

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Zeigen Sie, dass jedes Supermartingal  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $E[X_n] = E[X_0]$  für alle  $n$  bereits ein Martingal ist.

Sei  $Y_n = X_n - E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ . Dann gilt nach Turmeigenschaft, dass  $E[Y_n] = E[X_n] - E[E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]] = 0$ . Da  $X$  ein Supermartingal ist, ist  $Y$  nichtnegativ. Somit ist auch  $Y_n = 0$  und  $X$  ein Martingal.