Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

i) Sind X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse, dann sind X und Y Modifikationen voneinander.

Zu zeigen ist nach Definition 4.iii, dass $P(X_t \neq Y_t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Sei also $t \geq 0$ beliebig gewählt. Wenn $\{X_t \neq Y_t\}$ leer ist, ist die Behauptung schon gezeigt. Sei andernfalls $\omega \in \{X_t \neq Y_t\}$. Dann gibt es für ω ein $s \geq 0$, sodass $X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)$, nämlich $s = t$. Somit ist $\omega \in \{\exists s \geq 0 \; X_s \neq Y_s\}$. Das heißt, $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq \{\exists s \geq 0 \; X_s \neq Y_s\}$. Da X und Y ununterscheidbar sind, gilt für sie nach Definition 4.i und 4.ii, dass $P(\exists s \geq 0 \; X_s \neq Y_s) = 0$. Somit gilt auch $P(X_t \neq Y_t) = 0$, was zu zeigen war.

ii) Ist die Indexmenge I, in welcher die Prozesse indiziert sind, höchstens abzählbar, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

Nach der vorigen Teilaufgabe ist nur noch zu zeigen, dass eine Modifikation X von Y von Y ununterscheidbar ist, wenn I höchstens abzählbar ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I = \mathbb{N}$. Es gilt

$$P(\exists n \geq 0 \; X_n \neq Y_n) = P\Big(\bigcup\nolimits_{n \geq 0} \{X_n \neq Y_n\}\Big) \,.$$

Mit σ-Subadditivität von P haben wir

$$\leq \sum\nolimits_{n \geq 0} P(X_m \neq Y_n) = 0 \,,$$

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(X_n \neq Y_n) = 0$, da X eine Modifikation von Y ist. Somit sind X und Y ununterscheidbar.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

i) Die σ-Algebra der T-Vergangenheit, definiert durch

$$\mathscr{F}_T := \big\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\big\}$$

ist eine σ-Algebra.

Da $\emptyset \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathscr{F}_t$ und $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, sind $\emptyset$ und Ω in $\mathscr{F}_T$.

ii) Für die Stoppzeit $T \equiv t$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_t$ überein für alle $t \geq 0$.

Hier gilt $\mathscr{F}_T = \big\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap \{t \leq t\} \in \mathscr{F}_t\big\} = \{A \in \mathscr{A} \mid A \in \mathscr{F}_t\} = \mathscr{F}_t$.

iii) Sind T und S Stoppzeiten mit $T \leq S$, so gilt $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_S$.

Sei $A \in \mathscr{F}_T$, es gelte also für alle $t \geq 0$, dass $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da $T \leq S$, gilt $\{S \leq t\} \subseteq \{T \leq t\}$. Hierdurch ist $A \cap \{S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\}$. Da $A \in \mathscr{F}_T$ ist $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da S eine Stoppzeit ist, ist $\{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da $\mathscr{F}_t$ eine σ-Algebra ist, ist dann auch $(A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Somit ist $A \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, also $A \in \mathscr{F}_S$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

i) Zeigen Sie: Ist X ein adaptierter càdlàg Prozess, dann sind X_- und ΔX ebenfalls adaptiert.

Zu zeigen ist, dass für alle $A \in \mathcal{A}'$ gilt $(\lim_{s\uparrow t} X_s)^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, wobei $|\lim_{s\uparrow t} X_s| < \infty$.