Verschiedene Konvergenzarten Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$, wobei P das Lebesgue-Maß λ eingeschränkt auf $[0,1]$ sei. Wir betrachten die Folge von Zufallsvariablen

$$X_1 \equiv 0,\ X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}\,.$$

Untersuchen Sie diese auf 1. stochastische Konvergenz, 2. P-fast-sichere Konvergenz, 3. L^2-Konvergenz und 4. gleichgradige Integrierbarkeit.

1, 4. Wir prüfen L^1-Konvergenz. Es gilt $E[|X_n|] = \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$. *nochmal nachrechnen.* Benutze Konvergenzsatz von Vitali – Stochastisch konvergent gegen 0 und gleichgradig integrierbar. 2. Wähle $x \in (0,1)$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $x \geq \frac{2}{n}$ für alle $n \in N$. Also $X_n(x) = 0$ für alle $n > N$. Weiter gilt $X_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also Konvergenz fast sicher gegen 0. *warum?* 3. L^2-Konvergenz folgt stochastische Konvergenz, also Grenzwert 0 wenn konvergent. $E[|X_n|^2] = \frac{\sqrt{n}^2}{n} = 1$. *nochmal nachrechnen.* Also nicht konvergent.