Wykład 2.

Liniowa niezależność.

V: p. liniowa $/\mathbb{R}$.

Def. 2.2. • Układ (ciąg) wektorów $v_1, \dots, v_n \in V$ jest <u>liniowo zależny</u>, gdy jeden z nich jest liniową kombinacją pozostałych. W przeciwnym razie: <u>liniowo niezależny</u>.

• Ponadto: • Układ złożony z wektora zerowego jest liniowo zależny.

• Układ złożony z zera wektorów jest liniowo niezależny.

<u>Przykłady</u>

• układ $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ jest l. zależny $\Leftrightarrow$ X_1 i X_2 leżą na pewnej prostej w $\mathbb{R}^2$ przechodzącej przez 0.

• $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ —″— $\Leftrightarrow$ X_1, X_2, X_3 leżą na pewnej płaszczyźnie w $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez 0.

• Układ v, v dla $v \in V$ jest lin. zależny

• Układ $0, v$ —″— (bo $0 = 0v$)

• jedyny liniowo zależny wektor $v \in V$ to $v = 0$.

Fakt 2.3. Układ $v_1, \dots, v_n \in V$ jest lin. niezależny $\Leftrightarrow$

$$(*) \; (\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}) \left(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_n = 0 \right)$$

D-d $\Rightarrow$ nie wprost: zał, że (*) nie zachodzi.

tzn. $t_1v_1+\dots+t_nv_n=0$ dla pewnych $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ (nie wszystkich $=0$).

np. $t_1\neq 0$. Wtedy

$$v_1=-\frac{t_2}{t_1}v_2+\dots+\frac{-t_n}{t_1}v_n$$ jest lin. kombinacją pozostałych ↯.

$\Leftarrow$. nie wprost: zał, że $v_1,\dots,v_n$ są liniowo zależne.

~~...~~ 1°. $n>1$. Np. v_1 jest lin. kombinacją pozostałych,

tzn. $v_1=t_2v_2+\dots+t_nv_n$ dla pewnych $t_2,\dots,t_n\in\mathbb{R}$

Wtedy $\underbrace{(-1)}_{0\neq t_1}v_1+t_2v_2+\dots+t_nv_n=0$ ↯.

2°. $n=1$. Wtedy $v_1=0$. Wtedy $\underbrace{1}_{t_1\neq 0}\cdot 0=0$.

Przykłady.

1. w $\mathbb{R}^n$ układ $E_1,\dots,E_n$ jest lin. niezależny

$E_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow i$, bo: jeśli $0=t_1E_1+\dots+t_nE_n=\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}$ to $t_1=\dots=t_n=0$

2. w $\mathbb{R}[X]$ wektory $1,X,X^2,\dots,X^n$ są lin. niezależne.

Def. 2.4. Zał., że $A \subseteq V$.

(1) A jest liniowo niezależny, gdy każdy skończony układ parami różnych wektorów z A jest liniowo niezależny.

(2) A generuje V, gdy $\mathrm{Lin}(A) = V$ ["A: zbiór generatorów V"]

(3) Dla podprzestrzeni $W < V$, A generuje W, gdy $\mathrm{Lin}(A) = W$

(4) A jest bazą V, gdy A jest liniowo niezależny i generuje V.

Przykłady. 1. $V = \{0\}$ przestrzeń zerowa
$A = \emptyset$ baza.

2. $\{E_1, \dots, E_n\}$ baza $\mathbb{R}^n$ ("standardowa")

3. $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ układ lin. niezależny $\Rightarrow$ baza $\mathbb{R}^3$
(Bo $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Lin}(X, Y, Z)$)

4. $\{1, X, X^2, \dots\}$: baza $\mathbb{R}[X]$, nieskończona.

$$W(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n.$$

5. Czy wektory $1 + X + X^2$, $2 + X$, $X + 2X^2 \in \mathbb{R}[X]$ są lin. zależne?

kryterium (*) z Faktu 2.3: szukamy $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ t. że

$$0 = t_1(1+X+X^2) + t_2(2+X) + t_3(X+2X^2)$$

$$= (t_1+2t_2) + (t_1+t_2+t_3)X + (t_1+2t_3)X^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 0 = t_1+2t_2 \\ 0 = t_1+t_2+t_3 \\ 0 = t_1+2t_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{niezerowe rozwiązanie} \\ t_1=2,\ t_2=t_3=-1 \end{array}$$

więc <u>liniowo zależne</u>.

Tw. 2.5. (o istnieniu bazy).

Zał., że $A \subseteq C \subseteq V$, A: lin. niezależny, C: generuje V. Wtedy istnieje baza B t. że $A \subseteq B \subseteq C$.

<u>D-d</u> w przypadku, gdy:

(*) istnieje skończony zbiór generatorów V.

Wtedy:

(**) Istnieje skończony zbiór $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq C$ generujący V (<u>zad.</u>)

Niech $Y' \subseteq Y$ maksymalny t. że $A \cup Y'$ lin. niezależny.

- $A \cup Y'$: baza V, bo: lin. niezależny: OK.

generuje: bo

(†) gdy $y \in Y \cup A$, to $y \in \mathrm{Lin}(A \cup Y')$, bo:

- gdy $y \in Y' \cup A$ jasne
- gdy $y \notin Y' \cup A$, to z maksymalności Y_1,

$Y' \cup A \cup \{y\}$: lin. zależny, więc

pewien skończony układ parami $\neq$ wektorów

$$\underset{\substack{\cap\\ A}}{(x_i)} {}^\frown \underset{\substack{\cap\\ Y'}}{(y_j')} {}^\frown \langle y \rangle \text{ lin. zależny}$$

tzn. $\sum t_i x_i + \sum r_j y_j' + sy = 0$ dla pewnych $t_i, r_j, s \in \mathbb{R}$ nie wszystkich $= 0$.

$A \cup Y'$: lin. niezależny

$\Downarrow$

$(x_i) {}^\frown (y_j')$: lin. niezależny

$\Downarrow$

$s \neq 0$.

$$\Downarrow$$

$$y = \left(-\frac{1}{s}\right)\left(\sum t_i x_i + \sum r_j y_j'\right) \in \mathrm{Lin}(A \cup Y')$$

Y_1.

- Gdy $v \in V$ dowolne, to $v = \sum s_i y_i \in \mathrm{Lin}(A \cup Y)$ $\exists$ dla pewnych $y_i \in A \cup Y$ oraz $s_i \in \mathbb{R}$.

Ale : każde $y_i \in \mathrm{Lin}(A \cup Y')$ (na mocy (+)).

Stąd $v \in \mathrm{Lin}(A \cup Y')$.

Przypadek ogólny : tak samo, tylko : $Y' \subseteq C$ maksymalny t. że $A \cup Y'$: lin. niezależny (istnieje z lematu K-Z).

Wn. 2.6 Każda przestrzeń liniowa ma bazę.

Tw. 2.7 (Steinitz) Każde dwie bazy przestrzeni V są równoliczne.

D-d. 1° pewna baza $\subseteq V$ jest skończona.

Zał, że A, $B \subseteq V$ bazy, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ skończona, k-elementowa.

Pdk, że B też k-elementowa.

• $|B| \leq k$ bo:

nie wprost, zał. że $|B| > k$. Niech $b_1, \dots, b_{k+1} \in B$ parami $\neq$.

Niech $X := A$. Zastępujemy stopniowo elementy zbioru A w X przez wektory z B (zmieniając X) tak, że X cały czas pozostaje zbiorem generującym V.

• $b_1 = t_{1,1} a_1 + \dots + t_{1,k} a_k$, bso $t_{1,k} \neq 0$ (bo $b_1 \neq 0$)

$\Downarrow$

$$a_k = \frac{1}{t_{1,k}} b_1 + \left(\frac{-t_{1,1}}{t_{1,k}}\right) a_1 + \dots + \left(\frac{-t_{1,k-1}}{t_{1,k}}\right) a_{k-1} \in \mathrm{Lin}(b_1, a_1, \dots, a_{k-1})$$

Zatem $X \subseteq \mathrm{Lin}(b_1, a_1, \dots, a_{k-1})$.

$V = \mathrm{Lin}(X) \Longrightarrow \mathrm{Lin}(b_1, a_1, \dots, a_{k-1}) \supseteq V$. Zastępujemy w X a_k przez b_1.

• $b_2 = s_{2,1} b_1 + t_{2,1} a_1 + \dots + t_{2,k-1} a_{k-1}$ dla pewnych $s_{2,1}, t_{2,1}, \dots, t_{2,k-1} \in \mathbb{R}$ nie wszystkich $= 0$.

Jeśli wszystkie $t_{2,i}$ są $= 0$, to $\mathcal{B}$ lin. zależny ↯,
dlatego pewne $t_{2,i}$ jest $\neq 0$. np. $t_{2,k-1} \neq 0$.

Podobnie jak wyżej, $a_{k-1} \in \mathrm{Lin}(b_1, b_2, a_1, \dots, a_{k-2})$.
więc $X \subseteq \mathrm{Lin}(b_1, b_2, a_1, \dots, a_{k-2})$
Zastępujemy w X a_{k-1} przez b_2.

Po k krokach $X = \{b_1, \dots, b_k\}$ generuje V
w szczególności $b_{k+1} \in \mathrm{Lin}(X)$ ↯ z lin. niezależnością $\mathcal{B}$.

W ten sposób pokazaliśmy, że $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|$.
Symetrycznie: $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$, więc $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

Przypadek baz nieskończonych: rachunek na l. kardynalnych:
przypuśćmy, że $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: bazy nieskończone V t. że
$|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$. ZADANIE (nietrudne).
• ~~dla każdego $a \in \mathcal{A}$ istnieje skończ. $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{B}$~~

Def. $\dim V = |\mathcal{B}|$, gdzie $\mathcal{B} \subseteq V$ dowolna baza.
wymiar

Przykłady 1. $\dim \mathbb{R}^n = n$ baza: $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$
2. $\dim \mathbb{R}[X] = \aleph_0$ baza standardowa $\{1, X, X^2, \dots\}$

3. $\dim C(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$

4. $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = ?$ (zad.)

Uwaga 2.9. Niech $V_1, V_2 < V$. Wtedy

(1) $\dim V_1 \leq \dim V$

(2) $\dim V_1 = \dim V_{\cancel{2}} < \infty \Rightarrow V_1 = V$

(3) (modularność)

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(gdy wymiary skończone).

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

(gdy wymiary dowolne)

<u>D-d</u> zad., ćw.

Bazy i przekształcenia liniowe.

$$\mathbb{R}^n \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot E_1 + x_2 \cdot E_2 + x_3 E_3 + \ldots + x_n E_n \in$$

$$\in Lin(E_1, E_2, \ldots, E_n)$$

przedstawienie jednoznaczne.

Uwaga 3.1. Zał. że $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza przestrzeni V (ponumerowana, bez powtórzeń). Wtedy

$\forall v \in V \ \exists! (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, układ ciąg współrzędnych wektora v w bazie $\mathcal{B}$

t. że (*) $v = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n$.

symbolicznie: $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

<u>D-d</u>: Istnienie $t_1, \dots, t_n$: z definicji bazy

∘ jedyność:

$$v = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n = t_1' b_1' + \dots + t_n' b_n'$$

$$\Downarrow$$

$$(t_1 - t_1') b_1 + \dots + (t_n - t_n') b_n = 0$$

$$\Downarrow \ \mathcal{B}: \text{lin. niezależny}$$

$$t_1 - t_1' = \dots = t_n - t_n' = 0$$

więc $t_1 = t_1', \dots, t_n = t_n'$.

<u>Przykład</u>. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$

$[X]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathcal{E}' = \{E_n, \dots, E_1\}$ inna numeracja $\mathcal{E}$

$$[X]_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$V_i := \mathrm{Lin}(E_i) < \mathbb{R}^n$ i-ta oś

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & = & V_1 & + \dots + & V_n \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ X & = & x_1 E_1 & + \dots + & x_n E_n \end{array}$$

tzn. $X = \underset{\underset{V_1}{\Uparrow}}{v_1} + \underset{\underset{V_2}{\Uparrow}}{v_2} + \dots + \underset{\underset{V_n}{\Uparrow}}{v_n}$: przedstawienie jednoznaczne

tzn. $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$: suma prosta podprzestrzeni $V_1, \dots, V_n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Def. 3.2. V jest sumą prostą podprzestrzeni $V_1, \dots, V_n$, gdy

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

Każdy $v \in V$ przedstawia się jednoznacznie w postaci

$$v = v_1 + \dots + v_n \quad \text{dla pewnych } v_i \in V_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Uwaga 3.3.

(1) $V = V_1 + V_2 \Rightarrow \dim V \leq \dim V_1 + \dim V_2$

(2) $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow \dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

(3) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n \Rightarrow \dim V = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$.

D-d. (1) $B_1 \subseteq V_1$, $B_2 \subseteq V_2$ bazy. Wtedy

~~$B_1 \cup B_2$ generuje V~~ $\begin{matrix} B_1 \text{ generuje } V_1 \\ B_2 \text{ generuje } V_2 \end{matrix} \Rightarrow$

$B_1 \cup B_2$ generuje $V_1 + V_2 = V \Rightarrow$

$\boxed{\exists\ \underset{B}{\cup\!\!|}\ \text{baza } V}$ ~~$v \in V$~~

~~$V \ni v = v_1 + v_2$~~

$$V \ni v = \underset{\underset{\mathrm{Lin}(B_1)}{\Uparrow}}{\overset{\underset{\cup}{V_1}}{v_1}} + \underset{\underset{\mathrm{Lin}(B_2)}{\Uparrow}}{\overset{\underset{\cup}{V_2}}{v_2}}$$

(2) Pok. że $B = B_1 \cup B_2$: baza $V = V_1 \oplus V_2$ Alg I/2

- generuje z (1)
- lin. niezależność:

$$0 = \underbrace{\sum t_i b_i}_{\parallel} + \underbrace{\sum t_j' b_j'}_{\parallel}, \quad b_i \in B_1,\ b_j' \in B_2$$

$$0 = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$$

$$0 = 0 + 0$$

z jednoznaczności przedstawienia $v \in V$ jako $v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0$$

B_1, B_2: bazy V_1, V_2 odpowiednio $\Rightarrow$

$t_i = 0$, $t_j' = 0$ dla wszystkich indeksów i, j.

Ogólniej

Def V jest sumą prostą rodziny V_i, $i \in I$, podprzestrzeni przestrzeni V,

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i,$$

gdy

$$\forall v \in V\ \exists!\ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \quad v = \sum_{i \in I} v_i$$

suma skończona

tzn: $|\{i : v_i \neq 0\}| < \aleph_0$.

Def. 3.5. V, W : przestrzenie liniowe $/\mathbb{R}$

- $F : V \longrightarrow W$ jest <u>izomorfizmem liniowym</u>, gdy: $\quad F : V \xrightarrow{\cong} W$

(1) F jest 1-1 i „na”,

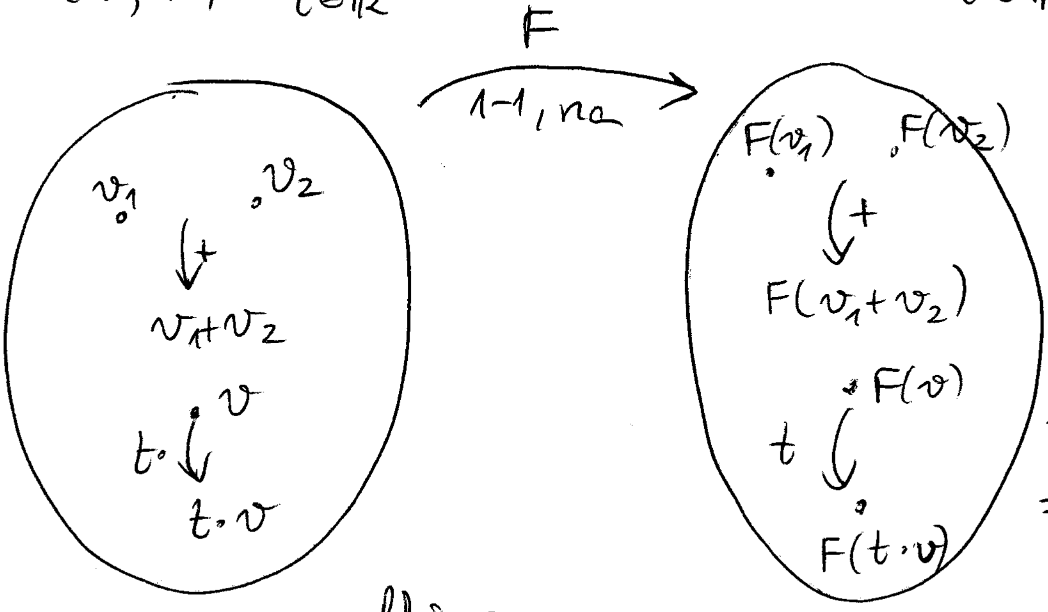
(2) $(\forall v_1, v_2 \in V)\ F(v_1+v_2) = F(v_1) + F(v_2)$
(addytywność)

(3) (jednorodność)
$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall v \in V)\ F(t\cdot v) = t\cdot F(v)$

- V i W są izomorficzne, gdy $\exists F : V \xrightarrow{\cong} W$.
$V \cong W$

Idea:

$V = (V, +, t)_{t\in\mathbb{R}}$ $\qquad$ $W = (W, +, t)_{t\in\mathbb{R}}$



$F(v_1)+F(v_2) =$
$= F(v_1+v_2)$

$t\cdot F(v) =$
$= F(t\cdot v)$,

odbicie zwierciadlane.

Własności $\cong$ w klasie przestrzeni liniowych nad $\mathbb{R}$:

- $V \cong V$ (zwrotność) $(id : V \xrightarrow{\cong} V)$
- $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ (symetryczność)

$$\left(F : V \xrightarrow{\cong} W \Rightarrow F^{-1} : W \xrightarrow{\cong} V\right)$$

- $V \cong W$; $W \cong U \Rightarrow V \cong U$ (przechodniość)

$$\left(F : V \xrightarrow{\cong} W,\ G : W \xrightarrow{\cong} U \Rightarrow G \circ F : V \xrightarrow{\cong} U\right)$$

Ćw. $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$.

TW. 3.6 (o izomorfizmie liniowym).

Jeśli ~~dim V, to~~ $\dim V = n$, to istnieje ~~F:V~~ $F : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$.

<u>D-d</u>. Niech $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ baza.

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad F(v) \stackrel{def}{=} [v]_{\mathcal{B}}.$$

- F : 1-1, na : OK.
- $v, w \in V \Rightarrow F(v+w) = F(v) + F(w)$

bo: $F(v) = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$, $F(w) = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ tzn: $v = \sum t_i b_i$, $w = \sum s_i b_i$

Wtedy: $v + w = \sum (t_i + s_i) b_i$, więc: $F(v+w) = \begin{bmatrix} t_1+s_1 \\ \vdots \\ t_n+s_n \end{bmatrix} = F(v) + F(w)$

- $F(tv) = tF(v)$ podobnie.

$t \in \mathbb{R}$

Wn. 3.7.

Przestrzenie liniowe nad $\mathbb{R}$ tego samego wymiaru są izomorficzne.

Przykład $b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R^3$.

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$: lin. niezależny $\Rightarrow$ baza R^3

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad [u]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Znajdujemy $[u]_B = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$ tzn.

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_2 + t_3 \\ t_1 + t_2 \\ t_1 + t_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = t_2 + t_3 \\ 1 = t_1 + t_2 \\ 1 = t_1 + t_3 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2} \quad [u]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ też baza i $[u]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.