

B5A1 Zeigen Sie, dass eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}] = 0. \quad (1)$$

Sei zunächst (X_n) gleichgradig integrierbar. Dann gilt nach Definition von gleichgradiger Integrierbarkeit, dass

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}].$$

Insbesondere heißt das, dass für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m| > k\}}].$$

Damit gilt auch für das Infimum über diese $n \in \mathbb{N}$, dass

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m| > k\}}],$$

was nach der Definition des \limsup Gleichung (1) liefert. *Hier sollte man sich überlegen, ob man den Limes über k ebenfalls, wie in der Argumentation unten, mittels eines ε umschreiben sollte.*

Genüge nun (X_n) Gleichung (1). Wir wollen zeigen, dass (X_n) gleichgradig integrierbar ist. Sei hierfür ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da Gleichung (1) gilt, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k > k_0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}] < \varepsilon.$$

Damit ist die Teilfolge $(\sup_{m \geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m| > k\}}])_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt. Hier könnte man eventuell noch direkt ein Argument bringen, warum schon Beschränktheit durch ε folgt. Also gibt es auch ein n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}] < \varepsilon.$$

Nach Lemma 24 gilt, dass alle X_n integrierbar sind. Also gibt es für alle X_1, \dots, X_{n_0-1} jeweils Schranken $k_1, \dots, k_{n_0-1} \in \mathbb{N}$, sodass für die $n = 1, \dots, n_0 - 1$ gilt

$$E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k_n\}}] < \varepsilon.$$

Setze nun $K = k_0 \vee \dots \vee k_{n_0-1}$, dann gilt für alle $k \geq K$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}] < \varepsilon,$$

also insbesondere, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > k\}}] < \varepsilon.$$

Hier fehlt noch die Folgerung von Korollar 27.

B5A2 Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathcal{F} . Es sei

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &\subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \\ P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \end{aligned}$$

$\mathbb{1}_{A_n}$ hat $\mathbb{1}_{\Omega}$ als integrierbare Majorante. Damit gelten die erste und dritte Ungleichung gelten jeweils nach dem Lemma von Fatou, *beziehungsweise die dritte nach majorisierter Konvergenz*.

B5A3 Sei $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ . Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel–Cantelli, dass

$$P(\{\text{Für unendlich viele } n \text{ gilt } X_n > n\}) = 0.$$

B5A4 Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für die folgenden Identitäten

1. $P\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \in A\right\}\right) = P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \in A\}\right)$
2. $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n \in A\}\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{X_n \in A\})$
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{X_n \in A\}) = P\left(\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \in A\right\}\right)$

B5A5 Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , $\mathcal{F}_n := \sigma(X_k)_{k \leq n}$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ -Algebra liegen.

1. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
2. $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$