Algebra I (ISIM), lista 12, ćwiczenia 6.06.24, deklaracje do godz. 11:00.

Teoria: Odwzorowania 2-liniowe i wieloliniowe: definicja, przykłady (wyznacznik). Funkcjonały 2-liniowe. Formy liniowe, 2-liniowe.$m_{\mathcal{B}}(\varphi)$: macierz $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$ w bazie $\mathcal{B}$. $\Phi : Hom(V, V^*) \overset{\cong}{\to} L_2(V;\mathbb{R})$: $f \mapsto \Phi_f$. $m_{\mathcal{B}\mathcal{B}^*}(f) = m_{\mathcal{B}}(\Phi_f)$. $m_{\mathcal{C}}(\varphi) = m_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id)^T m_{\mathcal{B}}(\varphi) m_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(id)$ dla $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$ i baz $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq V$. $\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(m_{\mathcal{B}}(\varphi))$. Definicja: φ niezdegenerowana $\iff \mathrm{rk}(\varphi) = \dim V$. Funkcjonały 2-liniowe symetryczne, dodatnio określone: definicje. Macierze symetryczne, dodatnio określone: definicje. Gdy $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$ jest symetryczny, to macierz φ jest diagonalna w pewnej bazie ortonormalnej V. Kryterium Sylvestera.

V oznacza przestrzeń liniową skończonego wymiaru.

1. Określamy przekształcenie $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^* \times V \to R$ wzorem
$$\langle\varphi, v\rangle = \varphi(v).$$
a)– Sprawdzić, że $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest 2-liniowe.
b) Dla podzbioru $A \subset V$ definiujemy $A^\perp = \{\varphi \in V^* : (\forall v \in A)\langle\varphi, v\rangle = 0\}$. Podobnie dla zbioru $A^* \subset V^*$ definiujemy $(A^*)^\perp \subset V$. Stosujemy tu podobne oznaczenia, jak dla dopełnień ortogonalnych. Udowodnić, że zbiory $A^\perp, (A^*)^\perp$ są podprzestrzeniami przestrzeni V^*, V odpowiednio. Udowodnić, że dla niezerowego wektora $v \in V$, $\dim(v^\perp) = dim(V^*) - 1$.

2. Na zbiorze macierzy $M_{n\times n}(R)$ określamy relację $\sim$ przez $A \sim B \iff A = C^T BC$ dla pewnej macierzy odwracalnej C.
(a)– Udowodnić, że jest to relacja równoważności.
(b) Załóżmy, że $A \sim B$. Udowodnić, że macierze A i B mają ten sam rząd.

3. Mówimy, że macierz kwadratowa A jest antysymetryczna $\iff a_{ij} = -a_{ji}$.
(a) Udowodnić, że każdą macierz kwadratową B można przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej. Następnie pokazać, że to przedstawienie jest jednoznaczne.
(b)* Udowodnić, że rząd macierzy antysymetrycznej jest liczbą parzystą.

4. (a) Czy suma przekształceń symetrycznych jest symetryczna ?
(b) Czy złożenie przekształceń symetrycznych jest symetryczne ?

5. Mówimy, że macierz symetryczna A wymiaru $n \times n$ jest ujemnie określona, gdy $X^T AX < 0$ dla każdego $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Podać i udowodnić kryterium ujemnej określoności macierzy symetrycznej analogiczne do kryterium Sylvestera.

6. * Załóżmy, że V jest przestrzenią euklidesową, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jest bazą V, zaś $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ jest bazą o.n. V otrzymana z bazy $\mathcal{B}$ metodą Grama-Schmidta. Udowodnić, że bazy $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ są tak samo zorientowane.

7. Załóżmy, że $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
(i) φ jest niezdegenerowany,
(ii) $\forall v \neq 0\ \varphi(v, \cdot) \neq 0$ (w V^*),
(iii) $\forall v \neq 0\ \varphi(\cdot, v) \neq 0$ (w V^*).

8. * Dowieść, że jeśli $\varphi \in L_2(V;\mathbb{R})$ jest rzędu 1, to istnieją $g, h \in V^*$ takie, że $\varphi(v,w) = g(v) \cdot h(w)$.

9. * Załóżmy, że $\varphi, \psi \in L_2(V;\mathbb{R})$ sa iloczynami skalarnymi. Udowodnić, że φ, ψ mają dokładnie te same bazy ortogonalne $\iff$ φ i ψ są liniowo zależne w $L_2(V;\mathbb{R})$.

10. * Załóżmy, że $\varphi, \psi \in L_2(V;\mathbb{R})$ to iloczyny skalarne. Udowodnić, ze nastepujące warunki sa równoważne:
(1) φ, ψ są liniowo zależne w przestrzeni $L_2(V;\mathbb{R})$.
(2) dla każdego $f \in End(V)$, f jest symetryczny (samosprzężony) względem $\varphi \iff f$ jest symetryczny względem ψ.