

Aufgabe 1 (4 Punkte).

4. Es existierten eindeutig bestimmte monoton wachsende càdlàg Funktionen

$$b, c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } b_0 = c_0 = 0, \text{ so dass } a = b - c \text{ und } \text{Var}(a) = b + c.$$

$$\text{Diese sind gegeben durch } b = (a + \text{Var}(a))/2 \text{ und } c = b - a.$$

Das ist Proposition 3.3 in [JS13].

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie $\mathcal{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{A}_{\text{loc}}$

Hinweis: Betrachten Sie für $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$ die Stoppzeitenfolge $T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \text{Var}(A) > n\}$

Das ist Lemma 3.11 in [JS13]. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$ gilt $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$. *Hierfür fehlt die Begründung.* Entsprechend Hinweis wählen wir $T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \text{Var}(A)_t > n\}$. Damit gilt $T_n \uparrow \infty$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt nach Aufgabe 1.1, dass $|A_{t-}| \leq \text{Var}(A)_{t-}$. Weiterhin gilt nach Aufgabe 1.2 und 1.3, dass $\Delta[\text{Var}(A)]_t = |\Delta A_t| \leq |A_{t-}| + |A_t|$. Das heißt, $\text{Var}(A)_{T_n} \leq 2n + |A_{T_n}|$. *Hier fehlt ebenfalls die Begründung.* Es gilt $A \in \mathcal{M}$. Nach dem Doob'schen Grenzwertsatz gilt $E[|A_{T_n}|] < \infty$. Mit der gefundenen Abschätzung gilt auch $E[|\text{Var}(A)_{T_n}|] < \infty$, also $\text{Var}(A) \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$. Das heißt $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie: Jedes $A \in \mathcal{A}^+$ ist ein Submartingal der Klasse (D).

Sei $A \in \mathcal{A}^+$. Da A wachsend ist, gilt $A_s = E[A_s | \mathcal{F}_s] \leq A_t$. Aufgrund der Monotonie der bedingten Erwartung ist A ein Submartingal.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Zeigen Sie die Eindeutigkeit in Satz 104.

Wir sollen zeigen, dass für $M, N \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ der vorhersehbare Prozess $\langle M, N \rangle \in \mathcal{V}$, so dass $MN - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ eindeutig ist. Sei hierfür $\langle M, N \rangle' \in \mathcal{V}$ ein anderer vorhersehbarer Prozess, so dass $MN - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Dann ist $\langle M, N \rangle - \langle M, N \rangle' = MN - \langle M, N \rangle - (MN - \langle M, N \rangle') \in \mathcal{V}$ ein vorhersehbares lokales Martingal. Nach Satz 98 gilt $\langle M, N \rangle - \langle M, N \rangle' = 0$, zumindest bis auf eine verschwindende Menge.

References

- [JS13] JACOD, Jean ; SHIRYAEV, Albert: *Limit theorems for stochastic processes*. Bd. 288. Springer Science & Business Media, 2013