

**Aufgabe 1** (4 Punkte).

- i) Sei  $W$  eine Brownsche Bewegung. Dann ist  $W$  ein Martingal.

$W$  ist adaptiert und stetig, also insbesondere càdlàg. Weiterhin gilt  $0 = E[|X_t|] < \infty$ . Sei schließlich  $0 \leq s \leq t$ . Alle  $F \in \mathcal{F}_s$  sind unabhängig von den Zuwächsen  $X_t - X_s$ . Somit gilt  $E[\mathbb{1}_F(X_t - X_s)] = P(F)E[X_t - X_s] = 0$ , denn  $E[X_t] = E[X_s] = 0$ . Somit ist  $W$  ein Martingal.

- ii) Sei  $N$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\Lambda(t) = E[N_t]$ . Dann ist der kompensierte Poisson-Prozess  $N_t - \Lambda(t)_t$  ein Martingal.

Ein Poisson-Prozess ist càdlàg. Da für den kompensierten Poisson-Prozess wie für eine Brownsche Bewegung für alle  $t \geq 0$  gilt  $E[N_t - \Lambda(t)] = E[N_t] - E[N_t] = 0$ , ist die Argumentation sonst analog zu der von Teilaufgabe i.

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale  $M$ , dh.  $E[M_t^2] < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , und  $s \leq t$  folgende Aussagen gelten:

$$\text{i) } E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

Durch Ausquadrieren erhalten wir

$$E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

Da  $M$  ein Martingal ist, ist es adaptiert. Damit ist  $M_s$   $\mathcal{F}_s$  messbar und wir können es aus der bedingten Erwartung rausziehen. Zudem gilt dafür  $E[M_s \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ , sodass

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s E[M_t \mid \mathcal{F}_s] + M_s^2.$$

Mit der Martingaleigenschaft folgt

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s^2 + M_s^2.$$

Zusammenfassen der letzten beiden Terme liefert

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - M_s^2.$$

wieder aufgrund der  $\mathcal{F}_s$ -Messbarkeit von  $M_s$  erhalten wir

$$= E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

$$\text{ii) } E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2] - E[M_s^2].$$

Mit der definierenden Eigenschaft (ii) vom bedingten Erwartungswert ausgewertet auf  $\Omega$  können wir schreiben

$$E[(M_t - M_s)^2] = E[E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s]]$$

Einsetzen von Teilaufgabe (i) liefert

$$= E[E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]]$$

und wieder die Eigenschaft (ii) auf  $\Omega$  schließlich

$$= E[M_t^2 - M_s^2].$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Zeigen Sie folgende Aussagen:

- i) Jedes nicht-negative lokale Martingal ist ein Supermartingal.

Sei  $X$  ein nicht-negatives lokales Martingal,  $(T_n)$  die dazugehörige lokalisierende Folge. Da  $(T_n)$  fast sicher gegen unendlich konvergiert, konvergiert für jedes  $t \geq 0$  die Folge  $(X_t^{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$  fast sicher gegen  $X_t$ . Somit gilt

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_t^{T_n} | \mathcal{F}_s].$$

Es gilt  $X_t \geq 0$  für alle  $t \geq 0$ . Somit können wir das Lemma von Fatou für den bedingten Erwartungswert anwenden und erhalten

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_t^{T_n} | \mathcal{F}_s].$$

Da  $X$  ein lokales Martingal ist, ist  $(X_t^{T_n})_{t \geq 0}$  ein Martingal. Somit kriegen wir

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} X_s^{T_n} = X_s,$$

wieder weil  $(T_n)$  fast sicher gegen unendlich konvergiert. Durch eine analoge Argumentation für  $E[|X_t|]$  erhalten wir zudem die Integrabilität von  $X_t$ , sodass  $X$  ein Supermartingal ist.

- ii) Sei  $X$  ein Martingal (Submartingal) und  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex (konvex und nicht fallend), so dass  $E[|\varphi(X_t)|] < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Dann ist  $\varphi(X)$  ein Submartingal.

Sei  $X$  ein Martingal und  $\varphi$  konvex. Dann können wir die Jensenschen Ungleichung anwenden und erhalten

$$E[\varphi(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq \varphi(E[X_t \mid \mathcal{F}_s]).$$

Da  $X$  ein Martingal ist, folgt

$$= \varphi(X_s).$$

Sei  $X$  nun ein Submartingal, so folgt  $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ . Ist  $\varphi$  nicht-fallend, so erhalten wir  $\varphi(E[X_t \mid \mathcal{F}_s]) \geq \varphi(X_s)$ . Die Behauptung folgt wie im Fall, wo  $X$  ein Martingal ist, mit der Jensenschen Ungleichung.