Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t} dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{t \nearrow 1} E[B_t] = 0$.

Lösung. Wir definieren $Y_t := (1-t)$. Dann gilt mit der Definition des stochastischen Integrals, mit $W_0 = 0$ und mit der partiellen Integration

$$B_t = Y_t(1/Y \cdot W)_t = \big(Y \cdot (1/Y \cdot W)\big)_t + \big((1/Y \cdot W) \cdot Y\big)_t + \big[Y, (1/Y \cdot W)\big]_t$$

denn Y und $1/Y \cdot W$ sind stetig. Da Y stetig ist, gilt mit Theorem 81.iv, dass $\big[Y, (1/Y \cdot W)\big] = 0$. Mit der Kettenregel folgt dann *wobei ich nicht ganz weiß, wie die Kettenregel funktioniert,*

$$\big(Y \cdot (1/Y \cdot W)\big)_t = W_t$$

und da $dY = Y' dt$ folgt

$$\big((1/Y \cdot W) \cdot Y\big)_t = -\int_0^t 1/Y \cdot W_s ds\,.$$

Insgesamt erhält man die Darstellung

$$dB_t = -\frac{B_t}{1 = t} dt + dW_t\,.$$

Für den zweiten Teil gilt, weil Y deterministisch ist

$$E\big[Y_t^2(1/Y \cdot W)_t^2\big] = Y_t^2 E\big[(1/Y \cdot W)_t^2\big]\,.$$

Mit der Itô-Isometrie können wir schreiben

$$= Y_t^2 \left[\int_0^t (1/Y_s)^2 d\langle W\rangle_s\right]$$

Nun ist $\langle W\rangle_t = t$ und $(1/Y_t)' = (1/Y_t)^2$, sodass

$$= (1-t)^2 E\left[\left.\frac{1}{1-s}\right|_{s=0}^{t}\right] = t(1-t)\,,$$

wodurch

$$\lim_{t\nearrow 1} E[B_t] = \lim_{t\nearrow 1} t(1-t) = 0\,.$$