Wykład 10. Przestrzenie euklidesowe cd.

V: przestrzeń euklidesowa lub unitarna

Def. 10.7,

(1) $v \in V$ jest <u>unormowany</u> (jednostkowy), gdy $\|v\| = 1$

(2) Baza $\mathcal{B} \subseteq V$ złożona z wektorów parami $\perp$: <u>baza ortogonalna</u>

(3) Baza ortogonalna $\mathcal{B} \subseteq V$ złożona z wektorów unormowanych: <u>baza ortonormalna</u> ← baza o.n.

np. $\mathcal{E}$: baza <u>ortonormalna</u> $\mathbb{E}^n$.

- gdy $0 \neq v \in V$, to tv: unormowany, gdzie $t = \|v\|^{-1}$

$V \supseteq \mathcal{B}$ baza ortogonalna $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}'$: baza ortonormalna (wydłużamy lub skracamy (normujemy) wektory z $\mathcal{B}$.

Zastosowania

1. Niech $\mathcal{B} \subseteq V$ baza o.n., $v \in V$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ $\qquad [v]_{\mathcal{B}} = ?$

Odp. $v = \sum \langle v, b_i \rangle b_i$, tzn.

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix} \quad \#$$

D-d. $v = \sum t_i b_i$, $t_i \in \mathbb{R}$

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \quad (\text{bo } \overbrace{b_i \perp b_j}^{\text{co tedy}}) \\ 1, & \text{gdy } i = j, \quad (\text{bo } \|b_i\|^2 = \langle b_i, b_i \rangle = 1) \end{cases}$$

$$\langle v, b_j \rangle = \langle \sum t_i b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle t_i b_i, b_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{\begin{cases} 0, \text{ gdy } i \neq j \\ 1, \text{ gdy } i = j \end{cases}} = t_j$$

- Zał., że $F : V \longrightarrow V$ liniowe. wtedy

$$m_{\mathcal{B}}(F) = (\underbrace{[F(b_1)]_{\mathcal{B}}, [F(b_2)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [F(b_n)]_{\mathcal{B}}}_{\text{kolumny}}) =$$

$$= [\langle F(\underset{\uparrow \text{ kolumna}}{b_j}), \underset{\uparrow \text{ wiersz}}{b_i} \rangle]_{n \times n}, \text{ bo } [F(b_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle F(b_j), b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle F(b_j), b_n \rangle \end{bmatrix}$$

~~(dim $V < \infty$)~~

2. Załóżmy, że $W < V$ oraz $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_k\}$ baza o.n. przestrzeni W ($\mathcal{B} \subset W$)

rzut prostopadły $P_W : V \longrightarrow V$

na podprzestrzeń W: $P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, b_i \rangle b_i$.

Uwaga 10.9. (1) $P_W : V \longrightarrow V$ liniowe

(2) dla $v \in W$, $P_W(v) = v$

(3) dla $v \in V$, $P_W(v)$ to jedyny wektor $\in W$ t.że $v - P_W(v) \perp W$

(tzn. $P_W : V \longrightarrow V$: rzut $\perp$ na podprzestrzeń W)

<u>D-d</u> (1) ćw.

(2) $v = \sum \langle v, b_i \rangle b_i$, gdy $\{b_i\}$: baza o.n. przestrzeni

(3) $\langle v - P_W(v), b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \underbrace{\langle \overbrace{\sum_j \langle v, b_j \rangle b_j}^{P_W(v)}, b_i \rangle}_{= \langle v, b_i \rangle} =$

$= 0$!

bo $\langle b_j, b_i \rangle = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$

TW. 11.1 (ortonormalizacja metodą Grama-Schmidta)

Zał, że V: p. euklidesowa lub unitarna $\dim V<\infty$. Wtedy V ma bazę o.n.

<u>D-d</u> Niech $B = \{b_1,\dots,b_n\} \subseteq V$ baza.

Znajdziemy $\underset{\text{o.n.}}{\text{bazę}}$ $B' = \{b_1',\dots,b_n'\} \subseteq V$

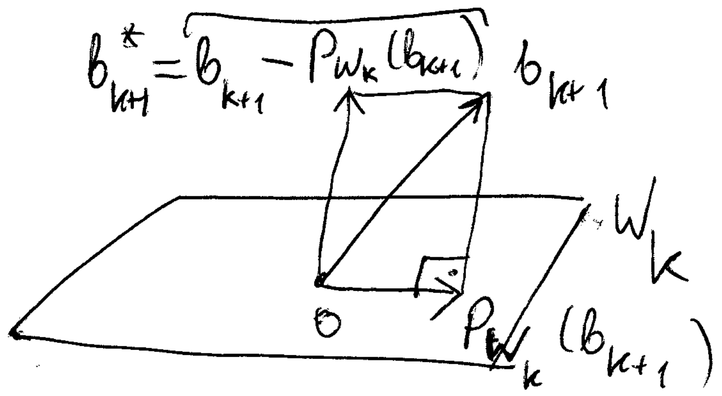
Konstruujemy rekurencyjnie wektory $b_1',\dots,b_n'$. unormowane tak, że

$\boxed{\text{dla } k = 1,\dots,n \text{ niech } W_k = \mathrm{Lin}\{b_1,\dots,b_k\}} = \mathrm{Lin}\{b_1',\dots,b_k'\}.$

1, $k=1$ $\quad b_1' = \frac{1}{\|b_1\|}\cdot b_1$, $\|b_1'\|=1$ OK.

2. Zał, że $k<n$ i $b_1',\dots,b_k'$ już mamy tak, że

$W_k = \mathrm{Lin}\underbrace{\{b_1',\dots,b_k'\}}_{\text{baza o.n. } W_k}$ $\quad$ Znajdziemy $b_{k+1}' \perp W_k$ t. że $W_{k+1} = \mathrm{Lin}\{b_1',\dots,b_{k+1}'\}$.



$$b^*_{k+1} = b_{k+1} - \underbrace{P_{W_k}(b_{k+1})}_{\in W_k}, \quad b^*_{k+1} \perp W_k$$

(Uwaga 10.9(3))

stąd

b_{k+1} i b^*_{k+1} różnią się o wektor W_k.

$$W_{k+1} = \mathrm{Lin}(W_k \cup \{b_{k+1}\}) = \mathrm{Lin}(W_k \cup \{b^*_{k+1}\}) =$$

$$= \mathrm{Lin}(W_k \cup \{b'_{k+1}\}) = \mathrm{Lin}(b'_1, \ldots, b'_{k+1}),$$

$$b'_{k+1} = \frac{1}{\|b^*_{k+1}\|} \cdot b_{k+1} \qquad b'_{k+1} \perp W_k.$$

□

$\Rightarrow$ algorytm znajdowania bazy o.n.

<u>Przykład</u>. Niech $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ płaszczyzna o równaniu $X = tA + sB$, $t, s \in \mathbb{R}$ $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{A, B\} \subseteq X < \mathbb{R}^3$

baza

baza o.n. π:

$$A' = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} \cdot A = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B^* = B - P_{A'}(B) = B - \langle B, A' \rangle A' =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}_{\shortparallel} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \left(\begin{bmatrix} 21 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \frac{4}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|B^*\| = \frac{4}{7}\sqrt{21} \qquad B' = \frac{1}{\|B^*\|} B^* = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zastosowania

1. $W < V$, $P_W : V \longrightarrow V$, $P_W(v) = \sum \langle v, b_i \rangle b_i$

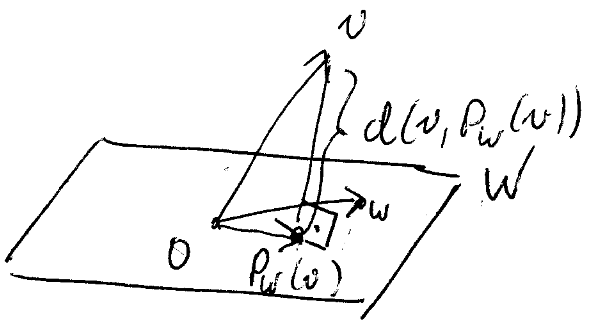
$\{b_i\}$ ($\cup$) baza o.n.

rzut $\perp$ na W.

• $d(v,W) = d(v, P_W(v)) = \|v - P_W(v)\|$

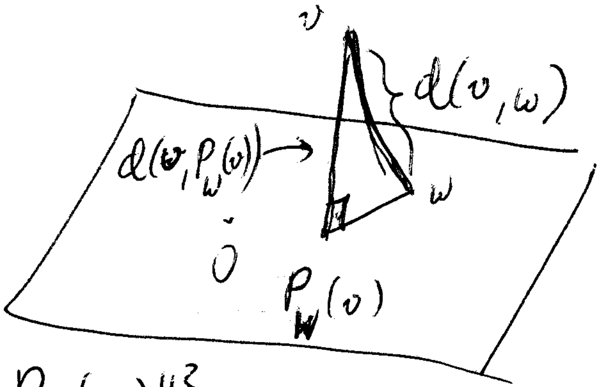
odległość v od W

<u>bo:</u> <u>$d(v,w) \geqslant d(v, P_W(v))$ dla wszystkich $w \in W$</u>



~~$\|v-w\|$~~ bo: $v - w =$

$$= \underbrace{(P_W(v) - w)}_{\in W} + \underbrace{(v - P_W(v))}_{\perp W}$$



stąd:

$$\underbrace{\|v-w\|^2}_{d(v,w)^2} = \|P_W(v)-w\|^2 + \underbrace{\|v-P_W(v)\|^2}_{d(v,P_W(v))^2} + 2\underbrace{\langle P_W(v)-w, v-P_W(v)\rangle}_{0 \text{ bo } \perp}$$

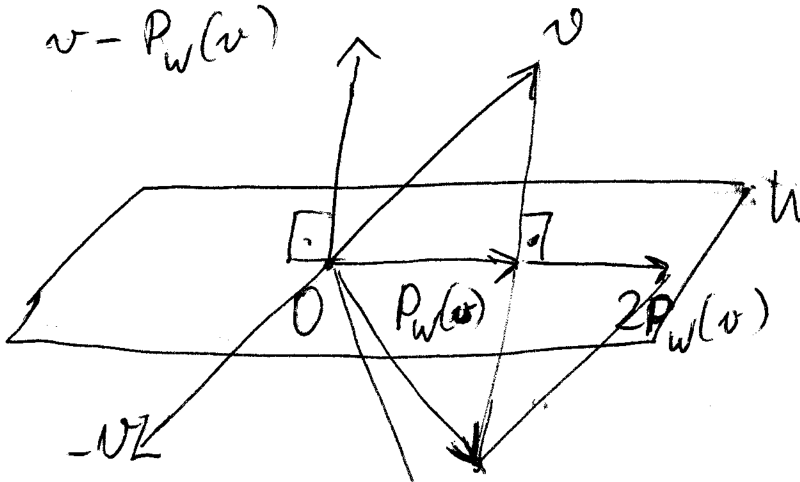
<u>więc</u> $d(v,w) \geqslant d(v, P_W(v))$,

2. $S_W : V \longrightarrow V$ $\quad S_W(v) = 2P_W(v) - v$

odbicie v względem W

• liniowe

• $\|v\| = \|S_W(v)\|$: izometria



3. Zał, że $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ baza o.n.

Uwaga 11.2. $\langle v, w \rangle = \langle [v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}} \rangle$
dla $v, w \in V$.

↖ iloczyn w $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{C}^n$.

bo: $v = \sum t_i b_i$

$w = \sum s_i b_i$ $\quad \langle v, w \rangle = \left\langle \sum_i t_i b_i, \sum_j s_j b_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i,j} t_i \bar{s}_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_i t_i \bar{s}_i = \langle [v]_{\mathcal{B}}, [w]_{\mathcal{B}} \rangle$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

delta Diraca

Uwaga 11.3. Dla $W < V$, $V = W \oplus W^\perp$.

<u>D-d</u> $P_W : V \longrightarrow V$ rzut na W wzdłuż $W^\perp = \operatorname{Ker} P_W$

było zadanie: $V = W \oplus \operatorname{Ker} P_W = W \oplus W^\perp$.

Def. 11.4. (V, W : euklidesowe [unitarne], $F : V \to W$ liniowe),

(a) F : ortogonalne [unitarne], gdy $\forall v, v' \in V$

$$\langle v, v' \rangle = \langle F(v), F(v') \rangle$$

(b) F : izomorfizm przestrzeni euklidesowych [unitarnych], gdy F : izomorfizm liniowy i ortogonalny [unitarny]

(c) $V \cong W$ (jako przestrzenie euklidesowe [unitarne]), gdy $\exists\, F : V \longrightarrow W$ izomorfizm przestrzeni euklidesowych [unitarnych].

Tw. 11.5. V przestrzeń euklidesowa [unitarna], $\dim V = n \implies V \cong \mathbb{E}^n$ [$V \cong \mathbb{C}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym]

__D-d.__ Niech $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$: baza o.n.

$$F : V \longrightarrow \mathbb{E}^n \quad [\mathbb{C}^n]$$

$$F(v) = [v]_{\mathcal{B}}.$$

- F: izomorfizm liniowy (patrz tw. 3.6)
- F ortogonalne [unitarne] (patrz uwaga 11,2)

Wn. 11.6. Przestrzenie euklidesowe [unitarne] tego samego wymiaru są izomorficzne.

$$H : \underset{\substack{\cup \\ B=\{b_i\}}}{V} \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\cup \\ C=\{c_i\}}}{W} \qquad H(\sum t_i b_i) = \sum t_i c_i$$

bazy o.n.

Def. 11.7. (V, W: przestrzenie euklidesowe [unitarne])

(a) $F: V \to W$ jest <u>izometrią</u>, gdy $\forall v, v' \in V$

$$d(v,v') = d(F(v), F(v'))$$

(b) $F: V \to W$ jest <u>izometrią liniową</u>, gdy jest izometrią i jest liniowe.

<u>Przykład</u> $u \in V$ $\quad T_u : V \to V$ translacja o u:

$$T_u(v) = u + v \quad \text{: izometria}$$

gdy $u \neq 0$: nie jest liniowa

$$d(v,v') = \|v - v'\| = \|(v+u)-(v'+u)\| =$$
$$= d(T_u(v), T_u(v')).$$

Uwaga 11.8. Niech ~~...~~ $F: V \longrightarrow W$ liniowe AL I/10

V, W ↑ euklidesowe [unitarne]

Wtedy NWSR:

(1) F: ortogonalne [unitarne]

(2) $\|F(v)\| = \|v\|$ dla wszystkich $v \in V$.

(tzn: F: izometria liniowa)

bo dla F liniowego: $\left[\forall v \in V \; \|F(v)\| = \|v\|\right]$

$$\Updownarrow$$

$$\left[(\forall v, v' \in V) \; d(v, v') = d(F(v), F(v'))\right]$$

<u>D-d</u> (gdy V: euklidesowa)

(1) $\Rightarrow$ (2) jasne, bo: $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \langle F(v), F(v)\rangle =$

$$= \|F(v)\|^2.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle$$

$$\|F(v) - F(w)\|^2 = \|F(v)\|^2 + \|F(w)\|^2 - 2\langle F(v), F(w)\rangle.$$

Stąd: $\langle v, w\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle$.

Przypadek V: unitarne: zadanie.

Wn. 11.9 ($\dim V < \infty$)
Odwzorowanie ortogonalne [unitarne] ~~izometria liniowa~~ $F: V \longrightarrow V$ jest izomorfizmem,

wtedy $F^{-1}: V \longrightarrow V$ też jest ortogonalne [unitarne]

D-d • $\operatorname{Ker} F = \{0\}$, bo:

$$v \neq 0 \Rightarrow \|F(v)\| = \|v\| > 0 \text{, i } F(v) \neq 0.$$

$\Downarrow \dim V < \infty$.

F: "na"

Jak rozpoznać, czy $F: V \longrightarrow V$ (liniowe) jest ortogonalne [unitarne]?

Def. 11.10. Macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ [$\mathbb{C}$] jest ortogonalna [unitarna], gdy jej kolumny tworzą bazę o.n. w $\mathbb{E}^n$ [$\mathbb{C}^n$].

Uwaga 11.11. Załóżmy, że $\mathcal{B} \subseteq V$: baza o.n. i $F: V \to V$ liniowe, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. NWSR:

(1) F: ortogonalne [unitarne]

(2) $m_{\mathcal{B}}(F)$: ortogonalna [unitarna]

D-d (1) $\Rightarrow$ (2) trywialne, bo

$$m_{\mathcal{B}}(F) = \left([F(b_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [F(b_n)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$\| [F(b_i)]_{\mathcal{B}} \|^2 = \langle [F(b_i)]_{\mathcal{B}}, [F(b_i)]_{\mathcal{B}} \rangle \overset{\text{Uwaga } 11.2}{=}$$

$$= \langle F(b_i), F(b_i) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ ortogonalne} \\ [\text{unitarne}]}}{=} \langle b_i, b_i \rangle = 1.$$

podobnie: ortogonalność kolumn.

(2) $\Rightarrow$ (1). Zał, że $m_{\mathcal{B}}(F)$ ortogonalna [unitarna]

Niech $c_i = F(b_i)$, $i = 1, \dots, n$

- $\| c_i \| = 1$ dla $i = 1, \dots, n$, parami $\perp$

bo:

$$\langle c_i, c_j \rangle = \langle F(b_i), F(b_j) \rangle \overset{11.2}{=} \langle [F(b_i)]_{\mathcal{B}}, [F(b_j)]_{\mathcal{B}} \rangle$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

- F: ortogonalne [unitarne], bo:

Niech $v = \sum t_i b_i$, $w = \sum s_i b_i \in V$.

Cel: $\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

$F(v) = \sum t_i c_i$, $F(w) = \sum s_i c_i$

Stąd: $\langle v, w \rangle = \sum t_i \bar{s_i} = \langle F(v), F(w) \rangle$.

Uwaga 11,12

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $[M_{n\times n}(\mathbb{C})]$. NWSR:

(1) A ortogonalna [unitarna]

(2) A odwracalna i $A^{-1} = \bar{A}^T = \bar{A}^*$

D-d. $A = (A_1, \ldots, A_n)$ kolumny, $\bar{A}^* = \begin{bmatrix} \bar{A}_1^* \\ \vdots \\ \bar{A}_n^* \end{bmatrix}$ wiersze.

(1) $\Rightarrow$ (2). $F_A : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$, $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ liniowe o macierzy A.

Z uwagi 11.11: F_A: ortogonalne [unitarne]

Z wniosku 11.9: F_A: odwracalne

Z uwagi 4.7: $A = m_{\mathcal{E}}(F_A)$: odwracalna.

Pok, że $\overline{A}^* = A^{-1}$:

~~$A\overline{A}^* = [\langle A_i,$~~

$$\overline{A}^* A = [\langle \overline{A}_i, \overline{A}_j \rangle]_{n\times n} = I \Rightarrow \overline{A}^* = A^{-1}.$$

$$\overline{\langle A_i, A_j \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j. \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow$ (1):

ćwiczenie.

Wn. 11.13. Zał, że A: macierz ortogonalna [unitarna], $F: V \longrightarrow V$ ortogonalne [unitarne]. Wtedy

(1) $|\det(A)| = 1$, $|\det(F)| = 1$.

(2) Jeśli λ: wartość własna F lub A, to $|\lambda| = 1$.

<u>D-d</u> (1) dla A: $\det A = \det A^*$ (tw. 5.14),

więc $\det(\overline{A}^*) = \overline{\det(A)}$

$$\overline{A}^* A = I \underset{\text{tw. Cauchy'ego}}{\Longrightarrow} |\det(A)|^2 = \overline{\det(A)} \cdot \det(A) =$$

$$= \det(\overline{A}^*) \cdot \det(A) = \det(I) = 1,$$

więc $|\det(A)| = 1$

(2) dla F:

$$F(v) = \lambda v \Rightarrow \|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

$v \neq 0$

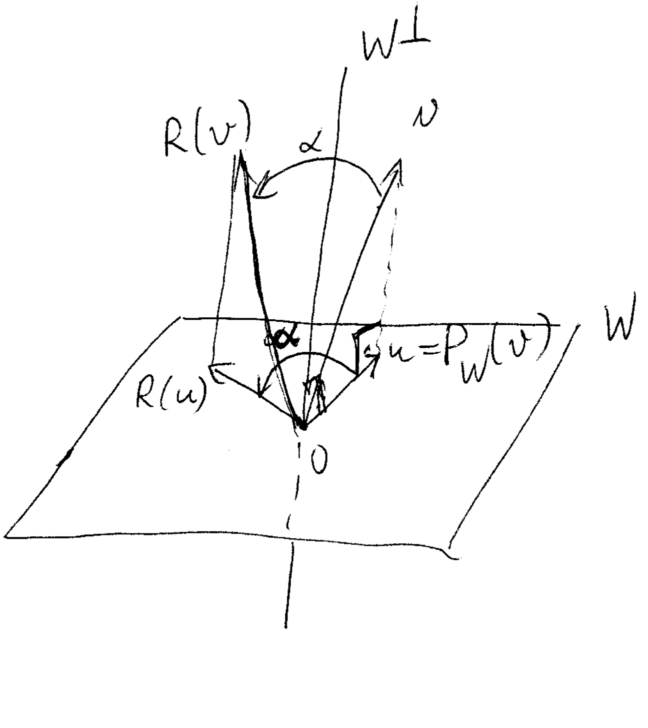
Przykłady izometrii liniowych (przekształceń ortogonalnych)

V: euklidesowa, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ baza o.n.

1. $W = \mathrm{Lin}\{b_1, b_2\} \subseteq V$, $W^\perp = \mathrm{Lin}\{b_3, \ldots, b_n\}$.

$W \cong \mathbb{E}^2$, $V \cong \mathbb{E}^n$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad R_W^\alpha : V \longrightarrow V$ obrót o kąt α w płaszczyźnie W, wokół $W^\perp$ przestrzeni



$$m_{\mathcal{B}}(R_W^\alpha) = \left[\begin{array}{cc|ccc} \cos\alpha & -\sin\alpha & & & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & & 0 & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right]$$

ortogonalna.

• Definicja R^{α}_{W} niejednoznaczna (zależy od wyboru bazy o.n. W (tzn: orientacji W))

Orientacja w przestrzeni rzeczywistej:

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\} \subseteq V$ bazy

$\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Leftrightarrow \det(m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(id)) > 0$.

• $\sim$: relacja równoważności w zbiorze baz V (ponumerowanych)

• $\sim$ ma 2 klasy abstrakcji.

Orientacja V : wybór jednej z tych klas abstrakcji.

• gdy $V = \mathbb{R}^n$; $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$: baza standardowa

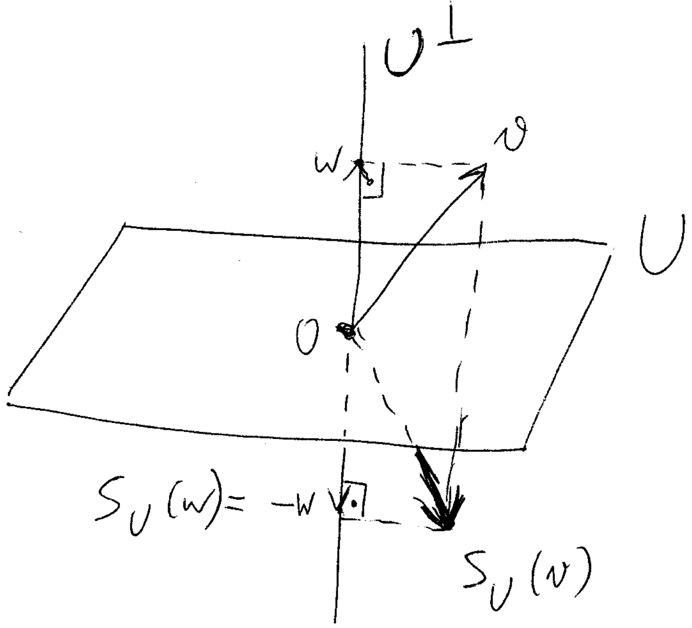
orientacja $\mathcal{E}$: dodatnia

orientacja $\mathcal{E}' = \{E_2, E_1, E_3, \dots, E_n\}$: ujemna

2. Odbicie $U = Lin\{b_2, \dots, b_n\} < V$, $U^{\perp} = Lin(b_1)$.

Def. $W < V$, $\dim W = \dim V - 1$: W : "hiperpłaszczyzna" ($a + W$: też).

$$S_U : V \longrightarrow V \quad m_{\mathcal{B}}(S_U) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$


$U^\perp$
v
w
U
0
$S_U(w) = -w$
$S_U(v)$