Aufgabe 1 (4 Punkte). Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(s)f(s)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t, \quad X_0 = x\,.$$

Lösung. Mit $A_t = f(t)$ und $B_t = x + \int_0^t f(s)^{-1}G(s)dW_s$ und partieller Integration

$$AB = A_0B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A - [A, B] = A_0B_0 - A \cdot B - B \cdot A$$

folgt

$$f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1}G(s)dW_s)$$
$$= f(0)x + \int_0^t f(s)d(\int_0^s f(u)^{-1}G(u)dW_u) + \int_0^t (x + \int_0^s f(u)^{-1}G(u)dW_u)df(s)$$

und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie der Differentialgleichung $f'(t) = F(s)f(s)$ aus der Aufgabenstellung

$$= x + \int_0^t G(s)dW_s + \int_0^t F(s)f(s)(x + \int_0^s f^{-1}(u)G(u)dW_u)ds\,.$$

Mit der Definition von X_t kriegen wir schließlich

$$= x + \int_0^t G(s)dW_s + \int_0^t F(s)X_s ds\,.$$

Aufgabe 2 (Siegels Paradoxon; 4 Punkte)**.** Bezeichne mit $\$_t$ den Preis eines US-Dollars in Euro zum Zeitpunkt t und mit $€_t$ den Preis eines Euros in US-Dollar. Angenommen, es gilt

$$\$_0 = 1, \quad d\$_t = \$_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

für einen Wiener-Prozess W_t.

1. Leite die SDE für € ab.

Aus der Definition von $€_t$ und $\$_t$ folgt, dass $€_t = 1/\$_t$, also

$$d€_t = \frac{d€_t}{d\$_t} d\$_t = -\frac{1}{\$_t^2}\$_t(\mu dt + \sigma dW_t) = -€_t(\mu dt + \sigma dW_t)\,.$$

2. Sei $\sigma^2 > \mu$. Berechne $E[\$_t - \$_0]$, d.h. den erwarteten Gewinn in Euro aus einer Investition von 1 US-Dollar. Ist der US-Dollar aus dieser Perspektive eine attraktive Investition? Berechne außerdem $E[€_t - €_0]$, d.h. den erwarteten Gewinn in US-Dollar aus der Sicht eines US-Investors. Ist der Euro aus letzterer Sicht eine attraktive Investition?

In Beispiel 16 hatten wir die Lösung des Black–Scholes-Modells gegeben. Setzen wir sie ein, erhalten wir

$$E[\$_t - \$_0] = \$_0 E\Big[\exp\Big(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big) - 1\Big]\,.$$

Mit dem Erwartungswert der Log-Normalverteilung erhalten wir

$$= \$_0\big(\exp(\mu t) - 1\big)\,.$$

Ist $\mu > 0$, so ist dieser Wert positiv, also eine attraktive Investition. Analog rechnen wir

$$\begin{aligned} E[€_t - €_0] &= €_0 E\Big[\exp\big((-\mu)t + (-\sigma)W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\big) - 1\Big] \\ &= €_0\Big(\exp\Big(-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\Big) - 1\Big) \end{aligned}$$

Für $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$ ist das eine attraktive Investition.