

ZADANIA DODATKOWE Z ANALIZY II

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu

$$a_n := \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

przez obliczenie odpowiedniej całki. Wskazówka: Oblicz granicę ciągu $\log(a_n)$.

Zadanie 2. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX cisoidy Dioklesa $x^3 = y^2(2r - x)$, gdzie $1 \leq x \leq 2$ a $r \geq 0$.

Zadanie 3. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, żeby wypompować wodę z jamy w kształcie stożka (o pionowej osi), którego wysokość h wynosi $2m$ a promień podstawy r wynosi $0,3m$. (Ciężar właściwy wody $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$).

Zadanie 4. Oblicz całki nieoznaczone

$$\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Zadanie 5. Oblicz całkę nieoznaczone

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Zadanie 6. Oblicz całkę nieoznaczone

$$\int \frac{1}{\sin^3(x) \cos(x)} dx.$$

Zadanie 7. Dla jakich $a, b > 0$ całka

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b \cos(x)} dx$$

jest zbieżna? Jeżeli całka jest zbieżna, oblicz jej wartość.

ZADANIA DODATKOWE Z ANALIZY II

Zadanie 8. Zbadaj zbieżność całki

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

i w przypadku zbieżności oblicz jej wartość.

Zadanie 9. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y, z) = y \arcsin(x \log(y)) + 2^{\frac{x}{y}}.$$

Zadanie 10. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$