Definition 1 (ucp-Metrik). Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse von $\Omega \times \mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die Metrik $d_{ucp} \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to [0, \infty)$ durch

$$(X, Y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} E[(X - Y)_n^* \wedge 1] \,, \tag{1}$$

wobei $X_n^* := \sup_{s \leq n} |X_s|$. Ebenso definiert d_{ucp} eine Metrik auf dem Raum aller adaptierten càglàd Prozesse.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Für Zufallsvariablen $X, X^1, X^2, \ldots$ gilt stochastische Konvergenz $X^m \to X$ genau dann, wenn $E[|X^m - X| \wedge 1] \to 0$.

Das ist Lemma 17 aus dem Skript zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gelte zunächst $X^m \xrightarrow{P} X$ und sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} E[|X^m - X| \wedge 1] &= \lim_{n \to \infty} \big(E[|X^m - X| \wedge 1] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} \\
&\qquad + E[|X^m - X|] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| \leq \varepsilon\}} \big) \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \big(\mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} + \varepsilon \big) = \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

denn X^m konvergiert stochastisch gegen X. Gilt umgekehrt $0 < \varepsilon \leq 1$ und $E[|X^m - X| \wedge 1] \to 0$, so gilt $P(|X^m - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X^m - X| \wedge 1]}{\varepsilon} \to 0$ nach Anwendung der Markov-Ungleichung.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ beliebig. Dann liegt jeder lokal beschränkte, previsible Prozess in $L^2_{\text{loc}}(X)$.

Zunächst einmal gilt für $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$, dass $\langle X, X \rangle \in \mathscr{V}$. Es gilt sogar, dass $\langle X, X \rangle \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, *wobei das noch gezeigt werden sollte.* Somit reicht es zu zeigen, dass für $X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$ und H lokal beschränkt und previsibel gilt, dass $H \cdot X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$. Seien H und X entsprechend gewählt, dann existiert eine Folge von Stoppzeiten T_n mit $T_n \uparrow \infty$, sodass $X^{T_n} \in \mathscr{V}$ und $E[(X^{T_n})_\infty] < \infty$. Nach Theorem 93 gilt auch $H \cdot X^{T_n} \in \mathscr{V}$. *Hier müsste noch gefolgert werden, dass es auch eine Folge $S_n \uparrow \infty$ von Stoppzeiten gibt, sodass $(H \cdot$*

$X)^{S_n} \in \mathscr{V}$. Da $H \mapsto H \cdot X$ linear ist, ist außerdem $E[(H \cdot X)^{S_n}] < \infty$. Somit ist $H \cdot X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.