Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei X ein Submartingal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

1. Es gilt X^+ ist gleichgradig integrierbar.
2. Es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[X_\infty|\mathscr{F}_t] \geq X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Wir gehen nach dem Beweis von Theorem 9.30 in [Kal21]. Sei zunächst X^+ gleichgradig integrierbar. Nach Lemma 24 aus Wahrscheinlichkeitstheorie 1 gilt $\sup_{t\geq 0} E[X_t^+] < \infty$. Mit Satz 57, dem Doob'schen Grenzwertsatz, gibt es ein X_∞, sodass $X_t^+ \xrightarrow{\text{f.s.}} X_\infty^+$. Nach dem Satz 60, dem Satz von Vitaly, gilt auch $X_t^+ \xrightarrow{L^1} X_\infty^+$. Sei nun $A \in \mathscr{F}_t$. Dann kriegen wir für $t \leq s$

$$E[(X_\infty^+ - X_s^+)\mathbb{1}_A] = E[(X_\infty^+ - X_t^+)\mathbb{1}_A] + E[(X_t^+ - X_s^+)\mathbb{1}_A]\,.$$

Da X ein Submartingal ist, ist der zweite Term negativ. Somit kriegen wir

$$\leq E[(X_\infty^+ - X_t^+)\mathbb{1}_A] \leq E[|X_\infty^+ - X_t^+|] \to 0\,,$$

sodass auch

$$E[X_t^+|\mathscr{F}_s] \to E[X_\infty^+|\mathscr{F}_s]\,. \tag{1}$$

Da X ein Submartingal ist, können wir für alle $\geq 0 \leq t \leq s$ schreiben $X_t \leq E[X_s|\mathscr{F}_t]$ und damit auch

$$X_t \leq \lim_{s\to\infty} E[X_s^+] - \liminf_{s\to\infty} E[X_s^-|\mathscr{F}_t]\,.$$

Mit Gleichung (1) im ersten Term und dem Lemma von Fatou im zweiten kriegen wir

$$\leq E[X_\infty^+] - E[\liminf X_s^-|\mathscr{F}_t] = E[X_\infty|\mathscr{F}_t]\,.$$

Gibt es andererseits ein X_∞, sodass für alle $t \geq 0$ gilt $X_t \leq E[X_\infty|\mathscr{F}_t]$, so gilt nach Blatt 2 Aufgabe 3.ii, dass $X_t^+ \leq E[X_\infty^+|\mathscr{F}_t]$, denn $\cdot^+$ ist konvex. Mit Korollar 8.22 aus [Kle20] erhalten wir schließlich, dass X^+ gleichgradig integrierbar ist.

Formulieren Sie eine analoge Aussage für Supermartingale.

Sei X ein Supermartingal, dann ist $-X$ ein Submartingal. Somit gibt es genau dann ein $-X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[-X_\infty|\mathscr{F}_t] \geq -X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, wenn $(-X)^+$ gleichgradig integrierbar ist. Das heißt, die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. X^- ist gleichgradig integrierbar.
2. Es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[X_\infty|\mathscr{F}_t] \leq X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

i) Seien Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ unabhängig identisch verteilt mit $P(Y_i = 0) = 1 - P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ mit $X_n := 2^n \prod_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal ist bzgl. einer geeigneten Filtration.

Sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ mit $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Dann sind $Y_1, \ldots, Y_n$ $\mathscr{F}_n$-messbar, sodass gilt

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = E\Big[2^{n+1} \prod\nolimits_{i=1}^{n+1} Y_i \;\Big|\; \mathscr{F}_n\Big] = 2^{n+1} \prod\nolimits_{i=1}^{n} Y_i E[Y_{n+1}|\mathscr{F}_n]\,.$$

Da $Y_n + 1$ unabhängig von $Y_1, \ldots, Y_n$ und damit von $\mathscr{F}_n$ ist, kriegen wir

$$= 2^{n+1} \prod\nolimits_{i=1}^{n} Y_i E[Y_{n+1}] = 2^{n+1} \prod\nolimits_{i=1}^{n} Y_i E[Y_1]\,,$$

Denn alle Y_i sind ja identisch verteilt. Mit $E[Y_1] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ kriegen wir schließlich

$$= 2^n \prod\nolimits_{i=1}^{n} Y_i = X_n \,,$$

sodass $\mathcal{X}$ ein Martingal ist.

ii) Sei $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(Z_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - P(Z_n = 0)$. Zeigen Sie, dass die Folge in L^1 konvergiert, aber nicht fast sicher.

Es gilt $E[|Z_n - 0|] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \to 0$, sodass $Z_n \xrightarrow{L^1} 0$. Da die Z_n unabhängig sind, sind auch die Mengen $\{Z_n = 1\}$ unabhängig. Außerdem gilt $\sum_{n\geq 1} P(Z_n = 1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$. Somit können wir Borel-Cantelli zwei anwenden. Hiernach folgt, $1 = P(\limsup\{Z_n = 1\}) = P(\forall n \geq 1 \exists m \geq n\ Z_m = 1)$. Angenommen, es gilt $1 = P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = P(\exists k \geq 1 \forall l \geq k\ Z_l = 0)$, dann würde aber auch für alle $m \geq k$ P-fast-sicher gelten, dass $Z_m = 0$. Somit kann Z_n nicht fast sicher gegen 0 konvergieren und auch nicht gegen etwas anderes, denn $Z_n \xrightarrow{L^1} 0$ impliziert $Z_n \xrightarrow{P} 0$ und $Z_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$ impliziert $Z_n \xrightarrow{P} Z$, sodass $Z = 0$ sein muss.

iii) Gibt es ein Martingal $X = (X_n)_{n\geq 1}$, dass in L^1, aber nicht fast sicher konvergiert?

Nein, denn Konvergenz in L^1 impliziert für Martingale fast sicherere Konvergenz. Angenommen, $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$, also insbesondere auch $X_n \xrightarrow{P} X_\infty$. Dann gilt $\sup_n E[|X_n|] < \infty$, also auch $\sup_n E[X_n^+] < \infty$. Somit können wir den Doobschen Konvergenzsatz, Satz 57, anwenden. Demnach gibt es ein X'_∞, sodass $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X'_\infty$. Da hierdurch auch gilt $X_n \xrightarrow{P} X'_\infty$, muss folgen $X_\infty = X'_\infty$.

References

[Kal21] *Kapitel 9.* In: KALLENBERG, Olav: *Optional Times and Martingales.* Cham : Springer International Publishing, 2021. – ISBN 978–3–030–61871–1, 185–206

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)