

**Definition 1** (ucp-Metrik). Sei  $\mathcal{D}$  die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse von  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  nach  $\mathbb{R}$ . Wir definieren die Metrik  $d_{ucp}: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$  durch

$$(X, Y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} E[(X - Y)_n^* \wedge 1], \quad (1)$$

wobei  $X_n^* := \sup_{s \leq n} |X_s|$ . Ebenso definiert  $d_{ucp}$  eine Metrik auf dem Raum aller adaptierten càglàd Prozesse.

**Aufgabe 1** (3 Punkte). Zeigen Sie folgende Aussagen:

- i) Für Zufallsvariablen  $X, X^1, X^2, \dots$  gilt stochastische Konvergenz  $X^m \rightarrow X$  genau dann, wenn  $E[|X^m - X| \wedge 1] \rightarrow 0$ .

Das ist Lemma 17 aus dem Skript zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Es gelte zunächst  $X^m \xrightarrow{P} X$  und sei  $0 < \varepsilon < 1$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[|X^m - X| \wedge 1] &= \lim_{n \rightarrow \infty} (E[|X^m - X| \wedge 1] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} \\ &\quad + E[|X^m - X|] \mathbb{1}_{\{|X^m - X| \leq \varepsilon\}}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{1}_{\{|X^m - X| > \varepsilon\}} + \varepsilon) = \varepsilon, \end{aligned}$$

denn  $X^m$  konvergiert stochastisch gegen  $X$ . Gilt umgekehrt  $0 < \varepsilon \leq 1$  und  $E[|X^m - X| \wedge 1] \rightarrow 0$ , so gilt  $P(|X^m - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X^m - X| \wedge 1]}{\varepsilon} \rightarrow 0$  nach Anwendung der Markov-Ungleichung.

**Definition 2.**

- i) Eine *adaptierte Zerlegung* ist eine Folge  $\tau = (T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  von Stoppzeiten mit  $T_0 = 0$ ,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \infty$  und  $T_n < T_{n+1}$  auf  $\{T_n < \infty\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- ii) Es seien  $X \in \mathcal{S}$  ein Semimartingal,  $H$  ein adaptierter Prozess und  $\tau = (T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine adaptierte Zerlegung. Dann nennen wir den Prozess  $\tau(H \cdot X)$  definiert durch

$$\tau(H \cdot X)_t := \sum_{m \in \mathbb{N}_0} H_{T_m} (X_{T_{m+1} \wedge t} - X_{T_m \wedge t}), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die  $\tau$ -Riemann'sche Approximation von  $H \cdot X$ .

- iii) Eine Folge  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von adaptierten Zerlegungen  $\tau_n = (T_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$  heißt eine *Riemann'sche Zerlegungsfolge*, falls für alle  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}_0} |T_{n,m+1} \wedge t - T_{n,m} \wedge t| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte). Sei  $X \in \mathcal{S}$  ein Semimartingal,  $H$  ein càg Prozess. Weiter sei  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Riemann'sche Zerlegungsfolge.

- i) Geben Sie den einfachen previsible Prozess  $H^n$  an, sodass  $\tau_n(H \cdot X)_t = H^n \cdot X$ . Dieser darf hier auch als Reihe dargestellt werden

Das ist Proposition 4.44 in [JS13]. Es gilt

$$H^n = \sum_{m \in \mathbb{N}} H_{T_{n,m}} \mathbb{1}_{[T_{n,m}, T_{n,m+1}]}$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte). Es sei  $X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$  beliebig. Dann liegt jeder lokal beschränkte, previsible Prozess in  $L_{\text{loc}}^2(X)$ .

Zunächst einmal gilt für  $X \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ , dass  $\langle X, X \rangle \in \mathcal{V}$ . Es gilt sogar, dass  $\langle X, X \rangle \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$ , wobei das noch gezeigt werden sollte. Somit reicht es zu zeigen, dass für  $X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$  und  $H$  lokal beschränkt und previsible gilt, dass  $H \cdot X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$ . Seien  $H$  und  $X$  entsprechend gewählt, dann existiert eine Folge von Stoppzeiten  $T_n$  mit  $T_n \uparrow \infty$ , sodass  $X^{T_n} \in \mathcal{V}$  und  $E[(X^{T_n})_\infty] < \infty$ . Nach Theorem 93 gilt auch  $H \cdot X^{T_n} \in \mathcal{V}$ . Hier müsste noch gefolgert werden, dass es auch eine Folge  $S_n \uparrow \infty$  von Stoppzeiten gibt, sodass  $(H \cdot X)^{S_n} \in \mathcal{V}$ . Da  $H \mapsto H \cdot X$  linear ist, ist außerdem  $E[(H \cdot X)^{S_n}] < \infty$ . Somit ist  $H \cdot X \in \mathcal{A}_{\text{loc}}^+$ .

## References

- [JS13] JACOD, Jean ; SHIRYAEV, Albert: *Limit theorems for stochastic processes*. Bd. 288. Springer Science & Business Media, 2013