B5A1 Zeigen Sie, dass eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] = 0\,. \tag{1}$$

Sei zunächst (X_n) gleichgradig integrierbar. Dann gilt nach Definition von gleichgradiger Integrierbarkeit, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}]\,.$$

Insbesondere heißt dass, dass für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m|>k\}}]\,.$$

Damit gilt auch für das Infimum über diese $n \in \mathbb{N}$, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m|>k\}}]\,,$$

was nach der Definition des $\limsup$ Gleichung (1) liefert. *Hier sollte man sich überlegen, ob man den Limes über k ebenfalls, wie in der Argumentation unten, mittels eines ε umschreiben sollte.*

Genüge nun (X_n) Gleichung (1). Wir wollen zeigen, dass (X_n) gleichgradig integrierbar ist. Sei hierfür ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da Gleichung (1) gilt, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k > k_0$

$$\limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,.$$

Damit ist die Teilfolge $\left(\sup_{m\geq n} E[|X_m]\mathbb{1}_{\{|X_m|>k\}}\right)_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *beschränkt. Hier könnte man eventuell noch direkt ein Argument bringen, warum schon Beschränktheit durch* ε *folgt.* Also gibt es auch ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,.$$

Nach Lemma 24 gilt, dass alle X_n integrierbar sind. Also gibt es für alle $X_1, \dots, X_{n_0-1}$ jeweils Schranken $k_1, \dots, k_{n_0-1} \in \mathbb{N}$, sodass für die $n = 1, \dots, n_0 - 1$ gilt

$$E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k_n\}}] < \varepsilon\,.$$

Setze nun $K = k_0 \vee \cdots \vee k_{n_0-1}$, dann gilt für alle $k \geq K$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,,$$

also insbesondere, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,.$$

Hier fehlt noch die Folgerung von Korollar 27. Es sollte also gezeigt werden, dass falls $\|X_n\|_p \to \|X\|_p$*, dann* $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>k}] = 0$*.* Es gelte $\|X_n\|_p \to \|X\|_p$. Da die Folge $E[|X_n|^p]$ dann konvergent ist, ist sie beschränkt. Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Angenommen, es gelte, dass $\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>k}] > 0$. *Eventuell kann man folgern, dass* $E[|X_n|^p]$ *nicht beschränkt ist.*

B5A2 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Es sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n\,,$$
$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big)\,.$$

Wir möchten zunächst zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$. Sei hierfür $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$. Wie wir in der Übung besprochen haben, heißt das, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $\omega \in A_n$. Um zu zeigen, dass $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, sei ein $m_0 \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Da für $n \geq n_0$ gilt, dass $\omega \in A_n$, ist $\omega \in A_{m_0 \vee n_0}$. Damit gilt auch für alle $m_0 \in \mathbb{N}$, dass ein $m \geq m_0$ existiert, sodass $\omega \in A_m$, nämlich $m = m_0 \vee n_0$. Somit ist $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Nun überlegen wir uns, warum die Ungleichungen gelten. $\mathbb{1}_{A_n}$ hat $\mathbb{1}_\Omega$ als integrierbare Majorante. Damit gelten die erste und dritte Ungleichung gelten jeweils nach dem Lemma von Fatou, beziehungsweise die dritte zusätzlich nach majorisierter Konvergenz. *Hier fehlt noch eine Rechnung für die mittlere Ungleichung.*

B5A3 Sei $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel–Cantelli, dass

$$P(\{\text{Für unendlich viele } n \text{ gilt } X_n > n\}) = 0\,.$$

Es gilt genau dann $\omega \in \{\text{Für unendlich viele } n \text{ gilt } X_n > n\}$, wenn $\forall n \geq 0\ \exists m \geq n\ \omega \in \{X_m > n\}$, also genau dann, wenn $\omega \in \limsup\{X_n > n\}$. Das Lemma von Borel–Cantelli besagt, dass $P(\limsup A_n) = 0$, falls $\sum_{n\geq 0} P(A_n) < \infty$. Die Idee ist also, zu zeigen, dass $\sum_{n\geq 0} P(\{X_n > n\}) < \infty$, dann folgt die Behauptung mit dem Lemma von Borel–Cantelli. Die Poissonverteilung ist gegeben durch $P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n > n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

So, ähnlich wie wir es im Beweis zum starken Gesetz der Großen Zahlen in der Ausführung als Theorem 49 gemacht haben, können wir die Indices umschreiben. Die Terme haben folgende Indices

	n					
k	0	1	2	3	4	$\cdots$
	1		2	3	4	$\cdots$
	2			3	4	$\cdots$
	3				4	$\cdots$
	$\vdots$					$\cdots$

Es kommt also der Term mit Index $n+1$ immer $n+1$ mal vor. Wir können für die obige Summe dann schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n > n) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{(n+1)}}{(n+1)!}\,.$$

Kürzen mit $n+1$ und herausziehen von einem Faktor $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$ ergibt

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\,.$$

Mit der Definition der Exponentialfunktion erhalten wir

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda < \infty\,.$$

B5A4 Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für die folgenden Identitäten

1. $P\Big(\Big\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\Big\}\Big) = P\Big(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}\Big)$
2. $P\Big(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}\Big) = \limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\})$
3. $\limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = P\Big(\Big\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\Big\}\Big)$

Als Beispiel können wir $X_n = 0$ mit $A = \{0\}$ wählen. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $X_n = 0$, ist auch $\limsup X_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} X_n = 0$. Somit ist $\{\omega \in \Omega \mid \limsup X_n \in A\} = \Omega$ und $P(\limsup X_n \in A) = 1$. Genauso gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, unabhängig von der Wahl von $\omega \in \Omega$, dass $X_n \in A$, sodass $\omega \in \limsup\{X_n \in A\}$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Hiermit ist $P(\limsup\{X_n \in A\}) = P(\Omega) = 1$. Schließlich gilt unabhängig von der Wahl von $n \in \mathbb{N}$, dass $P(\{\omega \in \Omega \mid X_n \in A\}) = 1$, sodass $\limsup P(X_n \in A) = 1$.

Als Gegenbeispiel zu Punkt 3 können wir Aufgabe 4 von Blatt 4 wählen, wo X_n stochastisch, aber nicht fast sicher konvergierte. Sei $A = B_\varepsilon(0)$, dann ist $\limsup_{n\to\infty} P(X_n \in A) = 1$, ich finde jedoch immer ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $X_n > \varepsilon$, wodurch $\limsup X_n \notin A$ und somit $P(\limsup X_n \in A) < 1$.

Es fehlen noch Gegenbeispiele zu Punkt 1. und Punkt 2.

B5A5 Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra liegen.

1. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
2. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,
3. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
4. $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,
5. $\{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$,
6. $\{\omega \in \Omega \mid \limsup S_n(\omega) > \liminf S_n(\omega)\}$.

Zu Punkt 1, wenn für alle $\omega \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n(\omega) \neq 0$, dann ist $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\} = \emptyset$ und somit ein terminales Ereignis. Sei $X_0 = \mathrm{id}$, sowie $X_n = 1$ für $n \geq 1$. Dann ist $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\} = \{0\}$ für $n = 0$ und $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\} = \emptyset$ sonst. Außerdem ist $\sigma(X_0) = \mathrm{id}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\sigma(X_n) = \{\emptyset, \Omega\}$ sonst. Dann ist $\bigcup_{m\geq 1} \sigma(X_m) = \{\emptyset, \Omega\}$ und somit $\sigma\big(\bigcap_{m\geq 1} \sigma(X_m)\big) = \{\emptyset, \Omega\}$, wodurch auch $\bigcap_{n\geq 0} \sigma\big(\bigcup_{m\geq n} \sigma(X_m)\big) = \{\emptyset, \Omega\}$. Somit ist $\{\omega \in \Omega \mid X_0(\omega) = 0\}$ kein terminales Ereignis.

Das Beispiel von oben ist auch ein Gegenbeispiel für Punkt 2, denn auch hier ist $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$, weil sonst ja nie irgendein $\omega \in \Omega$ auf 0 abbildet.

Damit ist es auch ein Gegenbeispiel zu Punkt 3 und Punkt 4, denn $\{0\}$ ist eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen. Außerdem ist ebenfalls $\{S_n(\omega) = 0\} = \{0\}$.

$A_5 = \{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$ aus Punkt 5 ist in jedem $\sigma(X_n)$ enthalten sofern es nicht leer ist, denn ich kann für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Teilfolge mit $(X_{n_k}(\omega))_k$ mit $n_0 > n$ betrachten, sodass $A_5 \in \sigma(X_n)$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt ist, gilt hierdurch auch $A_5 \in \bigcap_{n\geq 1} \sigma\big(\bigcup_{m\geq n} \sigma(X_m)\big)$, also ein terminales Ereignis.

Entsprechend ist $A_6 = \{\omega \in \Omega \mid \limsup S_n(\omega) > \liminf S_n(\omega)\}$ ein terminales Ereignis. Wähle ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$, dann ist $\limsup S_n(\omega) > \liminf S_n(\omega)$ genau dann, wenn $\limsup_n \sum_{k=m}^n X_k > \liminf_n \sum_{k=m}^n X_k$ und $\{\omega \in \Omega \mid \limsup_n \sum_{k=m}^n X_k > \liminf_n \sum_{k=m}^n X_k\} \subset \sigma(X_n)$. Wieder gilt $A_6 \in \bigcap_{n\geq 1} \sigma\big(\bigcup_{m\geq n} \sigma(X_m)\big)$, da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war.