

**B10A1** Seien  $Y$  und  $Y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{Z}$ .

Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \iff \forall j \in \mathbb{Z}: P(Y_n = j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y = j).$$

Wir verwenden die Rücktransformation der charakteristischen Funktionen  $\varphi_n$  und  $\varphi$  von  $Y_n$  und  $Y$ . Für  $\varphi$  gilt

$$P(X = j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itj} \varphi(t) dt.$$

In der Tat gilt mit der Definition der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itj} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} E_k[e^{ikt}] dt.$$

Da  $E_k$  nur Masse bei  $X = k$  hat erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} P(X = k) dt$$

Zusammenfassen liefert, wobei man sich eventuell überlegen sollte, ob man die Summe und das Integral vertauschen darf

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt.$$

Wenn  $k - j = 0$ , so ist der Integrand 1. Wenn  $k - j = \ell \neq 0$ , gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell t} dt = \frac{1}{i\ell} (e^{i\ell\pi} - e^{-i\ell\pi}) = \frac{1}{i\ell} ((\pm 1) - (\pm 1)) = 0.$$

Eingesetzt in die obige Rechnung verschwinden somit alle Summanden mit  $k \neq j$  und wir erhalten die Darstellung für die Rücktransformation der charakteristischen Funktion. Entsprechendes gilt dann auch für  $Y_n$  und  $\varphi_n$ . Mithilfe dieser Rücktransformationen erhalten wir die gesuchte Konvergenz. Für den Abstand von  $P(Y_n = j)$  und  $P(Y = j)$  gilt mithilfe

Rücktransformation

$$|P(Y_n = j) - P(Y = j)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itj} \varphi_n dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itj} \varphi dt \right|.$$

Mit Zusammenfassen und der „Dreiecksungleichung“ des Integrals können wir abschätzen

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{itj}(\varphi_n(t) - \varphi(t))| dt.$$

Das vereinfacht sich, weil  $|e^{itj}| = 1$ . Weiterhin konvergiert  $\varphi_n(t)$  gegen  $\varphi(t)$  nach dem Portmanteau-Theorem, denn  $e^{itj}$  ist Lipschitz-stetig. Da  $|\varphi_n(t)| \leq 1$  können wir schließlich den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden und erhalten

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Wenn andererseits für alle  $j \in \mathbb{Z}$  gilt, dass  $P(Y_n = j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y = j)$ , dann gilt auch  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j)P(Y_n = j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j)P(Y = j)$  für alle  $f \in \mathcal{C}_b$  und somit  $Y_n \Rightarrow Y$ .