Satz 6 Hier haben wir verschiedene Ungleichungen Für Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und $\mathcal{L}^p$-Normen zu Verfügung. Seien X, Y reellwertige Zufallsvariable. Dann gilt folgendes.

(i) Die *Markov-Ungleichung* – Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton wachsend, $\varepsilon > 0$ so, dass $f(\varepsilon) > 0$. Dann gilt

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\varepsilon)}\,.$$

(ii) Die *Tschebyscheff-Ungleichung* – ist $E[X^2] < \infty$, so gilt

$$P(|X - E[X]|) > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

(iii) Die *Hölder-Ungleichung* – Für $0 < p, q, r \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q\,.$$

(iv) Die *Minkowski-Ungleichung* – für $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p\,.$$

(v) Das Analogon der Minkowski-Ungleichung im konkaven Fall – für $0 < p < 1$ gilt

$$E[|X + Y|^p] \leq E[|X|^p] + E[|Y|^p]\,.$$

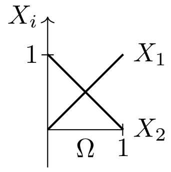
(vi) Eine Abschätzung Normen veschrschiedener $\mathcal{L}^p$-Räume. Für $p \leq q$ und $X \in \mathcal{L}^q$ gilt

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q\,.$$

Satz 8 Die *Jensen-Ungleichung* – sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $X \in \mathcal{L}^1$, dann gilt

$$E[g(X)] \geq g(E[X])\,.$$

B4A1.1 Haben $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ die gleiche Verteilung auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$? Ja. So sehen die X_1 und X_2 auf $[0,1]$ aus



Es reicht, die Verteilung auf $\{[a,b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ zu betrachten. Wegen dem Eindeutigkeitssatz A.16 wird die Verteilung auf ganz $\mathcal{B}([0,1])$ gleich sein. Die Verteilung von X_1 ist $P_\# X_1 = P \circ X_1^{-1}$. Aus der Skizze erkennt man, $X_1^{-1}([a,b]) = [a,b]$, sodass $P_\# X_1([a,b]) = \lambda|_{[0,1]}([a,b]) = b-a$. Da auch X_2 monoton ist, können wir $X_2^{-1}([a,b])$ ebenfalls durch die Urbilder des Grenzen a und b von $[a,b]$ angeben. Da X_2 fallend ist, müssen wir lediglich die Grenzen umdrehen, also $X_2^{-1}([a,b]) = [X_2^{-1}(b), X_2^{-1}(a)] = [1-b, 1-a]$ und $P_\# X_2([a,b]) = \lambda|_{[0,1]}([1-b,1-a]) = 1-a-1+b = b-a = P_\# X_1([a,b])$.

B4A1.2 Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, sodass $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1-\omega$ nicht die gleiche Verteilung haben?

B4A1.3 Wenn $X \sim \mathcal{N}(2,2)$ verteilt ist, gilt $P[|X-2| \geq 2] \leq \frac{1}{2}$? Ja. Nach der Tschebyscheff-Ungleichung gilt $P[|X-2| \geq 2] \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$.

B4A1.4 Jede reellwertige Zufallsvariable, also $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar hat eine Dichte bezüglich λ? Nein. Sei $X = 0$. Dann ist X stetig und somit messbar mit $P(X=0) = 1$, also $P = \delta_0$. Da $0 = \lambda(\{0\}) \neq \delta_0(\{0\}) = 1$, ist δ_0 nicht absolut stetig bezüglich λ. Nach dem Satz von Radon-Nikodym, so wie er als Korollar 7.34 in (Kle20) steht, besitzt dann δ_0 keine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes.

B4A1.5 Auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sind alle Abbildungen $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar? Ja. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$, denn in $\mathcal{P}(\Omega)$ sind alle Mengen, die nach A abbilden könnten, drin.

B4A1.6 Für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ gilt $E[XY] \leq \sqrt{2}$? Ja, denn nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung, also der Hölder-Ungleichung mit $r = 1$ und $p = q = 2$ gilt

$$E[XY] \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 \,.$$

Mit der Definition der $\mathcal{L}^p$-Norm und weil Quadrate positiv sind haben wir

$$= \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}\,.$$

Die Angabe $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ heißt $E[X] = E[Y] = 0$ und wir können schreiben

$$= \sqrt{E[(X - E[X])^2]}\sqrt{E[(Y - E[Y])^2]}\,.$$

Mit der Definition der Varianz ergibt sich

$$= \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}\,.$$

Die Angabe $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ heißt, $\mathrm{Var}(X) = 1$ und $\mathrm{Var}(Y) = 2$. Somit folgt

$$= \sqrt{2}\,.$$

B4A1.7 $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable X zu sich selbst unabhängig gilt genau dann, wenn X fast sicher konstant ist.

B4A1.8 Es gilt $E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = E[\mathbb{1}_A]E[\mathbb{1}_B]$ genau dann, wenn A und B unabhängig sind.

B4A1.9 Für X exponentialverteilt mit $\lambda = 1$ gilt $E[X^4] \geq E[X]^4$.

B4A1.10 Gilt $\mu(A) = 0$ genau dann, wenn $\nu(A) = 0$, dann gibt es ein messbares f, sodass $\mu(A) = \int_A f(\omega)\nu(\mathrm{d}\omega)$? Ja. Denn wenn μ und ν dieselben Nullmengen besitzen gilt insbesondere $\mu \ll \nu$. Da μ und ν als Wahrscheinlichkeitsmaße σ-endlich sind, können wir den Satz von Radon-Nikodym anwenden, nachdem μ eine Dichte bezüglich ν besitzt, also gerade eine Borel-messbare Abbildung, sodass $\mu(A) = \int_A f(\omega)\nu(\mathrm{d}\omega)$.

B4A1.11 Auf $(\omega, \{\Omega, \emptyset\})$ gibt es keine Borel-messbare Abbildung? Doch. Sei $f = 0$, dann für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & 0 \notin A\,, \\ \Omega, & 0 \in A\,. \end{cases}$$

Somit gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dass $f^{-1}(A) \in \{\emptyset, \Omega\}$ und folglich ist f Borel-messbar.

B4A1.12 Seien $X \sim \mathrm{Exp}(6)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{3}\right)$, dann gilt $E[XY] \leq 1$, wobei für $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt $E[Z] = \frac{1}{\lambda}$ und $E[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2}$? Ja. Wie bei Aufgabenteil 6 gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$E[XY] \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}\,.$$

Mit den Angaben zu den Parametern $\lambda = 6$ beziehungsweise $\lambda = \frac{1}{3}$ der Verteilungen von X beziehungsweise Y, sowie dem Hinweis auf dem Blatt ergibt sich

$$= \sqrt{\frac{2}{6^2} \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{2}{\frac{6}{3}} = 1\,.$$

B4A1.13 Ist $q \leq p$ und $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ist $X \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$? Ja. Nach Satz 6.$vi$ gilt $\|X\|_q \leq \|X\|_p < \infty$, da nach Aufgabe $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da in $L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alle P-messbaren $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Funktionen mit endlicher L^q-Norm sind, ist $X \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

B4A2 Seien (X_n) Zufallsvariablen sodass $X_1 = 0$ und $X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$.

B4A2.1 (X_n) konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

B4A2.2 (X_n) konvergiert fast sicher.

B4A2.3 (X_n) konvergiert in L_2.

B4A2.4 (X_n) ist gleichgradig integrierbar.

B4A3 Seien (X_n) Zufallsvariablen, sodass $X_n(\omega) = \omega^{\frac{1}{n}}$ auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$, wobei $P \ll \lambda|_{[0,1]}$ mit Dichte $f(\omega) = \frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}$.

B4A2.1 (X_n) konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

B4A2.2 (X_n) konvergiert fast sicher.

B4A2.3 (X_n) konvergiert in L_1.

B4A2.4 (X_n) ist gleichgradig integrierbar.

Literatur

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)