Algebra I (ISIM), lista 13, ćwiczenia 10.06.24, deklaracje do godz. 11:00.

Teoria: Przestrzeń zerowa funkcjonału kwadratowego Q. Sygnatura Q. Twierdzenie Sylvestera o bezwładności. Objętość uogólnionego równoległościanu w przestrzeni euklidesowej, związek z wyznacznikiem macierzy, macierzą Grama i wyznacznikiem Grama. Odwzorowanie liniowe $F : V \to V$ zmienia objętość w stosunku $|\det(F)|$. Formy kwadratowe H w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$: klasyfikacja krzywych i powierzchni $C_H = \{X \in \mathbb{R}^k : H(X) = 1\}$, gdy $k = 2$ i $k = 3$: hiperbola, elipsa, hiperboloida 1- i 2-powłokowa, elipsoida.

V oznacza przestrzeń liniową skończonego wymiaru.

1. Udowodnić, że $|\det(A_1, \ldots, A_n)| \leqslant \|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdot \ldots \cdot \|A_n\|$ (nierówność Hadamarda).

2. – Podać przykład funkcjonału kwadratowego na jakiejś przestrzeni V oraz wektorów $v, w \in V$ takich, że $Q(v) = Q(w) = 0$, lecz $Q(v + w) \neq 0$.

3. n-sympleks regularny w przestrzeni euklidesowej V to układ różnych punktów $X_1, \ldots, X_n \in V_n$, których wzajemne odległości są równe.
(a) W przestrzeni $\mathbb{E}^n$ wskazać $n + 1$-sympleks regularny.
(b)* Czy w przestrzeni $\mathbb{E}^n$ istnieje $n + 2$-sympleks regularny?

4. – Załóżmy, że Q jest funkcjonałem kwadratowym na przestrzeni V. Udowodnić, że Q jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy w bazie kanonicznej w jego macierzy wyrazy na przekątnej są dodatnie.

5. Znaleźć równanie opisujące obraz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ względem przekształcenia F o macierzy:
(a) – $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, (b) – $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
każdym z podpunktów znaleźć nowy prostokątny układ współrzędnych Ouv, w którym ten obraz ma równanie $t_1u^2 + t_2v^2 = 1$ dla pewnych t_1, t_2. Naszkicować ten obraz.

6. Ile jest przekształceń liniowych, które przekształcają okrąg $x^2+y^2 = 1$ na elipsę $2x^2 + 3y^2 = 1$?

7. Ile jest przekształceń liniowych, które przekształcają hiperbolę o równaniu $2xy = 1$ na hiperbolę o równaniu $x^2 - 2y^2 = 1$?

8. Przedstawić elipsoidę o środku O i półosiach długości $a, b, c > 0$ (tzn. zadaną równaniem: $\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{c^2}z^2 = 1$) jako obraz sfery o rownaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego, wyprowadzić wzór na objętość wnętrza tej elipsoidy.

9. Sklasyfikować powierzchnie o równaniach:
(a) $x^2 + 10xz + y^2 + 6yz + z^2 = 1$, (b)– $-4x^2 + 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 1$.

10. Dla powierzchni z poprzedniego zadania (punkt (a)) znaleźć nowy prostokątny układ współrzędnych $Ouvw$ (o bazowych wektorach jednostkowych U, V, W), w którym powierzchnie te mają równanie kanoniczne $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2 = 1$.

11. Udowodnić, że złożenie obrotów liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest obrotem.

12. – Niech R_1 i R_3 będą obrotami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o kąty $\frac{\pi}{2}$, wokół osi Ox i Oz odpowiednio. Niech $S = R_1 \circ R_3$, zaś $T = R_3 \circ R_1$. Znaleźć osie i kąty obrotów S i T.

13. Funkcjonały kwadratowe Q, Q' na przestrzeni V nazywamy liniowo równoważnymi, gdy istnieje odwracalne odwzorowanie liniowe $F : V \to V$ takie, że $Q' = Q \circ F$. Udowodnic, że Q i Q' są liniowo równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą sygnaturę.

14. Udowodnić, że $vol[v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots w_m] \leqslant vol[v_1, \ldots, v_n] vol[w_1, \ldots w_m]$.

15. * Mówimy, że macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest dodatnio półokreślona, gdy dla wszystkich $X \neq 0$ mamy $X^T A X \geqslant 0$. Udowodnić, że
(a) A jest macierzą Grama pewnego liniowo niezależnego układu n wektorów w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dodatnio określona.
(b) A jest macierzą Grama pewnego układu n wektorów w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dodatnio półokreślona.