Übung 10: Vierknotenelement

In dieser Übung wird die FEAPpv Elementsubroutine `elmt04` aus den vorherigen Aufgaben um das isoparametrische Vierknotenelement (vgl. Abbildung 10.1) erweitert.

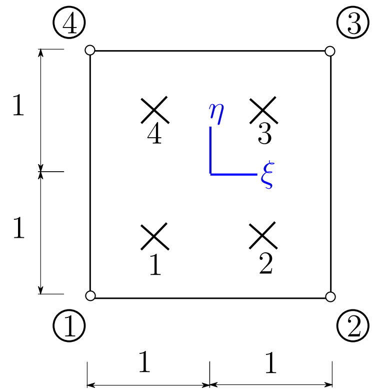

Abbildung 10.1: lineares Referenzviereckselement mit Gausspunkten

Grundlagen: Mithilfe der Gausspunkte wird das Integral der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}$ wie folgt numerisch berechnet:

$$\underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} = \int_{\mathcal{B}^{\mathrm{e}}} (\underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}})^T \underline{\mathbb{C}}\ \underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}\ \mathrm{d}V = \sum_{l=1}^{n_{\mathrm{GP}}=4} (\underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l))^T \underline{\mathbb{C}}\ \underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l) \det \underline{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\xi}_l) \mathrm{w}_l \qquad (10.1)$$

Dabei sind $\boldsymbol{\xi}_l = [\xi_l, \eta_l]^T$ die Ortsvektoren der Gausspunkte im Parameterraum und w_l die zugehörigen Wichtungsfaktoren. Für das Vierknotenelement sind diese Tabelle 10.1 zu entnehmen.

i	ξ_l	η_l	w_l
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
3	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1

Tabelle 10.1: Gausspunktkoordinaten und Wichtungsfaktoren des Vierknotenelementes

Die Summe in (10.1) wird im FE-Programm üblicherweise im Schleifendurchlauf aufgestellt, wobei $\underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}$ in jedem Iterationsschritt l geupdated wird:

$\underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} = \underline{\boldsymbol{k}}_0^{\mathrm{e}}$ (in linear elasticity $= \mathbf{0}$)
do $l = 1\ ,\ n_{\mathrm{GP}}$
$\quad \underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} \Longleftarrow \underline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} + (\underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l))^T \underline{\mathbb{C}}\ \underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l) \det \underline{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\xi}_l) \mathrm{w}_l$
end do

Desweiteren werden im Postprocessing, nachdem das FE-Problem gelöst ist und der Elementverschiebungsvektor $\underline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}}$ bekannt ist, an den Gausspunkten die Spannungen und Verzerrungen ausgewertet. Mithilfe der aus der Vorlesung bekannten Element-Interpolationsfunkionen $\underline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{e}}$ und $\underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}$ kann der Gausspunkt in physikalischen Koordinaten ausgedrückt werden:

$$\underline{\boldsymbol{x}}^h(\boldsymbol{\xi}_l) = \underline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l)\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{e}} \tag{10.2}$$

Die Verzerrung, welche diesem Punkt zugeordnet ist lässt sich (in Voigt-Notation) wie folgt bestimmen:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}_l) = \underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l)\underline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}} \tag{10.3}$$

Mithilfe des Elastizitätstensors $\underline{\mathbb{C}}^V$ lässt sich ebenso die Spannung bestimmen:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}_l) = \underline{\mathbb{C}}^V \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}_l) \tag{10.4}$$

Aufgabe 10.1: Gausspunkte

Die Subroutine `gauss04(l,lint,eg,wg)` gibt die Koordinaten `eg` und Wichtungsfaktoren `wg` bei Input des aktuellen Gausspunktes `l`. `lint` stellt dabei die Anzahl an Elementgausspunkten dar (lineares Dreieck t1: `lint`=1, quadratisches Dreieck t2: `lint`=3 oder lineares Viereck q1: `lint`=4).

a) Vervollständigen Sie `gauss04` um die Informationen aus Tabelle 10.1.

Aufgabe 10.2: Postprocessing

Die Subroutine `str04` berechnet die Verzerrungen `eps` und Spannungen `sig` aus den Elementknotenverschiebungen `du`. Dazu werden die Berechnungsschritte (10.2)-(10.4) durchgeführt. Die zugehörigen Programmvariablennamen sind Tabelle 10.2 zu entnehmen.

$\underline{\boldsymbol{x}}^h(\boldsymbol{\xi}_l)$	$\underline{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l)$	$\underline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{e}}$	$\underline{\boldsymbol{d}}^{\mathrm{e}}$	$\underline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\xi}_l)$	$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}_l)$	$\underline{\mathbb{C}}^V$	$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}_l)$
`xg`	`shp(3,*)`	`xl`	`du`	`bmat`	`eps`	`aa`*	`sig`

Tabelle 10.2: Zuordnung der Programm-Variablennamen zu den Berechnungsgrößen.

Hinweis: `aa`* ist die $[3 \times 3]$-Elastizitätsmatrix, deren Einträge zur x-y-Ebene gehören. Da die implementierten Elemente einen ebenen Verzerrungszustand beschreiben ist zu berücksichtigen, dass $\sigma_{33} \neq 0$ zusätzlich zu berechnen ist.

a) Ergänzen Sie `str04` um die Berechnung (10.2) der phys. Gausspunktkoordinaten

b) Ergänzen Sie `str04` um die Berechnung (10.3) der Verzerrungen

c) Ergänzen Sie `str04` um die Berechnung (10.4) der Spannungen

Aufgabe 10.3: Konvergenzstudie

a) Ersetzen Sie die vervollständigte Datei `elmt04.f` in dem Dateipfad `$FEAPPVHOME4_1/user` und updaten Sie das FEAPpv-Hauptprogram mit dem Befehl `make` (vgl Aufgabe 9.2).

b) Testen Sie `elmt04.f` mit einer Beispielrechnung (`I_cm`) und Vergleichen Sie die Ausgabe der Spannungen und Verzerrungen in der Outputdatei (`O_cm`) und die Contourplots mit denen der programmeigenen Elemente.

c) Ergänzen Sie Netzkonvergenzstudie aus Aufgabe 9.2c) mit den Ergebnissen des Viereckselementes. Plotten Sie die Verschiebung des Eckpunktes `A` über der Anzahl der Freiheitsgrade. Macht es einen qualitativen unterschied ob der Konvergenzplot über der Anzahl der Freiheitsgrade oder der Anzahl der Elemente erstellt wird?