Aufgabe 1 (4 Punkte).

i) Sei W eine Brownsche Bewegung. Dann ist W ein Martingal.

W ist adaptiert und stetig, also insbesondere càdlàg. Weiterhin gilt $0 = E[|X_t|] < \infty$. Sei schließlich $0 \leq s \leq t$. Alle $F \in \mathcal{F}_s$ sind unabhängig von den Zuwächsen $X_t - X_s$. Somit gilt $E[\mathbb{1}_F(X_t - X_s)] = P(F)E[X_t - X_s] = 0$, denn $E[X_t] = E[X_s] = 0$. Somit ist W ein Martingal.

ii) Sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität $\Lambda(t) = \mathbb{E}[N_t]$. Dann ist der kompensierte Poisson-Prozess $N_t - \Lambda(t)_t$ ein Martingal.

Ein Poisson-Prozess ist càdlàg. Da für den kompensierten Poisson-Prozess wie für eine Brownsche Bewegung für alle $t \geq 0$ gilt $E[N_t - \Lambda(t)] = E[N_t] - E[N_t] = 0$, ist die Argumentation sonst analog zu der von Teilaufgabe i.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale M, dh. $E[M_t^2] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, und $s \leq t$ folgende Aussagen gelten:

i) $E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]$.

Durch Ausquadrieren erhalten wir

$$E[(M_t - M_s)^2] \mid \mathcal{F}_s] = E[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]\,.$$

Da M ein Martingal ist, ist es adaptiert. Damit ist M_s ist $\mathcal{F}_s$ messbar und wir können es aus der bedingten Erwartung rausziehen. Zudem gilt dafür $E[M_s \mid \mathcal{F}_s] = M_s$, sodass

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_sE[M_t \mid \mathcal{F}_s] + M_s^2\,.$$

Mit der Martingaleigenschaft folgt

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s^2 + M_s^2\,.$$

Zusammenfassen der letzten beiden Terme liefert

$$= E[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - M_s^2\,.$$

wieder aufgrund der $\mathcal{F}_s$-Messbarkeit von M_s erhalten wir

$$= E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

ii) $E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2] - E[M_s^2]$.

Mit der definierenden Eigenschaft (ii) vom bedingten Erwartungswert ausgewertet auf Ω können wir schreiben

$$E[(M_t - M_s)^2] = E\big[E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s]\big]$$

Einsetzten von Teilaufgabe (i) liefert

$$= E\big[E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s]\big]$$

und wieder die Eigenschaft (ii) auf Ω schließlich

$$= E[M_t^2 - M_s^2]\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Jedes nicht-negative lokale Martingal ist ein Supermartingal.

Sei X ein nicht-negatives lokales Martingal, (T_n) die dazugehörige lokalisierende Folge. Da (T_n) fast sicher gegen unendlich konvergiert, konvergiert für jedes $t \geq 0$ die Folge $(X_t^{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen X_t. Somit gilt

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = E[\liminf_{n\to\infty} X_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s]\,.$$

Es gilt $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Somit können wir das Lemma von Fatou für den bedingten Erwartungswert anwenden und erhalten

$$\leq \liminf_{n\to\infty} E[X_t^{T_n} \mid \mathcal{F}_s]\,.$$

Da X ein lokales Martingal ist, ist $(X_t^{T_n})_{t\geq 0}$ ein Martingal. Somit kriegen wir

$$= \liminf_{n\to\infty} X_s^{T_n} = X_s\,,$$

wieder weil (T_n) fast sicher gegen unendlich konvergiert.