Wykład 3.

Def. 3.8 Przekształcenie liniowe:

$F: V \longrightarrow W$ jest <u>liniowe</u>, gdy:

(1) $(\forall v_1, v_2 \in V)\ F(v_1+v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

addytywność

(2) $(\forall t \in \mathbb{R})(\forall v \in V)\ F(tv) = tF(v)$

jednorodność

- uogólnienie pojęcia izomorfizmu liniowego.

Uwaga 3.9

(1) Jeśli $F: V \longrightarrow W$ jest liniowe, to:

$F(0_V) = 0_W$, $F(-v) = -F(v)$ dla każdego $v \in V$,

$F(\sum t_i v_i) = \sum t_i F(v_i)$

(2) Złożenie przekształceń liniowych jest liniowe

<u>D-d</u> (1) $F(-v) = F((-1)v) \underset{\uparrow}{=} (-1)F(v) = -F(v)$

jednorodność

$F(0_V) = F(v+(-v)) \underset{\uparrow}{=} F(v) + F(-v) \underset{(1)}{=} F(v) + (-F(v)) = 0_W$

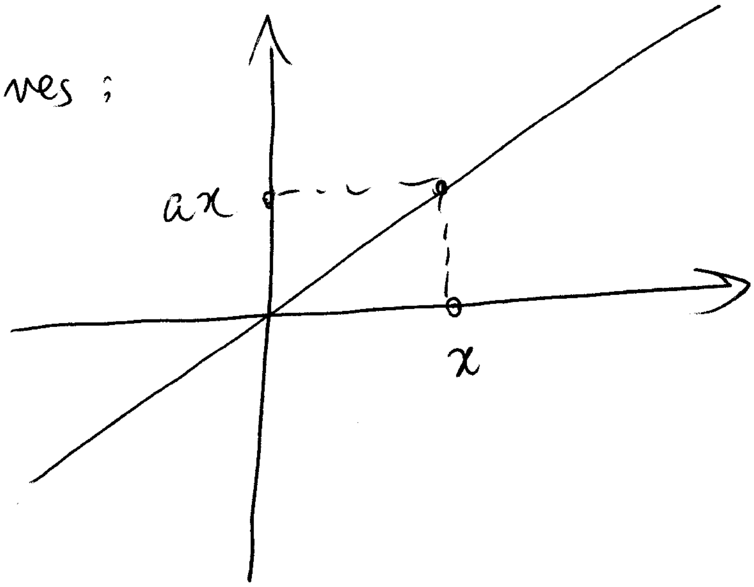
addytywność

(2) ćwiczenie

Przykłady przekształceń liniowych.

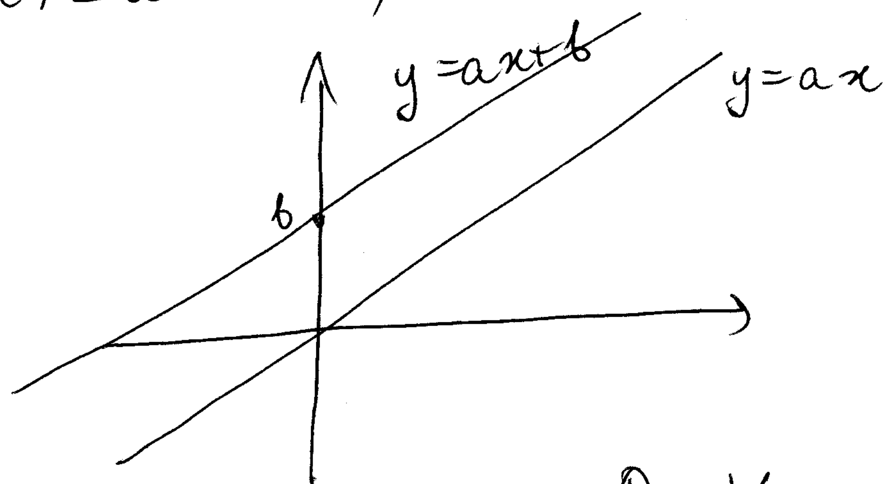
0. $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad F(x) = ax$, $\quad a \in \mathbb{R}$

wykres:



linia prosta!
$\Downarrow$
F: "liniowe"

0'. $F(x) = ax + b$, $\quad b \neq 0$ $\quad$ nie jest liniowe



1. Przekształcenie zerowe: $0: V \longrightarrow W$

$$0(\overset{\Psi}{v}) = 0_W$$

Przekształcenie identycznościowe:

$$id_V : V \longrightarrow V$$

$$id_V(\overset{\Psi}{v}) = v$$

2. Dylatacja (jednokładność) o skali $t \in R$ $\quad D_t : V \longrightarrow V$

$$D_t(v) = tv$$

3. Niech $a_1, \ldots, a_k \in R$

$$F : \underset{\substack{\Psi \\ f}}{C(\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad F(f) = \begin{pmatrix} f(a_1) \\ \vdots \\ f(a_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

4. $F : \underset{\substack{\Psi \\ W}}{R[X]} \longrightarrow R[X], \quad F(W) = W'$ pochodna

5. $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ liniowe : "funkcjonał liniowy" ("forma liniowa")

np. $G : C(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

6. $\dim(V) = n$, $\mathcal{B} \subseteq V$ baza (uporządkowana)

$$F : \underset{\substack{\Psi \\ v}}{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad F(v) = [v]_{\mathcal{B}} \text{ liniowe.}$$

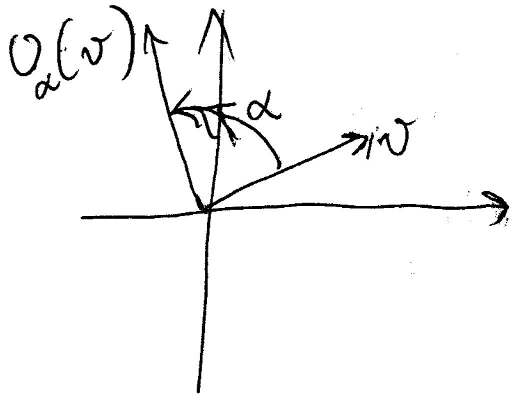
Macierz wymiaru $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wiersze}}}{m} \times \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{kolumny}}}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

zbiór macierzy $m\times n$ nad $\mathbb{R}$

a_{ij} : wyraz macierzy A w i-tym wierszu i j-tej kolumnie,

7. $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ obrót o kąt α (radianów) wokół ~~E^2~~ 0 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



8. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ wyznacza odwzorowanie liniowe $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dane wzorem:

$$\mathbb{R}^n \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad F_A(X) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX$$

TW. 3.10. $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liniowe $\Rightarrow$
istnieje jedyna $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ t. że $F = F_A$.

<u>D-d</u>

Niech $F(E_i) = A_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

E_i z bazy standardowej

$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Niech $\mathbb{R}^n \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n$.

Stąd:

$$F(X) = F(x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n) \overset{\text{liniowość } F}{=} x_1 F(E_1) + \ldots + x_n F(E_n) =$$

$$= x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = F_A(X), \text{ gdzie:}$$

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = (\underbrace{A_1, A_2, \ldots, A_n}_{\text{kolumny}})$$

jedyność A: $A_i = F_A(E_i) = F(E_i)$

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k\times m}(\mathbb{R})$.

Wtedy:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] \arrow[dr, dashed] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "F_B"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$A=[a_{jt}]_{m\times n}=(A_1,\dots,A_n)$

$B=[b_{ij}]_{k\times m}=(B_1,\dots,B_m)$

$F := F_B \circ F_A$
liniowe

Uwaga 3.11.
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "G\circ F"'] & W \arrow[d, "G"] \\ & U \end{tikzcd}$$

F, G: liniowe
$\Downarrow$
$G\circ F$ liniowe

<u>D-d</u>. ćwiczenie

$F_B \circ F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ liniowe

$\Downarrow$ tw. 3.10

$F := F_B \circ F_A = F_C$ dla jedynej $C \in M_{k\times m}(\mathbb{R})$

Wyprowadzenie wzoru na $C = [c_{it}]_{k\times n} = (C_1,\dots,C_k)$
kolumny

$$C_t = F(E_t) = \begin{pmatrix} c_{1,t} \\ \vdots \\ c_{k,t} \end{pmatrix}$$

$t=1,\dots,n$

$A = (A_1,\dots,A_n)$

$$A_t = \begin{pmatrix} a_{1,t} \\ \vdots \\ a_{m,t} \end{pmatrix}$$

$$C_t = F(E_t) = (F_B \circ F_A)(E_t) = F_B(F_A(E_t)) =$$

$$= F_B(A_t) = F_B\begin{pmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \\ \vdots \\ a_{m,t} \end{pmatrix} =$$

$$\left[F_B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2m}x_m \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{km}x_m \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} b_{11}a_{1,t} + b_{12}a_{2,t} + \ldots + b_{1m}a_{mt} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{i1}a_{1,t} + b_{i2}a_{2t} + \ldots + b_{im}a_{mt} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ b_{k1}a_{1t} + b_{k2}a_{2t} + \ldots + b_{km}a_{mt} \end{bmatrix} = C_t = \begin{bmatrix} c_{1,t} \\ \vdots \\ c_{it} \\ \vdots \\ c_{kt} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

stąd: $\underline{\underline{c_{it}}} = b_{i,1}a_{1,t} + b_{i,2}a_{2t} + \ldots + b_{im}a_{mt} = \underline{\underline{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{jt}}}$

$$\underset{B}{\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} & & & \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \ldots & b_{i,m} \\ & & & \end{bmatrix}_{k\times m}} \quad \underset{A \qquad A_t}{\begin{bmatrix} & a_{1,t} \\ & a_{2,t} \\ & \vdots \\ & a_{m,t} \end{bmatrix}_{m\times n}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} & \vdots & \\ - - - & c_{it} & - - - \\ & \vdots & \end{bmatrix}_{k\times n}} \leftarrow i$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow t \qquad\qquad\qquad \uparrow t$$

$c_{i,t} = \langle i\text{-ty wiersz } B,\ t\text{-ta kolumna } A \rangle$

Def 3.12.

Dla $B=[b_{ij}]_{k\times m}$, $A=[a_{jt}]_{m\times n}$ iloczyn BA macierzy B i A to macierz

$$C=[c_{it}]_{k\times n}, \text{ gdzie } c_{it}=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{jt}$$

Wn. 3.13

$$F_B\circ F_A = F_{BA}.$$

Wn. 3.14. Mnożenie macierzy jest łączne: dla $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{k\times m}(\mathbb{R})$, $C\in M_{t\times k}(\mathbb{R})$

$$C(BA)=(CB)A.$$

D-d

$F_C\circ F_B\circ F_A$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "F_{BA}"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "F_B"] \arrow[dl, "F_{CB}"'] \\
\mathbb{R}^t & \mathbb{R}^k \arrow[l, "F_C"]
\end{tikzcd}$$

$F_{CB}=F_C\circ F_B$

$F_{BA}=F_B\circ F_A$

$$F_{(CB)A}=F_{CB}\circ F_A=(F_C\circ F_B)\circ F_A=F_C\circ(F_B\circ F_A)=$$
$$=F_C\circ F_{BA}=F_{C(BA)}.$$

$\underbrace{\text{Stąd}}_{\text{z jedyności w tw. 3.10,}}$ $(CB)A = C(BA)$ $\square$.

Przykład 9. $\underset{\underset{B}{\cup}}{V}, \underset{\underset{\mathcal{C}}{\cup}}{W}$: przestrzenie liniowe $/\mathbb{R}$

bazy $\qquad \dim V = n, \ \dim V = m$

- $\Phi_B : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, $\quad v \longmapsto [v]_B$
- $\Phi_{\mathcal{C}} : W \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$, $\quad v \longmapsto [v]_{\mathcal{C}}$.
- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_B"', "\cong"] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}", "\cong"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$F = \Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ F_A \circ \Phi_B$ liniowe

Wzór na F: dla $v \in V$, $w \in W$:

$$F(v) = w \iff F_A(v) = w$$

$$\boxed{F(v) = w \iff A \cdot [v]_B = [w]_{\mathcal{C}}} \qquad (*)$$

Uwaga.

$$F_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \\ \end{bmatrix}_{m\times 1} \leftarrow i$$

$(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)$

iloczyn macierzy.

Tw. 3.14. $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{C} \subseteq W$ bazy.

$F : V \to W$ liniowe $\Rightarrow$ istnieje jedyna

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ t. że zachodzi $(*)$:

$$(*) \quad F(v) = w \iff A \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{C}}$$

<u>D-d</u>

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}"', "\cong"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "F'"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

F': jedyne takie, że diagram komutuje.

Z tw. 3.10 istnieje jedyna $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ t. że $F' = F_A$. Na mocy komutowania diagramu, zachodzi $(*)$.

Jedyność A: ćwiczenie.

Def. 3.15. Macierz A z tw. 3.14 nazywamy macierzą odwzorowania liniowego F w bazach $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

$$A = m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F).$$

Jak wyliczyć $A = m_{\mathcal{BC}}(F)$?

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, $\quad \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}"', "\cong"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

diagram komutuje

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$A = (A_1, \dots, A_n)$ $\quad A_t \in \mathbb{R}^m \quad A_t = F_A(\underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\uparrow}}{E_t})$

kolumny

$$E_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow t = [b_t]_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}(b_t).$$

$$\begin{tikzcd} b_t \in V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & W \ni F(b_t) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}}"] \\ E_t \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] & \mathbb{R}^m \ni F_A(E_t) = [F(b_t)]_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

$$A_t = F_A(E_t) = F_A(\Phi_{\mathcal{B}}(b_t)) = \Phi_{\mathcal{C}}(F(b_t)) =$$

$$= [F(b_t)]_{\mathcal{C}}.$$

wzór

t-ta kolumna $m_{\mathcal{BC}}(F)$ $\longrightarrow$ $\boxed{A_t = [F(b_t)]_{\mathcal{C}}}$

Przykłady 1. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{ccc} F_A : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \cup\!\mathsf{I} & & \cup\!\mathsf{I} \\ \mathcal{E} & & \mathcal{E}' \end{array} \qquad m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(F_A) = A \text{ , bo:}$$

bazy standardowe

t - ta kolumna $m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(F_A) =$

$$= [F_A(E_t)]_{\mathcal{E}'} \underset{\uparrow}{=} F_A(E_t) = A_t \leftarrow t\text{-ta kolumna } A,$$

dla $Y \in \mathbb{R}^m$, $[Y]_{\mathcal{E}'} = Y$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = y_1 E_1 + y_2 E_2 + \dots + y_m E_m = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} =$$

$$= [Y]_{\mathcal{E}'}.$$

2. $F : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$F(W) = W' + W(0)$ $\qquad \mathcal{B} = \{\underset{b_1}{1}, \underset{b_2}{X}, \underset{b_3}{X^2}, \underset{b_4}{X^3}\}$

$\mathcal{C} = \{\underset{c_1}{X^3}, \underset{c_2}{X^2}, \underset{c_3}{X}, \underset{c_4}{1}\}$

bazy $\mathbb{R}_3[X]$

wyliczamy

$m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$:

$F(b_1) = 1' + 1(0) = 0+1 = 1$ $\quad [F(b_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$F(b_2) = X' + X(0) = 1+0 = 1$ $\quad [F(b_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$F(b_3) = (X^2)' + X^2(0) = 2X$ $\quad [F(b_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$F(b_4) = (X^3)' + X^3(0) = 3X^2$ $\quad [F(b_4)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

kolumny $m_{\mathcal{BC}}(F)$

$$m_{\mathcal{BC}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>konwencja</u>: gdy $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liniowe, to

$m(F) := m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(F)$, gdzie $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathbb{R}^m$ bazy standardowe.

<u>macierz złożenia przekształceń</u>:

V, W, U : przestrzenie liniowe $/\mathbb{R}$

$\begin{matrix} V, & W, & U \\ \cup\!\shortmid & \cup\!\shortmid & \cup\!\shortmid \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{matrix}$ bazy

$\dim V = n$

$\dim W = m$

$\dim U = k$

$F: V \longrightarrow W$

$G: W \longrightarrow U$ liniowe. $H = G \circ F : V \longrightarrow U$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \subseteq V \arrow[rr, "H = G \circ F"] \arrow[dr, "F"'] & & U \supseteq \mathcal{D} \\
& W \supseteq \mathcal{C} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

Tw. 3.16. $m_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(H) = m_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(G) \cdot m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$.

<u>D-d</u>

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \subseteq W \arrow[dr, "G"] \arrow[dd, "\Phi_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathcal{B} \subseteq V \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "H"'] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & & U \supseteq \mathcal{D} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{D}}"', "\cong"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "F_A"] \arrow[rr, bend right, "F_C"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "F_B"] & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

Niech

$A = m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(F)$

$B = m_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(G)$

$C = m_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(H)$

diagram komutuje!

$$F_C = F_B \circ F_A \underset{\text{Wn. 3.13}}{\Longrightarrow} F_C = F_{BA}$$

i $C = BA$.

Przekształcenia liniowe, macierze.

V, W: przestrzenie liniowe / $\mathbb{R}$

$\mathrm{Hom}(V,W) = \{$przekształcenia liniowe $V \to W\}$.

działania w $\mathrm{Hom}(V,W)$:

$+$: $(F+G)(v) = F(v) + G(v)$, $F, G \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $v \in V$

$\mathbb{R} \ni t$: $(tF)(v) = tF(v)$

Wtedy $F+G,\ tF \in \mathrm{Hom}(V,W)$ (ćw.)

Uwaga 4.1.
$(\mathrm{Hom}(V,W), +, t)_{t \in \mathbb{R}}$: przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$.

D-d: ćw.

Szczególne przypadki:

- $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$: przestrzeń sprzężona do V, (dualna) przestrzeń funkcjonałów liniowych na V.
- $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$: przestrzeń endomorfizmów liniowych ~~[illegible]~~ przestrzeni V

Działania w $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: $+$, $t\in\mathbb{R}$

- $[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[c_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$

- $t[a_{ij}]_{m\times n}=[d_{ij}]_{m\times n}$, gdzie $d_{ij} = t\cdot a_{ij}$

np. $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\4&5\\6&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\\7&9\\11&13\end{bmatrix}$ $\quad 2\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\6&8\\10&12\end{bmatrix}$

Uwaga 4.2

$(M_{m\times n}(\mathbb{R}),+,t)_{t\in\mathbb{R}}$: przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$ wymiaru $m\times n$.

D-d baza standardowa:

$$A_{ij}=\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c|c|c}0&&0\\ \hline &1&\\ \hline 0&&0\end{array}\right] \\ \uparrow \\ j\end{array}\leftarrow i \qquad \{A_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

Uwaga. Dla macierzy A,B,C odpowiednich rozmiarów: $A(B+C)=AB+AC$ i $(B+C)A=$
$=BA+CA$.

D-d: zad. na liście bez rachunków!