Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z}\colon P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j).$$

Wir verwenden die Rücktransformation der charakteristischen Funktionen φ_n und φ von Y_n und Y. Für φ gilt

$$P(X = j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t\,.$$

In der Tat gilt mit der Definition der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} E_k \big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\big] \mathrm{d}t\,.$$

Da E_k nur Masse bei $X = k$ hat erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} P(X = k) \mathrm{d}t$$

Zusammenfassen liefert, *wobei man sich eventuell überlegen sollte, ob man die Summe und das Integral vertauschen darf*

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \mathrm{d}t\,.$$

Wenn $k - j = 0$, so ist der Integrand 1. Wenn $k - j = \ell \neq 0$, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\ell} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi}\big) = \frac{1}{\mathrm{i}\ell} \big((\pm 1) - (\pm 1)\big) = 0\,.$$

Eingesetzt in die obige Rechnung verschwinden somit alle Summanden mit $k \neq j$ und wir erhalten die Darstellung für die Rücktransformation der charakteristischen Funktion. Entsprechendes gilt dann auch für Y_n und φ_n. Mithilfe dieser Rücktransformationen erhalten wir die gesuchte Konvergenz. Für den Abstand von $P(Y_n = j)$ und $P(Y = j)$ gilt mithilfe

Rücktransformation

$$|P(Y_n = j) - P(Y = j)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi_n \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi \mathrm{d}t \right| .$$

Mit Zusammenfassen und der „Dreiecksungleichung“ des Integrals können wir abschätzen

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}tj} \big(\varphi_n(t) - \varphi(t) \big) \right| \mathrm{d}t \,.$$

Das vereinfacht sich, weil $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}\right| = 1$. Weiterhin konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen $\varphi(t)$ nach dem Portmanteau-Theorem, denn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}$ ist Lipschitz-stetig. Da $|\varphi_n(t)| \leq 1$ können wir schließlich den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden und erhalten

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \,.$$

Wenn andererseits für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j)$, dann gilt auch $\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)P(Y = j)$ für alle $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}$ und somit $Y_n \Rightarrow Y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Sei hierfür ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *und ein* $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ *gegeben. Dann gilt*

$$\int f \mathrm{d}P = \sup\left\{ \int g \mathrm{d}P \;\middle|\; g \leq f \textit{ einfach} \right\}$$

wobei einfach heißt, dass Folgen (α_n) *in* $\mathbb{R}$ *und* $(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *existieren, sodass* $g = \sum \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ *und* $\int g \mathrm{d}P = \sum \alpha_n P(A_n)$*. Gebe es eine Folge diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße* (P_n)*, sodass* P *schwacher Limes von* (P_n) *ist, dann wäre* $\int f \mathrm{d}P_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P_n(X = j)$*. Eventuell kann man auch die Konstruktion* $\frac{1}{n} \sum \delta_{k/n}$ *aus Aufgabe 1 von Blatt 9 verwenden. Außerdem gibt es die einfache Funktion* $S_J := \sum_{j=-J}^{J} f(j) \mathbb{1}_{X^{-1}\{j\}}$*, die* g *approximiert, vergleiche [Gir].*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \in (0,\infty)$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n exponentialverteilt mit Parameter α_n ist, das heißt, X_n besitzt die Dichte

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\alpha_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\,.$$

Zeigen Sie die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$, falls $\alpha_n\to\infty$ für $n\to\infty$.

Wir wollen den Satz von Lévy verwenden. Demnach konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, wenn $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$. Es gilt $\varphi_n(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \mathrm{i}t}$ und mit dem Satz von de L'Hospital $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-\mathrm{i}t} = 1$. Da 1 stetig in 0 ist, konvergiert also auch (X_n).

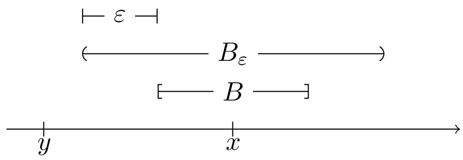
Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und den Dirac Maßen auf $\mathbb{R}$ mit der schwachen Konvergenz gibt.

Wir nehmen an, dass der Homöomorphismus $x\mapsto\delta_x$ ist. Da x der einzige Parameter von δ_x ist, ist dieser schon mal bijektiv.

Wir zeigen noch, dass $x\mapsto\delta_x$ und $\delta_x\mapsto x$ stetig sind, also, dass Bilder und Urbilder offener Mengen offen sind. In Bemerkung 13.14.iii in [Kle20] steht, dass die Prohorov-Metrik d_{P} eine Topologie auf dem Raum der endlichen Maße induziert. Wir zeigen Stetigkeit bezüglich dieser Topologie. Sei $d'_{\mathrm{P}}(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon>0 : \mu(B)\leq\nu(B_\varepsilon)+\varepsilon \text{ für jedes } B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, wobei B_ε die offene ε-Umgebung um B ist. Dann ist $d_{\mathrm{P}}(\mu,\nu) := \max\{d'_{\mathrm{P}}(\mu,\nu), d'_{\mathrm{P}}(\nu,\mu)\}$. In unserem Fall haben wir $\mu=\delta_x$ und $\nu=\delta_y$ für $x,y\in\mathbb{R}$. Da die Situation symmetrisch in x und y ist, ist $d'_{\mathrm{P}}(\delta_x,\delta_y) = d'_{\mathrm{P}}(\delta_y,\delta_x)$ und es reicht $d_{\mathrm{P}}(\delta_x,\delta_y) = \mathrm{d}'_{\mathrm{P}}(\delta_x,\delta_y)$ anzuschauen. Seien $x,y\in\mathbb{R}$ also gegeben. Es gilt

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x\in B\,, \\ 0, & x\notin B \end{cases} \quad \text{und entsprechend } \delta_y(B_\varepsilon)+\varepsilon = \begin{cases} 1+\varepsilon, & y\in B_\varepsilon\,, \\ 0, & y\notin B_\varepsilon\,. \end{cases}$$

Nach der Definition der Prohorov-Metrik suchen wir das Infimum von den $\varepsilon>0$, sodass für jedes $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt $\delta_x(B)\leq\delta_y(B_\varepsilon)+\varepsilon$. Falls $x\notin B$, ist diese Bedingung für alle ε erfüllt, da $\delta_y > 0$ und $\varepsilon > 0$. Falls $x \in B$ und $y \in B_\varepsilon$, ist die Bedingung ebenfalls trivial erfüllt, denn $\varepsilon > 0$. Falls $x \in B$ und $y \notin B_\varepsilon$, haben wir einen Fall, wie unten dargestellt



Wie ersichtlich ist ε dann am größten, wenn $B = \{x\}$, es reicht uns also das Infimum der ε für den Fall $B = \{x\}$ zu finden. Dieses ε wird die Ungleichung auch für alle anderen B erfüllen. Im Falle $B = \{x\}$ ist $B_\epsilon = B_\epsilon(x)$ und $y \notin B_\epsilon$ entspricht $|x - y| \geq \varepsilon$. Somit ist die Ungleichung $\delta_x(B) \leq \delta_y(B_\varepsilon) + \varepsilon$ genau dann erfüllt, wenn entweder $\varepsilon \leq |x - y|$ oder $\varepsilon \geq 1$. Damit ist $d_{\mathrm{P}}(\delta_x, \delta_y) = |x - y| \wedge 1$.

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Sei δ_x in δ_U gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Dann gilt für ein $\delta_y \in \delta_U$, dass $|x - y| < \varepsilon$, also auch $d_{\mathrm{P}}(\delta_x, \delta_y) = |x - y| \wedge 1 < \varepsilon$. Somit ist δ_U offen. Sei nun andererseits δ_U offen. Sei $x \in U$ gegeben. Sei $0 < \varepsilon < 1$ so, dass $B_\varepsilon\big(\delta(x)\big) \subset \delta_U$. Dann gilt für ein $y \in U$, dass $d_{\mathrm{P}}(x, y) = |x - y| \wedge 1 < \varepsilon$, also auch, dass $|x - y| < \varepsilon$, denn, $\varepsilon < 1$. Das heißt, $B_\varepsilon(x) \subset U$, also ist U offen.

Damit ist $x \mapsto \delta_x$ stetig bezüglich der durch die Prohorov-Metrik induzierten Topologie.

In Bemerkung 13.14.ii in [Kle20] steht allerdings auch, dass man auf den endlichen Maßen die gröbste Topologie, bezüglich welcher $\mu \mapsto \int f \mathrm{d}\mu$ stetig ist wählen kann. *Eventuell kann man das auch benutzen, um die Stetigkeit einfacher zu sehen.*

Insgesamt ist $x \mapsto \delta_x$ ein Homöomorphismus.

Literatur

[Ana] ANALYST: *Compute explicitly Lévy–Prokhorov metric for 2 finite Dirac measures.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/4438264`. – 2022-04-28

[Gir] GIRAUDO, Davide: *Equivalence of Lebesgue expectation to discrete expectation for discrete random variables.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/217980`. – 2012-10-21

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)