Wykład 8

tw. Cayleya - Hamiltona

tw. Jordana.

$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$: struktura podobna do $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, bo:

- $+, \cdot$: działania łączne, $\boxed{+ : \text{przemienne}}$ ($\cdot$: nieprzemienne)
- $\mathbb{0}$ (macierz zerowa), I (macierz jednostkowa) : elementy neutralne dla $+, \cdot$ w $M_{n\times n}(\mathbb{R})$
- dla $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $-A$: przeciwna do A : $A + (-A) = \mathbb{0}$.
- $\cdot$: obustronnie rozdzielne względem $+$

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA.$$

$$\mathbb{Z} \rightsquigarrow (\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$$

Analogicznie:

$$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot) \rightsquigarrow \mathcal{B} = (M_{n\times n}(\mathbb{R})[\overset{\text{zmienna}}{X}], +, \cdot)$$

$$\ni \sum_i A_i X^i \quad i \in \mathbb{N}$$

suma skończona → wielomian o współczynnikach z $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$A_i \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\sum_i A_i X^i + \sum_i B_i X^i = \sum_i (A_i + B_i) X^i$$

\+ macierzy

$$\left(\sum_i A_i X^i\right) \cdot \left(\sum_i B_i X^i\right) = \sum_i \left(\sum_{j+t=i} A_j B_t\right) X^i$$

mnożenie macierzy

Uwaga: zazwyczaj nieprzemienne.

Inna struktura

$\mathfrak{A} = (M_{n\times n}(\mathbb{R}[X]), +, \cdot)$ macierze o wyrazach $\in \mathbb{R}[X]$

zwykłe wzory + i · macierzy.

$F : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$

$$F(A \cdot X^t) = [a_{ij} \cdot X^t]_{n\times n}$$

$A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$F\left(\sum_t A_t X^t\right) = \sum_t F(A_t X^t)$$

Uwaga $F : \mathfrak{B} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}$ izomorfizm struktur

tzn: F - bijekcja

- $F(a+b) = F(a) + F(b)$ dla $a, b \in \mathfrak{B}$.
- $F(a \cdot b) = F(a) \cdot F(b)$

Przykład

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X^2\right) \in \mathcal{B}$$

$$\downarrow F$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\cdot X, & 2\cdot X \\ 3\cdot X, & 0\cdot X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot X^2, & 0\cdot X^2 \\ 1\cdot X^2, & 0\cdot X^2 \end{bmatrix}\right) \in \mathcal{U}$$

$$\begin{bmatrix} X+X^2, & 1+2X \\ 1+3X+X^2, & 2 \end{bmatrix}$$

TW (Cayley – Hamilton). (1) Załóżmy, że $\dim V = n$, $F \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\varphi_F(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n$.

Wtedy $\varphi_F(F) := \alpha_0 \cdot id_V + \alpha_1 F + \ldots + \alpha_n F^n = \mathbb{0}$

[tu: $F^i = \underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{i}$, $F^0 = id$, $\mathbb{0} : V \longrightarrow V$ zerowe.]

(2) Jeśli $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\varphi_B(X) = \sum \alpha_i X^i$, to

$$\varphi_B(B) = \sum_i \alpha_i B^i = 0 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

tu: $B^0 = I$.

[to tw. jest słuszne dla dowolnego ciała $\mathbb{F}$ zamiast $\mathbb{R}$]

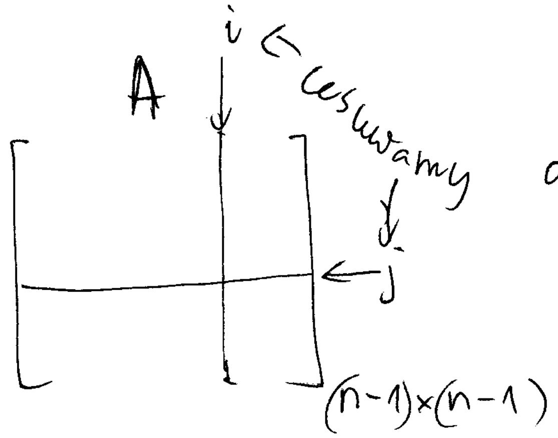
D-d (2)

Dygresja:

Niech $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}[X]$

oraz $A' = [\alpha'_{ij}]_{n\times n}$, gdzie $\alpha'_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}\det A_{ji}}_{\text{dopełnienie algebraiczne } \alpha_{ij} \text{ w } A}$

tzn. A_{ji}:



$\cdot \det A_{ji} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma (\ldots)$ zgodnie ze wzorem (+).

tak jak nad $\mathbb{R}$ mamy:

$$A \circ A' = \det(A) \cdot I$$

Niech $I_X = \begin{bmatrix} X & & 0 \\ & X & \\ 0 & & \ddots \; X \end{bmatrix}_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[X])$

Niech $A = B - I_X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[X])$

$$A \circ A' = \underbrace{\det(B - I_X)}_{\substack{\parallel \\ \varphi_B(X) \,=\, \sum_i \alpha_i X^i}} \cdot I = \begin{bmatrix} \varphi_B(X) & & & 0 \\ & \varphi_B(X) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_B(X) \end{bmatrix}$$

$A' = [\alpha'_{ij}]_{n\times n}$,

$$\alpha'_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left((B-I_X)_{ji}\right) \in \mathbb{R}[X]$$

wielomian stopnia $\leq n-1$, bo:

$$A = B - I_X = \begin{array}{c} \\ j \rightarrow \\ \end{array}\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_{11}-X & \\ & b_{22}-X \end{matrix} & B \\ \hline B & b_{nn}-X \end{array}\right] \longrightarrow (B-I_X)_{ji}$$

j usuwamy $\rightarrow i$

wyrzucamy jeden wyraz z przekątnej (gdy $j=i$) lub 2 wyrazy (gdy $j\neq i$)

dlatego:

$$\deg \alpha'_{ij} \leq n-1.$$

$F : \mathfrak{B} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{A}$, więc $F^{-1} : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$.

$$F^{-1}(A') = P_0 \cdot X^0 + P_1 \cdot X^1 + \ldots + P_{n-1}\cdot X^{n-1}, \quad P_i \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$F^{-1}(\overbrace{B - I_X}^{A}) = B \cdot X^0 - I \cdot X^1 \in M_{n\times n}(\mathbb{R})[X]$$

$B - I_X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[X])$

$$A \cdot A' = \varphi_B(X) \cdot I \qquad \varphi_B(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$$

$$\Downarrow F^{-1}$$

$$\underbrace{F^{-1}(A) \cdot F^{-1}(A')}_{\parallel} = F^{-1}(\varphi_B(X) \cdot I) \overset{(*)}{=} \alpha_0 I + (\alpha_1 I) X + \ldots + (\alpha_n I) X^n$$

$$/\!/ (*)$$

$$\left[(B - I \cdot X) \cdot (P_0 + P_1 X + \ldots + P_{n-1} \cdot X^{n-1}) \right]$$

równość współczynników w $(*)$:

- przy X^0 : $B^0 \cdot \backslash \; B P_0 = \alpha_0 I$

- przy X^1 : $B^1 \cdot \backslash \; B P_1 - P_0 = \alpha_1 I$

- przy X^2 : $B^2 \cdot \backslash \; B P_2 - P_1 = \alpha_2 I$

$\vdots$

- przy X^i : $B^i \cdot \backslash \; B P_i - P_{i-1} = \alpha_i I$

$\vdots$

- przy X^{n-1} : $B^{n-1} \backslash \; B P_{n-1} - P_{n-2} = \alpha_{n-1} I$

- przy X^n : $B^n \cdot \backslash \; - P_{n-1} = \alpha_n I$

- mnożymy te równości stronami przez B^i (i-ta równość)
- dodajemy stronami.

wychodzi: $\mathbb{0}$ (lewa strona) $= \alpha_0 I + \alpha_1 B + \ldots + \alpha_n B^n = \varphi_B(B)$. (prawa strona)

(1) Niech $\mathcal{B} \subseteq V$ baza $\quad B = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F) \quad \varphi_B(X) = \varphi_F(X)$.

$\varphi_F(F) \in End(V)$. Cel: $\varphi_F(F) = \mathbb{0}$

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi_F(F)) = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi_B(F)) \underset{\text{ćwiczenie}}{=} \varphi_B(m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)) = \varphi_B(B) \overset{(2)}{=} \mathbb{0}$$

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$

stąd: $\varphi_F(F) = \mathbb{0}$.

wskazówka:

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\alpha_0 + \alpha_1 F + \ldots + \alpha_n F^n) =$$

$$= \alpha_0 m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(id) + \alpha_1 m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F) + \ldots + \alpha_n m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)^n =$$

$$= \varphi_B(m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)).$$

bo: dla $F, G \in End(V)$

- $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F+G) = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F) + m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(G)$
- $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F^k) = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)^k$, $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F \circ G) = m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F) \cdot m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(G)$

Def. Ciało K jest <u>algebraicznie domknięte</u>, gdy $\forall\, \underset{\deg > 0}{W(X)} \in K[X]$ W ma pierwiastek w K.

<u>Przykład</u> Ciało $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte (Gauss, doktorat? 1799?, Zasadnicze tw. algebry (liczb zespolonych))

Zał., że: · V: przestrzeń liniowa nad K ← algebraicznie domknięte

$\dim V = n < \infty$

· $F \in \mathrm{End}(V)$.

Cel: baza $B \subseteq V$ t., że $m_{BB}(F)$: miła.

<u>Def.</u> (1) Klatka Jordana stopnia $k > 0$:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in F$$

(2) Macierz Jordana:

$$\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_t} \end{bmatrix}$$

J_i: klatka Jordana.

Tw (Jordan)

$\exists \underset{\text{baza}}{B \subseteq V}$ $m_B(F)$: macierz Jordana.

<u>D-d</u> (szkic) później.

Wstęp do dowodu:

$\varphi_F(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} (\lambda_2 - X)^{m_2} \dots (\lambda_k - X)^{m_k}$,

- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$: różne wartości własne F
- $m_1, \dots, m_k$: ich krotności.

Niech $g_i(X) = (\lambda_i - X)^{m_i}$, $\varphi_F(X) = g_1(X) \dots g_k(X)$

Niech $W_i = \operatorname{Ker} g_i(F) = \{ v \in V : (F - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(v) = 0 \}$

przestrzeń pierwiastkowa

tw. C-H $\Rightarrow$ $V = \operatorname{Ker} \varphi_F(F)$.

$g_1, \dots, g_k$: względnie pierwsze $\underset{\text{zad.}}{\Rightarrow}$ $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

Lemat 1. (1) W_i są F-niezmiennicze

(2) Niech $F_i = F|_{W_i} \in \operatorname{End}(W_i)$. Wtedy

$$\varphi_{F_i}(X) = g_i(X) \text{ oraz } \dim W_i = m_i.$$

D-d (1) $v \in W_i \implies F(v) \in W_i$, bo:

$$\Downarrow$$

$$(F - \lambda\, id)^{m_i}(v) = 0 \implies [\underbrace{F \circ (F - \lambda\, id)^{m_i}}](v) = 0$$

$$\| \text{ ćwiczenie}$$

$$[(F - \lambda\, id)^{m_i} \circ F](v) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(v) \in W_i.$$

(2) Niech $\mathcal{C}_i \subset W_i$ baza $\overset{(V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k)}{\implies}$ $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$: baza V.

Niech $A_i = m_{\mathcal{C}_i}(F_i) \implies$

$$m_{\mathcal{C}}(F) = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$

więc $\varphi_F(X) =$

$$= \det \begin{bmatrix} \boxed{A_1 - xI} & & & 0 \\ & \boxed{A_2 - xI} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_k - xI} \end{bmatrix} = \varphi_{F_1}(X) \cdot \varphi_{F_2}(X) \cdot \dots \cdot \varphi_{F_k}(X).$$

(*) $i \neq j \implies \varphi_{F_i}(\lambda_j) \neq 0$, bo:

jeśli $\varphi_{F_i}(\lambda_j) = 0$, to λ_j : wartość własna F_i.

$0 \neq v \in W_i$ wektor własny t. że $F_i(v) = \lambda_j v$

$\Rightarrow (F_i - \lambda_j \, id)(v) = 0 \Rightarrow v \in W_j$

sprzeczne, bo $W_i \cap W_j = \{0\}$ (*) ⊣

Ale $\varphi_F(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} (\lambda_2 - X)^{m_2} \dots (\lambda_k - X)^{m_k} =$

$$= \varphi_{F_1}(X) \cdot \varphi_{F_2}(X) \dots \varphi_{F_k}(X)$$

Stąd $\varphi_{F_i}(X) = (\lambda_i - X)^{m_i} = g_i(X)$

oraz $m_i = \deg \varphi_{F_i}(X) = \dim W_i$ ~~...~~.

d-d tw. Jordana (początek).

- Wystarczy udowodnić tw. Jordana dla każdej z funkcji $F_i : W_i \longrightarrow W_i$

bo wtedy wybieramy każdą z baz $\mathcal{C}_i \subseteq W_i$

tak, że $A_i = m_{\mathcal{C}_i} F_i$: macierz Jordana.

Wtedy $m_{\mathcal{C}}(F) = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \, A_k \end{bmatrix}$ też Jordana,

gdzie $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_k$: baza $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

- Ustalmy $V = W_i$, $\lambda = \lambda_i$, $F = F_i : V \longrightarrow V$
  tzn teraz: $\varphi_F(X) = (\lambda - X)^m$, $\dim V = m$.

  Wystarczy udowodnić tw. Jordana w tym przypadku.

Niech $V_j = \{ v \in V : (F - \lambda id)^j(v) = 0 \} < V$,
przestrzeń pierwiastkowa. $j = 0, \ldots, m$.

$(F - \lambda id)^0 = id_V$ (konwencja)

$$\{v : id(v) = 0\}$$

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_j \underset{(1)}{\subseteq} V_{j+1} \subseteq \ldots \subseteq V_m = V$$

bo: $\varphi_F(F) = 0$

$\left(\cancel{W_i = \operatorname{Ker}(F - \lambda_i id)^{m_i}} \right)$

(1): dla $v \in V$:

$$v \in V_j \Leftrightarrow (F - \lambda id)^j(v) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(F - \lambda id)^{j+1}(v) = (F - \lambda id)\left[(F - \lambda id)^j(v)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \in V_{j+1}$$

- niech $q_j = \dim V_j$, $j = 0, \ldots, m$.

- $0 = q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_j \leq \ldots \leq q_m = m$

$$p_0 \leq p_0 + p_1 \leq p_0 + p_1 + p_2 \leq \ldots$$

niech
$p_j = q_j - q_{j-1}$
$p_0 = q_0$

$q_m = p_0 + p_1 + \ldots + p_m$: rozkład charakterystyczny

Niech $j_0 \leq m$ największe takie, że $p_{j_0} > 0$. Tzn. dla $j > j_0$ $p_j = 0$ i $q_j = q_{j_0}$.

Lemat 2. (1) $F[V_j] \subseteq V_j$ (tzn. V_j F-niezmiennicze)

(2) $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_{j_0} > p_{j_0+1} = 0 = \ldots = p_m$.

D-d (1): patrz dowód Lematu 1 (1).

(2) Ćwiczenie

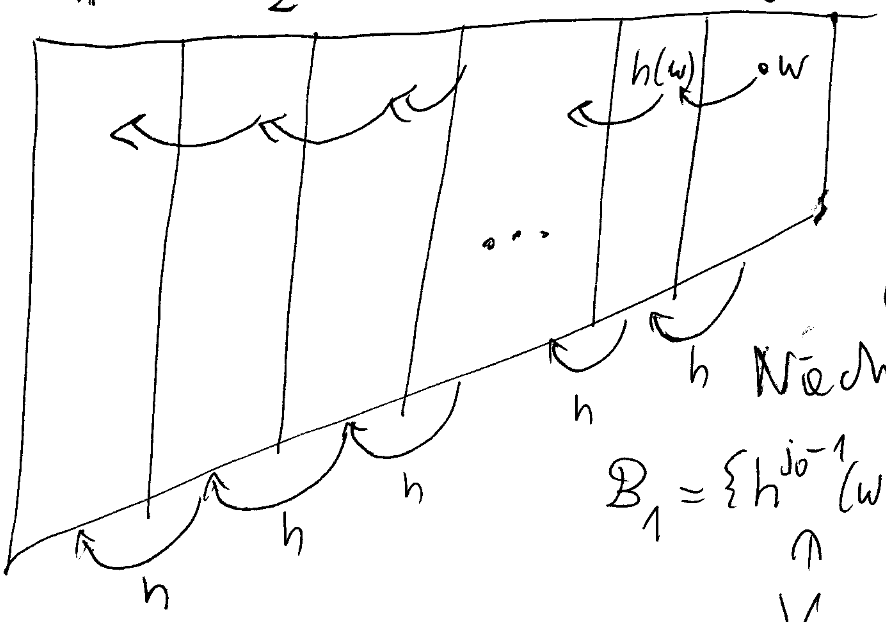
Wybór bazy Jordana $\mathcal{C} \subseteq V$ dla F.

~~Algorytm~~. Niech $h = F - \lambda\, id$

~~1. Niech $0 \neq w \in V_{j_0} \setminus V_{j_0+1}$~~

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ (F - \lambda\, id)[V_{i+1}] \subseteq V_i \\ (b)\ v \in V_{k+1} \setminus V_k \Rightarrow (F - \lambda\, id)(v) \in V_k \setminus V_{k-1}.\end{array}\right\} (\omega)$$

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \ldots \subseteq V_{j_0} = V_{j_0+1} = \ldots = V_m = V$$



Algorytm.

1. Niech $0 \neq w \in V_{j_0} \setminus V_{j_0-1}$
(krok 1.)

Niech:

$$B_1 = \{\underset{\substack{\Uparrow \\ V_1}}{h^{j_0-1}(w)}, \ldots, h^2(w), h(w), w\}$$

krok i

2. Załóżmy, że $B_1, \dots, B_{i-1} \subseteq V$ już wybrane.

Niech $W_{i-1} = Lin(B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}) < V$.

Niech k: największe t. że $\exists v \in V_k \setminus (W_{i-1} + V_{k-1})$

ćw

(c) $h(W_{i-1}) \subseteq W_{i-1}$ (z konstrukcji)

(d) $h(W_{i-1} + V_j) \subseteq W_{i-1} + V_{j-1}$.

(e) $v \in \cancel{W_{i-1}+V}\ V_j \setminus (W_{i-1} + V_{j-1}) \Rightarrow h(v) \in V_{j-1} \setminus (W_{i-1} + V_{j-2})$

ćw

Niech $v \in V_k \setminus (W_{i-1} + V_{k-1})$.

Niech $B_i = \{h^{k-1}(v), \dots, h^2(v), h(v), v\}$.

Ćw. (1) B_i: lin. niezależny układ

(2) $Lin(B_i) \cap W_{i-1} = \{0\}$ ($\Rightarrow B_1 \cup \dots \cup B_{i-1} \cup B_i$: lin. niezależny)
(indukcja)

Algorytm kończy się gdy $W_{i-1} = V$.

Wtedy $C = B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}$: baza Jordana dla F na V.

bo: np. dla
$$B_1 = \{\begin{array}{ccccc} h^{j_0-1}(w), & h^{j_0-2}(w), \dots, & h^2(w), & h(w), & w \\ \| & \| & \| & \| & \| \\ b_1 & b_2 & b_{j_0-2} & b_{j_0-1} & b_{j_0} \\ \cap & \cap & \cap & & \cap \\ V_1 & V_2 \setminus V_1 & V_{j_0-2} \setminus V_{j_0-3} & & V_{j_0} \setminus V_{j_0-1} \end{array}\}$$

$(F - \lambda id)(b_1) = 0$, więc $F(b_1) = \lambda b_1$

$(F - \lambda id)(b_2) = b_1$, więc $F(b_2) = b_1 + \lambda b_2$ itd.

$\mathcal{B}_1 \rightsquigarrow$ klatka Jordana dla $m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & & b_j & & \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
\lambda & 1 & 0 & & & \\
 & \lambda & 1 & & 0 & \\
 & & \lambda & & & \\
 & & & \ddots & 1 & \\
 & 0 & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & \lambda
\end{bmatrix}
$$

<u>Przykład</u> $V = \mathbb{C}_2[X,Y] = \{W(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] : \deg W \le 2\}$.

$\dim_{\mathbb{C}} V = 6$ baza $\mathcal{B} : \{1, X, Y, X^2, Y^2, XY\}$

$F \in End(V)$, $F(P(X,Y)) = \frac{\partial P}{\partial X}(X,Y) + P(X,Y)$

$$
m_{\mathcal{B}}(F) = \begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & X & Y & X^2 & Y^2 & XY \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X & & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
Y & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
X^2 & & & & 1 & 0 & 0 \\
Y^2 & & 0 & & & 1 & 0 \\
XY & & & & & & 1
\end{array}
$$

$\frac{\partial(XY)}{\partial X} = Y$

1 na przekątnej bo: .

$\cancel{\varphi_F(X) = 1 - X}$ $\varphi_F(\lambda) = (1-\lambda)^6 \in \mathbb{C}[\lambda]$

jedna wartość własna $\lambda = 1$ o krotności $m = 6$.

AL I /8

$(F - id)(p) = \frac{\partial p}{\partial X}$, więc ; $(F-id)^j(p) = \frac{\partial^j p}{(\partial X)^j}$

$\mathbb{C}[X,Y]$

stąd: $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \text{Lin}\{1, Y, Y^2\}$ ($\deg_X \leq 0$), $V_2 = \text{Lin}\{1, X, Y, Y^2, XY\}$ ($\deg_X \leq 1$)

$V_3 = \mathbb{C}_2[X]$

$\deg_X \leq 2$

Stąd:

$q_0 = 0$, $q_1 = 3$, $q_2 = 5$, $q_3 = 6$

Rozkład charakterystyczny:

$p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$.

Baza Jordana:

1. $X^2 \in V_3 \setminus V_2$ $\quad B_1 = \{(F-id)^2(X^2), (F-id)(X^2), X^2\} =$

$= \{2, 2X, X^2\}$

2. $W_1 = \text{Lin}\{2, 2X, X^2\} = \text{Lin}\{1, X, X^2\}$

Szukamy maks. k t. że $V_k \not\subseteq W_1 + V_{k-1}$.

- $V_3 \subseteq V_2 + W_1$, więc $k < 3$
- $V_2 \not\subseteq W_1 + V_1$, więc $k = 2$

$\underset{\Downarrow}{V_2}$

$v = XY \rightsquigarrow B_2 = \{Y, XY\}$.

3. $W_2 = \text{Lin}\{1, X, X^2, Y, XY\}$. $V_3 \subseteq W_2 + V_2$, $V_2 \subseteq W_2 + V_1$,

ale $\underset{\Downarrow}{V_1} \not\subseteq W_2 + V_0$ $\quad B_3 = \{Y^2\}$ ~~$\mathcal{C} = \{1, X, X^2, Y, XY\}$~~,

Y^2

$\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{2, 2x, x^2, y, xy, y^2\}$

w tej kolejności

$$m_{\mathcal{C}}(F) = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przypadek rzeczywisty:

V: p. lin $/\mathbb{R}$, $\dim V = n < \infty$, $F \in \operatorname{End}(V)$.

$V \supseteq \mathcal{B}$ baza t. że $m_{\mathcal{B}}(F)$: miła?

<u>Def</u> (1) Uogólniona klatka Jordana (nad $\mathbb{R}$)

$$J_{2k}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} A & I & & & 0 \\ & A & I & & \\ & & A & \ddots & \\ & & & \ddots & I \\ & & & A & I \\ 0 & & & & A \end{bmatrix}_{2k \times 2k} \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

(2) Uogólniona macierz Jordana (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_t \end{bmatrix}$$

J_i: klatki Jordana lub uogólnione klatki Jordana

Tw $\exists\, \underset{\text{baza}}{\mathcal{B}} \subseteq V$ $\quad m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)$: uogólniona macierz Jordana.

D-d (szkic)

bso $V = \mathbb{R}^n$, $F = F_A$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ ← przestrzeń liniowa nad $\mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

baza standardowa $E_1, \dots, E_n$ $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$.

przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$

Baza standardowa:

$\{E_1, iE_1, E_2, iE_2, \dots, E_n, iE_n\}$

$$\begin{array}{l} A \rightsquigarrow \hat{F} = \hat{F}_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \hat{F}_A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ \qquad\quad \cup \qquad\quad \cup \qquad\qquad\ \cup \\ \qquad F = F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\varphi_F(X) = \varphi_A(X) = \varphi_{\hat{F}}(X) = \det(A - X \cdot I) \in \mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$,

$\deg \varphi_F(X) = n$.

$\mathbb{C}$: alg. domknięte $\Rightarrow$

$$\varphi_F(X) = (\lambda_1 - X)^{l_1} \dots (\lambda_r - X)^{l_r} (\mu_1 - X)^{m_1} (\bar{\mu}_1 - X)^{m_1} \dots (\mu_s - X)^{m_s} (\bar{\mu}_s - X)^{m_s}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\qquad \mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

- $\mathbb{C}^n = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_r} \oplus V^{\mu_1} \oplus V^{\bar{\mu}_1} \oplus \ldots \oplus V^{\mu_s} \oplus V^{\bar{\mu}_s}$,

gdzie $V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\hat{F} - \lambda_i \, id)^{l_i}$

$V^{\mu_i} = \mathrm{Ker}(\hat{F} - \mu_i \, id)^{m_i}$ — przestrzenie pierwiastkowe

$V^{\bar{\mu}_i} = \mathrm{Ker}(\hat{F} - \bar{\mu}_i \, id)^{m_i}$

- $V^{\lambda_i} = W^{\lambda_i} + i W^{\lambda_i}$, gdzie $W^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(F - \lambda_i \, id)^{l_i} < \mathbb{R}^n$

- $V^{\bar{\mu}_i} = \overline{V^{\mu_i}}$, $\quad V^{\mu_i} \oplus V^{\bar{\mu}_i} = \mathrm{Ker}(\hat{F} - \mu_i \, id)^{m_i} (\hat{F} - \bar{\mu}_i \, id)^{m_i} =$

$\overline{X + iY} = X - iY$
$X, Y \in \mathbb{R}^n$

$= \mathrm{Ker}(\underbrace{\hat{F} - 2\hat{F} \mathrm{Re}\,\mu_i - |\mu_i|^2 id}) ^{m_i} \underset{\text{ozn.}}{=}$

$= W_i' + i W_i'$, gdzie $\underset{\mathbb{R}^n}{W_i'} = \underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Ker}}(F - \ldots)^{m_i}$

- $\mathbb{R}^n = W^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus W^{\lambda_r} \oplus W_1' \oplus \ldots \oplus W_s'$!

- W każdej z W^{λ_i} znajdujemy standardową bazę J.
w $\mathbb{R}^{l_i}$: D_i.

- W V^{μ_i} znajdujemy bazę J. $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{m_i}\}$
wtedy $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{m_i}\}$: baza J. w $V^{\bar{\mu}_i}$ — stąd baza J. w W_i':

Np. $\mu_1 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$b_1 = c_1 + i d_1$, $c_1, d_1 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b}_1 = c_1 - i d_1$

$\frac{1}{2}(b_1 + \bar{b}_1) = c_1 \in W_1$, $-\frac{1}{2} i (b_1 - \bar{b}_1) = d_1 \in W_1$

$$\begin{aligned} \hat{F}(b_1) &= \mu_1 b_1 \\ \hat{F}(\bar{b}_1) &= \bar{\mu}_1 \bar{b}_1 \end{aligned} \implies \begin{aligned} F(c_1) &= \tfrac{1}{2}(\hat{F}(b_1) + \hat{F}(\bar{b}_1)) = \dots = \alpha c_1 - \beta d_1 \\ F(d_1) &= -\tfrac{1}{2} i (\hat{F}(b_1) - \hat{F}(\bar{b}_1)) = \dots = \alpha d_1 + \beta c_1 \end{aligned}$$

$$Lin_{\mathbb{C}}(\mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}) = Lin_{\mathbb{C}}(\underbrace{\{c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_{m_i}, d_{m_i}\}}_{\mathcal{C}_i \subseteq W_i'}) = V^{\mu_1} \oplus V^{\bar{\mu}_1}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

uogólniona baza nad $\mathbb{R}$ Jordana dla $F|_{W_i'}$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{1 \le i \le r} \mathcal{D}_i \cup \bigcup_i \mathcal{C}_i$$: uogólniona baza J. dla F w $\mathbb{R}^n$.

macierz $m_{\mathcal{C}}(F)$: w części $\mathcal{D}_i$: zwykłe klatki J.
w części $\mathcal{C}_i$: uogólnione klatki J.

~~Uwaga. Jeśli F: ciało, to istnieje F^{alg}: rozszerzenie ciała F alg. domknięte, F^{alg} zawsze nieskończone!~~

~~Więc: jeśli F: skończone, to $[F^{alg} : F] = \infty$ i~~

"kompleksyfikacja"