Wykład 9.

AlI/9

Układy równań liniowych
(nad $\mathbb{R}$, nad ciałem K)

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ parametry
$x_1, \ldots, x_n$: niewiadome

$\Updownarrow$ postać macierzowa:

$$\underset{\underset{[a_{ij}]_{r\times n}}{\shortparallel}}{\overset{M_{r\times n}(\mathbb{R})\ni}{A}} \cdot \underset{\underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{\shortparallel}}{X} = B \in \mathbb{R}^r$$

$$[a_{ij}]_{r\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ postać funkcyjna:

$$F_A(X) = B \qquad A \rightsquigarrow F_A : \underset{\underset{X}{\cup\!\!\!\!\shortmid}}{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \underset{\underset{B}{\cup\!\!\!\!\shortmid}}{\mathbb{R}^r}$$

wektor niewiadomy

Pytania: • Czy U ma rozwiązanie?

• Jak opisać zbiór rozwiązań U?

• Jak praktycznie rozwiązać U?

Def. Układ U jest <u>jednorodny</u>, gdy $B = 0$.

Niech UJ: Układ U z B zastąpionym przez $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^n$

$A_s = (A, B)$: macierz rozszerzona układu U.

macierz główna układu U — dodatkowa kolumna

Niech $Z = \{X \in \mathbb{R}^n : X$ rozwiązanie $U\}$

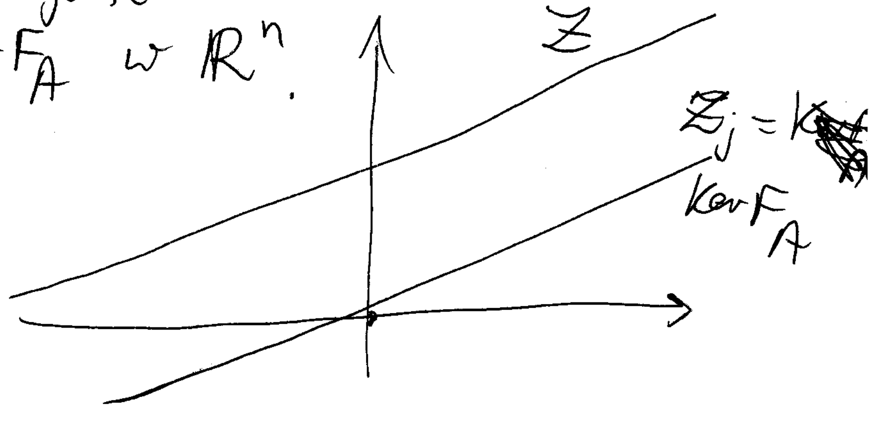
$Z_j = \{X \in \mathbb{R}^n : X$ —//— $UJ\}$.

Fakt 9.1. (1) $Z_j = \operatorname{Ker} F_A$, $Z_j < \mathbb{R}^n$.

(2) U ma rozwiązanie $\Longleftrightarrow$ $B \in \operatorname{Im} F_A$. Wtedy

oczywiste

Z jest warstwą $\operatorname{Ker} F_A$ w $\mathbb{R}^n$.



D-d (2). Niech $X_0 \in Z$ rozwiązanie U.

Wtedy dla $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\left.\begin{aligned} X \in Z &\iff F_A(X) = B \\ &\iff F_A(X) = F_A(X_0) \\ &\iff F_A(X - X_0) = 0 \\ &\iff X - X_0 \in \operatorname{Ker} F_A \\ &\iff X \in X_0 + \operatorname{Ker} F_A \end{aligned}\right] \Rightarrow Z = X_0 + \operatorname{Ker} F_A$$

warstwa $\operatorname{Ker} F_A = Z$;.

TW. 9.2 (Kronecker-Capelli)

U ma rozwiązanie $\iff$ rząd A = rząd A_s.

D-d. $A = (A_1, \dots, A_n)$, $A_j = F_A(E_i)$.

$F_A(E_1), \dots, F_A(E_n)$ generują $\operatorname{Im} F_A$.

Z faktu 9.1: U ma rozwiązanie

$\iff B \in \operatorname{Im} F_A$

$\iff B \in \operatorname{Lin}(A_1, \dots, A_n)$

$\iff$ rząd $(A_1, \dots, A_n)$ = rząd $(A_1, \dots, A_n, B)$ = rząd (A_s).

Uwaga 9.3. $\dim Z_j = n - \text{rząd}\, A$.

D-d $F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$.

$$n = \dim \operatorname{Ker} F_A + \dim \operatorname{Im} F_A$$
$$\dim(Z_j) \quad + \quad \text{rząd}(A)$$

Załóżmy, że U ma rozwiązanie (tzn. jest niesprzeczny).

z Faktu 9.1: $Z = X_0 + Z_j$, gdzie X_0: dowolne rozwiązanie U.

Niech $X_1, \dots, X_d \in Z_j$ baza Z_j, $d = \dim Z_j$.

Dowolne rozwiązanie U: $X = X_0 + t_1 X_1 + \dots + t_d X_d$, $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$.

$X = t_1 X_1 + \dots + t_d X_d$, $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$: równanie parametryczne podprzestrzeni Z_j

$X_1, \dots, X_d$: fundamentalny układ rozwiązań układu UJ.

Praktyczne rozwiązywanie U:
metoda Gaussa (eliminacja niewiadomych).

Operacje na U niezmieniające zbioru rozwiązań $\mathcal{Z}$:

1. Zamiana miejscami równań i i j (gdy $i \neq j$)
2. Dodanie do i-tego równania stronami skalarnej krotności j-tego równania ($j \neq i$)
3. Pomnożenie i-tego równania przez skalar $t \neq 0$ stronami

Te operacje przeprowadzane na macierzy A_s są takie same jak (1), (2), (3) z faktu 7.7 (do sprowadzania macierzy do postaci z uporządkowanymi wierszami).

metoda Gaussa:

sprowadzenie: ~~sprowadzenie~~ macierzy A_s do postaci z uporządkowanymi wierszami A_s' (dla układu U'),

przez operacje 1–3 na wierszach macierzy A_s.

• Jeśli w A_s' w pewnym wierszu wyraz wiodący jest w ostatniej kolumnie, to

U = sprzeczny

[jedno ~~zd~~ z równań w U':
$$0\cdot x_1 + \ldots + 0\cdot x_n = b \neq 0$$]

• W przeciwnym razie U niesprzeczny i znajdujemy rozwiązanie tak:

– zmienne x_i odpowiadające kolumnom A_s' z wyrazem wiodącym w pewnym wierszu: "zmienne związane".

– pozostałe zmienne x_i: "zmienne parametryczne"

Przekształcamy U' wyrażając zmienne związane przy pomocy zmiennych parametrycznych

$\Rightarrow$ parametryczne rozwiązanie U.

Przykład:

$$U \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = \cancel{0}1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

A_s:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +[1] \\ +2[1] \\ +[1] \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3[2] \\ -3[2] \end{matrix} \rightarrow$$

$x_1 \ x_2$: zmienne związane

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 \ x_4$: zmienne parametryczne

$$U': \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - 4x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 - x_4 \end{cases}, \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

np. $x_3 = x_4 = 0 \rightsquigarrow X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pewne rozwiązanie U.

Dowolne rozwiązanie U:

$$X = \begin{bmatrix} 3 - x_3 - x_4 \\ 1 - x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = X_0 + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_2}, \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ fundamentalny układ rozwiązań UJ związanego z U.

Niech $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $F\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 4x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$m(F) = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F: 1-1, $\operatorname{Im} F$: zbiór rozwiązań UJ.

$F: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} F$. $E_1 \overset{F}{\longmapsto} X_1$, $E_2 \overset{F}{\longmapsto} X_2$ baza $\operatorname{Im} F$.

Przypadek n równań z n niewiadomymi:

U: $AX = B$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

Zał., że A: odwracalna

$X = A^{-1}B$ i U ma jedyne rozwiązanie.

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Uzasadnienie metody bezwyznacznikowej znajdowania A^{-1}:

niech $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

$$A\cdot X = Y \iff A\cdot X = \underset{\substack{\Downarrow \\ M_{n\times n}(\mathbb{R})}}{I}\cdot Y.$$

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 1\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + \ldots + 0\cdot y_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 + \ldots + 0\cdot y_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + \ldots + 1\cdot y_n \end{cases}$$

Operacje w metodzie bezwyznacznikowej na macierzy (A, I) odpowiadają równoważnym ~~przejściom~~ przekształceniom układu $(**)$, prowadzącym do macierzowej równości:

$$I\cdot X = C\cdot Y, \text{ tzn. } X = C\cdot Y, \; C \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Dlatego dla wszystkich $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$A^{-1}Y = X \iff AX = Y \iff C\cdot Y = X$$

stąd $C = A^{-1}$.

Wracamy do U: $AX=B$, $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B\in\mathbb{R}^n$ ALI/9

$A=(A_1,\dots,A_n)$ kolumny A $\rightsquigarrow$ $A_{x_i}=$ "A, gdzie A_i zastąpione przez B".

$$A_{x_i} = (A_1,\dots,\overset{i}{\underset{\downarrow}{}}B,\dots,A_n)$$

TW. 9.4 (Cramer) Jeśli $\det(A)\neq 0$, to U ma jedyne rozwiązanie $x_1,\dots,x_n$ dane wzorem:

$$x_i=\frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$$

<u>D-d</u>. Jeśli $\det A\neq 0$, to A odwracalna i istnieje jedyne rozwiązanie układu U: $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$$AX=B \iff x_1A_1+\dots+x_nA_n=B$$

$$\det(A_{x_i})=\det(A_1,\dots,\overset{i}{B},\dots,A_n)=$$

$$=\det(A_1,\dots,\overbrace{x_1A_1+\dots+x_nA_n},\dots,A_n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\det(A_1,\dots,\overset{i}{x_jA_j},\dots,A_n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j\underbrace{\det(A_1,\dots,\overset{i}{A_j},\dots,A_n)}_{0,\text{ gdy } j\neq i}=x_i\cdot\det(A).$$

stąd $x_i=\det A_{x_i}/\det A$.

Przestrzenie euklidesowe:

przestrzenie rzeczywiste z (abstrakcyjnym) iloczynem skalarnym.

V: p. liniowa $/\mathbb{R}$.

Def. 10.1. (a) Iloczyn skalarny w V:

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ t.że $\forall v, v', w \in V \ \forall t \in \mathbb{R}$:

1. (Symetryczność) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2. (liniowość na 1. współrzędnej)

$\langle v+v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$, $\langle tv, w \rangle = t \langle v, w \rangle$

3. (dodatnia określoność) $\langle v, v \rangle > 0$ dla $v \neq 0$.

(b) przestrzeń euklidesowa = p. liniowa V nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

1,2 $\Longrightarrow$ liniowość na 2. współrzędnej:

2'. $\langle v, w+w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$, $\langle v, tw \rangle = t \langle v, w \rangle$.

Przykłady.

1. Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \langle X, Y \rangle = \sum_i x_i y_i .$$

$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: (standardowa) przestrzeń euklidesowa

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – standardowy iloczyn skalarny

2. w $\mathbb{R}[X]$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

3. $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow$

$\Phi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Phi_A(X, Y) = X^* A Y = [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} F_A(Y) \end{bmatrix} = \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} x_i y_j$$

- Φ_A spełnia 2. i 2'. z definicji 10.1 (liniowość na każdej współrzędnej)

np. $\Phi_A(X + X', Y) = (X + X')^* A Y = (X^* + (X')^*) A Y =$

$= X^* A Y + (X')^* A Y = \Phi_A(X, Y) + \Phi_A(X', Y)$.

- Gdy macierz A jest <u>symetryczna</u> (tzn. (definicja) $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $1 \le i, j \le n$) to Φ_A spełnia 10.1.1 też.

<u>Problem</u> Dla jakich macierzy symetrycznych A, Φ_A jest dodatnio określona (tzn. spełnia 10.1.3)?
(tzn. Φ_A ~~do~~ jest iloczynem skalarnym)
(później)

4. $l^2 = \{(a_n)_{n\in N} : a_n \in R$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$

$\wedge$

$\prod_{n\in N} \mathbb{R} = \mathbb{R}^N$

w l^2: $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_n a_n b_n$ <u>OK</u> Ćw.
iloczyn skalarny

5. $C(I) = \{$ funkcje ciągłe $f: I \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $I = [0, 1]$
(działania podobne jak w $C(\mathbb{R})$)
przestrzeń liniowa $/\mathbb{R}$. : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ dla $\forall x$
$(tf)(x) = t \cdot f(x)$
$t \in \mathbb{R}$.

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

Dalej: $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ przestrzeń euklidesowa.

Def. 10.2. $v \in V \leadsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
długość (norma) v.

Uwaga 10.3. (0) $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$

(1) (nierówność Cauchy'ego – Schwarza)

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

(2) (nierówność Minkowskiego) (trójkąta) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(3) ~~$\|v-w\| \leq$~~ $\|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$.

D-d.

(0) $\|tv\| = \sqrt{\langle tv, tv\rangle} = \sqrt{t^2\langle v, v\rangle} = |t| \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle} = |t| \cdot \|v\|$.

(1) 1° v, w: liniowo zależne: ćwiczenie

2° v, w: liniowo niezależne.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(t) \overset{\text{def}}{=} \|v - tw\|^2 > 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$

$f(t) = \langle v - tw, v - tw\rangle =$

$= \langle v, v\rangle + \langle tw, tw\rangle - 2\langle v, tw\rangle =$

liniowość na każdej współrzędnej + symetryczność

$= \|v\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t\langle v, w\rangle > 0$

$\Rightarrow \Delta = 4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 < 0 \Rightarrow (1)$.

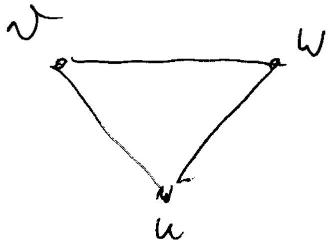
(2) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle \le$

$\underset{(1)}{\le} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\cdot\|v\|\cdot\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow (2).$

(3) wynika z (2).

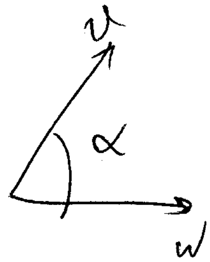
$d(v,w) = \|v-w\|$: odległość między wektorami $v,w \in V$

- $d(v,w) \le d(v,u) + d(u,w)$: nierówność trójkąta



- z nierówności Schwarza, dla $v,w \neq 0$

$$-1 \le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1$$



kąt (nieskierowany) α między v i w

jedyna $\alpha \in [0,\pi)$ t. że

$$\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

Iloczyn skalarny w przestrzeni zespolonej:

- standardowy iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \; Z' = \begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \langle Z, Z'\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i'}.$$

stąd: $\langle z, z\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i $\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} \geq 0$.

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$: p. liniowa $/\mathbb{R}$ wymiaru $2n$.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \rightsquigarrow X_z = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \text{ gdzie } z_t = x_t + i y_t \quad x_t, y_t \in \mathbb{R}.$$

$$\|X_z\| = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)+\dots+(x_n^2+y_n^2)} = \sqrt{z_1\bar{z}_1+\dots+z_n\bar{z}_n} = \sqrt{\langle z, z\rangle} = \|z\|.$$

Def. 10.4 (a) (W: zespolona przestrzeń liniowa).

Iloczyn skalarny w W: $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \times W \to \mathbb{C}$ t.że dla $v, v', w \in W$, $t \in \mathbb{C}$:

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
2. liniowość na 1. współrzędnej
$\langle v+v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle tv, w\rangle = t\langle v, w\rangle$
3. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+$ dla $v \neq 0$.

1+2 $\Rightarrow$ 2': (antyliniowość na 2. współrzędnej):

$\langle v, w+w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$, $\langle v, tw\rangle = \bar{t}\langle v, w\rangle$

(b) $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: przestrzeń unitarna.

zespolona p. lin. $\uparrow$ — iloczyn skalarny

- wskazówki rozumowań z p. euklidesowych przenoszą się do p. unitarnych,

ale: tu nie definiujemy kąta między wektorami.

Dalej: V: przestrzeń euklidesowa.

Def. 10,5. (1) $v, w \in W$ są ortogonalne (prostopadłe) $v \perp w$, gdy $\langle v, w\rangle = 0$

(2) dla $A, B \subseteq V$, $A \perp B$, gdy $\forall v \in A, w \in B$ $v \perp w$

podobnie: "$v \perp B$"

(3) Dla $X \subseteq V$ $X^{\perp} = \{v \in V : v \perp X\}$ dopełnienie ortogonalne zbioru X w przestrzeni V.

Uwaga 10,6. (1) $v \perp w \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$. (gdy $v, w \neq 0$)

(2) $X^{\perp} < V$ (ćw.)