Aufgabe 1 (Black-Scholes-Modell; 4 Punkte). Zeigen Sie, dass das Semimartingal

$$X_t = X_0 e^{\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und einer Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t = X_t d(\mu t + \sigma W_t)\,.$$

Wir wenden die Itô-Formel auf $f(Y_t) = e^{Y_t}$ mit $Y_t = \sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)$ an Da Y_t stetig ist, gilt $Y_- = Y$ und $\langle Y^c, Y^c\rangle_t = \langle Y\rangle_t = [Y,Y]_t$ nach Satz 129, sodass nach Definition der quadratischen Variation

$$\begin{aligned}
d\langle Y\rangle_t &= d(Y_t^2) - 2Y_t dY_t \\
&= 2\sigma^2 W_t dW_t + 2(\mu - \sigma^2/2)W_t dt + 2(\mu - \sigma^2/2)t dW_t + 2t(\mu - \sigma^2/2)dt \\
&\quad - 2(\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)(\sigma dW_t + (\mu - \sigma^2/2)dt)\,.
\end{aligned}$$

mit ausmultiplizieren der letzten Klammer folgt

$$\begin{aligned}
&= 2\sigma^2 W_t dW_t + 2(\mu - \sigma^2/2)W_t dt + 2(\mu - \sigma^2/2)t dW_t + 2t(\mu - \sigma^2/2)dt \\
&\quad - 2\sigma^2 W_t dW_t - 2\sigma W_t(\mu - \sigma^2/2)dt - 2t\sigma(\mu - \sigma^2/2)dW_t - 2\sigma W_t(\mu - \sigma^2/2)dt\,,
\end{aligned}$$

sowie durch Kürzen

$$= \sigma^2 dt\,,$$

Wobei der letzte Schritt genauer gezeigt werden sollte. Alternativ ist außerdem $\operatorname{Var}(Y_t) = \sigma^2 \operatorname{Var}(W_t) = \sigma^2 t$, denn $\sigma^2 t$ ist stetig, verschwindet für $t = 0$ und ist wachsend, also ist $\sigma^2 t \in \mathscr{V}$. *Hier müsste allerdings noch gezeigt werden, dass $Y_t^2 - \sigma^2 t$ ein Martingal ist.* Mit $f'(Y_t) = f''(Y_t) = e^{Y_t} = X_t$ erhalten wir

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s d\langle Y\rangle_s\,.$$

Durch Nachdifferenzieren, sowie $d\langle Y\rangle_s = \sigma^2 ds$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= X_0 + \int_0^t X_s \sigma dW_s + \int_0^t \Big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\Big) ds + \frac{1}{2}\int_0^t X_s \sigma^2 ds \\
&= X_0 + \int_0^t X_s \sigma dW_s + \int_0^t X_s \mu ds\,.
\end{aligned}$$

Nach Definition 1 von Blatt 9 mit $H_t = \mu X_t$ und $K_t = \sigma X_t$ besitzt X_t dann die angegebene Darstellung.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Wir betrachten das zweidimensionale Semimartingal $\tilde{S} = (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$, welches für $r > -1, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$ und einer (bezüglich dem Maß P) Standard Brown'schen Bewegung W folgende Darstellung besitzt

$$d\tilde{S}_t^0 = r\tilde{S}_t^0 dt$$

und

$$d\tilde{S}_t^1 = \mu\tilde{S}_t^1 dt + \sigma\tilde{S}_t^1 dW_t \, .$$

Geben Sie eine explizite Form von $\tilde{S}$ an.

Lösung: Für $\tilde{S}_t^0$ gilt nach Umstellen $\frac{d\tilde{S}_t^0}{dt} = r\tilde{S}_t^0$, was durch $\tilde{S}_t^0 = \tilde{S}_0^0 e^{rt}$ erfüllt wird. Die differentielle Darstellung von $\tilde{S}_t^1$ ist die gleiche wie die von X_t in Aufgabe 1. Damit hat $\tilde{S}_t^1$ die explizite Form $\tilde{S}_t^1 = \tilde{S}_0^1 e^{\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)}$.

Zeigen Sie, dass es zu fixem $T > 0$ ein zu P_T äquivalentes Maß Q_T gibt, sodass der Prozess S gegeben durch $S = \tilde{S}/\tilde{S}^0 = (1, \tilde{S}^1/\tilde{S}^0)$ ein lokales Martingal bis T ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 16 aus dem Skript (ohne Beweis).

Lösung: die 1 in der ersten Komponente ist schon mal ein lokales Martingal bezüglich jedem Maß, betrachte also $\tilde{S}^1/\tilde{S}^0 = \tilde{S}^1_0/\tilde{S}^0_0 e^{\sigma W_t + t[(\mu-r)-\sigma^2/2]} =: \tilde{S}^1_0/\tilde{S}^0_0 X_t$. Wählen wir $\theta = -(\mu - r)/\sigma$ in Aufgabe 16 (und $W = B$), dann kommt heraus, dass $M'_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t$ eine Brown'sche Bewegung unter Q ist. Somit ist $X_t = e^{\sigma M'_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$ mit M'_t einer Brown'schen Bewegung bezüglich Q. Wir wollen noch prüfen, dass X_t in dem Fall ein Martingal ist. Durch ergänzen der bedingten Erwartung $E[X_t \mid \mathscr{F}_s]$ mit $\sigma(M'_s - M'_s)$, erhalten wir, dass

$$E[X_t \mid \mathscr{F}_s] = E\Big[e^{\sigma(M'_t - M'_s) + \sigma M'_s - \sigma^2 t/2} \mid \mathscr{F}_s\big] .$$

Da exp stetig und $\sigma M'_s - \sigma^2 t/2$ messbar bezüglich $\mathscr{F}_s$ sind, folgt

$$= e^{\sigma M'_s - \sigma^2 t/2} E\big[e^{\sigma(M'_t - M'_s)} \mid \mathscr{F}_s\big] .$$

Da M' eine Brown'sche Bewegung ist, ist $M'_t - M'_s$ und damit auch $e^{M'_t - M_s}$ unabhängig von $\mathscr{F}_s$, sodass

$$= e^{\sigma M'_s - \sigma^2 t/2} E\big[e^{\sigma(M'_t - M'_s)}\big] .$$

Da $M'_t - M'_s$ unabhängige Zuwächse hat und nach Aufgabe 4 aus dem Skript $\mathscr{N}(0, t-s)$-verteilt ist, ist der zweite Faktor die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz $t - s$, sodass

$$= e^{\sigma M'_s - \sigma^2 t/2} e^{\sigma^2 (t-s)/2} = e^{\sigma M'_s - \sigma^2 (s)/2} = X_s .$$

Also ist der diskontierte Prozess X_t und damit auch S ein Q-Martingal.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei S ein lokal beschränkter càdlàg Prozess. Die Menge $K^{\text{simple}} \subset L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sei gegeben durch

$$K^{\text{simple}} := \{(H \cdot S)_\infty \mid H = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket} \text{ einfacher Prozess, } S^{\tau_n} \text{ beschränkt}\}.$$

Weiter existiere ein Maß Q mit den Eigenschaften

1. $Q \sim P$, d.h. Q ist äquivalent zu P, und
2. der Prozess S ist ein lokales Martingal unter Q.

Sei weiter $L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P) := \{f \in L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, P \mid f \geq 0)\}$. Zeigen Sie

$$K^{\text{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P) = \{0\}.$$

Formulieren Sie die ökonomische Interpretation dieser Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.

Entsprechend Proposition 5.1.7 in [DS06] ist dies eine direkte Konsequenz von Aufgabe 5. Sei in der Tat S ein lokal beschränktes Martingal, sodass $(H \cdot S)_\infty \in (H \cdot S)_\infty \in K^{\text{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Nach Aufgabe 5 gilt dann $E_Q[(H \cdot S)_\infty] = 0$. Da $(H \cdot S)_\infty \in L^\infty_+(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gilt außerdem $(H \cdot S)_\infty \geq 0$. Somit muss schon $(H \cdot S)_\infty = 0$ gelten. Das ist eine Richtung des Fundamental Theorem of Asset Pricing – Existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q, so ist der Markt frei von Arbitrage.

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Ein lokal beschränkter càdlàg Prozess S ist ein lokales Martingal genau dann, wenn

$$E[(H \cdot S)_\infty] = 0\,,$$

für alle einfachen Prozesse $H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_{i-1},\tau_i]\!]}$, sodass S^{τ_n} beschränkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass S^{T_n} ein beschränkter Prozess ist. Die Martingaleigenschaft von S^{T_n} folgt nun, falls $E[S^{T_n}_{\sigma_2} \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}] = S^{T_n}_{\sigma_1}$ für alle Stoppzeiten $\sigma_1 \le \sigma_2 \le T_n$ (Diese Aussage muss ebenfalls gezeigt werden).

Sei zunächst S ein lokales Martingal, H ein einfacher Prozess, sodass S^{τ_n} beschränkt ist. Dann ist für die lokalisierende Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von S der Prozess S^{T_k} ein Martingal. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass $T_k \ge \tau_n$, dann sind auch die S^{τ_i} Martingale. Nach Definition 2 von Blatt 3 gilt $(H \cdot S)_t = \sum_{i=1}^n h_i(S_t^{\tau_i} - S_t^{\tau_{i-1}})$ mit $h_i \in L^\infty(\mathscr{F}_{\tau_{i-1}})$. Somit gilt für $t = \infty$, dass $(H \cdot S)_\infty = \sum_{i=1}^n h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})$. Entsprechend dem Beweis von Theorem 216 im Skript zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie gilt wegen der Definition des stochastischen Integrals für einfache Prozesse

$$E[(H \cdot S)_\infty] = \sum_{i=1}^n E[h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})]\,.$$

Mit der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung erhalten wir

$$= \sum_{i=1}^n E\big[E[h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}) \mid \mathscr{F}_{\tau_{i-1}}]\big]\,.$$

Da die h_i jeweils $\mathscr{F}_{\tau_{i-1}}$-messbar sind, folgt

$$= \sum_{i=1}^n E\big[h_i E[S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} \mid \mathscr{F}_{\tau_{i-1}}]\big]\,.$$

Da S^{T_k} ein Martingal ist, erhalten wir schließlich

$$= \sum_{i=1}^n E\big[h_i(S_{\tau_{i-1}} - S_{\tau_{i-1}})\big] = 0\,.$$

Für die Rückrichtung gehen wir entsprechend Lemma 5.1.3 in [DS06] vor. Es gelte nun $E[(H \cdot S)_\infty] = 0$ für alle einfachen Prozesse H, sodass S^{τ_n} beschränkt ist. Wir wollen zeigen, dass S ein lokales Martingal ist, also eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, sodass S^{T_n} für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist. Da S lokal beschränkt ist gibt es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass S^{T_n} beschränkt ist. Gilt nun $E[S^{T_n}_{\sigma_2} \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}] = S^{T_n}_{\sigma_1}$ für alle $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$, so gilt auch $E[S^{T_n}_t \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}] = S^{T_n}_{\sigma_1}$ für alle $t > T_n$, denn hier gilt $S^{T_n}_t = S_{T_n}$. Somit ist S^{T_n} dann ein Martingal. *Es sollte noch gezeigt werden, dass der Prozess S^{T_n} gleichgradig integrierbar ist.* Um zu zeigen, dass S^{T_n} ein Martingal ist, reicht es also zu zeigen, dass für alle $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$ gilt $E[S_{\sigma_2} \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}$. Hierzu gehen wir wie in der Rückrichtung des Beweises von Theorem 159, dem Fundamental Theorem of Asset Pricing, vor. Wählen wir für $F \in \mathscr{F}_{\sigma_1}$ $H_t = \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{(\sigma_1,\sigma_2]}(t)$, sodass $(H \cdot S)_\infty = \mathbb{1}_F(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})$, dann erhalten wir nach Voraussetzung $0 = E[(H \cdot S)_\infty] = E[\mathbb{1}_F(S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})] = E[\mathbb{1}_F S_{\sigma_2}] - E[\mathbb{1}_F S_{\sigma_1}]$, was uns die definierende Eigenschaft der Bedingten Erwartung $E[S_{\sigma_2} \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}]$ nachrechnet. Somit ist $E[S_{\sigma_2} \mid \mathscr{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}$, was wir zeigen wollten.

References

[DS06] Delbaen, Freddy ; Schachermayer, Walter: *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Berlin Heidelberg, 2006