21 listopada 2023

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 7

1. Ile jest takich rozłożeń (dowolnej liczby) pionków na szachownicy $n \times n$, że dla każdych dwóch pionków jeden z nich jest na lewo i niżej od drugiego?

2. Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$. Pokaż też, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{i+m}$ jest liczbą Fibonacciego (którą?).

3. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości $2n$, w których każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.

4. Znajdź zwartą postać ciągu a_n określonego wzorem:
$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

5. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą metody anihilatorów:
   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1,$ gdy $a_0 = a_1 = 0$
   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1},$ gdy $a_0 = a_1 = 1$
   (c) $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n,$ gdy $a_0 = a_1 = 1$

   Rozwiąż jedno z nich do końca.

6. Rozwiązując zależność $a_n = a_{n-3}$ metodą anihilatorów wyraź n mod 3 jako kombinację liniową pierwiastków trzeciego stopnia z 1. Korzystając z tego wzoru znajdź analogiczny wzór na $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

7. Ile jest ciągów n liter należących do 26–literowego alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter 'a' (zero też jest parzyste).

   Wsk.: Ułóż zależność rekurencyjną opisującą tę liczbę i rozwiąż ją np. za pomocą metody anihilatorów

8. Za pomocą metody anihilatorów oblicz $s_n = \sum_{i=1}^{n} i2^i$ rozwiązując zależność $s_n = s_{n-1} + n2^n$.

9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów n znaków ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ nie zawierających dwóch sąsiednich jedynek ani dwóch sąsiednich dwójek. Ułóż zależność rekurencyjną i rozwiąż ją wyznaczając jawny wzór na c_n.

10. Przez linię komunikacyjną przesyłamy 0 lub 1. Prawdopodobieństwo, że adresat dostanie oryginalną wiadomość wynosi $1-p$ a prawdopodobieństwo że dostanie jej negację wynosi p. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem otrzymania 0 po przesłanu 0 przez n kolejnych linii komunikacyjnych. Znajdź zależność rekurencyjną na p_n i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.

11. (Problem ruiny gracza). Gracz A ma k złotych a gracz B ma $n-k$ złotych. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez gracza A wynosi p (przegrywający przekazuje wygrywającemu złotówkę). Gra kończy się w momencie gdy któryś z graczy pozostanie bez pieniędzy. Napisz zależność rekurencyjną na prawdopodobieństwo p_k wygranej gracza A i rozwiąż ją za pomocą metody anihilatorów.

12. Policz sumę

    (a) $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)2^k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2(-1)^k$ (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

13. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Wylicz funkcje tworzące ciągów:
    (a) $b_n = na_n$
    (b) $c_n = a_n/n, c_0 = 0$
    (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
    (d) $d_n = \begin{cases} a_n & \text{gdy} \quad n = 2k \\ 0 & \text{gdy} \quad n = 2k+1 \end{cases}$

    Wsk.: W (c) skorzystaj ze wzoru na iloczyn szeregów potęgowych dla $A(x)$ i $1 + x + x^2 + \cdots$

14. Wylicz funkcje tworzące ciągów

    (a) $a_n = n^2$ (b) $a_n = n^3$ (c) $a_n = \binom{n+k}{k}$

15. Oblicz funkcje tworzące ciągów
    (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n.
    (b) $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ $(H_0 = 0)$