Übung 1: Tensorrechnung und Kontinuumsmechanik

Aufgabe 1.1: Tensormultiplikation

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Indexnotation und vereinfachen Sie soweit es geht.

a) $\boldsymbol{I} : (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{b})$

b) $(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I})^{T23} : \boldsymbol{B}$

c) $\boldsymbol{B} : (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}^T) : \mathbb{L} : (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{B}^T) : \boldsymbol{A}$

d) $\boldsymbol{I}\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})$

e) $(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) : \boldsymbol{B}$

f) $\boldsymbol{A}^T : \mathbb{A} : \boldsymbol{B}$

Aufgabe 1.2: Differentialoperationen

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Indexnotation und vereinfachen Sie soweit es geht.

a) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{grad}\boldsymbol{v} + \operatorname{grad}^T \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{A}$ (Ann.: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$)

b) $\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{T})$

c) $\dfrac{\partial(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})}{\partial \boldsymbol{A}}$

d) $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{A}} : \boldsymbol{B}$

e) $\operatorname{tr}(\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{T}))$

f) $\dfrac{\partial(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})}{\partial \boldsymbol{A}}$

Aufgabe 1.3: Elastizitätstensor und Voigt-Notation

Für linear elastisches isotropes Material lässt sich der Elastizitätstensor $\mathbb{C}$ wie folgt darstellen:

$$\mathbb{C} = \lambda\,\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\mu\,\mathbb{I} \tag{1.1}$$

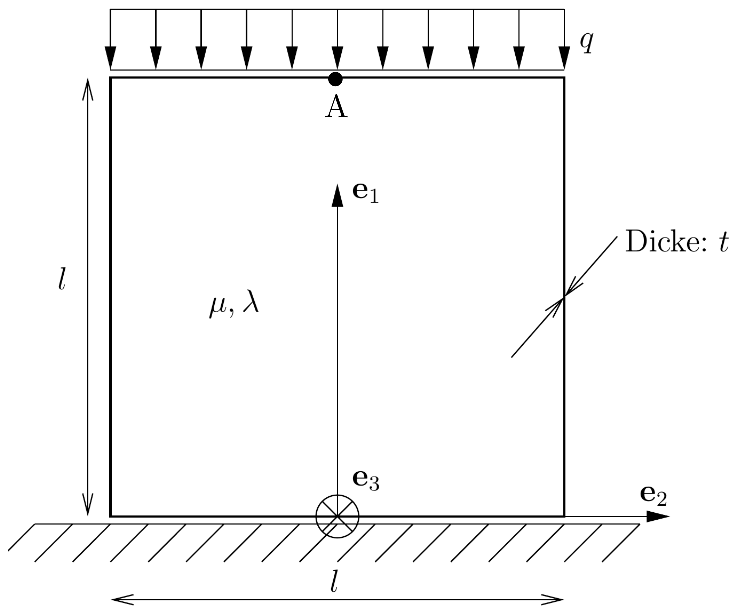
a) Zeigen Sie, dass die Ausdrucksweisen $\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ äquivalent sind. Setzen Sie dazu (1.1) ein, schreiben die beiden Ausdrücke in Indexschreibweise und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

b) Schreiben Sie das Materialgesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ zunächst in genereller Matrixnotation und dann in Voigt-Notation. Unter welchen Annahmen ist dies möglich?

Hinweis: $\boldsymbol{\varepsilon}$ lautet in Voigt-Notation $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^V = [\varepsilon_{11},\, \varepsilon_{22},\, \varepsilon_{33},\, 2\varepsilon_{23},\, 2\varepsilon_{13},\, 2\varepsilon_{12}]^T$

Aufgabe 1.4: Analytische Lösung eines Randwertproblems

Der dargestellte Körper $\mathcal{B} = l \times l \times t$ liegt reibungsfrei auf einer Ebene und ist im Koordinatenursprung (mittig in der l-t-Ebene) zusätzlich in Horizontalrichtung fixiert. Auf ihn wirkt die Flächenlast q. Volumenkräfte durch die Erdbeschleunigung sind zu vernachlässigen.



a) Erfüllt der Verschiebungszustand $\boldsymbol{u} = \alpha x_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta x_2 \boldsymbol{e}_2 + \gamma x_3 \boldsymbol{e}_3$ die Impulsbilanz? Bestimmen Sie die Konstanten α, β, γ aus den Randbedingungen. Nutzen sie dazu das Cauchy-Theorem $\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$

b) Berechnen Sie die Verschiebung im Punkt A für den Parametersatz $\{E, \nu, q, t, l\} = \{210\text{GPa}, 0.3, 500\text{MPa}, 100\text{mm}, 100\text{mm}\}$

Hinweis: Die Beziehungen zwischen den Elastizitätsparametern lauten:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$