Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeige, dass der Prozess ρ, gegeben durch

$$\rho_t = e^{(t-t_0)\beta}x + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta}\alpha(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta}\sigma dW_s\,,$$

für $\rho_{t_0} = x$, eine Lösung des *Hull-White-extended Vasicek-Modells* ist, das durch die SDE

$$d\rho_t = (\alpha(t) + \beta\rho_t)dt + \sigma dW_t$$

gegeben ist, wobei W eine Brownsche Bewegung, $\beta \in \mathbb{R}$ der Drift, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ die Volatilität und $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ die Hull-White-Erweiterung ist.

Lösung: Definiere $h(t, \rho_t) = e^{(t_0-t)\beta}\rho_t$ und berechne die Ableitungen

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\beta e^{(t_0-t)\beta}\rho_t\,, \quad \frac{\partial h}{\partial \rho_t} = e^{(t_0-t)\beta}\,, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \rho_t^2} = 0\,.$$

Mit der Ito-Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}
dh(t,\rho_t) &= d(e^{(t_0-t)\beta}\rho_t)\\
&= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \rho_t}\left((\alpha(t) + \beta\rho_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial \rho_t^2}\sigma^2\right)dt + \frac{\partial h}{\partial \rho_t}\sigma dW_t\\
&= \left(-\beta e^{(t_0-t)\beta}\rho_t + (\alpha(t) + \beta\rho_t)e^{(t_0-t)\beta}\right)dt + \sigma e^{(t_0-t)\beta}dW_t\\
&= \alpha(t)e^{(t_0-t)\beta}dt + \sigma e^{(t_0-t)\beta}dW_t
\end{aligned}$$

wodurch wir in integraler Schreibweise haben, dass

$$h(t,\rho_t) = h(t_0,\rho_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-t+s)\beta}\alpha(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-t+s)}\sigma dW_s\,,$$

wobei $h(t_0,\rho_{t_0}) = \rho_{t_0}$ Durch Multiplizieren der Gleichung mit $e^{(t-t_0)\beta}$ kriegen wir schließlich

$$\rho_t = e^{(t-t_0)\beta}x + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta}\alpha(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta}\sigma dW_s\,,$$