Übung 8: Ansatzfunktionen

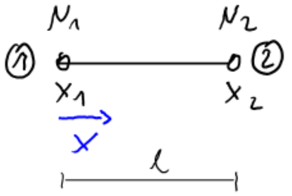
zu 8.1)

$$\underline{u}(\underline{x}) = N_I(\underline{x})\, \underline{d}_I$$

Grundeigenschaft der Ansatzfunktionen:

$$\boxed{N_I(\underline{x}_J) = \delta_{IJ}}$$

Minimalbeispiel: lineares 1D-Stabelement



linearer Ansatz: $N_I = a_I + b_I x$

Bestimmen der Koeffizienten

$I=1$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 x_1 &= 1 \\ a_1 + b_1 x_2 &= 0 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & x_J \\ \hline \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^{-1} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/l \end{bmatrix} \Rightarrow N_1 = 1 - \frac{1}{l}x$$

$I=2$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \end{bmatrix} \Rightarrow N_2 = \frac{1}{l}x$$

Stichprobe: $N_1(x_1) = 1$, $N_1(x_2) = 0$

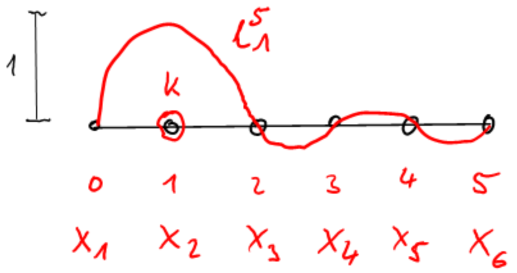
→ Methode kann für jede Art von Element verwendet werden

Problem: 1) bei größeren Elementen hoher Rechenaufwand zur Berechnung von $\underline{C}^{-1}$

2) muss für jedes Element neu aufgestellt werden

zu 1) Berechung mithilfe von Lagrange-Polynomen

$$
l_k^p(x) = \begin{cases}
\dfrac{\prod_{i=k+1}^{p} (x - x_i)}{\prod_{i=k+1}^{p} (x_k - x_i)} & \text{für } k = 0 \\[2ex]
\dfrac{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad \prod_{i=k+1}^{p} (x - x_i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad \prod_{i=k+1}^{p} (x_k - x_i)} & \text{für } 0 < k < p \\[2ex]
\dfrac{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)} & \text{für } k = p \\
& (=1 \text{ für Spezialfall } k=p=0)
\end{cases}
$$



$p = 5$ (Polynomgrad)

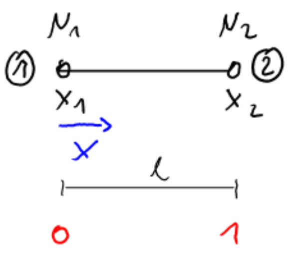
$k = 1$

$i \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$

$x_k = x_2$ (betrachteter Knoten)

$x_j \in \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ (sonstige Knoten)

Minimalbeispiel:



$p = 1$

(1) $k = 0$ $\quad x_k = x_1$

$i \in \{1\}$ $\quad x_i \in \{x_2\}$

$$N_1 = l_0^1(x) = \frac{x - l}{0 - l} = 1 - \frac{x}{l}$$

(2) $k = 1$ $\quad x_k = x_2$

$i = \{0\}$ $\quad x_i \in \{x_1\}$

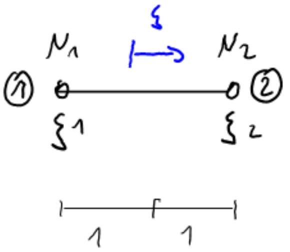
$$N_2 = l_1^1(x) = \frac{x - 0}{l - 0} = \frac{x}{l}$$

→ direkte Berechnung

zu 2) Verwenden von Referenzelementen im Parameterraum

→ Ansatzfunktion wird <u>einmal</u> für das Referenzelement aufgestellt und kann für jedes Element verwendet werden

→ weiterer Vorteil: numerische Integration möglich



① $k=0 \quad \xi_k = \xi_1$

$i \in \{1\} \quad \xi_i \in \{\xi_2\}$

$$N_1 = l_0^1(\xi) = \frac{\xi - 1}{-1-1} = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

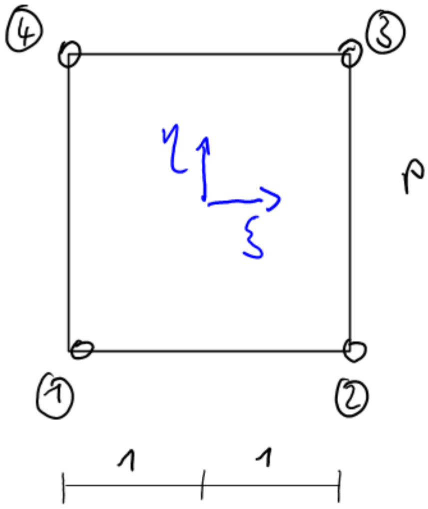
② $k=1 \quad \xi_k = \xi_2$

$i = \{0\} \quad \xi_i \in \{\xi_1\}$

$$N_2 = l_1^1(\xi) = \frac{\xi + 1}{1+1} = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

8.2) Viereckselement

a) lineares Viereckselement



$p=1$

Lagrange-Polynome für beide Koordinatenrichtungen

① $\xi: \; k=0, \; i \in \{1\}, \; \xi_k = -1, \; \xi_i \in \{1\}$

$\eta: \; k=0, \; i \in \{1\}, \; \eta_k = -1, \; \eta_i \in \{1\}$

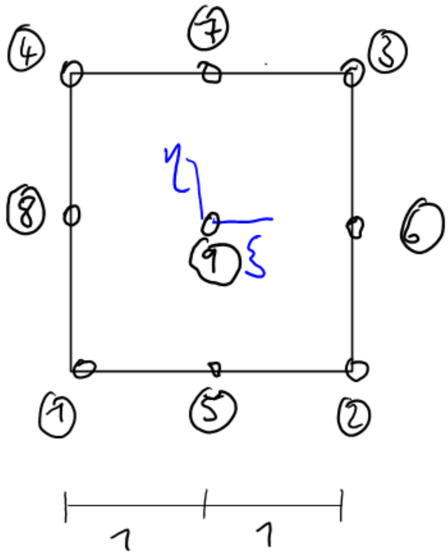
$$N_1 = l_0^1(\xi)\, l_0^1(\eta) = \frac{(\xi - 1)(\eta - 1)}{(-1-1)(-1-1)}$$

$$= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

② $\xi: \; k=1, \; i \in \{0\}, \; \xi_k = 1, \; \xi_i \in \{-1\}$ $\qquad$ η: wie bei ①

$$N_2 = l_1^1(\xi)\, l_0^1(\eta) = \frac{(\xi+1)(\eta-1)}{(1+1)(-1-1)} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

b) quadratisches Viereckselement $\qquad$ $p=2$



② $\xi: \; k=2, \; i \in \{0,1\}$

$\xi_k = 1, \; \xi_i \in \{-1, 0\}$

$\eta: \; k=0, \; i \in \{1, 2\}$

$\eta_k = -1, \; \eta_i \in \{0, 1\}$

$$N_2 = l_2^2(\xi)\, l_0^2(\eta) = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} \; \frac{(\eta-0)(\eta-1)}{(-1-0)(-1-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\xi(1+\xi)\eta(-1+\eta)$$

⑥ ξ: wie bei ②

η: $k=1$, $i \in \{0,2\}$

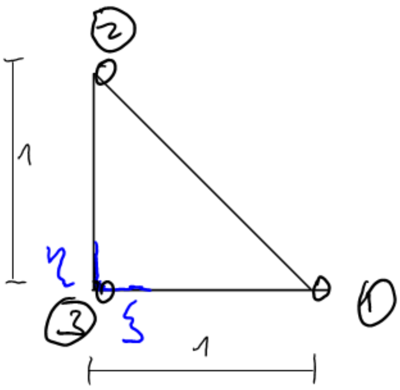
$\eta_k = 0$, $\eta_i \in \{-1,1\}$

$$N_6 = l_2^2(\xi)\, l_1^2(\eta) = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} \frac{(\eta+1)(\eta-1)}{(0+1)(0-1)}$$

$$= \frac{1}{2}(\xi+1)\xi(-1)(\eta+1)(\eta-1) = -\frac{1}{2}\xi(1+\xi)(-1+\eta^2)$$

8.3) Dreieckselement

a) lineares Dreieck



allgemeiner Ansatz

$$N_I = a_I + b_I \xi + c_I \eta$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \xi_J & \eta_J \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_I \\ b_I \\ c_I \end{bmatrix} = \delta_{IJ}$$

Direktes Einsetzen:

① $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_1 = 1$

$N_1 = \xi$

② $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$

$N_2 = \eta$

③ $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a_3 = 1$, $b_3 = -1$, $c_3 = -1$

$N_3 = 1 - \xi - \eta$

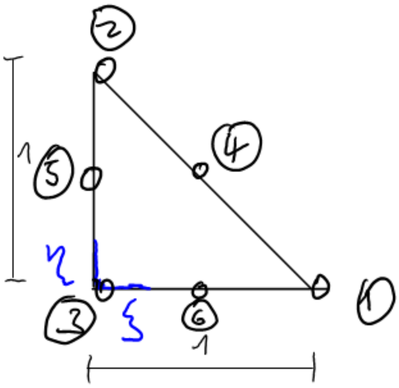
Vergleich mit Flächenkoordinaten

$$N_1 = \lambda_1 = \xi$$

$$N_2 = \lambda_2 = \eta$$

$$N_3 = \lambda_3 = 1 - \xi - \eta$$

b) quadratisches Dreieck



modifizierter Lagrange-Ansatz

$$\boxed{N = l^{k_1}_{k_1}(\lambda^1)\, l^{k^2}_{k^2}(\lambda^2)\, l^{k^3}_{k^3}(\lambda^3)}$$

1 $\lambda^1 : k_1 = 2 \,,\; i \in \{0, 1\} \,,\; \lambda^1_k = 1 \,,\; \lambda^1_i \in \{0, \tfrac{1}{2}\}$

$\lambda^2 : k_2 = 0 \Rightarrow l^0_0(\lambda^2) = 1$

λ^3 : wie λ^2

$$N_1 = l^2_2(\lambda^1)\, l^0_0(\lambda^2)\, l^0_0(\lambda^3) = \frac{(\lambda^1 - 0)(\lambda^1 - \frac{1}{2})}{(1-0)(1-\frac{1}{2})} \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^1(2\lambda^1 - 1)$$

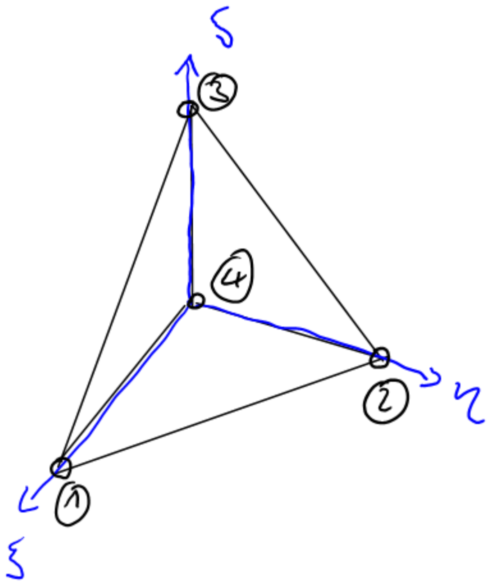
6 $\lambda^1 : k_1 = 1 \,,\; i \in \{0\} \,,\; \lambda^1_k = \tfrac{1}{2} \,,\; \lambda^1_i \in \{0\}$

$\lambda^2 : k_2 = 0 \Rightarrow l^0_0(\lambda^2) = 1$

λ^3 : wie λ^1

$$N_6 = l^1_1(\lambda^1)\, l^0_0(\lambda^2)\, l^1_1(\lambda^3) = \frac{(\lambda^1 - 0)(\lambda^3 - 0)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 0)} = 4\lambda^1\lambda^3$$

c) Lineares Tetraederelement



allgemeiner Ansatz

$$N_I = a_I + b_I \xi + c_I \eta + d_I \zeta$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \xi_J & \eta_J & \zeta_J \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_I \\ b_I \\ c_I \\ d_I \end{bmatrix} = \delta_{IJ}$$

① $d_1 = c_1 = a_1 = 0, \quad b_1 = 1 \qquad N_1 = \xi \quad := \lambda^1$

② $d_2 = b_2 = a_2 = 0, \quad c_2 = 1 \qquad N_2 = \eta \quad := \lambda^2$

③ $c_3 = b_3 = a_3 = 0, \quad d_3 = 1, \quad N_3 = \zeta, \quad := \lambda^3$

④ $a_4 = 1 \quad d_4 = c_4 = b_4 = -1 \qquad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad := \lambda^4$

$\lambda^{1,2,3,4}$: Volumenkoordinaten

Weiterführende Literatur: Zienkiewicz et al, 2005, Kapitel 8