

疎行列圧縮による二重対数行列幅の実現

Dominik Köppl¹

Vincent Limouzy²

Andrea Marino³

Giulia Punzi⁴

Jannik Olbrich⁵

Takeaki Uno⁶

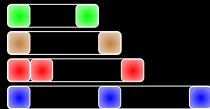
- ¹: University of Yamanashi
- ²: University Clermont Auvergne
- ³: University of Florence
- ⁴: University of Pisa
- ⁵: University of Ulm
- ⁶: National Institute of Informatics



game



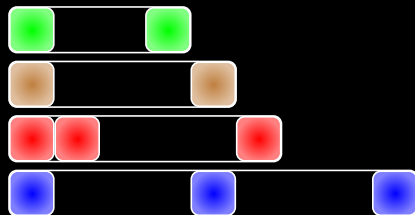
slides



問題の設定

入力

- ▼ n 個の1次元ポリオミノ
(=タイル)
- ▼ タイルには隙間があってもよい



目標

- ▼ タイルを1次元結合タイルにする
- ▼ 隙間を埋めることができるが、埋めたブロックは重なってはならない
- ▼ 目的: 最短の結合タイルを構築

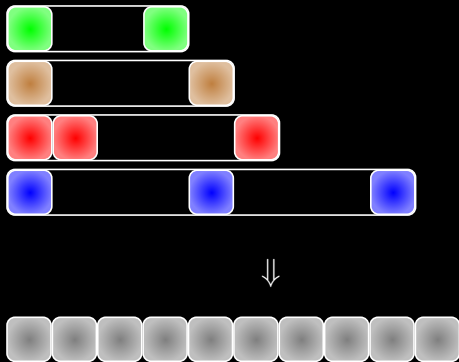
問題の設定

補題

隙間のない結合タイルは解である

Proof.

ブロックは重ならないから



決定問題

MINLENGTH すべてのタイルを長さ k の結合タイルに結合できるか?

MINMAXSHIFT すべてのタイルの最初のブロックが最初の列に配置された場合、最大シフトが k 以下の結合タイルを作成できるか?

MINMAXSHIFT はすでに **Sparse Matrix Compression (SMC) problem** として研究されていた

Garey, Johnson '79 は $k \geq 2$ の場合に SMC が \mathcal{NP} 困難であることを示した
英夫+'24 は幅が $\Omega(\lg n)$ の場合、両方の問題が \mathcal{NP} 困難であることを示した

問題 (SMC, [Garey,Johnson'79, Chapter A4.2, Problem SR13])

入力: $n \times \ell$ 行列 $A[1..n][1..\ell]$ 、 n 行 ℓ 列として、すべての $i \in [1..n]$, $j \in [1..\ell]$ に対して $A[i][j] \in \{0, 1\}$ の要素を持つ

整数 $k \in [0..\ell \cdot (n - 1)]$

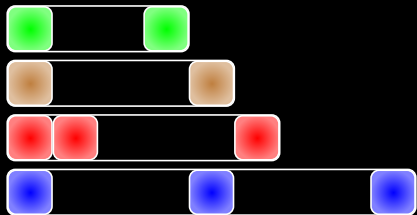
目標: 以下の2つが存在できるかどうかを調べる:

- 整数配列 $C[1..\ell + k]$ 、 $\forall i \in [1..\ell + k]$ について $C[i] \in [0..n]$
- シフト関数 $s : [1..n] \rightarrow [0..k]$ が存在し、 $\forall i \in [1..n]$, $\forall j \in [1..\ell]$ について $A[i][j] = 1 \Leftrightarrow C[s(i) + j] = i$ が成り立つ
- $A[0][j] = 0 \ \forall j$ であると仮定し、 $C[i] = 0$ を設定することで、この要素が未割り当てであることをモデル化する

応用:

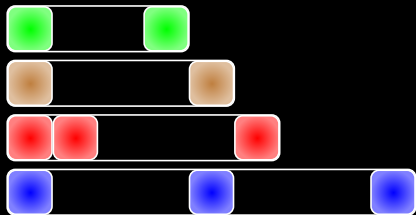
- 行列の圧縮 Ziegler'77
- コンパイラ Aho+'86
- 探索トライの実装 Tarjan,Yao'79
- ブルームフィルタ Chang,Wu'91

タイルから行列へ



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

タイルから行列へ



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

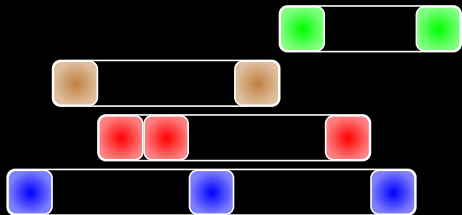
解答：

$$\blacktriangledown s = [6, 1, 2, 0]$$

$$\blacktriangledown C = [4, 2, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 1]$$

$$B = \begin{pmatrix} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

タイルから行列へ



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解答：

$$\blacktriangledown s = [6, 1, 2, 0]$$

$$\blacktriangledown C = [4, 2, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 1]$$

$$B = \begin{pmatrix} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

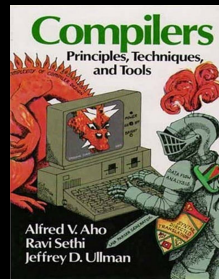
近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のを配置

- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す

使用例: "Compilers: Principles, Techniques, and Tools" の節 3.9.8

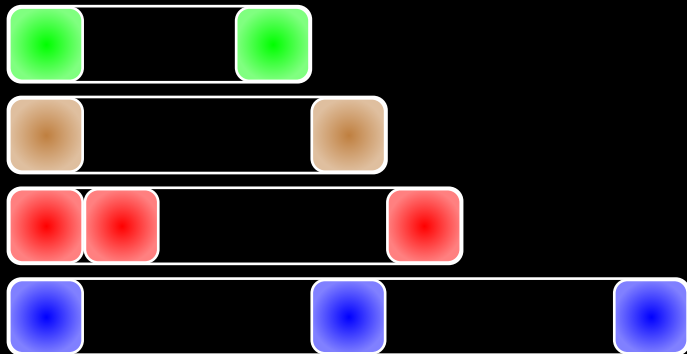
While we may not be able to choose *base* values so that no *next-check* entries remain unused, experience has shown that the simple strategy of assigning *base* values to states in turn, and assigning each $base[s]$ value the lowest integer so that the special entries for state s are not previously occupied utilizes little more space than the minimum possible.



近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のを配置

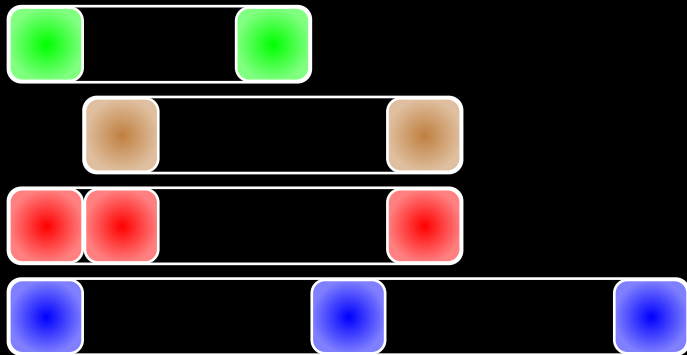
- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す



近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のを配置

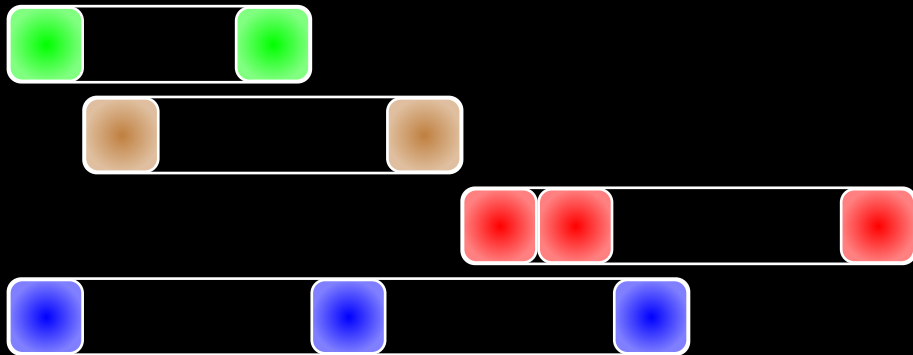
- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す



近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のを配置

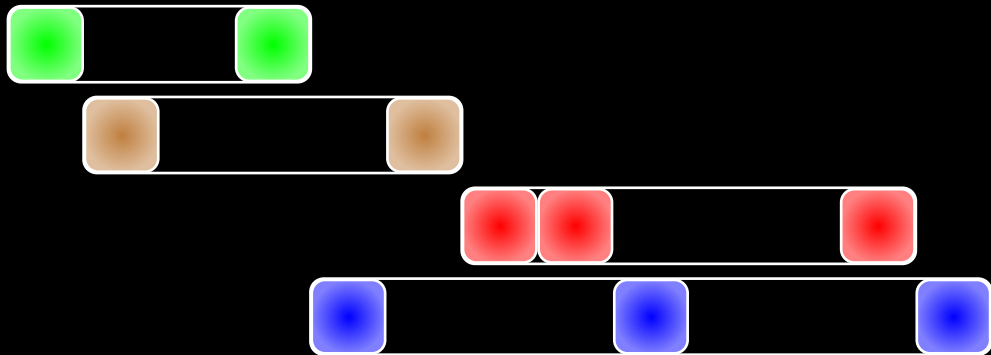
- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す



近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のを配置

- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す



近似アルゴリズム

Ziegler'77: 貪欲アルゴリズム: 最初に最初のものを配置

- 最初のタイルを最初の位置に配置
- それ以降のタイルについて: 最も左に適合する位置に配置
- 繰り返す



- 近似比は本当に小さいか?
- 実際に、近似比は $\Theta(\sqrt{m})$, ここで m は最適値! Köppl+'25

本発表

どの計算時間量で最適に解けるか?

- タイルの種類が1つの場合: $\ell \in O(\lg n)$ まで
- 一般の場合: $\ell \in O(\lg \lg n)$ まで


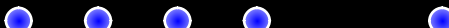
影響があるのか？

ヒューリスティックはタイルの事前ソートを可能にする

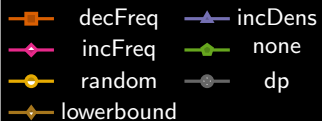
- none: ソートなし
- incFreq: 1の個数の昇順でソート
- decFreq: 1の個数の降順でソート
- incDens: 密度 $\frac{1\text{の個数}}{\text{長さ}}$ の昇順で
- decDens: 密度の降順でソート
- random: 10回ランダムにシャッフルし、最短の結果を取る

悪い入力

- 2種類のタイル X と Y
- 整数パラメータ c と g
- $X = (10^g)^c 1$, $Y = (10^{g-1})^c 10^c 1$
- $|X| = |Y| = c(g+1) + 1$
- $\#_1 X = \#_1 Y = c + 1$
- 交互順序で n 個のタイルを要求 X, Y, X, Y, \dots

$X =$ 
 $Y =$ 
($c = 5, g = 4$)

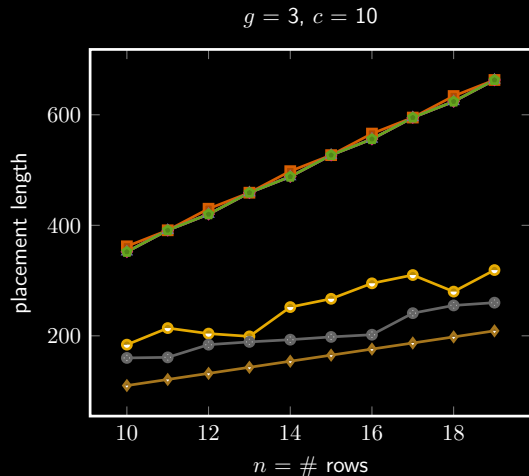
悪い実例 1/2



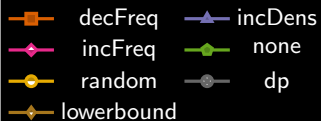
- lowerbound: 1の総数
- dp: 最適解

randomが良い理由

- 選択するタイルの種類が少なすぎる
- この実例の最良解は X, \dots, X, Y, \dots, Y の順でソート



悪い実例 2/2

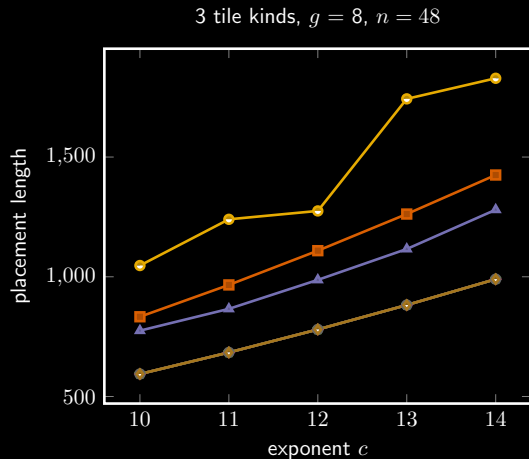


新しいタイル種類：

- $Z = (10^{g-2})^c 10^{2c} 1$
- 順序： X, Y, Z, X, Y, Z, \dots
- すべての穴を埋めるためにヘルパースタイルを追加
 $\Rightarrow dp = \text{lowerbound}$

random は最悪の性能！

したがって：厳密アルゴリズムの研究には意味がある



1種類のタイルのアイデア

動的計画法

- すべての可能な組み合わせを見つけるためにワイルドカードとのマッチを使用
- パラメータ :
 - 使用済みタイル数 i
 - 配置の ℓ -長さ接尾辞 S
- DP表 $D[i][S]$ を段階的に構築
- D を段階的に構築

DP表 $D[i][S]$

- i : 使用されたタイルの数
- S : ℓ -長さ接尾辞
- 値: 最短の配置長

部分語マッチング

定義 (部分語)

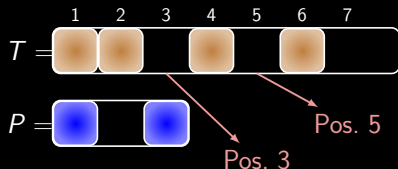
任意の文字にマッチするワイルドカード記号0を含む文字列

補題 (P. Clifford, R. Clifford'07)

- 与えられた：テキスト T とパターン P 、両方ともワイルドカードを含む可能性がある
- タスク：パターンがマッチするすべてのテキスト位置を特定
- $O(n \lg m)$ 時間で処理

- 各タイルに異なる色を与える (= 文字)

- T をワイルドカードで拡張



結合操作

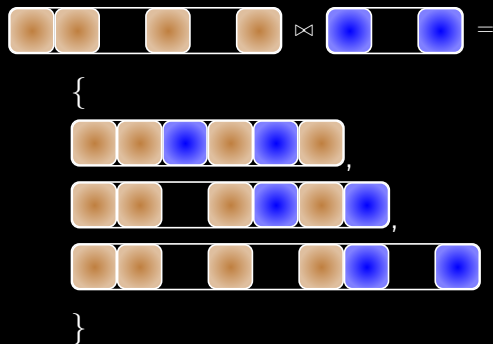
定義

2つのタイル A と B について、集合 $A \bowtie B$ はすべての A と B の有効な結合を含む

有効な結合には以下が必要：

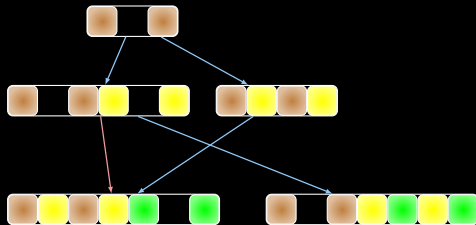
- 両方が非ワイルドカード記号を持つ位置がない
- 各位置で記号を結合

P. Clifford, R. Clifford'07 を用いて
 $O(\ell \log \ell)$ 時間で計算可能、かつ
 $|A|, |B| \in O(\ell)$



DP アルゴリズム：1種類の異なるタイル

- 設定：すべての n 個のタイルが同一、長さ $\ell = O(\lg n)$
- 例： n 個の 101 タイル



$i \backslash S$	000	001	...	101	110	111
0	0	—	—	—	—	—
1	—	—	—	3	—	—
2	—	—	—	6	—	4
3	—	—	—	7	—	7
⋮						

アルゴリズムの計算量

定理

長さ ℓ の1種類の異なるタイルを持つ MINLENGTH は $O(n^2 2^\ell \ell \log \ell)$ 時間で解ける

解析

- DP 表のサイズ : $O(n \cdot 2^\ell)$ マス (各 $i = [0..n]$ と $S \in \{0, 1\}^\ell$)
- 各マスについて : 結合集合 $A \bowtie B$ を $O(\ell \log \ell)$ 時間で計算
- 総時間 : $O(n \cdot 2^\ell \cdot \ell \log \ell)$

ℓ について固定パラメータ容易、 $\ell = O(\lg n)$ のとき多項式時間 :
 $O(n \cdot 2^{O(\lg n)} \cdot O(\lg n) \cdot O(\lg \lg n)) = O(n \cdot n^{O(1)} \cdot \text{poly}(\lg n))$

一般の場合：複数のタイル種類

- 入力: κ 種類の異なるタイル種類 T_1, \dots, T_κ
- c_i : i 番目のタイル種類の個数、 $\sum_{i=1}^{\kappa} c_i = n$
- 課題：タイルが異なる場合、順序が重要

素朴なアプローチ

- 順序を明示的に追跡
- $\frac{n!}{c_1!c_2!\dots c_\kappa!}$ 通りの順序
- 小さい κ でも指数的

解決策：Parikh ベクトル

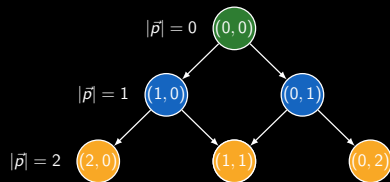
- 各採用されたタイル種類の個数をベクトル \vec{p} で追跡
- $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_\kappa)$ かつ $p_i \in [0..c_i]$
- 順序は追跡しない！

Parikh ベクトルでの DP

修正された DP 表 : $D[\vec{p}][S]$

- \vec{p} : Parikh ベクトル
(各採用されたタイル種類の個数)
- S : 長さ ℓ の接尾辞
- 値 : 最短配置長

2種類の Parikh ベクトルの成長



アルゴリズム

1. 開始 : $D[\vec{p}_0][0] = 0$ ここで $\vec{p}_0 = (0, 0, \dots, 0)$
2. 各 \vec{p} に対し、 $|\vec{p}|$ を 0 から $n-1$ まで、および D 中の接尾辞 S に対し
 - 各タイル種類 T_i について、 $p_i < c_i$ のとき:
 - 新しい Parikh ベクトル $\vec{p}' = \vec{p}$ を位置 i で増分して計算
 - 各結合 $Z \in S \bowtie T_i$ について $D[\vec{p}'][Z]$ を更新
3. $D[\vec{p}_n][\cdot]$ の最小値を返すここで $\vec{p}_n = (c_1, \dots, c_\kappa)$

計算量：一般の場合

定理

長さ ℓ の n 個のタイルを持つ MINLENGTH は $O(n^{2^\ell} \ell n^{2^\ell} n)$ 時間で解ける。

解析

- タイル種類数 $\kappa \leq 2^\ell$
- Parikh ベクトルの数 $\leq n^\kappa \leq n^{2^\ell}$
- 各 Parikh ベクトルについて： $O(2^\ell)$ 個の接尾辞
- 接尾辞ごと： $O(\ell \log \ell)$ 結合時間

多項式時間

1. $\ell = O(\lg \lg n)$ のとき： $O(n^{2^{O(\lg \lg n)}} \cdot \text{poly}(\lg n)) = O(n^{(\lg n)^{O(1)}} \cdot \text{poly}(\lg n))$
2. $\ell = O(\lg n)$ かつ $\kappa = O(\lg n)$ 個の異なるタイルのとき：
 $O(n^{O(\lg n)} \cdot \text{poly}(n)) = \text{poly}(n)$

実装の詳細

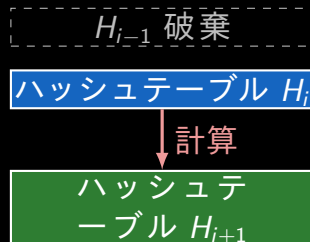
空間最適化

- DP行列全体を保存しない
- $|\vec{p}| = i$ の Parikh ベクトルにハッシュテーブル H_i を使用
- メモリには連続する2レベルのみを保持
- 空間: $O(2^\ell)$, $O(n \cdot 2^\ell)$ や $O(n^{2^\ell} \cdot 2^\ell)$ の代わりに

ハッシュテーブル構造

- キー: (\vec{p}, S) , 値: 最短配置長
- H_i から H_{i+1} を計算, H_{i-1} を破棄

ステップ i のメモリ:



メモリには2レベルのみ

まとめ

主要な結果

1. 問題は $\ell \in \Omega(\lg n)$ に対して \mathcal{NP} 困難
2. 以下の場合は \mathcal{P} に含まれる
 - $\ell = O(\lg n)$ の1種類のタイル
 - 以下の一般の場合
 - $\ell = O(\lg \lg n)$
 - $\ell = O(\lg n)$ で $O(\lg n)$ 個の異なるタイル

主要な技術

- ▼ 接尾辞に対する動的計画法
- ▼ 部分語マッチング
P. Clifford, R. Clifford'07
- ▼ 順序追跡の代わりに Parikh ベクトル
- ▼ 空間のためのハッシュテーブル最適化

結論

二重対数タイル幅により多項式時間解が可能！