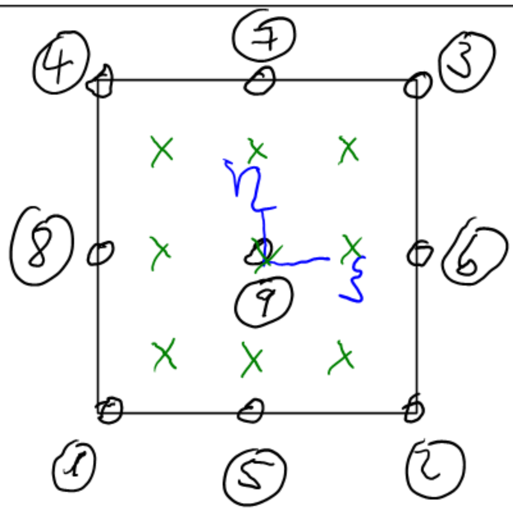
Übung 11: Gauss-Quadratur

A1) Quadratisches Viereckselement



a) Gauss-Integrationsordnung $n=3$:

n Gausspunkte in ξ-Richtung

n " η- "

$\Rightarrow n \times n = 9$ GP insgesamt

b) Betrachtung einzelner Koordinate $f(\xi)$

f: Polynom mit Polynomgrad $p=2$

Bedingung: $p \leq 2n-1$

$2 \leq 2\cdot 3 - 1 = 5$ ✓

Welche Integrationsordnung für welchen Polynomgrad?

$n=1 \Rightarrow 2-1=1 \Rightarrow p \leq 1$

$n=2 \Rightarrow 2\cdot 2-1=3 \Rightarrow p \leq 3$

$n=3 \Rightarrow 2\cdot 3-1=5 \Rightarrow p \leq 5$

p	1	2	3	4	5
n	1	2	2	3	3

c) Höhere Integrationsordnung als notwendig?

-> kein Gewinn an Genauigkeit, Rechenaufwand steigt

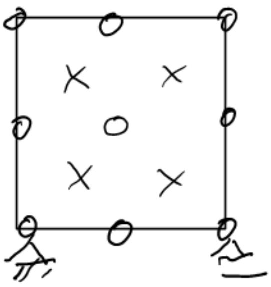
-> kann dennoch sinnvoll sein um einen Rangabfall der globalen Steifigkeitsmatrix zu verhindern

Rangabfall: $s < n_{dof}$

s: linear unabh. Gleichungen

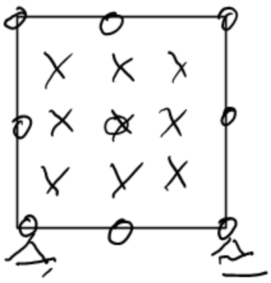
n_{dof}: Anzahl globaler Freiheitsgrade

Beispiel:



$n_{dof} = 2 \cdot 9 - 3 = 15$

$s = 4 \cdot 3 = 12$ ↯



$s = 9 \cdot 3 = 27 > 15$ ✓

d) Legendrepolynom 3. Ordnung

$$P_3 = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3}{d\xi^3} (\xi^2 - 1)^3 \quad (\text{Polynomgrad } n = 3)$$

NR: $\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)^3 = 3(\xi^2-1)^2 2\xi = 6\xi(\xi^4 - 2\xi^2 + 1) = 6\xi^5 - 12\xi^3 + 6\xi$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2-1)^3 = 30\xi^4 - 36\xi^2 + 6$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2-1)^3 = 120^4\xi^3 - 72\xi$$

$\Rightarrow P_3 = \frac{1}{8\cdot 6}(120\xi^3 - 72\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^2 - 3)\xi$

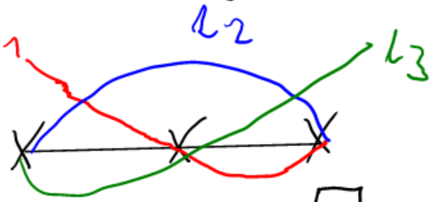
e) Gausspunktkoordinaten

$\xi_i \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$

NR: $5\xi^2 = 3$

$\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

f) Wichtungsfaktoren



$w_i = \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\, d\xi$

$$l_1 = \frac{(\xi - 0)\left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = \frac{\xi\left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{6/5} = \frac{5}{6}\xi^2 - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\xi$$

$$l_2 = \frac{\left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(0 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = \frac{\xi^2 - \frac{3}{5}}{-3/5} = -\frac{5}{3}\xi^2 + 1$$

$$l_3 = \frac{\left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)(\xi - 0)}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)} = \frac{5}{6}\xi^2 + \frac{5}{6}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\xi$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} l_1\, d\xi = \left[\frac{5}{18}\xi^3 - \cancel{\frac{5}{12}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\xi^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{18} - \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} l_2\, d\xi = \left[-\frac{5}{9}\xi^3 + \xi\right]_{-1}^{1} = -\frac{10}{9} + 2 = \frac{8}{9}$$

$$w_3 = \int_{-1}^{1} l_3\, d\xi = \left[\frac{5}{18}\xi^3 + \cancel{\frac{5}{12}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\xi^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{9}$$

Zusatzinfo Gauss(-Legendre)-Quadratur (nicht Klausurrelevant)

Hilfsmittel zur Herleitung

1) Legendre-Polynom: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ (hat n Nullstellen) (= Polynomgrad n)

Eigenschaft: $\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x) P_n(x) dx = 0$

2) Lagrange-Polynom: $l_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot(x-x_n)}$ (Polynomgrad n−1)

Eigenschaft: $l_i(x_j) = \delta_{ij}$

Polynom $r(x)$ (Polynomgrad n−1) lässt sich mit $l_i(x)$ als polynomialer Basis und $r(x_i)$ als Koeffizienten ausdrücken:

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} r(x_i)\, l_i(x)$$ (Polynomgrad n−1, Position der Stützstellen „beliebig" wählbar)

gesucht: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ f hat Polynomgrad $p = 2n-1$

a) Polynomdivision: $f(x) = P_{n-1}(x)\,P_n(x) + r(x)$

Polynomgrad: f: $2n-1$, P_{n-1}: $n-1$, P_n: n, r: $n-1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x) P_n(x)\,dx}_{=0 \text{ (siehe Eigenschaft 1)}} + \int_{-1}^{1} r(x)\,dx \qquad (1)$$

b) Ansatz numerische Integration

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i P_{n-1}(x_i) P_n(x_i) + \sum_{i=1}^{n} w_i\, r(x_i)$$

c) Wähle (i) $\boxed{x_i \text{ als Nullstellen von } P_n}$ $\Rightarrow$ Term $\sum_{i=1}^{n} w_i P_{n-1}(x_i) P_n(x_i) = 0$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r(x_i) \qquad (2)$$

d) Drücke $r(x)$ (Gl (1)) durch Lagrange-Polynome mit Stützstellen x_i aus

$$\int_{-1}^{1} r(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} r(x_i) \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx \qquad (3)$$

e) (2) und (3) in (1)

$$\sum_{i=1}^{n} r(x_i) w_i \quad \sum_{i=1}^{n} r(x_i) \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \text{(ii)} \; \boxed{w_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx}$$

f) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i \, r(x_i) =$

An den Nullstellen von $P_n(x)$ ist $f(x_i) = r(x_i)$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ ist „exakt" wenn (i) und (ii) gilt