Algebra I (ISIM), lista 10, ćwiczenia 16.05.24, deklaracje do godz. 11:00.

Teoria: Iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$: Dla $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definiujemy

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Przykłady izometrii liniowych: obrót w płaszczyźnie $W < V$, względem $W^\perp$. Odbicie względem $W < V$. Orientacja bazy w przestrzeni V. Klasyfikacja izometrii liniowych V: każda jest złożeniem pewnej liczby oodbić względem hiperpłaszczyzn przechodzących przez O i obrotów wokół O w pewnych płaszczyznach. Postać macierzy przekształcenia ortogonalnego w pewnej bazie o.n. Diagonalizacja przekształceń unitarnych. Przestrzeń sprzężona (dualna). Izomorfizm kanoniczny $V \cong V^{**}$.

Zadania. Znakiem $-$ oznaczone są zadania-ćwiczenia, których nie deklaruje się (nie będą omawiane na ćwiczeniach). Wszystko dzieje się w skończeniewymiarowej przestrzeni euklidesowej $V \neq \{0\}$, chyba że treść zadania mówi inaczej. Dla $W < V$ $P_W : V \to V$ oznacza rzut prostopady na W.

1. $-$ Własności iloczynu wektorowego.
   (a) $A \times A = O$, (b) $B \times A = -A \times B$, (c) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, (d) $(tA) \times B = t(A \times B)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

2. $-$ (a) $E_1 \times E_2 = E_3,\ E_2 \times E_3 = E_1,\ E_3 \times E_1 = E_2$,
   (b) $A \times B \perp A,\ A \times B \perp B$.

3. $-$ (a) $\det(A, B, C) = \langle A, B \times C\rangle$ (wsk: użyć rozwinięcia Laplace'a)
   (b) $\langle A, B \times C\rangle = \langle B, C \times A\rangle = \langle C, A \times B\rangle$.

4. Niech $\Pi = \{tA + sB : 0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$. Π jest równoległobokiem rozpiętym przez wektory A, B w $\mathbb{R}^3$. Udowodnić, że
   (a) Pole $\Pi = \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - \langle A, B\rangle^2}$
   (b) Pole $\Pi = |A \times B|$.

5. $-$ Mówimy, że baza (ponumerowana) $\{B_1, B_2, B_3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest dodatnio zorientowana, gdy $\det(B_1, B_2, B_3) > 0$. W przeciwnym razie mówimy, że baza ta jest ujemnie zorientowana. Udowodnić, że:
   (a) Baza $\{E_1, E_2, E_3\}$ jest dodatnio zorientowana,
   (b) Gdy A, B są liniowo niezależne, to $\det(A, B, A \times B) > 0$ (zatem wektory $A, B, A \times B$ tworzą bazę dodatnio zorientowaną).

6. $-$ A, B sa liniowo zależne $\iff A \times B = O$.

7. Załóżmy, że $v, w \in Lin(v_1, \dots v_k)$ oraz $\langle v, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle$ dla wszystkich i. Udowodnić, że $v = w$.

8. Załóżmy, że V jest unitarna. Udowodnić, że jeśli $v, w \in V$ są niezerowymi wektorami własnymi pewnego unitarnego przekształcenia $F : V \to V$ odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $v \perp w$.

9. Załóżmy, że $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ są dwiema bazami ortonormalnymi przestrzeni V. Udowodnić, że bazy B i C są tak samo zorientowane $\iff$ jedną z nich można przekształcić na drugą (tzn. $b_i \mapsto c_i$) przy pomocy pewnej liczby obrotów.

10. Załóżmy, że L_1, L_2 są prostymi na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Opisać, kiedy istnieje izometria liniowa $f : R^2 \to R^2$ przekształcająca L_1 na L_2.

11. Dla jakich $W, U < V$ prawdą jest, że:
(a) $P_W \circ P_U = P_{W \cap U}$?
(b) $P_W + P_{W^\perp} = id_V$?

12. Niech α_n będzie kątem między krawędzią n-wymiarowej kostki foremnej w $\mathbb{E}^n$, a jej główną przekątną. Obliczyć $\lim_n \alpha_n$.

13. – Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ przekształcenie liniowe $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f_z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(z \cdot (x + iy)) \\ Im(z \cdot (x + iy)) \end{pmatrix}$ jest ortogonalne ? Rozwiązać zadanie bez rachunów, odwołując się do geommetrycznej interpretacji mnżenia liczb zespoonych na płaszczyźnie Gaussa.

14. * Udowodnić, że dowolną izometrię liniową przestrzeni V można przedstawić jako złożenie pewnej liczby odbić względem podprzestrzeni kowymiaru 1.

15. Niech $n = dim(V)$ oraz niech W będzie podprzestrzenią V wymiaru $k < n$. Niech f będzie odbiciem V względem W. Dowieść, że $det(f) = (-1)^{n-k}$.

16. * Udowodnić, że jeśli w zadaniu poprzednim $n - k$ jest parzyste, to f można przedstawić jako złożenie pewnej liczby obrotów.

17. Załóżmy, że $F : V \to V$ jest ortogonalne i diagonalizowalne. Udowodnić, że F jest odbiciem względem pewnej podprzestrzeni lub $F = id$.