Lieber Moritz, es wäre super, wenn du deine Musterlösung für das Blatt direkt hochladen könntest. Dann könnten wir sie uns vor der Übung anschauen und hätten es einfacher zu folgen ☺

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und T und S Stoppzeiten. Zeigen Sie

i) $\mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S = \mathscr{F}_{T \wedge S}$.

Sei zunächst $A \in \mathscr{F}_{T\wedge S}$. Da $T \wedge S \le S, T$ gilt nach Lemma 12 $A \in \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$. Sei nun $A \in \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$. Nach Definition von $\mathscr{F}_T$ und $\mathscr{F}_S$ gilt $A \cap \{S \le t\} \in \mathscr{F}_t$ und $A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t$. Da $\mathscr{F}_t$ eine σ-Algebra ist, gilt $A \cap \big(\{S \le t\} \cup \{S \le t\}\big) \in \mathscr{F}_t$. Die Behauptung folgt, denn $\{S \le t\} \cup \{S \le t\} = \big\{S \le t \text{ oder } T \le t\big\} = \{S \wedge T \le t\}$.

ii) Für $Y \in L^1$ gilt $E[Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}|\mathscr{F}_S] = E[Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}|\mathscr{F}_T]$

Nach Definition des bedingten Erwartungswertes müssen wir zwei Sachen zeigen. Erstens, dass $E[Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}|\mathscr{F}_T]$ $\mathscr{F}_S$-messbar ist und zweitens, die definierende Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes, die besagt, dass für alle $F_S \in \mathscr{F}_S$ gilt $E[\mathbb{1}_{F_S}\big[Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}|\mathscr{F}_T]\big] = E[\mathbb{1}_{F_S}Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}]$. *Die Messbarkeit ist noch zu zeigen.* Um die definierende Eigenschaft zu zeigen betrachte ein $F_S \in \mathscr{F}_S$. Nach Lemma 12.vi gilt $\mathscr{F}_S \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_T$. Da jedes Y einen bedingten Erwartungswertes bezüglich $\mathscr{F}_T$ hat erhalten wir $E[\mathbb{1}_{F_S\cap\{S=T\}}Y] = E\big[\mathbb{1}_{F_S\cap\{S=T\}}E[Y|\mathscr{F}_T]\big] = E\big[\mathbb{1}_{F_S}E[Y\mathbb{1}_{\{S=T\}}|\mathscr{F}_T]\big]$, denn $\{S = T\} \in \mathscr{F}_T$ nach Lemma 15.

Definition 1. Ein *einfacher Prozess* H (in Finanzmathe auch: *einfache Handelsstrategie*) ist ein $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter stochastischer Prozess der Form

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{1}_{\rrbracket\tau_{i-1},\tau_i\rrbracket}$$

für endliche Stoppzeiten $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n < \infty$ und $h_i \in L^\infty(\mathscr{F}_{\tau_{i-1}})$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2. Sei S ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und H ein einfacher Prozess nach Definition 1. Das *stochastische Integral für einfache Prozesse $H \cdot S$ ist definiert durch*

$$(H \cdot S)_t := \int_0^t H_s dS_s := \sum_{i=1}^n \langle h_i, S_t^{\tau_i} - S_t^{\tau_{i-1}} \rangle_{\mathbb{R}^d} \,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

iii) Zeigen Sie: Für ein Martingal S und einen einfachen Prozess H ist das stochastische Integral $H \cdot S$ auch ein Martingal.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage iii) für $d = 1$ und $H \cdot S = h(S^{T_2} - S^{T_1})$ für eine $\mathscr{F}_{T_1}$-messbare Zufallsvariable $h \in L^\infty$ und Stoppzeiten $T_2 \geq T_1$. Wieso genügt das? Um die vereinfachte Aussage zu zeigen, ist die Fallunterscheidung $1 = \mathbb{1}_{\{T_1 > s\}} + \mathbb{1}_{\{T_1 \leq s < T_2\}} + \mathbb{1}_{\{T_2 \leq s\}}$ sehr hilfreich.