Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Das Cox-Ross-Rubenstein (CRR)-Modell ist wie folgt spezifiziert. Fixiere Zahlen $N \in \mathbb{N}$, $-1 < a < b$ und $r \geq 0$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist gegeben durch

$$\Omega = \{1 + a, 1 + b\}^N ,$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Der Numéraire-Prozess $(\widetilde{S_n^0})_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{S}_n^0 := (1 + r)^n$$

und der Preis eines Finanzinstruments $(\widetilde{S}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist definiert als $\widetilde{S}_0 := 1$ und

$$\widetilde{S}_n(\omega) := \omega_1 \cdots \omega_n \quad \text{für} n = 1, \ldots, N .$$

Die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_n) .$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass das CRR-Modell arbitragefrei ist, genau dann wenn $r \in (a, b)$ ist und, dass es in diesem Fall sogar vollständig ist.

1. Ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ wird als *Martingalmaß* bezeichnet, wenn der Prozess

$$\left(\frac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{S}_n^0}\right)_{n=0,\ldots,N}$$

ein Q-Martingal ist. Wir führen die Renditen $(T_i)_{i=1,\dots,N}$ ein als

$$T_i := \frac{\widetilde{S}_i}{\widetilde{S}_{i-1}}\,.$$

Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ ein Martingalmaß ist, genau dann wenn

$$E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r \quad \text{für alle } i = 0, \dots, N-1\,.$$

Lösung: Wir folgen dem Beweis von Theorem 5.39 aus [HF16]. Q ist genau dann ein Martingalmaß, wenn $(\widetilde{S}_n/\widetilde{S}^0_n)$ ein Q-Martingal ist, also genau dann, wenn $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}/\widetilde{S}^0_{i+1}|\mathcal{F}_i] = \widetilde{S}_i/\widetilde{S}^0_i$ oder mit der Definition von $\widetilde{S}^0_n$ genau dann, wenn $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}|\mathcal{F}_i] = (1+r)\widetilde{S}_i$. Da $-1 < a < b$ gilt $\widetilde{S}_i > 0$ und wir können dadurch teilen, sodass wir erhalten, dass $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}|\mathcal{F}_i]/\widetilde{S}_i = 1+r$. Außerdem ist $\widetilde{S}_n$ nach Definition von $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_n$-messbar. Als Verkettung von messbaren Funktionen ist auch $1/\widetilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n$-messbar. Mit den Rechenregeln für die bedingte Erwartung können wir $1/\widetilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n$ in die bedingte Erwartung reinziehen. Mit der Definition der Renditen T_i erhalten wir $E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r$ und somit die zu zeigende Aussage.

3. Angenommen, $Q \sim P$ ist ein äquivalentes Martingalmaß. Zeigen Sie, dass die Renditen $(T_i)_{i=1,\dots,N}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$Q(T_1 = 1 + a) = 1 - q \quad \text{und} \quad Q(T_1 = 1 + b) = q\,,$$

wobei $q \in (0, 1)$ gegeben ist durch

$$q = \frac{r-a}{b-a}\,.$$

Aus Teilaufgabe 1 wissen wir, dass $E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r$, wobei $T_{i+1} \in \{1 + a, 1 + b\}$, also $(1+a)(1 - E_Q[\mathbb{1}_{\{T_{i+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_i]) + (1+b)E_Q[\mathbb{1}_{\{T_{i+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_i] =$

$1 + r$. Durch Einsetzen von $q = E_Q[\mathbb{1}_{\{T_{i+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_i]$ und auflösen nach q ergibt sich $E_Q[\mathbb{1}_{\{T_{i+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_i] = q = \frac{r-a}{b-a}$. Das heißt, allerdings, die T_i sind unabhängig und identisch verteilt, *was noch genauer gezeigt werden sollte.* Für $i = 0$ erhalten wir außerdem $q = Q(T_1 = 1 + b)$.

References

[HF16] Hans Föllmer, Alexander S.: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* 4th REV. ed. de Gruyter, 2016 (de Gruyter Textbook). – ISBN 311046344X; 9783110463446