B6A1 Seien $X_1, X_2, \dots$ *iid* uniform auf $[0,1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Siehe hierzu, was wir in der Letzten Vorlesung dazu hatten. (24.5. Minute 23) Es gilt

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}F(x) &= \int f(x)\mathrm{d}F_n(x)\\ &= \int f(x)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \sum \mathrm{d}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}\Big)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)\end{aligned}$$

B6A2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i^{(n)} - E\big[X_i^{(n)}\big]\big) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty\,.$$

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - E[X_i]) \xrightarrow{P} 0\,.$$

Zeigen Sie weiter, dass die obige Folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel–Cantelli.

B6A3

B6A4

Literatur