Rozkład SVD (wg wartości singularnych)
(osobliwych)

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$A^TA : n\times n \qquad AA^T : m\times m$

Lemat 12.26.

(1) Macierze A^TA i AA^T są symetryczne. Ich wartości własne są ≥ 0.

(2) Załóżmy, że $v \perp w$: wektory własne A^TA $[AA^T]$ dla wartości własnej λ_1 i λ_2 odpowiednio, oraz $v \neq 0$. Wtedy:

(a) $\|Av\| = \sqrt{\lambda_1}\,\|v\|$ $\qquad [\|A^Tv\| = \sqrt{\lambda_1}\,\|v\|]$

(b) $AA^T(Av) = \lambda_1(Av)$ $\qquad [A^TA(A^Tv) = \lambda_1(A^Tv)]$

(c) $Av \perp Aw$ $\qquad [A^Tv \perp A^Tw]$

(3) Macierze A^TA i AA^T mają te same dodatnie wartości własne, licząc z krotnościami.

<u>D-d</u> (1), (2) • $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$: symetryczna

• Załóżmy, że $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ i $A^TAv = \lambda_1 v$. Wtedy

$$\lambda_1\|v\|^2 = \langle v, \lambda_1 v\rangle = \langle v, A^TAv\rangle = v^T(A^TAv) =$$
$$= (v^TA^T)(Av) = (Av)^T(Av) = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2.$$

Stąd: $\underline{\lambda_1 \geq 0 \text{ i } \|Av\| = \sqrt{\lambda_1}\,\|v\|}$ (a) ✓

- $AA^T(Av) = A(A^TAv) = A(\lambda_1 v) = \lambda_1 (Av)$ (b) ✓

- $\langle Av, Aw \rangle = (Av)^T Aw = v^T A^T A w = \langle v, \underbrace{A^T A w}_{= \lambda_2 w} \rangle = \lambda_2 \langle v, w \rangle = 0.$ (c) ✓

(3) Wynika z (1), (2) (dla A^TA i AA^T).
(zadanie)

Def. 12.27.

Macierz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ jest <u>diagonalna</u>, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Tw. 12.28 (rozkład SVD).

(1) Zał., że $f : V \longrightarrow W$ liniowe, $\dim V = n$, $\dim W = m$.
euklidesowe

Wtedy $m_{\mathcal{V}\mathcal{U}}(f)$ jest diagonalna dla pewnych baz o.n. $\mathcal{V} \subseteq V$ i $\mathcal{U} \subseteq W$.

(2) Zał., że $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Wtedy $A = UDV^T$, gdzie

$U = [u_1, \dots, u_m]_{m \times m}$, $V = [v_1, \dots, v_n]_{n \times n}$: ortogonalne

oraz $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$: diagonalne, gdzie

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$

$k \leq \min\{m, n\}$

Dla $i \leq k$ $Av_i = \lambda_i u_i$

Dla $i > k$, $Av_i = 0$.

D-d ① Bso $V = \mathbb{E}^n$, $W = \mathbb{E}^m$.

Niech $A = m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(f) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ oraz $\lambda_i > 0$ dla $i = 1,\dots,k$ takie, że

$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_k^2 > 0$: dodatnie wartości własne A^TA, powtarzane zgodnie z krotnościami.

Niech $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\} \subseteq \mathbb{E}^n$ baza o.n. taka, że

- dla $i \leq k$, $A^TAv_i = \lambda_i^2 v_i$ (istnieje, bo A^TA symetryczna diagonalizowalna + Lemat 12.26 (1))
- dla $i > k$, $A^TAv_i = 0$

Wybieramy bazę o.n. $\mathcal{U} = \{u_1,\dots,u_m\} \subseteq \mathbb{E}^m$ tak, że:

- dla $i \leq k$, $Av_i = \lambda_i u_i$ (lemat 12.26 (2)(a),(c))
- dla $i > k$, u_i : jakiekolwiek.
- $f(v_i) = Av_i = \lambda_i u_i$ dla $i \leq k$ oraz $f(v_i) = 0$ dla $i > k$

stąd $m_{\mathcal{V}\mathcal{U}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_k & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$ diagonalna.

② Wynika z ①.

Niech $f = F_A : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^m$

$$A = m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(f) = \underbrace{m_{\mathcal{U}\mathcal{E}'}(id)}_{U} \overbrace{m_{\mathcal{V}\mathcal{U}}(f)}^{D \text{ diagonalna}} \underbrace{m_{\mathcal{E}\mathcal{V}}(id)}_{V^T \text{, sdzie } \not{E}}$$

$U = [u_1,\dots,u_n]$ $\quad V = m_{\mathcal{V}\mathcal{E}}(id) = [v_1,\dots,v_n]$

ortogonalne

Komentarze.

1. Lemat 12.26 i tw. 12.28 są słuszne (w odpowiedniej wersji) również dla macierzy / odwzorowań liniowych zespolonych

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{euklidesowe, ortogonalne} & \rightsquigarrow & \text{unitarne} \\ \text{symetryczne} & \rightsquigarrow & \text{hermitowskie} \\ A^T & \rightsquigarrow & \bar{A}^T \end{array}\right]$$

2. Dowód tw. 12.28 daje algorytm znajdowania rozkładu

$$(*) \qquad A = \underset{\substack{\shortparallel \\ [u_1, \ldots, u_m]}}{U} D V^T, \quad V = [v_1, \ldots, v_n]$$

3. Tw. 12.28 wyjaśnia liniowe $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

$m_{\mathcal{E}\mathcal{V}}(id) = m_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(g_1)$, $\quad m_{\mathcal{U}\mathcal{E}'}(id) = m_{\mathcal{E}'\mathcal{E}'}(g_0)$,

gdzie $g_0: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$, $g_0(E_i) = u_i$, $i = 1, \ldots, m$

$g_1: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, $g_1(v_i) = E_i$, $i = 1, \ldots, n$

g_0, g_1 ortogonalne

$D = m_{\mathcal{V}\mathcal{U}}(f) = m_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}(d)$, gdzie $d: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ liniowe, $d(E_i) = \lambda_i E_i$ dla $i \leq k$

$d(E_i) = 0$ dla $i > k$.

$$f = g_0 \, d \, g_1$$

4. Macierz D w rozkładzie $(*)$ wyznaczona jednoznacznie ($\text{gdzie } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0$). Macierze U, V nie.

5. Załóż, że $A = (A_1, \dots, A_m) \in M_{n\times m}(K)$ $\quad K$: ciało

$B = (B_1, \dots, B_m) \in M_{k\times m}(K)$

Wtedy $B^T = \begin{pmatrix} B_1^T \\ \vdots \\ B_m^T \end{pmatrix} \in M_{m\times k}(K)$ i ma sens iloczyn $AB^T \in M_{n\times k}(K)$

Ćw. $AB^T = \sum_{i=1}^{m} A_i B_i^T$

wyjaśnienie: A_i traktujemy jako macierz $n\times 1$

B_i^T —//— —//— $1\times k$

dlatego $A_i B_i^T \in M_{n\times k}(K)$.

"Wektorowa" forma tw. 12.28(2):

Niech $U = [u_1, \dots, u_m]$, $V = [v_1, \dots, v_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

jak w Tw. 12.28.

Wtedy $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i v_i^T$

D-d

$$A = UDV^T = [u_1 \dots u_n] \overbrace{DV^T}^{\begin{bmatrix} \lambda_1 v_1^T \\ \vdots \\ \lambda_k v_k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i v_i^T.$$

λ_i: singularne (osobliwe) wartości A

v_i: prawe —//— wektory A $\quad$ dla $i = 1, \dots, k$.

u_i: lewe —//— wektory A