Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ-Algebra. Zeigen Sie $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ für alle $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Zunächst einmal ist $E[X]$ irgendeine konstante Zahl. Das Urbild davon ist also ganz Ω. Somit ist $E[X]$ $\mathscr{A}$-messbar. Weiterhin gilt $\int_\Omega E[X] \mathrm{d}P = E[X] \int_\Omega \mathrm{d}P = E[X] \cdot 1 = \int_\Omega X \mathrm{d}P$, sodass $E[X|\mathscr{A}] = E[X]$ gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

i) Ist $(X_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar und $(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$ eine Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Dann ist die Familie $(E[X_i, \mathcal{F}_j])_{i\in I, j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

Da (X_i) gleichgradig integrierbar ist gibt es ein $L > 0$, sodass für alle $i \in I$ gilt $E[|X_i|] \leq L$, *wobei man sich überlegen müsste, warum genau.* Zudem gilt, da (X_i) gleichgradig integrierbar ist, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $i \in I$ und alle $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) \leq \delta$ gilt $E[|X|\mathbb{1}_A] < \varepsilon$. Sei nun $k = L/\delta$ und $Y = E[X \mid \mathcal{G}]$ Dann gilt für alle $i \in I$ und $j \in J$ mit der Jensen'schen Ungleichung $|Y| \leq E[|X| \mid \mathcal{F}_j]$. Mit der Markov-Ungleichung kriegen wir nun

$$P(|Y| > k) \leq \frac{E[|Y|]}{k} \leq \frac{E[|X|]}{k} \leq L/k \leq \delta\,.$$

Damit folgt, nach der obigen Erklärung, $E[|Y|\mathbb{1}_{|Y|>k}] \leq E[|X|\mathbb{1}_{|Y|>k}] < \varepsilon$, also ist $(E[X_i, \mathcal{F}_j])_{ij}$ gleichgradig integrierbar.

ii) Ist $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dann ist $(E[X|\mathcal{F}_j])_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar.

Für ein $k \in \mathbb{R}$ und ein $j \in J$ sei $Y = E[X|\mathcal{F}_j]$ und $Z = E\big[|X| \mid \mathcal{F}_j\big]$. Dann gilt wegen der Jensen'schen Ungleichung der bedingten Erwartung

$$E[|E[X|\mathcal{F}_j]|\mathbb{1}_{|E[X|\mathcal{F}_j]|>k}] \leq E[E[|X| \mid \mathcal{F}_j]\mathbb{1}_{E[|X||\mathcal{F}_j]>k}]\,.$$

Folglich gilt, *wobei unklar ist, warum,*

$$= E[|X|\mathbb{1}_{E[|X||\mathcal{F}_j]>k}]\,.$$

Sei nun k hinreichend groß, dass $E[|E[|X| \mid \mathcal{F}_j]|] < k\delta$. Dann gilt mit der Markov-Ungleichung $P(E[|X| \mid \mathcal{F}_j] > k) \leq \frac{E[E[|X||\mathcal{F}_j]]}{k} = \frac{E[|X|]}{k} < \delta$. Da $X \in L^1$ ist, gilt dann $E[|E[X|\mathcal{F}_j]|\mathbb{1}_{|E[X|\mathcal{F}_j]|>k}] < \varepsilon$. *Eventuell genauer zeigen, warum das gilt.*