Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ für alle $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Zunächst einmal ist $E[X]$ irgendeine konstante Zahl. Das Urbild davon ist also ganz Ω. Somit ist $E[X]$ $\mathscr{A}$-messbar. Weiterhin gilt $\int_\Omega E[X] \mathrm{d}P = E[X] \int_\Omega \mathrm{d}P = E[X] \cdot 1 = \int_\Omega X \mathrm{d}P$, sodass $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

ii) Ist $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann ist $(E[X|\mathcal{F}_j])_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

Für ein $k \in \mathbb{R}$ und ein $j \in J$ sei $Y = E[X|\mathcal{F}_j]$ und $Z = E\big[|X| \bigm| \mathcal{F}_j\big]$. Dann gilt wegen der Monotonie der bedingten Erwartung

$$E[|Y| \mathbb{1}_{|Y|>k}] \leq E[Z \mathbb{1}_{Z>k}] .$$

Folglich gilt, *wobei unklar ist, warum,*

$$= E[|X| \mathbb{1}_{Z>k}] .$$

Sei nun k hinreichend groß, dass $E[|Z|] < k\delta$. Dann gilt mit der Markov-Ungleichung $P(Z > k) \leq \frac{E[Z]}{k} = \frac{E[|X|]}{k} < \delta$. Da $X \in L^1$ ist, gilt dann $E[|Y| \mathbb{1}_{|Y|>k}] < \varepsilon$. *Eventuell genauer zeigen, warum das gilt.*