Wykład 12. $\qquad$ Alg I/12 (1)

<u>Przykład</u>. Kategoria $Vect_{\mathbb{R}}$: przestrzeni liniowych / $\mathbb{R}$.

Funktor sprzężenia:

$$\begin{array}{ccc} *: Vect_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & Vect_{\mathbb{R}} \\ V & \longmapsto & V^* = Hom(V, \mathbb{R}) \\ \cap & & \cap \\ Ob(Vect_{\mathbb{R}}) & & Ob(Vect_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

Na morfizmach:

$$Hom(V,W) \ni f \overset{*}{\longmapsto} f^* \in Hom(W^*, V^*)$$ (zmiana kierunku strzałki)

$$V \xrightarrow{f} W \quad \overset{*}{\rightsquigarrow} \quad W^* \xrightarrow{f^*} V^*$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed] & W \arrow[d, "\varphi \in W^*"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$

Fakt 12.10. $*$ jest funktorem kontrawariantnym $Vect_{\mathbb{R}} \to Vect_{\mathbb{R}}$

<u>D-d</u>.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "g"] & \\ V \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & U \end{tikzcd} \quad \overset{*}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} & W^* \arrow[dl, "f^*"'] & \\ V^* & & U^* \arrow[ul, "g^*"'] \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)^* \overset{(+)}{=} f^* \circ g^*$$

Dowód: (+)

Niech $\varphi \in U^*$

$$(g\circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = \underbrace{(\varphi \circ g)}_{g^*(\varphi) \in W^*} \circ f = g^*(\varphi) \circ f =$$

$$= f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi).$$

Własności sprzężenia * w $Vect_{\mathbb{R}}$:

Niech $f, g \in Hom(V, W)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f, g} & W \\ & \rightsquigarrow & \\ V^* & \xleftarrow{f^*, g^*} & W^* \end{array}$$

(a) $(f+g)^* = f^* + g^*$

(b) $(\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}}{t} f)^* = t \cdot f^*$

(c) $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$, jeśli f: izomorfizm.

<u>D-d</u>. (a) $\varphi \in W^*$, $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(f+g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f+g) = (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g) =$

$= f^*(\varphi) + g^*(\varphi) = (f^* + g^*)(\varphi)$

(c) $(f^{-1})^* \circ f^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fakt } 2.10}}{=} (f \circ f^{-1})^* = (id_W)^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fakt } 2.10}}{=} id_{W^*}$

Podobnie: $f^* \circ (f^{-1})^* = id_{V^*}$

$\Longrightarrow$ $(f^{-1})^*$ odwrotne do f^*

<u>Komentarz</u>. Załóżmy, że $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funktor z kategorii $\mathcal{A}$ do kategorii $\mathcal{B}$. (ko- lub kontrawariantny). Wtedy:

(a) $\Phi(id_A) = id_{\Phi(A)}$ (kowariantny)

dla $A \in Ob(\mathcal{A})$

~~$\Phi(id$~~

(b) Jeśli w $\mathcal{A}$: $A \xrightarrow{f} B$, i f: izomorfizm,

to w $\mathcal{B}$: $\Phi(A) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(B)$ (kowariantny)

lub $\Phi(B) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(A)$ (kontrawariantny)

i $\Phi(f)$: izomorfizm.

(c) (definicja) w $\mathcal{A}$: $(A \xrightarrow{f} B)$, f: izomorfizm $\Leftrightarrow$

$\exists\ B \xrightarrow{g} A$ t. że

$f \circ g = id_A$ i $g \circ f = id_B$.

<u>D-d</u> (a):

<u>Ćwiczenie</u> W dowolnej kategorii $\mathcal{A}$, Dla $A \in Ob(\mathcal{A})$

i $f \in Mor(A, A)$: $f = id_A \Leftrightarrow$ ~~$\forall B, C \forall$~~

$\forall g \in Mor(A, A)$ $(g \circ f = g$ i $f \circ g = g)$

[tzn: id_A jest jedynym elementem neutralnym dla (łącznego) działania $\circ$ w $Mor(A, A)$].

Tw. 12.11. Niech $f \in Hom(V, W)$,
$\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{C} \subseteq W$: bazy skończone oraz
$f^* : W^* \longrightarrow V^*$: sprzężenie f
$\mathcal{C}^* \subseteq W^*$, $\mathcal{B}^* \subseteq V^*$ bazy sprzężone.

Wtedy $m_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}(f^*) = m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)^*$ (transponowana).

D-d.

Niech $m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = [a_{ij}]_{m \times n}$

$m = \dim(W)$, $n = \dim(V)$

obliczmy $m_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}(f^*) = [a^*_{ij}]_{n \times m}$

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\} \subseteq W$

$\mathcal{B}^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subseteq V^*$, $\mathcal{C}^* = \{c_1^*, \dots, c_m^*\} \subseteq W^*$

$[f^*(c_j^*)]_{\mathcal{B}^*}$ = j-ta kolumna macierzy $m_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}(f^*)$.

$$f^*(c_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a^*_{ij} b_i^* \in V^* \Rightarrow f^*(c_j^*)(b_i) = a^*_{ij}.$$

Ale: $f^*(c_j^*)(b_i) \overset{def}{=} (c_j^* \circ f)(b_i) = c_j^*(f(b_i)) =$

$$= c_j^*\Big(\underbrace{\sum_{t=1}^{m} a_{ti} c_t}_{\leftarrow\ i\text{-ta kolumna } m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)}\Big) = a_{ji} \quad (\text{bo } c_j^*(c_t) = \delta_{jt})$$

Czyli $a^*_{ij} = a_{ji}$

Wn. 12.12

Jeśli $\dim V, \dim W < \infty$, to $* : \operatorname{Hom}(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ jest izomorfizmem liniowym.

D-d. $*$: liniowe (własności sprzężenia)

- $\ker(*) = \{0\}$, bo:

Zał, że $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ oraz $f^* = 0$.

Wtedy ~~tzn.~~ $m_{BC}(f) = (\underbrace{m_{C^*B^*}(f^*)}_{\text{macierz zerowa}})^* = 0$, więc

$f = 0$:

- stąd $*$: 1-1
- $*$: "na", bo:

$$\dim(\operatorname{Hom}(V, W)) = \dim(\operatorname{Hom}(W^*, V^*)) =$$

$$\operatorname{Hom}(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad \operatorname{Hom}(W^*, V^*) \cong M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

$= \dim V \times \dim W.$

Niech $\varphi \in V^*$. $\ker\varphi < V$

- $\ker\varphi = V$, gdy $\varphi = 0$
- $\dim\ker\varphi = \dim V - 1$, gdy $\varphi \neq 0$,

bo $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim \underset{\underset{\mathbb{R}}{\|}}{\operatorname{Im}\varphi}$

gdy $\varphi \neq 0$.

$W < V$

$\operatorname{codim}_V W \overset{def}{=} \dim V - \dim W$

kowymiar W w V gdy $\dim V$ skończony

Ogólniej: $\operatorname{codim}_V W = \dim U$, gdzie $V = W \oplus U$

wymiar podprzestrzeni dopełniającej do W w V.

$(= \dim V/W)$

przestrzeń ilorazowa.

Izomorfizm Frecheta – Riesza

Zał, że V: przestrzeń euklidesowa, $\dim V < \infty$.

Określamy $\varphi : V \longrightarrow V^*$ wzorem:

dla $v \in V$ $\varphi(v) \in V^*$: $\varphi(v)(\underset{\underset{V}{\cap}}{w}) = \langle w, v\rangle$.

Uwaga 12.13. $\varphi : V \xrightarrow{\cong} V^*$

~~Nowy dokument tekstowy~~

izomorfizm Frecheta – Riesza.

D–d: • φ : liniowe (ćw.) ← ~~ta potrzebne $\langle \varphi(w), \varphi(v) \rangle = \langle v, w \rangle$ $V^* \to V$ dla V: unitarnej~~

• φ : 1–1, bo: $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$:

Zał, że $\underset{V}{v \in} \neq 0$. Wtedy

$$\varphi(v)(v) = \langle v, v \rangle \neq 0,$$

więc $\varphi(v) \in V^* \setminus \{0\}$.

i $v \notin \operatorname{Ker} \varphi$.

$\dim V = \dim V^* < \infty$,

więc stąd: $\varphi : V \xrightarrow{\cong} V^*$.

Uwaga 12.13'. Gdy V: unitarna, $\dim V < \infty$,

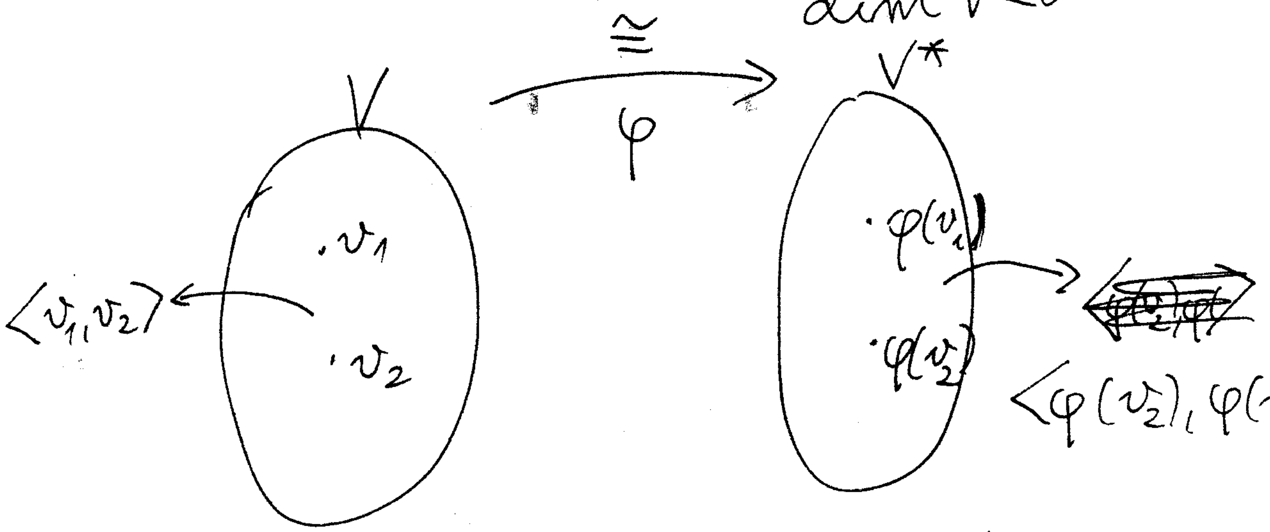
to φ j.w.: antyizomorfizm (izomorfizm półliniowy)

(Frecheta–Riesza),

tzn: • $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$, • $\varphi(\underset{\mathbb{C}}{\lambda \in} v) = \bar{\lambda} \varphi(v)$

~~Uwaga Zał, że $\dim V < \infty$, $\mathcal{B} \in V$ baza o.n. Wtedy~~

Zał. że V : euklidesowa [unitarna]
$\dim V < \infty$



Indukowany iloczyn skalarny w V^*: dla $w_1, w_2 \in V^*$

$$\langle w_1, w_2\rangle_{V^*} \overset{def}{=} \langle \varphi^{-1}(w_2), \varphi^{-1}(w_1)\rangle.$$

Wtedy V^* też : euklidesowa [unitarna], z $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*}$.

~~Uwaga 12.14~~ (Zał, że V, W : euklidesowe [unitarne],

Uwaga 12.14 $\dim V = \dim W < \infty$. oraz $f : V \to W$ ortogonalne [unitarne].

Wtedy:

(1) Diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

komutuje (jest przemienny)

tzn: $\varphi = f^* \psi f$

gdzie: φ, ψ : (anty)izomorfizmy F.-R.

(2) $f^* : W^* \to V^*$ też ortogonalne (unitarne)

D-d (1) Przypomnienie:

$$\begin{tikzcd} V^* \ni f^*(\alpha) = \alpha\circ f & V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed] & W \arrow[d, "\alpha\in W^*"] \\ & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Niech $v\in V$

Cel: $\underbrace{\varphi(v)}_{\in V^*} = \underbrace{(f^*\circ\psi\circ f)(v)}_{\in V^*}$

Niech $w\in V$

$(f^*\circ\psi\circ f)(v)(w) = f^*(\underbrace{\psi(f(v))}_{\in W^*})(w) \underset{\text{def } f^*}{=} \psi(f(v))(f(w)) =$

$\overset{\text{def }\psi}{=} \langle f(w), f(v)\rangle \underset{f \text{ ortogonalne}}{=} \langle w, v\rangle = \varphi(v)(w).$

(2) f^*: ortogonalne [unitarne]: Niech $\alpha,\beta\in W^*$.

$\langle f^*(\alpha), f^*(\beta)\rangle_{V^*} = \langle \underbrace{\varphi^{-1}(f^*(\beta))}_{②}, \underbrace{\varphi^{-1}(f^*(\alpha))}_{①}\rangle_V \underset{\text{def. }\varphi}{=}$

$= \varphi(①)(②) =$

$= f^*(\alpha)[\varphi^{-1}(f^*(\beta))] \underset{\text{def } f^*}{=} \alpha[\underbrace{f(\varphi^{-1}(f^*(\beta)))}_{=\psi^{-1}}] =$ ← później

$= \alpha[\overbrace{\psi^{-1}(\beta)}^{\in W}] \underset{\text{def. }\psi}{=} \langle \psi^{-1}(\beta), \psi^{-1}(\alpha)\rangle_W = \langle \alpha,\beta\rangle_{W^*}.$

$f \circ \varphi^{-1} \circ f^* = \psi^{-1}$, bo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd} \quad \xRightarrow[\substack{\varphi,\psi,f \\ \text{bijekcje} \\ \Downarrow \\ f^* \text{ też} \\ \text{bijekcja}}]{} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \\ V^* \arrow[u, "\varphi^{-1}"] & W^* \arrow[l, "f^*"] \arrow[u, "\psi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$ ćwiczenie.

$\#$: "komutuje"

Nadal: V, W : euklidesowe [unitarne], $\dim V, \dim W < \infty$.

Def. 12.15. Dla $f : V \to W$ liniowego,

spręzenie hermitowskie f $\to$ $f^+ : W \to V$ jedyne takie, że

$$(+) \quad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\varphi_V"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[l, "f^+"'] \arrow[d, "\varphi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

(wtedy f^+ też liniowe)

φ_V, φ_W : Frecheta-Riesza

Uwaga 12.16. Niech $f : V \to W$, $g : W \to V$ liniowe. NWSR:

(1) $g = f^+$ (tzn. diagram $(+)$ z g w miejsce f^+ komutuje)

(2) $(\forall v \in V, w \in W)\ \langle f(v), w \rangle_W = \langle v, g(w) \rangle_V$

Wn. $f^+ : W \to V$: jedyne takie, że $(\forall v \in V, w \in W)$
$$\langle f(v), w \rangle_W = \langle v, f^+(w) \rangle_V$$

D-d (1) ⇒ (2):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\varphi_V"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & W \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\varphi_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "f^*"] \end{tikzcd}$$

tzn: $\forall w \in W$:

$$\varphi_V(g(w)) = f^*(\varphi_W(w)) \quad (*)$$

Dlatego dla $v \in V$, $w \in W$:

$$\langle v, g(w)\rangle_V \underset{\text{def } \varphi_V}{=} \varphi_V(g(w))(v) \underset{(*)}{=} f^*(\varphi_W(w))(v) =$$

$$\underset{\text{def } f^*}{=} \varphi_W(w)(f(v)) \underset{\text{def. } \varphi_W}{=} \langle f(v), w\rangle_W .$$

(2) ⇒ (1). Na mocy (1)⇒(2): f^+ spełnia warunek (2)
i g też —"— (2).

Niech $w \in W$ dowolne.

Wtedy $\forall v \in V$ $\quad \langle v, g(w)\rangle_V = \langle f(v), w\rangle_W = \langle v, f^+(w)\rangle$

$$\Downarrow$$

$g(w) = f^+(w)$, więc $g = f^+$.

Własności sprzężenia hermitowskiego:

- $(f+g)^+ = f^+ + g^+$, $\quad$ • $(\alpha f)^+ = \bar{\alpha} f^+$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $(g \circ f)^+ = f^+ \circ g^+$ $\quad$ • $(id_V)^+ = id_V$

(gdy złożenie ma sens)

- $(f^{-1})^+ = (f^+)^{-1}$ (gdy f: odwracalne)
- $(f^+)^+ = f$

<u>D-d</u>. Np: $(f^{-1})^+ = (f^+)^{-1}$

$$\left\{\begin{array}{l} V \xrightarrow{f} W \\ \quad \Downarrow f \text{ odwracalne} \\ W \xrightarrow{f^{-1}} V \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} W \xrightarrow{f^+} V \\ \\ V \xrightarrow{(f^{-1})^+} W \end{array}\right.$$

<u>Sposób 1</u>. Za darmo, z ~~?~~ funktorialności *.

Sposób 2: na palcach:

Wystarczy pokazać, że: $(\forall v \in V, w \in W)$

$$\langle f^{-1}(w), v\rangle_V = \langle w, (f^+)^{-1}(v)\rangle_W$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle v', f^+(w')\rangle_V = \langle f(v'), w'\rangle,$$

(wtedy $(f^+)^{-1} = (f^{-1})^+$)

gdzie: $w' := (f^+)^{-1}(v)$, $v' := f^{-1}(w)$. Ale to jest prawda.

[f^+ odwracalne: ćwiczenie]

Def. 12.17. Niech V: unitarna [euklidesowa], $\dim V < \infty$. $f \in \mathrm{End}(V)$.

(1) f: hermitowski, gdy $f^+ = f$.
[samosprzężony, symetryczny]

$\Updownarrow$ Uwaga 12.16

$$(\forall v, w \in V)\ \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$$

(2) f antyhermitowski, gdy $f^+ = -f$
[antysymetryczny] $\Updownarrow$
$(\forall v, w \in V)$ $\langle f(v), w\rangle = -\langle v, f(w)\rangle$

Na macierzach:

Def. 12.18. Niech $A \in M_{m\times n}(K)$, $K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

(1) $\overline{A}^*$: sprzężenie hermitowskie macierzy A
[tzn: • transponowanie A + sprzężenie wyrazów.]
[konflikt notacyjny: czasami przez A^* oznacza się sprzężenie hermitowskie A, tzn. $A^* = \overline{A}^T$,
(ale nie tu)]

(2) A hermitowska [symetryczna], gdy $\overline{A}^* = A$.
$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$

(3) A antyhermitowska [antysymetryczna], gdy $\overline{A}^* = -A$.

Fakt 12.19.
Zał, że $f: V \longrightarrow W$ liniowe, dim $V = n$, dim $W = m$
$V \supseteq \mathcal{B}$, $W \supseteq \mathcal{C}$ bazy o.n. Wtedy:

(1) $m_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f^+) = \overline{m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)}^*$

(2) Gdy $V = W$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$:
f hermitowski [symetryczny] $\iff m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \overline{m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)}^*$.
samosprzężony

(3) $[V=W, \mathcal{B}=\mathcal{C}]$

f antyhermitowski [antysymetryczny] $\Leftrightarrow$

$$m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = -\overline{m_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)}^{*}$$

(4) sprzężenie hermitowskie macierzy ma własności paralelne do sprzężenia hermitowskiego funkcji liniowych $f: V \longrightarrow W$.

D-d (1) $m_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = [a_{ij}]_{m\times n}$,

$$m_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f^{+}) = [a'_{ij}]_{n\times m}$$

$a_{ij} = \langle f(b_j), c_i\rangle \qquad a'_{ji} = \langle f^{+}(c_i), b_j\rangle =$

$= \overline{\langle b_j, f^{+}(c_i)\rangle} = \overline{\langle f(b_j), c_i\rangle} = \overline{a_{ij}}$.

---

f: ortogonalne $\not\Rightarrow$ f symetryczne (obroty nie mają macierzy symetrycznej)

- obroty: antysymetryczne
- odbicia: symetryczne

f: unitarne $\not\Rightarrow$ f hermitowskie, np. $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ jest antyhermitowskie.

Uwaga 12.20.

Załóżmy, że V: p. euklidesowa [unitarna], $\dim V < \infty$ i $f \in \mathrm{End}(V)$. Wtedy $\exists !\, g, h \in \mathrm{End}(V)$

hermitowski [symetryczny] g, antyhermitowski [antysymetryczny] h

$$\underline{\underline{f = g + h}}.$$

<u>D-d</u> $g = \frac{1}{2}(f + f^+)$, $h = \frac{1}{2}(f - f^+)$ dobre.

<u>jedyność</u>: $f = g' + h'$ (g' symetryczny, h' antysymetryczny) $\Rightarrow$ $f^+ = g' - h'$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g' = \frac{1}{2}(f + f^+) \\ h' = \frac{1}{2}(f - f^+) \end{cases}.$$

Endomorfizmy hermitowskie [samosprzężone] symetryczne

Uwaga 2.21.

Jeśli $f \in \mathrm{End}(V)$ hermitowski i λ: wartość własna f to $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>D-d</u>. Niech $0 \neq v \in V$ wektor własny f dla λ.

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle f(v), v \rangle \overset{f:\text{ hermitowski}}{=} \langle v, f(v) \rangle =$$

$$= \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle. \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \text{ i } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lemat 2.22.

Jeśli $f \in End(V)$ samosprzężony, V: euklidesowa, $\dim V < \infty$,

to: $\varphi_f(X)$ rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na iloczyn czynników liniowych.

Zatem f ma wektor własny w V.

D-d. Wystarczy pokazać, że każde miejsce zerowe φ_f w $\mathbb{C}$ jest rzeczywiste. $(n = \dim V)$

Niech $\underset{\text{baza o.n.}}{\mathcal{B} \subseteq V} \rightsquigarrow A = m_{\mathcal{B}}(f) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\Downarrow$$

$$A = A^* \quad (\text{fakt } 12.19(2)).$$

$$\begin{array}{ccccc} f \rightsquigarrow F_A & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \cap\!\! \mid & & \cap\!\! \mid & & \cap\!\! \mid \\ \hat{F}_A & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$\uparrow$

hermitowski $\Rightarrow$ ma wszystkie wartości własne $\in \mathbb{R}$ (Uwaga 2.21)

$\Rightarrow \varphi_f(X) = \varphi_A(X)$ rozkłada się na czynniki liniowe $/\mathbb{R}$.

Tw. 2.23. [V euklidesowa [unitarna], $\dim V < \infty$].

Jeśli $f \in End(V)$ hermitowski [symetryczny], to $\exists\, \underset{\text{baza o.n.}}{\mathcal{B} \subseteq V}$ złożona z wektorów własnych f.

(więc f: diagonalizowalne)

D-d. Indukcja względem $\dim V$.

Lemat 12.22, Uwaga 12.21 $\Rightarrow$

$\exists\ 0 \neq v_1 \in V$ wektor własny f. Niech $W = Lin(v)^\perp$
unormowany

- $V = Lin(v) \oplus W$
- W: f-niezmiennicza, bo dla $w \in W$:

$\langle f(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle w, v\rangle = 0,$

więc $f(w) \in W$.

Z założenia indukcyjnego istnieje baza o.n. $\mathcal{B}' \subseteq W$ z wektorów własnych f. $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{v_1\}$: dobra.

Uwaga 2.24. [$f \in End(V)$ hermitowski [symetryczny]]

Niech $Spec(f) = \{\lambda : \lambda$ wartość własna $f\}$ $(\subseteq \mathbb{R}!)$
spektrum f

dla $\lambda \in$, $V^\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.

Wtedy $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec f} V^\lambda$ oraz dla $\lambda \neq \mu \in Spec(f)$

$V^\lambda \perp V^\mu$ $(*)$.

D-d Wystarczy pokazać $(*)$. Niech $V^\lambda \ni v, w \in V^\mu$.

$\underbrace{\langle f(v), w\rangle}_{\lambda v} = \langle v, \underbrace{f(w)}_{\mu w}\rangle \Rightarrow \lambda\langle v, w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$

$\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$

$\Downarrow \lambda \neq \mu$

$\langle v, w\rangle = 0$ i $V^\lambda \perp V^\mu$

Wn. 2.25. Jeśli $A \in M_{n\times n}(K)$ hermitowska, to $\exists B \in M_{n\times n}(K)$ ortogonalna [unitarna] $BAB^{-1} = B A \bar{B}^*$: diagonalna rzeczywista.