Definition 1 (ucp-Metrik). Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse von $\Omega \times \mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die Metrik $d_{ucp} \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to [0, \infty)$ durch

$$(X, Y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} E[(X - Y)^*_n \wedge 1] \,, \tag{1}$$

wobei $X^*_n := \sup_{s \leq n} |X_s|$. Ebenso definiert d_{ucp} eine Metrik auf dem Raum aller adaptierten càglàd Prozesse.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Für Zufallsvariablen $X, X^1, X^2, \ldots$ gilt stochastische Konvergenz $X^m \to X$ genau dann, wenn $E[|X^m - X| \wedge 1] \to 0$.

Das ist Lemma 17 aus dem Skript zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gelte zunächst $X^m \xrightarrow{P} X$ und sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} E[|X^m - X| \wedge 1] &= \lim_{n \to \infty} \big(E[|X^m - X| \wedge 1] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} \\
&\qquad + E[|X^m - X|] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| \leq \varepsilon\}} \big) \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \big(\mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} + \varepsilon \big) = \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

denn X^m konvergiert stochastisch gegen X. Gilt umgekehrt $0 < \varepsilon \leq 1$ und $E[|X^m - X| \wedge 1] \to 0$, so gilt $P(|X^m - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X^m - X| \wedge 1]}{\varepsilon} \to 0$ nach Anwendung der Markov-Ungleichung.

Definition 2.

i) Eine *adaptierte Zerlegung* ist eine Folge $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Stoppzeiten mit $T_0 = 0$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \infty$ und $T_n < T_{n+1}$ auf $\{T_n < \infty\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) Es seien $X \in \mathcal{S}$ ein Semimartingal, H ein adaptierter Prozess und $\tau = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine adaptierte Zerlegung. Dann nennen wir den Prozess $\tau(H \cdot X)$ definiert durch

$$\tau(H \cdot X)_t := \sum_{m\in\mathbb{N}_0} H_{T_m}(X_{T_{m+1}\wedge t} - X_{T_m\wedge t}), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die *τ-Riemann'sche Approximation* von $H \cdot X$.

iii) Eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von adaptierten Zerlegungen $\tau_n = (T_{n,m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ heißt eine *Riemann'sche Zerlegungsfolge*, falls für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}_0} |T_{n,m+1} \wedge t - T_{n,m} \wedge t| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $X \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal, H ein càg Prozess. Weiter sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riemann'sche Zerlegungsfolge.

i) Geben Sie den einfachen previsiblen Prozess H^n an, sodass $\tau_n(H \cdot X)_t = H^n \cdot X$. Dieser darf hier auch als Reihe dargestellt werden.

Das ist Proposition 4.44 in [JS13]. Es gilt

$$H^n = \sum_{m\in\mathbb{N}} H_{T_{n,m}} \mathbb{1}_{]\!]T_{n,m},T_{n,m+1}]\!]}\,.$$

ii) Zeigen Sie, dass H^n punktweise gegen H konvergiert.

Das folgt, da H càg ist.

iii) Folgern Sie, dass die τ_n-Riemann'schen Approximationen $\tau_n(H \cdot X)_t$ gegen $H \cdot X$ in *ucp* konvergieren.

Sei $K_t = \sup_{s\leq t} |H_s|$, dann ist K adaptiert, càg, lokal beschränkt und es gilt $|H^n| \leq K$. Außerdem gilt nach (i) $\tau_n(H\cdot X) = H^n \cdot X$. Die Behauptung folgt mit Theorem 123 und Aufgabe 2.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ beliebig. Dann liegt jeder lokal beschränkte, previsible Prozess in $L^2_{\text{loc}}(X)$.

Zunächst einmal gilt für $X \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$, dass $\langle X, X \rangle \in \mathscr{V}$. Es gilt sogar, dass $\langle X, X \rangle \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$, *wobei das noch gezeigt werden sollte.* Somit reicht es zu zeigen, dass für $X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$ und H lokal beschränkt und previsibel gilt, dass $H \cdot X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$. Seien H und X entsprechend gewählt, dann existiert eine Folge von Stoppzeiten T_n mit $T_n \uparrow \infty$, sodass $X^{T_n} \in \mathscr{V}$ und $E[(X^{T_n})_\infty] < \infty$. Nach Theorem 93 gilt auch $H \cdot X^{T_n} \in \mathscr{V}$. *Hier müsste noch gefolgert werden, dass es auch eine Folge $S_n \uparrow \infty$ von Stoppzeiten gibt, sodass $(H \cdot X)^{S_n} \in \mathscr{V}$.* Da $H \mapsto H \cdot X$ linear ist, ist außerdem $E[(H \cdot X)^{S_n}] < \infty$. Somit ist $H \cdot X \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$.

References

[JS13] Jacod, Jean ; Shiryaev, Albert: *Limit theorems for stochastic processes*. Bd. 288. Springer Science & Business Media, 2013