

Im Folgenden sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ -Algebra. Eine Zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{F} , symbolisch $E[X|\mathcal{F}] := Y$, falls gilt:

- i) Y ist \mathcal{F} -messbar.
- ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $E[X\mathbb{1}_A] = E[Y\mathbb{1}_A]$

B7A1 Zeigen Sie, $E[X, \mathcal{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.
- ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf (Ω, \mathcal{F}) durch $Q^+[A] := E[\mathbb{1}_A X^+]$ und analog Q^- . Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon–Nikodym.

B7A2 Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bezüglich $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

- (a) $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3 \right\}$
- (b) $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N} \right\}$
- (c) $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 3 \right\}$

Generell ist eine Menge A genau dann messbar bezüglich $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wenn $A \in \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Hierbei gilt $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(A_J \times \Omega_{\mathbb{N} \setminus J} \mid J = \{j_1, \dots, j_n\}, A_{j_k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

B7A3 Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ für $i = 1, 2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

- (a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0, 1]$ der ω_i -Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.

Hinweis: Der ω_1 -Schnitt der Menge A ist definiert als $A_{\omega_1} = (\{\omega_1\} \times \Omega_2) \cap A = \{(\omega_1, \omega_j) \in A\}$ und der ω_2 -Schnitt analog.

Sei C die Cantor-Menge, die wir aus Analysis 1 kennen. Für diese gilt, dass sowohl C als auch $[0, 1] \setminus C$ überabzählbar sind. Damit ist C nicht messbar, denn wir können C nicht als abzählbare Vereinigung von Mengen aus \mathcal{A}_i schreiben. Sei nun $A = \{(x, x) \mid x \in C\}$. Dann gilt entweder $A_{\omega_i} = \{\omega_i\}$, falls $\omega_i \in C$, oder aber $A_{\omega_i} = \emptyset$, falls $\omega_i \notin C$. Das sind alles messbare Mengen. Andererseits ist aber $\pi_i^{-1}(A) = C \times \Omega$. Damit A messbar wäre, müsste nach Definition der Produkt- σ -Algebra $A \in \sigma(\pi_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}_i)$ gelten. Da aber $\pi_i(A) = C$ geht das aber nicht, da C nicht messbar ist.

- (b) Sie $D = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ die Diagonale in Ω , λ das Lebesguemaß auf Ω_1 und μ das Zählmaß auf Ω_2 , das heißt

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$ und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x, y) d\lambda(x) d\mu(y) \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x, y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x, y) d\lambda(x) d\mu(y) &= \int_{\Omega_2} \int_{\{y\}} d\lambda(x) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_2} \lambda(\{y\}) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_2} 0 d\mu(y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x, y) d\mu(y) d\lambda(x) &= \int_{\Omega_1} \int_{\{x\}} d\mu(y) d\lambda(x) \\ &= \int_{\Omega_1} \mu(\{x\}) d\lambda(x) \\ &= \int_{\Omega_1} 1 d\lambda(x) \\ &= \lambda(\Omega_1) = 1. \end{aligned}$$

- (c) Ist das Ergebnis in Teil (b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Nein, der kann hier gar nicht angewendet werden, weil μ auf $[0, 1]$ nicht σ -endlich ist.

B7A4 Beweisen Sie mit dem Satz von Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen und für $x \in [a, b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)dy \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)dy.$$

Dann gilt

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)dx.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf die Funktion $h: (x, y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x, y)$ an, mit $E = \{(x, y) \in [a, b]^2 : y < x\}$. Der Satz von Fubini lautet,

$$\int h d(\lambda \otimes \kappa_1) = \int \left(\int h(x, y) \kappa_1(x, dy) \right) \lambda(dx)$$

Hier ist noch unklar, was das Produkt der Übergangskern ist. Satz 14.19 in [Kle20]

Literatur

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)