

Repetitorium

A1) Potential $\Pi = \frac{1}{2} \int_B \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, dv - \int_B \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{b}} \, dv - \int_{\partial B_e} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{t}} \, da$

a) Variationsgleichung (schwache Form)

$$\delta_u \Pi = \int_B \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, dv - \int_B \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{b}} \, dv - \int_{\partial B_e} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{t}} \, da = 0 \quad (1)$$

b) Euler-Lagrange Gleichung (starke Form) herleiten:

→ Da $\underline{\underline{\sigma}}$ symmetrisch ist, gilt $\boxed{\delta \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \nabla \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}}$ (kann gezeigt werden durch Indexnotation)

$$\delta_u \Pi = \int_B \nabla \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, dv - \int_B \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{b}} \, dv - \int_{\partial B_t} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{t}} \, da = 0 \quad (:= G)$$

Schritte erforderlich für die Umwandlung

(I) Partielle Integration: $\int_B \nabla \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, dv = \int_B \operatorname{div}(\delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \, dv - \int_B \delta \underline{\underline{u}} \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \, dv$

(II) Gauss'scher Integralsatz: $\int_B \operatorname{div}(\delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \, dv = \int_{\partial B} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} \, da$

(III) Dirichlet/Neumann-Rand: $\int_{\partial B} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} \, da = \int_{\partial B_t} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} \, da + \int_{\partial B_u} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} \, da$
 $= 0, \text{ da } \delta \underline{\underline{u}}|_{\partial B_u} = 0$

$$\Rightarrow \delta_u \Pi = \int_B \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underbrace{[-\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{b}}]}_{\text{Impulsbilanz}} \, dv + \int_{\partial B_t} \delta \underline{\underline{u}} \cdot \underbrace{[\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} - \underline{\underline{t}}]}_{\text{Cauchy-Theorem}} \, da = 0 \quad (2)$$

Randwertproblem der Elastostatik (starke Form):

Finde $\underline{\underline{u}}(x) \quad \forall x \in B$, sodass

$$-\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{b}} \quad \text{in } B$$

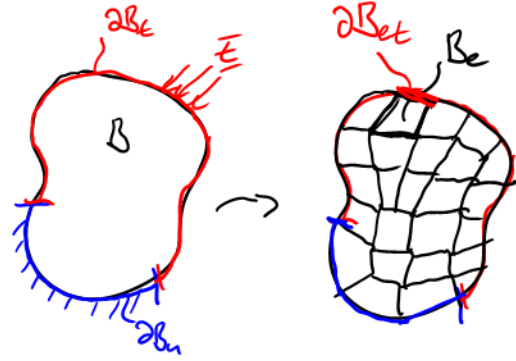
$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{t}} \quad \text{auf } \partial B_e$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} \quad \text{auf } \partial B_u$$

Die schwache Form (1) wird für die FEM-Diskretisierung verwendet, weil in ihr nur Ableitungen erster Ordnung für die betrachteten Lösungsfelder auftauchen.

Zudem wird es möglich sowohl Impulsbilanz als auch Randbedingungen in einer Gleichung für das globale System zu berücksichtigen.

c) Diskretisierung von (1)



$$G^h = \sum_e \left\{ \int_{B_e} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^h \cdot \underline{\underline{\sigma}}^h dv - \int_{B_e} \delta \underline{\underline{u}}^h \cdot \underline{\underline{b}} dv - \int_{\partial B_{et}} \delta \underline{\underline{u}}^h \cdot \underline{\underline{E}} da \right\} = 0$$

Approximation der Lösungsgrößen

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^h = \underline{\underline{B}}_e \delta \underline{\underline{d}}_e$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^h = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{B}}_e \underline{\underline{d}}_e$$

$$\delta \underline{\underline{u}}^h = \underline{\underline{N}}_e \delta \underline{\underline{d}}_e$$

$$\underline{\underline{B}}_e = \left[\begin{array}{cc|cc} N_{1,x}^1 & 0 & & \\ 0 & N_{1,y}^1 & & \\ N_{1,y}^1 & N_{1,x}^1 & & \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{cc|cc} N_{i,x}^k & 0 & & \\ 0 & N_{i,y}^k & & \\ N_{i,y}^k & N_{i,x}^k & & \end{array} \right]$$

$$\underline{\underline{N}}_e = \left[\begin{array}{cc|cc} N^1 & 0 & & \\ 0 & N^1 & & \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{cc|cc} N^k & 0 & & \\ 0 & N^k & & \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} k: \text{Anzahl} \\ \text{der Knoten} \end{array}$$

$$\Rightarrow G^h = \sum_e \left\{ \delta \underline{\underline{d}}_e \left[\underline{\underline{k}}_e \underline{\underline{d}}_e - \underline{\underline{p}}_e \right] \right\} = 0$$

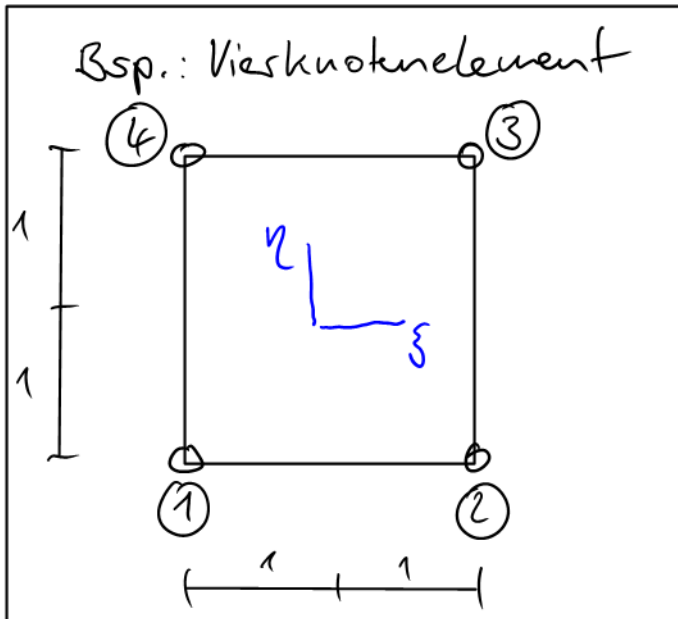
Elementsteifigkeitsmatrix : $\underline{\underline{k}}_e = \int_{B_e} \underline{\underline{B}}_e^T \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{B}}_e dv$

Elementlastmatrix : $\underline{\underline{p}}_e = \int_{B_e} \underline{\underline{N}}_e^T \underline{\underline{b}} dv + \underline{\underline{p}}_e^t$
L Ersatzknotenkkräfte

d) 1) Verwenden von Referenzelement im Parameterraum

→ Ansatzfunktionen für alle Elemente gleich

→ numerische Integration möglich



$$\underline{\underline{N_e}} := \underline{\underline{N_e}}(\xi, \eta)$$

$$\underline{\underline{B_e}} := \underline{\underline{B_e}}(\xi, \eta)^*$$

2) Isoparametrisches Konzept

→ gleiche Ansatzfunktionen für \underline{x}^u und \underline{u}^u

$$\underline{x}^u = \underline{\underline{N_e}} \underline{x_e}$$

$$\underline{u}^u = \underline{\underline{N_e}} \underline{d_e}$$

$$\text{Jacobimatrix } \underline{\underline{J}} = \frac{\partial \underline{x}^u}{\partial \underline{\xi}}$$

$$\text{Jacobi-determinante: } \det \underline{\underline{J}}$$

* Ableitungen nach \underline{x} können über inverse Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}^{-1}$ bestimmt werden

$$\Rightarrow \underline{k_e} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{B_e}}^T(\xi, \eta) \underline{\underline{B_e}}(\xi, \eta) \det \underline{\underline{J}}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\Rightarrow \underline{p_e} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\underline{N_e}}^T(\xi, \eta) \underline{\underline{b}} \det \underline{\underline{J}}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \underline{p_e}^t$$

3) Numerische Integration

$$\underline{k_e} = \sum_{i=1}^{n_{GP}} \underline{\underline{B_e}}^T(\xi_i, \eta_i) \underline{\underline{B_e}}(\xi_i, \eta_i) \det \underline{\underline{J}}(\xi_i, \eta_i) w_{\xi_i} w_{\eta_i}$$

($\underline{p_e}$ analog)

e) Assemblierung zu globalem Gleichungssystem

Globales Gleichungssystem

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}} \quad \leftarrow \text{globaler Lastvektor}$$

\downarrow
 \downarrow
 \downarrow

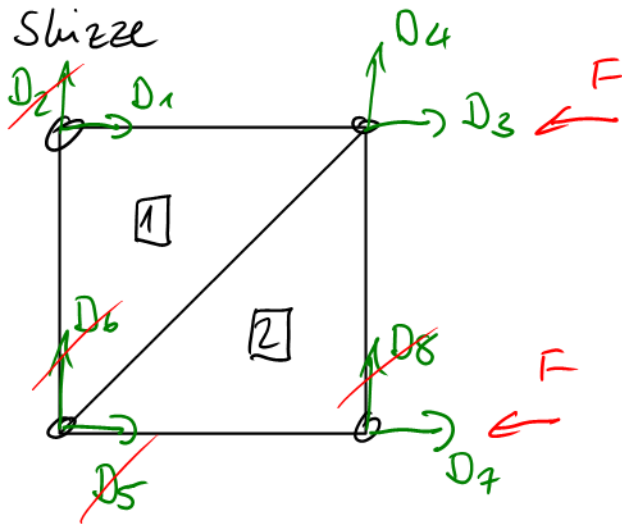
Knotenverschiebungen
 globale Steifigkeitsmatrix

Lösung:

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{P}}$$

A2) Assemblierung

a) Skizze



b)

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}$$

c)

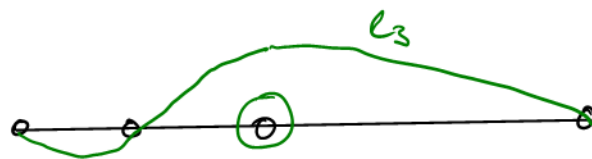
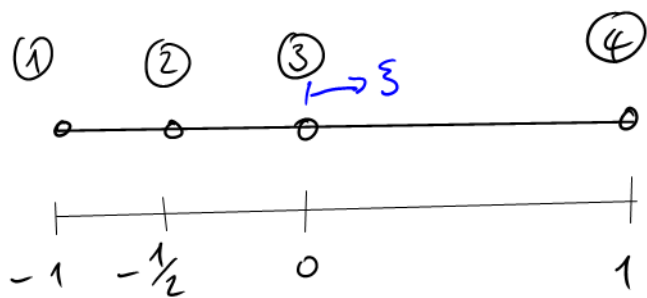
$$\underline{\underline{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} \\ k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{37}^{(2)} \\ k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{47}^{(2)} \\ k_{73}^{(2)} & k_{74}^{(2)} & k_{77}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & 0 \\ k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)} & k_{37}^{(2)} \\ k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} + k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & k_{47}^{(2)} \\ 0 & k_{73}^{(2)} & k_{74}^{(2)} & k_{77}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Zusatzbeispiel: Ansatzfunktionen und numerische Integration

Betrachtet wird folgendes fiktives 1D-Element:



Wie lautet die Lagrange-Ansatzfunktion für Knoten ③?

$$l_3^{(4)} = \frac{(\xi+1)(\xi+\frac{1}{2})(\xi-1)}{(0+1)(0+\frac{1}{2})(0-1)} = -2\xi^3 - \xi^2 + 2\xi + 1$$

Nun soll $f(\xi) := l_3(\xi)$ numerisch integriert werden mit

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

(1) (2)

1) mindest erforderliche Ordnung n : $p \leq 2n - 1$ hier $p=3 \Rightarrow n=2$

Nullstellen des Legendre Polynoms

2) Gausspunkte ξ_i bestimmen:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n$$

3) Wichtungsfaktoren w_i bestimmen

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i^{(n)}(\xi) d\xi$$

$l_i^{(n)}$: Lagrange-Polyn.
mit Stützstellen ξ_i
hier: $\xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$
 $\xi_1 \quad \xi_2$

4) Probe: (1) und (2) ausrechnen und prüfen ob das selbe rauskommt