = -\sqrt{2}$, $V^3 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\}$, $V^{-1} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}\}$, $V^{\sqrt{2}} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1+\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix}\}$, $V^{-\sqrt{2}} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1-\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix}\}$

(b) $\chi_F(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 36\lambda^2 - 54\lambda + 27$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $V^1 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0&b\\ -b&0 \end{smallmatrix}\right), b \in \mathbb{R}\}$, $V^3 = \{\left(\begin{smallmatrix} a&c\\ c&d \end{smallmatrix}\right), a,c,d \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\chi_F(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $V^1 = \mathrm{Lin}\{1\}$, $V^2 = \mathrm{Lin}\{x+1\}$, $V^4 = \mathrm{Lin}\{x^2 + 2x + 1\}$,

(d) $\chi_F(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $V^0 = \mathrm{Lin}\{1\}$, $V^1 = \mathrm{Lin}\{x\}$, $V^2 = \mathrm{Lin}\{x^2 + 1\}$.

3.1.7.

(a) $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1+\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1-\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix})$, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&\sqrt{2}&0\\ 0&0&0&-\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

(b) $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 0&1\\ -1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\ 0&1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{smallmatrix}\right))$, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}$,

(c) $\mathcal{B} = (1, x+1, x^2 + 2x + 1)$, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&4 \end{pmatrix}$,

(d) $\mathcal{B} = (1, x, x^2 + 1)$, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$.

3.1.8. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3.1.9. $\begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$

3.1.10.

(a) $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{B} = (x^2 + x, x - 1, x^2 - 1)$

(b) $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

3.1.11.

(a) $\begin{pmatrix} -1+3\cdot(-1)^n-2^n & 3-6\cdot(-1)^n+3\cdot 2^n & 2-3\cdot(-1)^n+2^n \\ (-1)^n-2^n & -2\cdot(-1)^n+3\cdot 2^n & -(-1)^n+2^n \\ -1+2^n & 3-3\cdot 2^n & 2-2^n \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 2^n-3^n \\ -2^n+3^n & 2^n & 2^n-3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3\cdot 6^n & -2\cdot 6^n+2\cdot 3^n & 0 & -6^n+3^n \\ 0 & 6^n+2\cdot 3^n & 0 & -6^n+3^n \\ 3\cdot 6^n-3\cdot 3^n & -2\cdot 6^n+2\cdot 3^n & 3\cdot 3^n & -6^n+3^n \\ 0 & -2\cdot 6^n+2\cdot 3^n & 0 & 2\cdot 6^n+3^n \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n & \frac{1}{3}\cdot 4^n-2^{n+1}+3^n+\frac{2}{3} \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n & 4^n-2^{n+1}+3^n \\ 0 & 0 & 3^n & 3^n-4^n \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

3.1.12. *Wskazówka*: wyznacz wielomian charakterystyczny.

3.1.13.

(a) $V^\lambda = \mathrm{Lin}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, nie jest diagonalizowalna,

(b) $V^\lambda = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, nie jest diagonalizowalna,

(c) $V^\lambda = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, nie jest diagonalizowalna.

3.1.14.

(a) $\lambda_1 = 1$ dla e^x, $\lambda_2 = -1$ dla e^{-x}, $\lambda_3 = 2$ dla e^{2x}, $\lambda_4 = 0$ dla 1,

(b) $\lambda_1 = 1$ dla e^x, e^{-x}, $\lambda_2 = -1$ dla $\sin x$, $\cos x$, $\lambda_3 = -4$ dla $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\lambda_4 = 4$ dla e^{2x}, $\lambda_5 = 0$ dla 1, x,

(c) $\lambda_1 = 1$ dla 1, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\lambda_2 = -1$ dla $\sin x$, $\cos x$, $\lambda_3 = e^\pi$ dla e^x, $\lambda_4 = e^{2\pi}$ dla e^{2x}, $\lambda_5 = e^{-\pi}$ dla e^{-x}.

3.1.15.

(a) np. $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (x^2 + x + 1, 2x^2 - x - 1, 1)$,

(b) np. $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.16. p, q dowolne

3.1.17. b_1, b_3 dla $\lambda = 2$ oraz b_4 dla $\lambda = 3$.

3.1.18. np. $m(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{smallmatrix}\right)^{-1}$, gdzie a, b, c to dowolne liczby rzeczywiste, dla których macierz jest odwracalna.

3.1.19. *Wskazówka*: wyznacz wymiar przestrzeni własnej oraz obrazy wersorów.

3.1.20. *Wskazówka*: przekształcenie odwracalne zachowuje wymiary podprzestrzeni.

3.1.21. $P \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$, $P \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$, $P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$, gdzie P jest dowolną macierzą odwracalną odpowiedniego rozmiaru,

3.2.1.

(a) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}_n[x]) = 2n+2$, $\dim_{\mathbb{R}}(M_{n\times n}(\mathbb{C})) = 2n^2$,

(b) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_n[x]) = n+1$, $\dim_{\mathbb{C}}(M_{n\times n}(\mathbb{C})) = n^2$.

3.2.2.

(a) Tak. (b) Nie.

3.2.3.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Nie.

3.2.4.

(a) $32 \cdot \begin{pmatrix} 34 & -2 & -70 \\ 31 & 1 & -60 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\begin{pmatrix} -64 & 0 & 0 \\ 0 & 4096 & 0 \\ 0 & 0 & -64 \end{pmatrix}$

3.2.5.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Nie. (d) Tak.

3.2.6.

(a) rzeczywiste: tak, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$; zespolone: tak, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ w bazie $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$;

(b) rzeczywiste: tak, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$; zespolone: tak, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)$ w bazie $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$;

(c) rzeczywiste: tak, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$; zespolone: nie;

(d) rzeczywiste: tak, $m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \end{smallmatrix}\right)$; zespolone: tak, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{C} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$;

3.2.7.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3+i & 3-i \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3+i & 3-i \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3+i & 3-i \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3+i & 3-i \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

(c) $\begin{pmatrix} -i & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

3.2.8.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ lub $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ lub $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(c) $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ lub $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

3.2.9.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Tak. (d) Tak.

3.2.10.

(a) np. $W' = \mathrm{Lin}\{1, \},$

(b) np. $W' = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$

3.2.11.

(a) rzeczywistej – tak, wymiar 2, baza $(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix})$, zespolonej – tak, wymiar 1, baza $(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$

(b) rzeczywistej – tak, wymiar 2, baza $(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix})$, zespolonej – tak, wymiar 1, baza $(\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix})$

(c) rzeczywistej – tak, wymiar 2, baza $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix})$, zespolonej – nie,

(d) rzeczywistej – tak, wymiar 2, baza $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix})$, zespolonej – nie.

3.2.12. $(-1, -1)$

3.2.13.

(a) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 5z = 0\}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$,

(b) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, dowolna prosta przechodząca przez 0 i zawarta w π, dowolna płaszczyzna przechodząca przez 0 i zawierająca prostą ℓ.

3.2.14.

(a) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\} \oplus \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 5z = 0\}$, $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$,

(b) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\} \oplus \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$, $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$.

3.2.15.

(a) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^4$

(b) $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\}$, $\mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^4$

3.3.1.

(a) $\begin{pmatrix}(-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & (-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4^n & n4^{n-1} & \binom{n}{2}4^{n-2}\\ 0 & 0 & 4^n & n4^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 4^n\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}5^n & n5^{n-1} & \binom{n}{2}5^{n-2} & \binom{n}{3}5^{n-3}\\ 0 & 5^n & n5^{n-1} & \binom{n}{2}5^{n-2}\\ 0 & 0 & 5^n & n5^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 5^n\end{pmatrix}$

3.3.2.

(a) $\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

3.3.3.

(a) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$ (b) $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$ (c) $\begin{pmatrix}1&\frac14\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac14\\4&0\end{pmatrix}^{-1}$ (d) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}$

3.3.4.

(a) $\begin{pmatrix}6\cdot2^{10} & -5\cdot2^{10}\\ 5\cdot2^{10} & -4\cdot2^{10}\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}21 & -20\\ 20 & -19\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ dla $n \geq 2$

(d) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -100 & 1\end{pmatrix}$

3.3.5.

(a) $A^n = 0$ dla $n \geq 2$,

(b) $A^n = 0$ dla $n \geq 3$, $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

(c) $A^n = 0$ dla $n \geq 4$, $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

(d) $A^n = 0$ dla $n \geq 5$, $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3.3.6.

(a) $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

3.3.7. $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

3.3.8.

(a) np. $\begin{pmatrix} 4&0&0&0&0& \\ 0&7&1&0&0& \\ 0&0&7&1&0& \\ 0&0&0&7&0& \\ 0&0&0&0&0&7 \end{pmatrix}$

(b) np. $\begin{pmatrix} \lambda&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&1&0&0 \\ 0&0&\lambda&0&0 \\ 0&0&0&\lambda&1 \\ 0&0&0&0&\lambda \end{pmatrix}$

3.3.9.

(a) $\begin{pmatrix} 1&\frac{1}{3}&0&0 \\ 0&\frac{1}{3}&0&0 \\ 0&0&-2&-1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&3&1 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&\frac{1}{3}&0&0 \\ 0&\frac{1}{3}&0&0 \\ 0&0&-2&-1 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}^{-1}$

(b) $\begin{pmatrix} -2&-1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&\frac{1}{2} \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&1&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2&-1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&\frac{1}{2} \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}^{-1}$

(c) $\begin{pmatrix} -1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&i&-i \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1-i&0 \\ 0&0&0&1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&i&-i \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}^{-1}$

(d) $\begin{pmatrix} -1&-3&-3&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&\frac{1}{3}&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1&-3&-3&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&\frac{1}{3}&0 \end{pmatrix}^{-1}$

3.3.10.

(a) $\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{n}{5})\cdot 10^n & \frac{2}{5}n10^n \\ 0 & -n10^{n-1} & (1+\frac{n}{5})\cdot 10^n \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} (-n+2)4^{n-1}+2^{n-1} & -\frac{n}{2}4^n & (n+2)4^{n-1}-2^{n-1} \\ \frac{1}{2}4^n-\frac{1}{2}2^n & 4^n & -\frac{1}{2}4^n+\frac{1}{2}2^n \\ (-n+2)4^{n-1}-2^{n-1} & -\frac{n}{2}4^n & (n+2)4^{n-1}+2^{n-1} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} (n+1)i^n & -ni^{n+1} \\ -ni^{n+1} & (1-n)i^n \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1-10n & 4n \\ -25n & 10n+1 \end{pmatrix}$

3.3.11. A diagonalizuje się dla $p \notin \{1,2\}$. Postać Jordana dla $p=1$ to $J = \left(\begin{smallmatrix} 2&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$, a dla $p=2$ to $J = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&2&1 \\ 0&0&2 \end{smallmatrix}\right)$.

3.3.12. $a \neq 0$, b dowolne

3.3.13.

(a) b_1 lub b_2 lub b_4,

(b) dowolne dwa spośród b_1, b_2, b_4,

(c) (b_1, b_2, b_3) lub (b_2, b_3, b_4) lub (b_1, b_2, b_4).

3.3.14. V_2 i V_3 oraz V_3 i V_4

3.3.15. np. $W = \mathrm{Lin}\{x, 1\}$

3.3.16.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Tak. (d) Nie.

3.3.17. $P \left(\begin{smallmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&2 \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$ dla (prawie) dowolnego odwracalnego $P \in M_{3\times 3}$

3.3.18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

3.3.19. *Wskazówka*: Zapisz macierz A w postaci Jordana.

3.3.20. Pierwiastki n-tego stopnia z jedynki. *Wskazówka*: Zapisz macierz A w postaci Jordana.

3.3.21. *Wskazówka*: Zapisz macierz w postaci Jordana: $A = PJP^{-1}$ i zauważ, że $\lim_{n\to\infty}(PJ^nP^{-1}) = P \cdot (\lim_{n\to\infty} J^n) \cdot P^{-1}$.

3.4.1.

(a) $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$, (b) $b_n = 3^n + 2 \cdot n3^n$.

3.4.2.

(a) $\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} e^3 & e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} e^4 & e^4 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^7 \end{pmatrix}$

3.4.3.

(a) $a_n = (1-2n+n^2)\cdot 2^n$, (b) $b_n = 1 + 2n + 3 \cdot 2^n$. (c) $c_n = (-2)\cdot 2^n + (-1)^n + 3$

3.4.4.

(a) $\begin{cases} a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \\ b_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot (-1)^n \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_n = 8 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n \\ b_n = (-8) \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n \end{cases}$

3.4.5.

(a) 0.5 (b) $\frac{29524}{59049} \approx 0.500$ (c) $\frac{60\,073}{236\,196} \approx 0.254$

3.4.6.

(a) ≈ 0.478 (b) ≈ 0.979

3.4.7.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & e^3 \\ -e^3 & 2e^3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^3+\frac{1}{2}e^{-1} & \frac{1}{4}e^3-\frac{1}{4}e^{-1} \\ e^3-e^{-1} & \frac{1}{2}e^3+\frac{1}{2}e^{-1} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2e^4 & -e^4 & -e^4 \\ 2e^4 & e^4 & 0 \\ 3e^4 & e^4 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^8+\frac{3}{2}e^4 & \frac{1}{2}e^8+\frac{5}{2}e^4 & -2e^4 \\ \frac{1}{2}e^8-\frac{3}{2}e^4 & \frac{1}{2}e^8-\frac{5}{2}e^4 & 2e^4 \\ e^8-2e^4 & e^8-4e^4 & 3e^4 \end{pmatrix}$

3.4.8. $p = 2$, $q = 5$

3.4.9.

(a) ≈ 0.005 (b) ≈ 0.000 (c) ≈ 0.431

3.4.10. $(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})(1-i)^n + (\frac{1}{2} - \frac{i}{2})(1+i)^n = 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4})$

3.4.11. *Wskazówka*: oblicz potęgę odpowiedniej macierzy Jordana.

4.1.1.

(a) $|\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}| = 3$, $|\begin{pmatrix}4\\1\\1\\2\end{pmatrix}| = \sqrt{22}$, $|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}| = 2$, $\angle(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\\2\end{pmatrix}) = \arccos\frac{10}{3\sqrt{22}}$, $\angle(\begin{pmatrix}4\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}) = \arccos\frac{8}{2\sqrt{22}}$, $\angle(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}) = \arccos\frac{5}{6}$.

(b) $|x| = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $|1+x| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $|x^2| = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\angle(x, 1+x) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(1+x, x^2) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{6}$, $\angle(x^2, x) = \frac{\pi}{2}$.

4.1.2.

(a) Tak. (b) Nie. (c) Nie. (d) Nie.

4.1.3.

(a) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ (b) $\frac{8}{13}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (c) $\frac{35}{12}x^2$

4.1.4.

(a) $(1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3})$ (b) $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (c) $(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix})$

4.1.5.

(a) np. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, (b) np. $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-9\\7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.1.6. $(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot(x^2 - \frac{1}{3}))$

4.1.7.

(a) Nie. (b) Nie. (c) Nie.

4.1.8. $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = \sqrt{14}$, $|CA| = \sqrt{8}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABC = \arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\angle ACB = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

4.1.9.

(a) np. $(\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\\-3\\1\end{pmatrix})$,

(b) np. $(\begin{pmatrix}3\\0\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-4\\1\end{pmatrix})$,

(c) np. $(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix})$.

4.1.10.

(a) $W^\perp = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\}$

(b) $W^\perp = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$

(c) $W^\perp = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\}$

(d) $W^\perp = \mathrm{Lin}\{3x^2 - 1\}$

4.1.11.

(a) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$, $p_W(v) = \begin{pmatrix}1\\\frac{8}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$, $d(v, W) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$,

(b) $W = \mathrm{Lin}\{1 + x, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2\}$, $p_W(v) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^2$, $d(v, W) = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

4.1.12. $-\frac{11}{2}$

4.1.13. $\sqrt{(}14)$

4.1.14. $\frac{1}{4}w$

4.1.15.

(a) np. $(\begin{pmatrix}4\\-3\\11\\8\end{pmatrix})$;

(b) np. $(\begin{pmatrix}-21\\13\\19\\11\end{pmatrix})$;

(c) np. $(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix})$.

4.1.16. $m^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_W) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}14 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 11 & 2 & -6\\ -1 & 2 & 14 & 3\\ 3 & -6 & 3 & 6\end{pmatrix}$

4.1.17. $W^{\perp} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-1\end{pmatrix}\}$

4.1.18. $\pi - 2\sin x$

4.1.19.

4.1.20. *Wskazówka*: zacznij od wprowadzenia bazy ortonormalnej podprzestrzeni W.

4.1.21. *Wskazówka*: uzasadnij, że $w - w' \perp b_i$ dla $i = 1, 2, 3$.

4.2.1.

(a) $\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 3 & 0\\ -\frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

4.2.2.

(a) $\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rangle = x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1$

(b) $\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rangle = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3$

(c) $\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1$

(d) $\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$

4.2.3.

(a) 4, tak, (b) 4, nie, (c) 6, tak, (d) 5, nie.

4.2.4.

(a) nie jest dodatnio określona, ani ujemnie określona,

(b) dodatnio określona,

(c) ujemnie określona,

(d) nie jest dodatnio określona, ani ujemnie określona.

4.2.5.

(a) $\lambda \in (-2, 2)$

(b) $\lambda \in (\frac{27}{14}, +\infty)$

4.2.6.

(a) symetryczna forma dwuliniowa, $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, dodatnio określona, $\Phi(x) = x^\top x$;

(b) symetryczna forma dwuliniowa, $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = ((\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$, nie jest dodatnio określona, $\Phi(A) = \mathrm{tr}(A^2)$;

(c) nie jest formą dwuliniową;

(d) symetryczna forma dwuliniowa, $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ w bazie $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, dodatnio określona, $\Phi(P) = \int_0^1 (P(x))^2 dx$.

4.2.7.

(a) $Q(x', y', z') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$ w bazie $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, sygnatura $(2, 1)$,

(b) $Q(x', y', z') = (x')^2 + 2(y')^2 - 2(z')^2$ w bazie $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, sygnatura $(2, 1)$,

(c) $Q(x', y', z') = (x')^2 - (y')^2$ w bazie $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$, sygnatura $(1, 1)$,

(d) $Q(x', y', z') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2$ w bazie $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$, sygnatura $(2, 1)$,

4.2.8.

(a) $Q(x', y', z') = 2(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 + 2x'y' + 4y'z'$ oraz $Q(\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix}) = 2x'_1x'_2 - y'_1y'_2 + z'_1z'_2 + x'_1y'_2 + x'_2y'_1 + 2y'_1z'_2 + 2y'_2z'_1$

(b) $m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $Q(x, y, z) = -x^2 + y^2 + xy + 3xz - 2yz$ oraz $Q(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = -x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1z_2 + \frac{3}{2}x_2z_1 - y_1z_2 - y_2z_1$

4.2.9.

(a) nie jest dodatnio ani ujemnie określona

(b) dodatnio określona dla $\lambda > 1$

(c) nie jest dodatnio ani ujemnie określona

(d) dodatnio określona dla $\lambda \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

4.2.10.

(a) dodatnio określona,

(b) nie jest ani dodatnio półokreślona, ani ujemnie półokreślona,

(c) nie jest ani dodatnio półokreślona, ani ujemnie półokreślona,

(d) ujemnie półokreślona.

4.2.11.

(a) $m^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4.2.12.

(a) $(2, 2)$ (b) $(1, 2)$ (c) $(1, 0)$ (d) $(1, 1)$

4.2.13. Tak.

4.2.14.

(a) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, (b) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

(c) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ (d) $W = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

4.2.15. Nie.

4.2.16. np. $Q(x', y', z') = (x')^2 - (y')^2$ we współrzędnych związanych z bazą $\mathcal{B}' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ oraz $Q(x, y, z) = 2yz - z^2$ w bazie standardowej.

4.2.17. *Wskazówka*: zdiagonalizuj formę, a następnie dokonaj odpowiedniej zamiany zmiennych.

4.2.18. *Wskazówka*: macierz $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $v^\top P v > 0$ dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

4.2.19. *Wskazówka*: zastanów się jakie sygnatury może mieć forma kwadratowa na przestrzeni wymiaru 2.

4.3.1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.3.2.

(a) $V^3 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $V^1 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

(b) $V^2 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $V^1 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $V^0 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

(c) $V^0 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, $V^2 = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $V^{-2} = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

4.3.3.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4.3.5.

(a) $u \cdot v^\top = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $u^\top \cdot v = 6$

(b) $u \cdot v^\top = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $u^\top \cdot v = 5$

(c) $u \cdot v^\top = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & 10 & 2 & 2 \\ 12 & 20 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $u^\top \cdot v = 18$

4.3.6.

(a) 2 (b) 4 (c) $5 - 6i$

4.3.7.

(a) $\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, tak, (b) $\left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$, nie, (c) $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, tak.

4.3.8.

(a) Tak. (b) Nie.

4.3.9.

(a) Nie. (b) Tak. (c) Nie. (d) Tak.

4.3.10. np. $\left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right)$

4.3.11.

(a) v_1 i v_2,

(b) $|v_1| = \sqrt{3}$, $|v_2| = \sqrt{3}$, $|v_3| = \sqrt{6}$, $|v_4| = \sqrt{5}$

4.3.12.

(a) $AB^\top = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $AB^\top = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$

4.3.13.

(a) Nie. (b) Nie. (c) Tak.

4.3.14.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (b) Nie. (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) Nie.

4.3.15.

(a) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, sygnatura $(2, 1)$

(b) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\right)$, $m^{\mathcal{B}\mathcal{B}}(Q) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, sygnatura $(1, 2)$

4.3.16. $\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&a&b\\ 0&b&c \end{pmatrix}$ dla dowolnych a, b, c.

4.3.17. Dowolny wektor długości 1 prostopały do $\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$.

4.3.18. *Wskazówka*: zdiagonalizuj macierz A i wykorzystaj fakt, że $U^{-1} = U^\top$ dla macierzy ortogonalnych.

4.3.19. *Wskazówka*: wykorzystaj wzór $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^\top v\rangle$.

4.3.20. *Wskazówka*: izometria zachowuje ortogonalność wektorów.

4.3.21.

4.4.1.

(a) $A^\top A = \left(\begin{smallmatrix} 9&3\\ 3&1 \end{smallmatrix}\right)$, rząd 1; $AA^\top = 10$, rząd 1;

(b) $A^\top A = \begin{pmatrix} 4&2&-4\\ 2&1&-2\\ -4&-2&4 \end{pmatrix}$, rząd 1; $AA^\top = 9$, rząd 1;

(c) $A^\top A = \begin{pmatrix} 50&-40\\ -40&50 \end{pmatrix}$, $AA^\top = \left(\begin{smallmatrix} 74&32\\ 32&26 \end{smallmatrix}\right)$;

(d) $A^\top A = \left(\begin{smallmatrix} 90&72\\ 72&90 \end{smallmatrix}\right)$, $AA^\top = \begin{pmatrix} 74&40&68\\ 40&26&28\\ 68&28&80 \end{pmatrix}$;

(e) $A^\top A = \begin{pmatrix} 26&28&-40\\ 28&80&-68\\ -40&-68&74 \end{pmatrix}$, $AA^\top = \begin{pmatrix} 90&-72\\ -72&90 \end{pmatrix}$;

4.4.2.

(a) macierz $A^\top A$: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1\\ 3 \end{smallmatrix}\right)$
macierz $AA^\top$: $\lambda_1 = 10$, $v_1 = (1)$
macierz A: $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} 3\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(b) macierz $A^\top A$: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}$
macierz $AA^\top$: $\lambda_1 = 9$, $v_1 = (1)$
macierz A: $\sigma_1 = 3$, $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2 \end{pmatrix}$

(c) macierz $A^\top A$: $\lambda_1 = 90$, $\lambda_2 = 10$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
macierz $AA^\top$: $\lambda_1 = 90$, $\lambda_2 = 10$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1\\ 2 \end{smallmatrix}\right)$
macierz A: $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$, $\sigma_2 = \sqrt{10}$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(d) macierz $A^\top A$: $\lambda_1 = 162$, $\lambda_2 = 18$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$
macierz $AA^\top$: $\lambda_1 = 162$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 0$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$
macierz A: $\sigma_1 = 9\sqrt{2}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{2}$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

(e) macierz $A^\top A$: $\lambda_1 = 162$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 0$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}$
macierz $AA^\top$: $\lambda_1 = 162$, $\lambda_2 = 18$, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
macierz A: $\sigma_1 = 9\sqrt{2}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{2}$, $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$

4.4.3. $\begin{pmatrix} 7&26\\ 26&43\\ 38&34 \end{pmatrix} = 75 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}^\top + 15 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}^\top$

4.4.4. $A' = \begin{pmatrix} 15&20\\ 30&40\\ 30&40 \end{pmatrix}$, $A - A' = \begin{pmatrix} -8&6\\ -4&3\\ 8&-6 \end{pmatrix}$

4.4.5. $\begin{pmatrix} -5 & 17 & 1 \\ -11 & 5 & 13 \\ 15 & -3 & -9 \\ 9 & -15 & 3 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^\top + 18 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top + 6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top$

4.4.6. $B' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 5 \\ -10 & 10 & 5 \\ 10 & -10 & -5 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix}$, $B - B' = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ -1 & -5 & 8 \\ 5 & 7 & -4 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$
$B'' = \begin{pmatrix} -7 & 16 & -1 \\ -13 & 4 & 11 \\ 13 & -4 & -11 \\ 7 & -16 & 1 \end{pmatrix}$, $B - B'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.4.7. $t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 30

4.4.8.

(a) $(1) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}^\top = \sqrt{10} \cdot (1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}^\top$

(b) $(1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^\top = 3 \cdot (1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top = 3\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top + \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top$

(d) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top = 9\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top + 3\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top$

(e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top = 9\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^\top + 3\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^\top$

4.4.9. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$, $m_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

4.4.10. Nie.

4.4.11. $A^\top = V \Sigma^\top U^\top$

4.4.12. Dla macierzy symetrycznych.

4.4.13.