Lukas, wenn irgendwas so gut ist, dass wir es vorrechnen dürfen, wäre es richtig super, wenn du das schon vor dem Tutorat kurz per Mail an koesmi@gmail.com schreibst – dass wir bei der Aufgabe nochmal vorher drauf schauen. Oder du sagst es im Tutorat, das geht auch :).

B6A1 Seien $X_1, X_2, \dots$ *iid* uniform auf $[0,1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Beispiel 5.21 in [Kle20], funktioniert mit starkem Gesetz der großen Zahlen. Betrachte hierzu die Zufallsvariablen $f(X_i)$. Das Starke Gesetz der großen Zahlen gemäß Theorem 51 lautet hierfür, dass für reellwertige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|f(X_1)|] < \infty$ gilt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to E[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}P = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Nach dem Blockungslemma 30 sind diese ebenfalls unabhängig. Die $f(X_i)$ sind ebenfalls identisch verteilt, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $(f \circ X_i)_\# P = P \circ X_i^{-1} \circ f^{-1} = P \circ X_1^{-1} \circ f^{-1}$, weil die X_i identisch verteilt sind. Somit können wir das starke Gesetz der großen Zahlen mit L^1-Voraussetzung, quasi Theorem 51, benutzen. Nach diesem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) E[f(X_1)]\,.$$

Mit der Definition des Erwartungswertes folgt

$$= \int f \circ X_1 \mathrm{d}P\,.$$

weil X_1 uniform auf $[0,1]$ verteilt ist, kriegen wir

$$= \int_0^1 f \circ \mathrm{id}(x)\lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

B6A2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i^{(n)} - E\big[X_i^{(n)}\big]\big) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty\,.$$

Seien $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben und betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$Y_i = \begin{cases} \frac{X_i^{(n)}}{n} & \text{falls } i \leq n \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Da $X_i^{(n)} \in L^2$ gilt auch $Y_i \in L^2$. Da nach Aufgabenstellung gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\big[Y_i\big] = 0$, kann ich n_0 so wählen, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i) < \delta$. Wir haben dann mit der Definition von $(Y_i)_i$

$$P\Big(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\big(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]\big) > \varepsilon\Big) = P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i - E[Y_i]\Big| > \varepsilon\Big)\,,$$

sowie nach der Maximalungleichung aus Satz 42

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Var}(Y_i)}{\varepsilon^2}\,.$$

Nach der Wahl von n_0 gilt für alle $n \geq n_0$, dass $\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i) < \delta$. Somit gilt insgesamt schließlich

$$< \delta\,,$$

sodass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) \xrightarrow{P} 0$.

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n\log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E[X_i]) \xrightarrow{P} 0\,.$$

Wir wollen für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Tschebyscheff-Ungleichung für die Zufallsvariable $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$ verwenden. Hierfür brauchen wir die Varianz von $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$. Da die X_i unabhängig sind, gilt für diese

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=2}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}\operatorname{Var}(X_i)\,.$$

Nach den Rechenregeln für die Varianz können wir schreiben

$$= \frac{1}{n^2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}\Big(E[X_i^2] - X[X_i]^2\Big)\,.$$

Für den Erwartungswert sind nur die Wahrscheinlichkeiten mit $X_i = i$ zu betrachten, sodass sich ergibt

$$= \frac{1}{n^2}\sum\nolimits_{i=2}^{n}\left(\frac{i}{\log i} - \frac{1}{\log i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{i}{\log(i+1)}\,.$$

Nun gilt für $i \geq 1$, dass $i > \log(i+1)$. Deshalb gilt auch $\frac{n}{\log(n)} \geq \frac{i}{\log(i+1)}$ und ich kann abschätzen

$$\leq \frac{1}{n^2}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{n}{\log n} = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{n}{\log n} = \frac{1}{\log n}\,.$$

Nach der Tschebyscheff-Ungleichung gilt damit für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $P\big(\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E[X_i]) > \varepsilon\big) \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\operatorname{Var}(X_i) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Zeigen Sie weiter, dass die obige Folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel–Cantelli.

Wir nutzen den Tipp und betrachten $\sum_{n=2}^{\infty} P(X_n = n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. Nach dem Integraltest divergiert die Reihe, wenn das dazugehörige Integral $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} \mathrm{d}x$ konvergiert. Durch Substituieren mit $z = \log(x)$, sodass $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ und somit $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ gilt, dass $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} \mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log \log x \Big|_2^{\infty}$, sodass insgesamt $\sum_{n=2}^{\infty} P(X_n = n) = \infty$. Mit dem Lemma von Borel–Cantelli gilt dann $P(\limsup\{X_n = n\}) = 1$. *Hier fehlt noch irgendeine Überlegung, vermutlich unter Verwendung von einer Abschätzung für die Summe. Was gilt für die Summe, wenn $X_n = n$? Siehe am Besten die Abgabe auf dem handschriftlichen Blatt.* Insgesamt erhalten wir, dass $P\big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - E[X_i]) = 0\big) < 1$.

B6A3 Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $V := \sup\{\mathrm{Var}[X_n] : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie $k_n = 2^n$ und $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ für $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie $l(k_{n+1})/l(k_n)$. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes n und für $k \in \mathbb{N}$ mit $k_{n-1} \le k \le k_n$ gilt $\frac{|S_k|}{l(k)} \le \frac{2|S_k|}{l(k_n)}$. Verwenden Sie nun die Kolmogorov'sche Ungleichung und Borel–Cantelli, um zu zeigen, dass für beliebiges $\delta > 0$ gilt, dass $\limsup_{n\to\infty} l(k_n)^{-1} \max\{|S_k| : k \le k_n\} \le \delta$ fast sicher.

Das ist Satz 5.29 in [Kle20]. Zu $l(k_{n+1})/l(k_n)$ ist zu sagen, dass $l(k_{n+1})/l(k_n) > 1$, denn log und $n \mapsto 2^n$ sind monoton steigend. Genauer gilt,

$$\lim_{n\to\infty} l(k_{n+1})/l(k_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1})^{1/2}}{(2^n)^{1/2}} \frac{\left(\log(2^{n+1})\right)^{1/2+\varepsilon}}{\left(\log(2^n)\right)^{1/2+\varepsilon}} .$$

Durch Kürzen, sowie mit den Rechenregeln für den Logarithmus ergibt sich

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{1/2} \left(\frac{\log(2^n) + \log(2)}{\log(2^n)}\right)^{1/2+\varepsilon} .$$

Da $\lim_n \log(2)/\log(2^n) = 0$ erhalten wir

$$= \sqrt{2}\,,$$

wobei die Folge von oben gegen den Limes strebt. Damit gilt für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ sicher, dass $l(k_n)/l(k_{n-1}) \le 2$ und entsprechend auch für alle $k \in \mathbb{N}$ so, dass $k_{n-1} \le k \le k_n$, dass $l(k_n)/l(k) \le 2$. Umgestellt und mit $|S_k|$ multipliziert können wir schreiben $|S_k|/l(k) \le 2|S_k|/l(k_n)$. Die linke Seite der Ungleichung ist das, was in der Aufgabenstellung steht. Wenn wir nun also die Gleichung aus der Aufgabe für k_n statt n im Nenner zeigen, dann folgt aus der Ungleichung die Aussage auch für n im Nenner, so, wie in der Aufgabe. Außerdem, wenn der $\limsup$ gleich 0 sein soll, können wir äquivalent zeigen, dass er für ein beliebiges $\delta > 0$ kleiner ist als das gewählte δ sein soll. Sei also ein $\delta > 0$ gegeben. Statt der Aufgabenstellung reicht es, wie oben erklärt, zu zeigen, das

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{k\leq 2^n} |S_k|}{(2^n)^{1/2}(\log(2^n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Das zeigen wir indem wir Borell–Cantelli auf $\{\max_{k\leq k_n} |S_k| > \delta l(k_n)\}$ anwenden. Hierfür wiederum wollen wir die Kolmogorov'sche Ungleichung anwenden, so, wie sie als Satz 5.28 in [Kle20] steht. Hiernach gilt

$$P\Big(\max_{k\leq m}\{|S_k|\} \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_m)}{\varepsilon^2}\,.$$

Wählen wir $m = 2^n$ und $\varepsilon = \delta l(2^n)$ und nutzen die σ-Additivität von P sowie die Linearität der Varianz unabhängiger Zufallsvariablen, sodass sich ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\max_{k\leq 2^n} > \delta l(2^n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\delta^2 2^n(\log(2^n))^{1+2\varepsilon}}\,.$$

Nun können wir jedes $\mathrm{Var}(X_n)$ mit $\sup \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ nach Aufgabenstellung abschätzen. Außerdem können wir den Ausdruck vereinfachen, wenn wir mit der Summe abschätzen, wo jeder Summand mit $2^n > 0$ multipliziert ist, sodass

$$\leq \frac{1}{\delta^2} \sup \mathrm{Var}(X_n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^{1+2\varepsilon}}\,.$$

Schließlich können wir Logarithmusrechenregeln anwenden und das n aus dem Exponenten vom Argument vom Logarithmus rausziehen, sodass

$$= \frac{\sup \operatorname{Var}(X_n)}{\delta^2 (\log 2)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}} < \infty \,,$$

denn die Varianz ist kleiner als Unendlich nach Aufgabenstellung, der Nenner verschwindet nicht und die Summe ist eine geometrische Reihe mit einem Exponent, der kleiner als -1 ist.

Wie erwähnt, liefert das Lemma von Borel–Cantelli die Aussage.

B6A4 Beweisen Sie folgende Aussagen

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, dann folgt $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.
2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $a_{n_k} \to a$, dann folgt $a_n \to a$.

Hinweis: Diese zwei Aussagen wurden im Beweis von Lemma 43 verwendet. Es ist sinnvoll, diesen nach dem Bearbeiten der Übungsaufgabe zu wiederholen.

Zu Punkt 1, es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n$. Somit können wir, um zu zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$, genauso gut zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dies gilt aber aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. *Hier wird allerdings nicht klar, warum $a_n \geq 0$ vorausgesetzt werden muss.*

Zu Punkt 2, sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Da die Folge monoton ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|a_{n+1} - a| < |a_n - a|$. Hiermit gilt auch für alle $n \geq k$, dass $|a_n - a| < \varepsilon$, sodass $(a_n) \to a$.

Zu Lemma 43, hier wird behauptet, dass für unabhängige $X_1, X_2, \dots \in L^2$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k]) \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.

Zum Beweis betrachten wir ohne Einschränkung zentrierte Zufallsvariablen, also $E[X_k] = 0$, nutzen also quasi das Blockungslemma. Wir greifen direkt auf die Maximal-Ungleichung aus dem Satz davor zurück und wenden sie auf die Folge $Y_i = X_{i+k}$ an. Diese lautet für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ dann

$$P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} E[Y_n^2]$$

Setzt man $Y_i = X_{i+k}$ ein und betrachtet auf beiden Seiten den Limes $k \to \infty$, so ergibt sich mit $S_n = \sum_{i=1}^n S_i$

$$\lim_{k\to\infty} P\Big(\sup_{n\geq k} |S_n - S_k| > \varepsilon\Big) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=k+1}^{\infty} E[X_n^2]\,.$$

Nun nutzen wir das, was wir in Punkt 1 bewiesen haben, angewendet auf die Folge $a_n = \mathrm{Var}(X_n)$. In der Tat ist laut Aufgabenstellung $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Aus Punkt 1 folgt $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^\infty a_n = 0$. Eingesetzt in unsere Rechnung erhalten wir

$$= 0\,.$$

Mit der Definition von stochastischer Konvergenz heißt das, die Folge $(Z_k)_k$ mit $Z_k = \sup_{n\geq k} |S_n - S_k|$ konvergiert stochastisch gegen 0. Wo wir die unterschiedlichen Konvergenzen eingeführt haben (Definition 14), haben wir gleichzeitig besprochen, dass dies bedeutet, dass es eine Teilfolge $(k_i)_i$ gibt, sodass $(Z_{k_i})_i$ fast sicher gegen 0 konvergiert. Wir schauen uns Z_k an dieser Stelle genauer an. Es gilt $Z_k = \sup_{n\geq k} \left|\sum_{i=k+1}^n X_i\right|$. Die Folgenglieder haben also mit steigendem k immer weniger Summanden, sodass die Folge fallend ist. *Damit diese Argumentation stimmt, müsste allerdings $X_i \geq 0$ vorausgesetzt werden.* Es gilt also $P(A) = 1$ mit $A = \{\omega \in \Omega \mid Z_{k_i}(\omega) \xrightarrow{i\to\infty} 0\}$. Nun benutzen wir das, was wir in Punkt 2 bewiesen haben, nämlich punktweise für $a_k = Z_k(\omega)$ für alle $\omega \in A$. Da auf A gilt, $a_{k_i} \xrightarrow{i\to\infty} 0$ und a_k auch fallend ist, gilt mit Punkt 2 für die gleichen $\omega \in A$, dass $Z_k(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Da wir vorhin gesagt haben, dass $P(A) = 1$, ist somit auch $P\big(Z_k(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} 0\big) = 1$. Das heißt, Z_k konvergiert also fast sicher gegen 0. *Hier fehlt noch eine letzte Überlegung, warum dann $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$.*

Literatur

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)