Übung 4 : Assemblierung

4.1) a) FEM-Prozedur

I) Modellbildung

→ ersetzen des reellen Systems durch mathematisches Modell (Variationsgleichung / schwache Form)

Beispiel Fachwerk:

$$\delta\Pi^{stab} := G^e = \underbrace{\int_0^l EAu'\delta u'\,dx}_{\delta\Pi^{int,e}} - \delta\Pi^{ext,e}$$

Warum schwache Form?

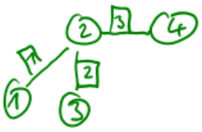
1) es treten nur Ableitungen 1. Ordnung auf ⇒ numerisch einfacher zu approximieren
2) Einbinden der Randbedingungen „direkt" möglich

II) Diskretisierung

a) aufteilen der zu untersuchenden Struktur in finite Elemente

b) kontinuierliche Lösungsfunktionen werden approximiert durch diskrete Knotenwerte, welche über das Element interpoliert werden

Beispiel Fachwerk



○ := Knoten

□ := Elemente

$$G = \sum_{e=1}^{3} G^e \quad (a)$$

$$\approx \sum_{e=1}^{3} G^{e,h} = 0 \ (b) \quad \text{mit} \quad G^{e,h} = \delta \underline{\underline{d}}^e \left[\underline{\underline{k}}^e \underline{\underline{d}}^e - \underline{\underline{p}}^e\right]$$

III) Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{\underline{k}}^e$ und Lastvektoren $\underline{\underline{p}}^e$ aufstellen

→ $\underline{\underline{k}}^e$ beinhalten Informationen über Material und Geometrie des jeweiligen Elements

→ $\underline{\underline{p}}^e$ beinhalten Informationen über Lasten (Volumenkräfte, Neumann-RB)

IV) Assemblierung

→ Zusammenführung der einzelnen Elementmatrizen zu globalem Gleichungssystem

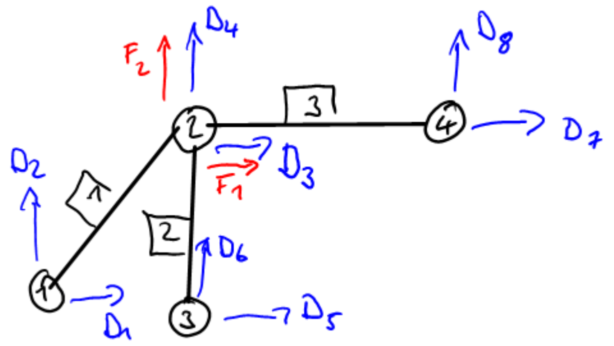
$$\sum_{e=1}^{3} G^{e,h} = \delta\underline{\underline{D}}^T\left[\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{P}}\right] = 0$$

→ Berücksichtigung der Dirichlet-RB

V) Lösung

b) Schritt IV) Assemblierung

Globaler Verschiebungsvektor



$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_8 \end{bmatrix}$$

Globaler Lastvektor: $\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_1 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen

$e = 1$

$$\underline{\underline{k}}^1 = \begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} \\ k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33} & k^1_{34} \\ k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{d}}^1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$e = 2$

$$\underline{\underline{k}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2_{66} & 0 & k^2_{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2_{46} & 0 & k^2_{44} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{d}}^2 = \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$e = 3$

$$\underline{\underline{k}}^3 = \begin{bmatrix} k^3_{33} & 0 & k^3_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^3_{73} & 0 & k^3_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{d}}^3 = \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

Globales Gleichungssystem $\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}$

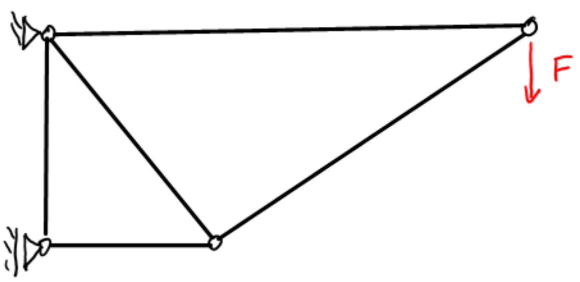
$$
\begin{bmatrix}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33}+k^3_{33} & k^1_{34} & 0 & 0 & k^3_{37} & 0 \\
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44}+k^2_{44} & 0 & k^1_{46} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k^2_{64} & 0 & k^2_{66} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^3_{73} & 0 & 0 & 0 & k^3_{77} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Dirichlet – RB :

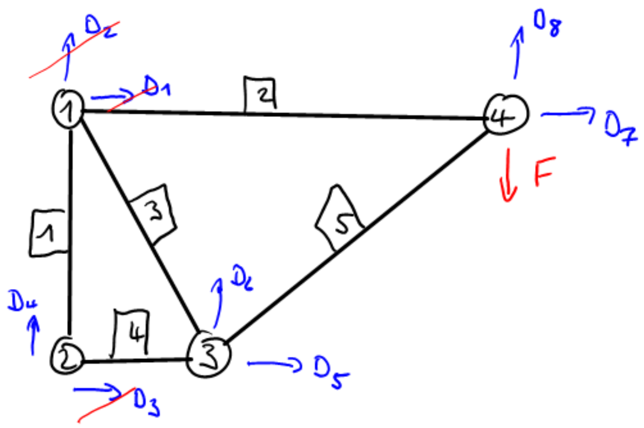
$$
\begin{bmatrix}
k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33}+k^3_{33} & k^1_{34} & 0 & 0 & k^3_{37} & 0 \\
k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43} & k^1_{44}+k^2_{44} & 0 & k^1_{46} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & k^2_{64} & 0 & k^2_{66} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^3_{73} & 0 & 0 & 0 & k^3_{77} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
k^1_{33}+k^3_{33} & k^1_{34} \\
k^1_{43} & k^1_{44}+k^2_{44}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}
$$

4.2) Assemblierung Fachwerk



Globaler Verschiebungsvektor



$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_8 \end{bmatrix}$$

Globaler Lastvektor $\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -F \end{bmatrix}^T$

Elementsteifigkeitsmatrizen

$e = 1$

$$\underline{\underline{k}}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^1_{22} & 0 & k^1_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^1_{42} & 0 & k^1_{44} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{d}}^1 = \begin{bmatrix} \cancel{D_1} \\ \cancel{D_2} \\ \cancel{D_3} \\ D_4 \end{bmatrix}$$

$e = 2$

$$\underline{\underline{k}}^2 = \begin{bmatrix} k^2_{11} & 0 & k^2_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2_{71} & 0 & k^2_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{d}}^2 = \begin{bmatrix} \cancel{D_1} \\ \cancel{D_2} \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

$e = 3$

$$\underline{\underline{k}}^3 = \begin{bmatrix} k^3_{11} & k^3_{12} & k^3_{15} & k^3_{16} \\ k^3_{21} & k^3_{22} & k^3_{25} & k^3_{26} \\ k^3_{51} & k^3_{52} & k^3_{55} & k^3_{56} \\ k^3_{61} & k^3_{62} & k^3_{65} & k^3_{66} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{d}}^3 = \begin{bmatrix} \cancel{D_1} \\ \cancel{D_2} \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$e = 4$

$$\underline{\underline{k}}^4 = \begin{bmatrix} k_{33}^4 & 0 & k_{35}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{53}^4 & 0 & k_{55}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{d}}^4 = \begin{bmatrix} \cancel{D_3} \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

$e = 5$

$$\underline{\underline{k}}^5 = \begin{bmatrix} k_{55}^5 & k_{56}^5 & k_{57}^5 & k_{58}^5 \\ k_{65}^5 & k_{66}^5 & k_{67}^5 & k_{68}^5 \\ k_{75}^5 & k_{76}^5 & k_{77}^5 & k_{78}^5 \\ k_{85}^5 & k_{86}^5 & k_{87}^5 & k_{88}^5 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{d}}^5 = \begin{bmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix}$$

Globales Gleichungssystem $\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}$

$$\begin{bmatrix} k_{44}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{55}^3 + k_{55}^4 + k_{55}^5 & k_{56}^3 + k_{56}^5 & k_{57}^5 & k_{58}^5 \\ 0 & k_{65}^3 + k_{65}^5 & k_{66}^3 + k_{66}^5 & k_{67}^5 & k_{68}^5 \\ 0 & k_{75}^5 & k_{76}^5 & k_{77}^5 & k_{78}^5 \\ 0 & k_{85}^5 & k_{86}^5 & k_{87}^5 & k_{88}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}$$