

**Aufgabe 3** (Binomiales Modell; 6 Punkte). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass  $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$  und  $P[\omega_u] = p = 1 - P[\omega_d]$ . Die gehandelten Vermögenswerte werden durch den zweidimensionalen Prozess  $S = (S^0, S^1)$  gegeben, mit

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1+r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \quad (1)$$

- i) Zeige, dass es ein Maß  $Q \sim P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  gibt, so dass der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Ist dieses Marktmodell arbitragefrei?

Wir folgen der Argumentation von Beispiel 3.3.1 in [DS06]. Der diskontierte Prozess  $X_t = (1, S_t^1/S_t^0)$  ergibt sich zu

$$X_0^0 \equiv 1, \quad X_1^0 \equiv 1, \quad X_0^1 \equiv s_0, \quad X_1^1(\omega_u) = s_0(1+\tilde{u}), \quad X_1^1 = s_0(1+\tilde{d}),$$

mit  $1+\tilde{u} = \frac{1+u}{1+r}$  und  $1+\tilde{d} = \frac{1+d}{1+r}$ . Damit  $X$  ein Martingal unter  $Q$  ist, muss gelten  $E_Q[X_1^i] = X_0^i$ , also  $Q[\omega_u] + Q[\omega_d] = 1$  und  $s_0(1+\tilde{u})Q[\omega_u] + s_0(1+\tilde{d})Q[\omega_d] = s_0$ . Schreiben wir  $Q[\omega_u] = q$  gilt nach der ersten Gleichung  $Q[\omega_d] = 1 - q$ . Wenn wir das in die zweite Gleichung einsetzen ergibt sich  $(1+\tilde{u})q + (1+\tilde{d})(1-q) = 1$ , sodass  $Q[\omega_u] = q = \frac{\tilde{d}}{\tilde{d}-\tilde{u}} = \frac{r-d}{u-d}$  und  $Q[\omega_d] = 1 - q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}} = \frac{u-r}{u-d}$ . Da  $Q(A) = 0$  nur für  $A = \emptyset$  gilt ist  $Q \sim P$ , sodass  $Q$  ein äquivalentes Martingalmaß ist. Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist dieses Marktmodell arbitragefrei.

ii) Angenommen,  $p = 0,7$ ,  $s_0 = 100$ ,  $r = 0$ ,  $1 + d = 0,8$  und  $1 + u = 1,2$ .

Was ist das entsprechende risikoneutrale Maß? Zeige, dass  $E_P[(S_1 - 100)^+]$  kein arbitragefreier Preis für  $H = (S_1 - 100)^+$  (Kaufoption mit Ausübungspreis  $K = 100$ ) ist.

Das risikoneutrale Maß ist das Martingalmaß  $Q$  aus Teilaufgabe (i). Durch Einsetzen der Werte erhalten wir  $d = 0,8 - 1 = -0,2$  und  $u = 1,2 - 1 = 0,2$ , sodass  $Q[\omega_u] = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-(-0,2)}{0,4} = \frac{1}{2} = 1 - Q[\omega_d] = Q[\omega_d]$ . Das Maß  $P$  gegeben durch  $P[\omega_u] = 0,7$  und  $P[\omega_d] = 0,3$  ist kein äquivalentes Martingalmaß für  $H$ . Durch Einsetzen erhalten wir nämlich  $S_1(\omega_u) = s_0(1 + u) = 120$  und  $S_1(\omega_d) = 80$ , sodass  $H(\omega_u) = 20$  und  $H(\omega_d) = 0$  und damit  $E_P[H] = 0,7 \cdot 20 + 0,3 \cdot 0 = 14 \neq S_0^1 = 100$ . Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist der Preis damit auch nicht arbitragefrei.

- iii) Finden Sie einen Wert  $\xi_1$ , so dass  $x + \xi_1(S_1 - S_0) = H$ . Was ist der anfängliche Preis  $x$ ? Berechnen Sie  $E_Q[H]$ . Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Um  $\xi_1$  und  $x$  herauszufinden, lösen wir das lineare Gleichungssystem gegeben durch  $x + \xi_1(S_1(\omega_u) - s_0) = H(\omega_u)$  und  $x + \xi_1(S_1(\omega_d) - s_0) = H(\omega_d)$ . Durch Einsetzen erhalten wir  $x + 20\xi_1 = 20$  und  $x - 20\xi_1 = 0$ . Durch addieren der beiden Gleichungen erhalten wir  $2x = 20$ , sodass  $x = 10$  und durch abziehen der zweiten Gleichung von der ersten  $40\xi_1 = 20$ , sodass  $\xi_1 = \frac{1}{2}$ . Schließlich berechnen wir durch Einsetzen  $E_Q[H] = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0 = 10$ . Damit ist  $Q$  ein risikoneutrales Maß für die Kaufoption mit Ausübungspreis  $K = 100$ , falls der anfängliche Preis  $x = 10$  ist.

## References

- [DS06] DELBAEN, Freddy ; SCHACHERMAYER, Walter: *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Berlin Heidelberg, 2006