

Aufgabe 1 (5 Punkte).

- i) Sind X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse, dann sind X und Y Modifikationen voneinander.

Zu zeigen ist nach Definition 4.iii, dass $P(X_t \neq Y_t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Sei also $t \geq 0$ beliebig gewählt. Wenn $\{X_t \neq Y_t\}$ leer ist, ist die Behauptung schon gezeigt. Sei andernfalls $\omega \in \{X_t \neq Y_t\}$. Dann gibt es für ω ein $s \geq 0$, sodass $X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)$, nämlich $s = t$. Somit ist $\omega \in \{\exists s \geq 0 \ X_s \neq Y_s\}$. Das heißt, $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq \{\exists s \geq 0 \ X_s \neq Y_s\}$. Da X und Y ununterscheidbar sind, gilt für sie nach Definition 4.i und 4.ii, dass $P(\exists s \geq 0 \ X_s \neq Y_s) = 0$. Somit gilt auch $P(X_t \neq Y_t) = 0$, was zu zeigen war.

- ii) Ist die Indexmenge I , in welcher die Prozesse indiziert sind, höchstens abzählbar, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

Nach der vorigen Teilaufgabe ist nur noch zu zeigen, dass eine Modifikation X von Y von Y ununterscheidbar ist, wenn I höchstens abzählbar ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I = \mathbb{N}$. Es gilt

$$P(\exists n \geq 0 \ X_n \neq Y_n) = P\left(\bigcup_{n \geq 0} \{X_n \neq Y_n\}\right).$$

Mit σ -Subadditivität von P haben wir

$$\leq \sum_{n \geq 0} P(X_n \neq Y_n) = 0,$$

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(X_n \neq Y_n) = 0$, da X eine Modifikation von Y ist. Somit sind X und Y ununterscheidbar.

- iii) Gilt $I = \mathbb{R}_+$ und sind X und Y rechtsstetige (linksstetige) Prozesse, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

Seien X und Y ohne Beschränkung der Allgemeinheit rechtsstetig, X Modifikation von Y . Wieder ist nur zu zeigen, dass sie ununterscheidbar sind. Es gilt

$$P(\exists t \geq 0 X_t \neq Y_t) = P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{X_t \neq Y_t\}\right).$$

Da X_t und Y_t rechtsstetig sind und \mathbb{Q}_+ dicht in \mathbb{R}_+ liegt, gibt es für alle $t \geq 0$ eine Folge (q_n) in \mathbb{Q}_+ , sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{q_n} = X_t$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{q_n} = Y_t$, sodass

$$= P\left(\bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \{X_t \neq Y_t\}\right).$$

Da auch \mathbb{Q}_+ abzählbar ist, können wir mit dem gleichen Argument wie bei Teilaufgabe ii erkennen, dass

$$= 0.$$

- iv) Sei $I = \mathbb{R}_+$ und die Prozesse X und Y gegeben durch $X_t = 0$ und $Y_t = \mathbb{1}_{Z=t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und eine Zufallsvariable $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$. Welche Aussagen bezüglich Modifikation und Ununterscheidbarkeit lassen sich treffen?

Wir wollen zunächst zeigen, dass X eine Modifikation von Y ist. Sei hierfür $t \geq 0$ beliebig. Einsetzen der Definitionen von X und Y liefert $P(X_t \neq Y_t) = P(\mathbb{1}_{Z=t} \neq 0) = P(Z = t) = 0$, denn $\{Z = t\}$ ist eine P -Nullmenge. X und Y sind allerdings unterscheidbar, denn $P(\exists s \geq 0 Z = s) = P(\Omega) = 1$, da Z als Funktion auf ganz Ω definiert ist.

- v) Geben Sie ein Beispiel von zwei stetigen Prozessen an, die zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Sei $\Omega = [0, 1]$ mit $P = \delta_0$ und $X_t(\omega) = \sin(\omega t)$ und $Y_t(\omega) = 0$. Es gilt $X_t(0) = 0 = Y_t(0)$, wodurch $P(\exists t \geq 0 X_t \neq Y_t) = 1 - P(\forall t \geq 0 X_t = Y_t) \leq 1 - \delta_0(\{0\}) = 0$, sodass X und Y zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

- i) Die σ -Algebra der T -Vergangenheit, definiert durch

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\}$$

ist eine σ -Algebra.

Da $\emptyset \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ und $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, sind \emptyset und Ω in \mathcal{F}_T . Für ein $B \in \mathcal{F}_T$ ist $B^C \in \mathcal{A}$, denn \mathcal{A} ist eine σ -Algebra. Außerdem ist $B^C \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \setminus (B \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$, denn $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, da T eine Stoppzeit ist und $B \cap \{T \leq t\}$ nach Voraussetzung. Also gilt $B^C \in \mathcal{F}_T$. Schließlich gilt für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_T$, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, denn \mathcal{A} ist eine σ -Algebra. Weiterhin ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ nach Voraussetzung und die σ -Algebra \mathcal{F}_t ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Insgesamt ist \mathcal{F}_T also eine σ -Algebra.

- ii) Für die Stoppzeit $T \equiv t$ stimmt diese mit \mathcal{F}_t überein für alle $t \geq 0$.

Hier gilt $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \{t \leq t\} \in \mathcal{F}_t\} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \in \mathcal{F}_t\} = \mathcal{F}_t$.

- iii) Sind T und S Stoppzeiten mit $T \leq S$, so gilt $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S$.

Sei $A \in \mathcal{F}_T$, es gelte also für alle $t \geq 0$, dass $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da $T \leq S$, gilt $\{S \leq t\} \subseteq \{T \leq t\}$. Hierdurch ist $A \cap \{S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\}$. Da $A \in \mathcal{F}_T$ ist $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da S eine Stoppzeit ist, ist $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da \mathcal{F}_t eine σ -Algebra ist, ist dann auch $(A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Somit ist $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, also $A \in \mathcal{F}_S$.