Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale M, das heißt $E[M_n^2] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ folgende Aussagen gelten:

i) $E[(M_n - M_m)^2] \mid \mathcal{F}_m] = E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathcal{F}_m]$

Durch Ausquadrieren erhalten wir

$$E[(M_n - M_m)^2] \mid \mathcal{F}_m] = E[M_n^2 - 2M_nM_m + M_m^2 \mid \mathcal{F}_m]\,.$$

Da M ein Martingal ist, ist es adaptiert. Damit ist M_m ist $\mathcal{F}_m$ messbar und wir können es aus der bedingten Erwartung rausziehen. Zudem gilt dafür $E[M_m \mid \mathcal{F}_m] = M_m$, sodass

$$= E[M_n^2 \mid \mathcal{F}_m] - 2M_mE[M_n \mid \mathcal{F}_m] + M_m^2\,.$$

Mit der Martingaleigenschaft folgt

$$= E[M_n^2 \mid \mathcal{F}_m] - 2M_m^2 + M_m^2\,.$$

Zusammenfassen der letzten beiden Terme liefert

$$= E[M_n^2 \mid \mathcal{F}_m] - M_m^2\,.$$

wieder aufgrund der $\mathcal{F}_m$-Messbarkeit von M_m erhalten wir

$$= E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathcal{F}_m].$$

ii) $E[(M_n - M_m)^2] = E[M_n^2] - E[M_m^2]$

Mit der definierenden Eigenschaft (ii) vom bedingten Erwartungswert ausgewertet auf Ω können wir schreiben

$$E[(M_n - M_m)^2] = E\big[E[(M_n - M_m)^2 \mid \mathcal{F}_m]\big]$$

Einsetzten von Teilaufgabe (a) liefert

$$= E\big[E[M_n^2 - M_m^2 \mid \mathcal{F}_m]\big]$$

und wieder die Eigenschaft (ii) auf Ω schließlich

$$= E[M_n^2 - M_m^2]\,.$$

Aufgabe 3. Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $E[X_1] = 0$ und $0 < E[X_1^2] < \infty$. Verwenden Sie das 0-1-Gesetz von Kolmogorov und den zentralen Grenzwertsatz, um zu zeigen, dass fast sicher

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$$

gilt, wobei $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Fatou.

Mit der Definition des lim sup gilt

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} \frac{S_m}{\sqrt{m}} = \infty\right\}.$$

Das können wir äquivalent schreiben als

$$= \left\{\forall n \geq 1 \ \exists m \geq n \ \frac{S_m}{\sqrt{m}} = \infty\right\},$$

oder

$$= \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \left\{\frac{S_m}{\sqrt{m}} = \infty\right\}.$$

Die ersten Terme ausgeschrieben erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \left\{\frac{S_1}{\sqrt{1}} = \infty\right\} \cup \left\{\frac{S_2}{\sqrt{2}} = \infty\right\} \cup \left\{\frac{S_3}{\sqrt{3}} = \infty\right\} \cup \dots \\ &\quad \cap \left\{\frac{S_2}{\sqrt{2}} = \infty\right\} \cup \left\{\frac{S_3}{\sqrt{3}} = \infty\right\} \cup \dots \\ &\quad \cap \dots \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right\} \in \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$, es ist also ein terminales Ereignis. Nach dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov ist $P\big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\big) \in \{0,1\}$. Äquivalent können wir sagen, dass für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gilt $P\big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > N\big) \in \{0,1\}$. Mit Stetigkeit von oben folgt, dass

$$P\Big(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m\geq n}\Big\{\frac{S_m}{\sqrt{m}} > N\Big\}\Big)\,.$$

Aufgrund der Monotonie von P erhalten wir

$$\geq \lim_{n\to\infty} P\big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > N\big)\,.$$

Da schließlich nach dem zentralen Grenzwertsatz $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Y$ mit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, erhalten wir

$$= 1 - P(Y \leq N) > 0$$

Damit muss $P\big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\big) = 1$ gelten. *Wahrscheinlich muss hier irgendwo noch entsprechend Hinweis mit dem Lemma von Fatou argumentiert werden.*