Lista powtórkowa przed 1. kolokwium, Analiza Matematyczna II

1. Rozwiń w szereg Taylora w punkcie $x = 0$ funkcje

(a)
$$x^3 \cos\big(x^2\big)$$

(b)
$$\ln\big(1 + x^4\big)$$

(c)
$$f(x) = \frac{2\cos x - 2}{x^2}, \quad f(0) = 0$$

2. Oszacuj błąd przybliżenia

(a)
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in [0,1]$$

(b)
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad x \in [0,1]$$

3. Rozwiń w szereg funkcję $f(x) = x\sqrt{x}$ w otoczeniu punktu $x = 1$.

4. Dana jest funkcja
$$f(x) = x\sin\big(2x^2\big).$$

(a) Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu $x = 0$ funkcji $f(x)$.
(b) Dla jakich x-ów szereg jest zbieżny?
(c) Wyznaczyć $f^{(2022)}(0)$ oraz $f^{(2023)}(0)$.

5. Dana jest funkcja
$$f(x) = xe^{5x^5}$$

(a) Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu $x = 0$ funkcji $f(x)$.
(b) Dla jakich x szereg jest zbieżny?
(c) Wyznaczyć $f^{(2021)}(0)$ oraz $f^{(2022)}(0)$.

6. Wykazać, że szereg funkcyjny
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\cos(2^n x)$$

(a) jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$,
(b) zadaje funkcję różniczkowalną na $\mathbb{R}$.

7. Wykazać, że szereg funkcyjny
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$$

(a) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-2022, 2022]$,
(b) zadaje funkcję różniczkowalną na przedziale $[-2022, 2022]$.

8. Niech
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Wyznaczyć szereg Taylora funkcji $f(x)$.

9. Dany jest szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{3^n}$. Znaleźć promień zbieżności oraz wyznaczyć $f^{(81)}(0)$.

10. Czy funkcja $g(x) = [\sqrt{x}]$ jest całkowalna na przedziale $[0, 100]$?

11. Niech
$$A = \{\pi q : q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$
Rozstrzygnij, czy funkcja zadana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)^2 & \text{dla } x \in A, \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$
jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,\pi]$.

12. Rozstrzygnij, czy funkcja zadana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + x^3 & \text{dla } x \in [0,2], \\ 40x^4 + e^x & \text{dla } x \in (2,5] \end{cases}$$
jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0,5]$. Odpowiedź precyzyjnie uzasadnij.

13. Oblicz całki poprzez znalezienie podziałów dla których sumy dolne i górne są blisko siebie.

(a)
$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$
(b)
$$\int_{0}^{1} e^x\,dx$$
(c)
$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx$$

14. Niech f będzie ograniczoną funkcją na odcinku $[a,b]$. Czy prawdziwe są poniższe stwierdzenia?
(a) Jeśli f jest całkowalna, to f^2 jest całkowalna.
(b) Jeśli f^2 jest całkowalna, to f jest całkowalna.

15. Wiedząc, że funkcja $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest rosnąca, wykaż że funkcja $f(x) = x^{-1}\int_0^x g(t)\,dt$ jest rosnąca.

16. Oblicz pochodne następujących funkcji.
(a)
$$f(x) = \int_{-x^4}^{x^2+\sin(x)} \sin\big(e^y + \pi y^6\big)\,dy,$$
(b)
$$g(x) = \int_{-e^{3x}}^{x^7} \sqrt{y^8+3}\,dy.$$

17. Udowodnij podane oszacowania całek:
(a)
$$\int_0^1 x^2 e^{-\sin^4(x^2)}\,dx \leqslant \frac{1}{3},$$
(b)
$$\frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{3+e^{-x^2}}\,dx \leqslant \frac{1}{3},$$
(c)
$$\int_0^2 \sqrt{8+x^3}\,dx \leqslant 7$$
(d)
$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x\,dx}{x} < \frac{1}{2} - \frac{2^3}{4\cdot 4!} + \frac{2^5}{6\cdot 6!}$$

18. Wyznaczyć całki:

(a)

$$\int_0^{\sqrt[14]{5}} \frac{x^6}{1+x^{14}}\,dx,$$

(b)

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx,$$

(c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x}.$$

19. Obliczyć granice:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2n^2-k^2}\cdot\frac{k}{n^3},$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2n^2+kn-k^2}}{n^2},$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^5}{(n^2+k^2)^3},$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\sqrt{1/n}}+e^{\sqrt{2/n}}+e^{\sqrt{3/n}}+\ldots+e^{\sqrt{n/n}}\right),$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln n}{n+k}.$$

20. Znajdź taką wartość $p>0$, aby granica

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p}\sum_{k=1}^{n} k^{1,23}$$

była skończona i dodatnia. Oblicz tę granicę.

21. Udowodnij, że dla dowolnego $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m+2^m+...+n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

22. Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin\left(t^2\right)\,dt.$$

Obliczyć $f'(x)$. Dla jakich x pochodna istnieje?

23. Znajdź kres górny i kres dolny funkcji $f:[-4,8]\to\mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x) = \int_{-4}^{x} (t^3-6t^2-13t+42)\,dt.$$

24. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan s}\,ds}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}.$$

25. Niech

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin\big(e^t\big)\, dt.$$

Wykazać, że $e^x|f(x)| \leqslant 2$.

26. Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, takiego że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0,1]$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \infty.$$

27. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx + \sin(nx^2)}{n}\, dx.$$