Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Polarisierungsformel $[X,Y] = \frac{1}{4}([X+Y]-[X-Y])$.

Es gilt

$$\begin{aligned}[X+Y]-[X-Y] &= (X+Y)^2-(X_0+Y_0)^2-2(X_-+Y_-)\cdot(X+Y)\\ &\quad -(X-Y)^2+(X_0-Y_0)^2+2(X_--Y_-)\cdot(X-Y)\\ &= 4XY-4X_0Y_0-4X_-\cdot Y-4Y_-\cdot X = 4[X,Y]\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (1 Punkt)**.** Sei $X \in \mathscr{S}$ ein reellwertiger Prozess mit stetig differenzierbaren Pfaden. Wenden Sie die Itô-Formel auf $f(X)$ mit $f = \mathrm{id}$ an. Was fällt Ihnen auf?

Es gilt $D_iX = e_i$ und $D_{ij}X = 0$, sodass

$$\begin{aligned}X &= X_0 + \sum_{i\le d} e_i\cdot X^i + \sum_{s\le t}\Big(X_s - X_{s-} - \sum_{i\le d} e_i\Delta X_s^i\Big)\\ &= X_0 + X + \sum_{s\le t}\Big(\Delta X_s - \sum_{i\le d} e_i\Delta X_s^i\Big) = X_0 + X\,,\end{aligned}$$

sodass die Itô-Formel konsistent ist.

Definition 1 (Die Differentielle Schreibweise)**.** Wir vereinbaren folgende Notation, unter der Bedingung, dass alle Ausdrücke wohldefiniert sind. Wir schreiben

$$dX_t = H_t dt + K_t dY_t\,,$$

falls folgende Integraldarstellung gilt

$$X_t = X_o + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dY_s\,.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{t \nearrow 1} E[B_t] = 0$.

Da $\frac{B_t}{1-t} = \int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$ gilt $d\Big(\frac{B_t}{1-t}\Big) = K_t dW_t$ mit $K_t = \frac{1}{1-t}$, wobei

$$d\Big(\frac{B_t}{1-t}\Big) = \frac{dB_t}{1-t} + B_t d\frac{1}{1-t}$$

und mit Kettenregel

$$= \frac{dB_t}{1-t} + B_t \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t} dW_t\,.$$

Multiplikation mit $1-t$ liefert die Behauptung.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(t)f(t)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t)\Big(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s\Big)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t, \quad X_0 = x\,.$$

$X_0 = x$ folgt mit Definition 1. Es gilt $\frac{X_t}{f(t)} = x + \int_0^t K_s dW_s$ mit $K_s = f(s)^{-1}G(s)$. Wie in Aufgabe 5 rechnen mittels Einsetzen in die differentielle Schreibweise, dass $K_t dW_t = \frac{G(t)}{f(t)} dW_t = d\frac{X_t}{f(t)} = \frac{dX_t}{f(t)} - \frac{X_t}{f(t)^2} f'(t)dt$. Einsetzen der Differentialgleichung für f, multiplizieren mit f und Umstellen ergibt $dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t$.