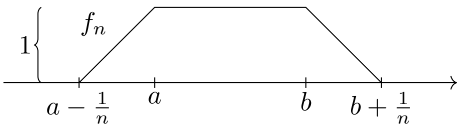
B2A1 Wir wollen zunächst $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C}')\big) \subseteq f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}')\big)$ zeigen. Da es gilt $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C}')$, ist auch $f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}')\big)$. Da $\sigma(\mathcal{C}')$ eine σ-Algebra ist, ist auch $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}')\big)$ eine σ-Algebra. Damit muss $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C}')\big) \subseteq f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}')\big)$ gelten.

Betrachte für die andere Inklusion das System der guten Mengen gegeben durch $\mathcal{F}' = \{A' \in \sigma(\mathcal{C}') \mid f^{-1}(A') \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C}')\big)\}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra ist, denn dann wird auch $\sigma(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{F}'$ gelten. Da f eine Abbildung ist, also jedem Punkt aus Ω einen in Ω' zuordnet, ist $f^{-1}(\Omega') = \Omega$. Da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ eine σ-Algebra ist, ist $\Omega \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Somit ist $\Omega' \in \mathcal{F}$.. Entsprechendes gilt für $\emptyset$. Allen Punkten wird einer zugeordnet, nichts bleibt ohne Bild und somit $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, also $\emptyset \in \mathcal{F}'$. Sei $A' \in \mathcal{F}'$, dann gilt nach Definition von $\mathcal{F}'$, dass $f^{-1}(A') \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ und, da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ eine σ-Algebra ist, auch $(f^{-1}(A'))^{\mathrm{c}} = f^{-1}(A'^{\mathrm{c}}) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ (haben wir uns in der letzten Übung ausführlich überlegt), was wieder nach Definition von $\mathcal{F}'$ bedeutet, dass $A'^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}'$. Sei schließlich (A'_n) eine Folge in $\mathcal{F}'$, also für alle n aus der natürlichen Zahlen $f^{-1}(A'_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$, dann gilt wieder, da $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ eine σ-Algebra ist, dass $\bigcup f^{-1}(A'_n) = f^{-1}\big(\bigcup A'_n\big) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$. Nach Definition von $\mathcal{F}'$ ist hierdurch auch $\bigcup A'_n \in \mathcal{F}'$ und insgesamt $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra. Da $f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}'))$ ist $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{F}'$. Wie schon angekündigt ist, da $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra ist, auch $\sigma(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{F}'$ als kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{C}'$ enthält. Schaut man auf die Definition von $\mathcal{F}'$, so gilt hierdurch die andere gesuchte Inklusion $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}')\big) \subseteq \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C}')\big)$.

B2A2 Sei zunächst $\mu = \nu$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann kann ich statt $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu$ auch $\int_\Omega f \mathrm{d}\nu$ schreiben. Somit ist $\mu[f] = \nu[f]$.

Sei nun anders herum $\mu[f] = \nu[f]$. Ich will folgende Funktionen f_n konstruieren, die $\mathbb{1}_{[a,b]}$ approximieren sollen.



f_n hat zwischen a und b die Höhe 1. Zudem gilt $f_n(a-\frac{1}{n}) = u\cdot(a-\frac{1}{n})+v = 0$ und $f_n(a) = u\cdot a+v = 1$, sodass f_n links die Form $1+n(x-a)$ hat. Analog hat es rechts die Form $1+n(b-x)$. Definiere also f_n, was die $\mathbb{1}[a,b]$ approximiert, als $f_n(x) = \mathbb{1}_{[a,b]} + (1+n(x-a))\mathbb{1}_{[a-\frac{1}{n},a)} + (1+n(b-x))\mathbb{1}_{(b,b+\frac{1}{n}]}$. Dann ist

$$\mu([a,b]) = \int_\Omega \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Durch die gerade gefundene Approximation können wir schreiben

$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Die f_n konvergieren monoton gegen $\mathbb{1}_{[a,b]}$. Deshalb können wir den Satz über monotone Konvergenz anwenden und den Limes rausziehen, sodass

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Nun können wir unsere Annahme verwenden, dass für stetige Funktionen mit kompaktem Träger, die die f_n ja sind, $\mu[f_n]$ und $\nu[f_n]$ übereinstimmen, also

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\nu(\mathrm{d}x)\,.$$

Gehen wir die Argumentation mit ν statt μ rückwärts durch, erhalten wir

$$= \nu([a,b])\,.$$

Da μ und ν auf dem Erzeuger $\{[a,b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ übereinstimmen, gilt nach dem Eindeutigkeitssatz A.16 $\mu = \nu$.

B2A3 Zur Teilaufgabe (a), sei $\mu(A) < \varepsilon$ und $\nu(A^c) < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, dann ist im Limes $\varepsilon \to 0$ $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$, also $\mu \perp \nu$.

Zur Teilaufgabe (b), da $\mu \perp \nu$, gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ so, dass $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$. Da $\lambda \ll \mu$, ist auch $\lambda(A) = 0$ und somit $\lambda \perp \nu$.

Zur Teilaufgabe (c), hier gibt es ein $A \in \mathcal{A}$, sodass $\mu(A) = 0$ und $\mu(A^c) = 0$, also $\mu(\Omega) = 0$ und somit $\mu(\mathcal{A}) = 0$ wegen der Monotonie von μ.

B2A4 Aus Proposition 15.5 aus (Nie97). Wir zeigen zunächst, dass wenn $\nu \ll \mu$, dann (b) gilt, dass also für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ auch $\nu(A) \leq \varepsilon$. Angenommen, (b) stimmt gar nicht, wenn (a) gilt. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, sodass wie klein ich mein δ auch wähle es immer noch ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) \leq \delta$ gibt, jedoch $\nu(A) > \varepsilon$. Wähle für dieses ε ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig und setze $\delta = \frac{1}{2^n}$. Weiter soll $A_n \in \mathcal{A}$ die eine Menge sein, für die gilt $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$, aber $\nu(A_n) > \varepsilon$. Dann ist, für $A = \limsup A_n$ wegen Monotonie von μ auch

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)\,,$$

und wiederum wegen der σ-Subadditivität von μ

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,.$$

Wir wollen jetzt bestimmen, was $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ ist. Sei hierfür $s_{m,n} = \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^k}$. Dann ist $\frac{1}{2} s_{m,n} = s_{m,n} - \frac{1}{2} s_{m,n} = \sum_{k=n}^{m} \big(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\big) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m+1}}$ und somit

$$= \lim_{m\to\infty} 2\Big(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m+1}}\Big) = \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

für alle n, sodass $\mu(A) = 0$. Andererseits gilt wegen der Monotonie von ν, dass $\nu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \geq \nu(A_n) > \varepsilon$ nach der Wahl der A_n, ebenfalls für alle n. Da ν endlich ist, ist $\nu(A_1) < \infty$. Deshalb ist ν nach Satz A.14 stetig von oben, also $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) > \varepsilon$, da ja $\nu\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) > \varepsilon$ für beliebiges n. Da wir oben gezeigt haben, dass $\mu(A) = 0$, widerspricht das $\nu \ll \mu$, also muss (b) doch gelten.

Nun nehmen wir andererseits an, dass für alle $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\nu(A) \leq \varepsilon$ falls $\mu(A) \leq \delta$ und wollen zeigen, dass $\nu \ll \mu$, also, dass für ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ auch $\nu(A) = 0$ gilt. Sei hierfür $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gegeben. Dann ist $\mu(A) \leq \delta$, für ein beliebiges $\delta > 0$, also nach Annahme, dass (b) gilt, auch $\nu(A) \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit muss $\nu(A) = 0$ gelten.

B2A5 Wir bestimmen zunächst das unbestimmte Integral

$$I(a,b) = \int_a^b \alpha\beta x^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\alpha x^\beta} \mathrm{d}x \,.$$

Substitution $z = x^\beta$, sodass $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \beta x^{\beta-1}$ und damit $x^{\beta-1}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\beta}$ ergibt

$$= \int_{a^\beta}^{b^\beta} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{d}z \,.$$

Integrieren liefert

$$= -\mathrm{e}^{-\alpha z}\Big|_{z=a^\beta}^{b^\beta} = \mathrm{e}^{-\alpha a^\beta} - \mathrm{e}^{-\alpha b^\beta} \,.$$

Um herauszufinden was $F^Y(x)$ ist, bestimmen wir die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für $P(Y = 1)$ und $P(Y = X)$. Nach Definition von Y ist $P(Y < 1) = 0$, $P(Y = 1) = P(X \leq 1) = I(0,1) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$ und $P(1 < Y \leq x) = P(1 < X \leq x) = I(1,x) = \mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}$. Somit ist

$$F^Y(x) = P^Y(Y \leq x) = \begin{cases} 0\,, & x < 1 \\ P(Y=1)\,, & x = 1 \\ P(Y=1) + P(1 < Y \leq x)\,, & x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0\,, & x < 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\alpha}\,, & x = 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}\,, & x > 1 \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\big(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}\big)\,.$$

Wir stellen fest, dass aufgrund der Indikatorfunktion gilt $F^Y(-\infty) = 0$, und wegen $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}$ gilt $F^Y(\infty) = 1$. Zudem ist e^{-x} monoton fallend, sodass $F^Y(x)$ monoton wachsend ist. Schließlich gilt $F^Y(x) \to F^Y(1)$ für $x \searrow 1$, sodass F^Y rechtsseitig stetig ist. Damit ist F^Y eine Verteilungsfunktion.

Mit $\rho\big((a,b]\big) = I(a,b) = \mathrm{e}^{-\alpha a^\beta} - \mathrm{e}^{-\alpha b^\beta}$ können P^Y dann wie folgt auf $\{(a,b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ zerlegen

$$\begin{aligned} P^Y\big((a,b]\big) &= I(0,1)\delta_1\big((a,b]\big) + \rho\big((1,\infty)\cap(a,b]\big) \\ &= (1-\mathrm{e}^{-\alpha})\delta_1\big((a,b]\big) + \rho\big((1,\infty)\cap(a,b]\big)\,. \end{aligned}$$

Wir prüfen zunächst nach, dass die Zerlegung wirklich $F^Y(b)-F^Y(a)$ ergibt. Für $b<1$ verschwinden sowohl das Diracmaß δ_1 als auch das Lebesguemaß ρ, sodass $P^Y\big((a,b]\big)=0$. Für $a<1$ und $b\geq 1$ ist $(1,\infty)\cap(a,b]=(1,b]$ und somit

$$P^Y\big((a,b]\big)=1-\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-\alpha}-\mathrm{e}^{-\alpha b^\beta}=1-\mathrm{e}^{-\alpha b^\beta}=F^Y(b)-F^Y(a)\,.$$

Für $a\geq 1$, $b>1$ ist schließlich $(1,\infty)\cap(a,b]=(a,b]$, sodass wieder

$$P^Y\big((a,b]\big)=\mathrm{e}^{-\alpha a^\beta}-\mathrm{e}^{-\alpha b^\beta}=F^Y(b)-F^Y(a)\,.$$

Da F^Y, wie vorhin erklärt, eine Verteilungsfunktion ist, ist nach Satz 6 P^Y ein Maß auf ganz $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $I(a,b)$ muss hierbei entsprechend auf den einzelnen Komponenten eines $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ausgewertet und aufsummiert werden.

Jetzt überlegen wir uns noch, dass der Diracterm singulär und der Lebesgueterm absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes ist. Da $\lambda(\{1\})=0$ und $\delta_1(\mathbb{R}\backslash\{1\})=0$ ist der erste Term tatsächlich singulär. Für den zweiten Term benutzen wir den Satz von Radon–Nikodym in der Ausführung als Korollar 7.34 in (Kle20). Demnach ist der Lebesgueterm absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes, wenn es eine Dichte bezüglich des Lebesguemaßes hat. Nach Konstruktion gilt gerade $\rho\big((1,\infty)\cap(a,b]\big)=\int_{(a,b]}\mathbb{1}_{(1,\infty)}\alpha\beta x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}\lambda(\mathrm{d}x)$ für alle $(a,b]$, sodass $\mathbb{1}_{(1,\infty)}\alpha\beta x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}$ die Dichte von $A\mapsto\rho\big((1,\infty)\cap A\big)$ für alle $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Nach dem Satz von Radon–Nikodym ist das Maß $A\mapsto\rho\big((1,\infty)\cap A\big)$ somit absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes λ.

Literatur

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)

[Nie97] Nielsen, Ole A.: *An Introduction to Integration and Measure Theory*. Wiley-Interscience, 1997