Aufgabe 1 (6 Punkte). Gegeben seien die Marktmodelle, deren Preise $S_k^{(N)}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{(N)}, \mathcal{F}^{(N)}, P_N^*)$ definiert sind. Dabei ist P_N^* ein Martingalmaß für jedes der Marktmodelle, das heißt, die diskontierten Preisprozesse

$$X_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)}}{(1+r_N)^k}, \quad k = 0, \dots, N$$

bilden Martingale bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_k^{(N)} := \sigma(S_1^{(N)}, \dots, S_k^{(N)})$. Wir nehmen weiter an:

1. Die Anfangspreise $S_0^{(N)}$ sind für alle N gleich und konstant, also $S_0^{(N)} = S_0 > 0$.
2. Die Renditen $R_k^{(N)} := \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$ für $k = 1, \dots, N$ sind unabhängig unter P_N^* und erfüllen

   $$-1 < a_N \leq R_k^{(N)} \leq b_N\,, \quad \text{für alle } k = 1, \dots, N\,,$$

   wobei $a_N \to 0$ und $b_N \to 0$ für $N \to \infty$ gilt.
3. Die Varianzen $\mathrm{var}_N(R_k^{(N)})$ unter P_N^* sind so, dass

   $$\sigma_N^2 := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{var}_N(R_k^{(N)}) \to \sigma^2 \in (0, 1)$$

   für $N \to \infty$ konvergiert.

Zeigen Sie unter diesen Annahmen, dass die Verteilungen der Endwerte $S_N^{(N)}$ unter P_N^* schwach gegen eine log-normal verteilte Zufallsvariable S_T mit den Parametern

$$\log S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T \quad \text{und} \quad \sigma\sqrt{T}$$

konvergieren. Die Verteilung der Grenzzufallsvariablen S_T lässt sich darstellen als

$$S_T := S_0 \exp\left(\sigma W_T + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right) ,$$

wobei W_T eine normalverteilte Zufallsvariable $N(0, T)$ mit Erwartungswert 0 und Varianz T ist.

Hinweis: Verwenden Sie Theorem A.41. in [HF16]. Dazu betrachten Sie die Taylorentwicklung von $\log(1+x)$ *und erhalten damit eine geeignete Darstellung für* $\log(S^{(N)})$.

Lösung: Das ist Theorem 5.54 in [HF16]. Nehme zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $S_0 = 1$. Das Resultat für beliebiges S_0 folgt dann durch Reskalierung. Wie im Hinweis steht, bestimmen wir die Taylorentwicklung von $\log(1 + x)$. Es gilt

$$\log(1+x)' = \frac{1}{1+x} , \quad \log(1+x)'' = \frac{-1}{(1+x)^2} , \quad \text{und} \quad \log(1+x)''' = \frac{2}{(1+x)^3} ,$$

sodass

$$\log(1 + x)\Big|_{x=0} = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \rho(x)x^2 .$$

Hierbei gilt, vergleiche [Wik24], für

$$M \geq \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right|$$

auf $-1 < \alpha \leq x \leq \beta$, dass

$$|\rho(x)|x^2 \leq \frac{M}{6}|\beta - \alpha|^3$$

und entsprechend

$$|\rho(x)| \leq \frac{M}{6}|\beta - \alpha| =: \delta(\alpha, \beta) .$$

Hierbei gilt $\delta(\alpha, \beta) \to 0$ für $\alpha, \beta \to 0$. Stellt man die Bedingung unter Punk 2 für die Renditen nach $S^{(N)_k}$ um, so erhält man $S_k^{(N)} = (1 + R_k^{(N)}) S_{k-1}^{(N)}$, also mit $S_0 = 1$

$$S_N^{(N)} = \prod_{k=1}^{N} (1 + R_k^{(N)}) \, .$$

Wir setzen das in unsere Taylorformel für $\log(1+x)$ ein, sodass mit $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$$\begin{aligned} \log S_N^{(N)} &= \sum_{k=1}^{N} \log(1 + R_k^{(N)}) & (1) \\ &= \sum_{k=1}^{N} R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2 + \Delta_N \, , & (2) \end{aligned}$$

wobei so, wie vorher $\rho(x)$,

$$|\Delta_N| \le \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)})^2 \, .$$

P_N^* ist nach Aufgabenstellung ein Martingalmaß. Da die $R_k^{(N)}$ unabhängig sind, können wir schreiben

$$1 = E_N^*[X_k^{(N)}] = E_N^* \left[\prod_{l=1}^{k} \frac{1 + R_l^{(N)}}{1 + r_N} \right] = \prod_{l=1}^{k} E_N^* \left[\frac{1 + R_l^{(N)}}{1 + r_N} \right] \, ,$$

sodass $E_N^*[R_k^{(N)}] = r_N$. Weiterhin gilt $E_N^*[(R_k^{(N)})^2] = \mathrm{var}_N(R_k^{(N)})^2 + E_N^*[R_k^{(N)}]^2$, sodass

$$E_N^*[|\Delta_N|] \le \delta(\alpha_N, \beta_N) \sum_{k=1}^{N} (\mathrm{var}_N(R_k^{(N)}) +_N^2) \to 0$$

nach der Bedingung an die Varianz unter Punkt 3. Damit konvergiert $\Delta_N \to 0$ in Verteilung. Nach dem Theorem von Slutsky aus Wahrscheinlichkeitstheorie 1 reicht es mit Gleichung (2) also, die schwache Konvergenz von

$$Z_N := \sum_{k=1}^{N} (R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2) =: \sum_{k=1}^{N} Y_k^{(N)}$$

gegen eine $\mathcal{N}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$-verteilte Zufallsvariable zu zeigen, dann konvergiert auch $S_N^{(N)}$ schwach gegen S_T. Hierfür folgen wir dem Hinweis und prüfen die Bedingungen von Theorem A.41 aus [HF16]. Seien $\gamma_N := |\alpha_N| \vee |\beta_N|$, also $\gamma_N \to 0$, so gilt mit der Abschätzung in Punkt 2, dass

$$\max_{1 \le k \le N} |Y^{(N)_k}| \le \gamma_N + \frac{1}{2}\gamma_N^2 \to 0\,.$$

Weiterhin gilt

$$E_N^*[Z_N] = \sum_{k=1}^{N} E_N^*[R_k^{(N)}] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{var}(R_k^{(N)}) + E_N^*[R_k^{(N)}]^2)\,,$$

also mit Punkt 3

$$= Nr_N - \frac{1}{2}(\sigma_N^2 T + Nr_n^2) \to rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T\,.$$

Schließlich gilt, ebenfalls mit Punkt 3, dass

$$\mathrm{var}_N(Z_N) \to \sigma^2 T\,,$$

da für $p > 2$

$$\sum_{k=1}^{N} E_N^*\big[|R_k^{(N)}|^p\big] \le \gamma_N^{p-2} \sum_{k=1}^{N} E_N^*\big[\big(R_k^{(N)}\big)^2\big] \to 0\,.$$

Somit kann Theorem A.41 angewendet werden und wir erhalten die schwache Konvergenz der Verteilung von Z_N gegen $\mathcal{N}(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$.

Literatur

[HF16] Hans Föllmer, Alexander S.: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* 4th REV. ed. de Gruyter, 2016 (de Gruyter Textbook). – ISBN 311046344X; 9783110463446

[Wik24] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS: *Taylor's theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Taylor%27s_theorem&oldid=1254088858`, 2024. – [Online; accessed 9-November-2024]