Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

i) Sind X und Y zwei ununterscheidbare Prozesse, dann sind X und Y Modifikationen voneinander.

Zu zeigen ist nach Definition 4.iii, dass $P(X_t \neq Y_t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Sei also $t \geq 0$ beliebig gewählt. Wenn $\{X_t \neq Y_t\}$ leer ist, ist die Behauptung schon gezeigt. Sei andernfalls $\omega \in \{X_t \neq Y_t\}$. Dann gibt es für ω ein $s \geq 0$, sodass $X_s(\omega) \neq Y_s(\omega)$, nämlich $s = t$. Somit ist $\omega \in \{\exists s \geq 0\ X_s \neq Y_s\}$. Das heißt, $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq \{\exists s \geq 0\ X_s \neq Y_s\}$. Da X und Y ununterscheidbar sind, gilt für sie nach Definition 4.i und 4.ii, dass $P(\exists s \geq 0\ X_s \neq Y_s) = 0$. Somit gilt auch $P(X_t \neq Y_t) = 0$, was zu zeigen war.

ii) Ist die Indexmenge I, in welcher die Prozesse indiziert sind, höchstens abzählbar, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

Nach der vorigen Teilaufgabe ist nur noch zu zeigen, dass eine Modifikation X von Y von Y ununterscheidbar ist, wenn I höchstens abzählbar ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $I = \mathbb{N}$. Es gilt

$$P(\exists n \geq 0\ X_n \neq Y_n) = P\Big(\bigcup\nolimits_{n\geq 0} \{X_n \neq Y_n\}\Big)\,.$$

Mit σ-Subadditivität von P haben wir

$$\leq \sum\nolimits_{n\geq 0} P(X_m \neq Y_n) = 0\,,$$

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(X_n \neq Y_n) = 0$, da X eine Modifikation von Y ist. Somit sind X und Y ununterscheidbar.

iii) Gilt $I = \mathbb{R}_+$ und sind X und Y rechtsstetige (linksstetige) Prozesse, dann sind die Eigenschaften Ununterscheidbar und Modifikation äquivalent.

Seien X und Y ohne Beschränkung der Allgemeinheit rechtsstetig, X Modifikation von Y. Wieder ist nur zu zeigen, dass sie ununterscheidbar sind. Es gilt

$$P(\exists t \geq 0 X_t \neq Y_t) = P\Big(\bigcup\nolimits_{t\geq 0}\{X_t \neq Y_t\}\Big)\,.$$

Da X_t und Y_t rechtsstetig sind und $\mathbb{Q}_+$ dicht in $\mathbb{R}_+$ liegt, gibt es für alle $t \geq 0$ eine Folge (q_n) in $\mathbb{Q}_+$, sodass $\lim_{n\to\infty} X_{q_n} - Y_{q_n} \neq 0$, sodass

$$= P\Big(\bigcup\nolimits_{t\in\mathbb{Q}_+}\{X_t \neq Y_t\}\Big)\,.$$

Da auch $\mathbb{Q}_+$ abzählbar ist, können wir mit dem gleichen Argument wie bei Teilaufgabe ii erkennen, dass

$$= 0\,.$$

iv) Sei $I = \mathbb{R}_+$ und die Prozesse X und Y gegeben durch $X_t = 0$ und $Y_t = \mathbb{1}_{Z=t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und eine Zufallsvariable $Z \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Welche Aussagen bezüglich Modifikation und Ununterscheidbarkeit lassen sich treffen?

Wir wollen zunächst zeigen, dass X eine Modifikation von Y ist. Sei hierfür $t \geq 0$ beliebig. Einsetzen der Definitionen von X und Y liefert $P(X_t \neq Y_t) = P(\mathbb{1}_{Z=t} \neq 0) = P(Z = t) = 0$, denn $\{Z = t\}$ ist eine P-Nullmenge. Y und Y sind allerdings unterscheidbar, denn $P(\exists s \geq 0\; Z = s) = P(\Omega) = 1$, da Z als Funktion auf ganz Ω definiert ist.

v) Geben Sie ein Beispiel von zwei stetigen Prozessen an, die zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Sei $\Omega = [0, 1]$ mit $P = \delta_0$ und $X_t(\omega) = \sin(\omega t)$ und $Y_t(\omega) = 0$. Es gilt $X_t(0) = 0 = Y_t(0)$, wodurch $P(\exists t \geq 0\; X_t \neq Y_t) = 1 - P(\forall t \geq 0 X_t = Y_t) \leq 1 - \delta_0(\{0\}) = 0$, sodass X und Y zwar ununterscheidbar, aber nicht gleich sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

i) Die σ-Algebra der T-Vergangenheit, definiert durch

$$\mathscr{F}_T := \left\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+\right\}$$

ist eine σ-Algebra.

Da $\emptyset \cap \{T \leq t\} = \emptyset \in \mathscr{F}_t$ und $\Omega \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, sind $\emptyset$ und Ω in $\mathscr{F}_T$. Für ein $B \in \mathscr{F}_T$ ist $B^C \in \mathscr{A}$, denn $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra. Außerdem ist $B^C \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \setminus (B \cap \{T \leq t\}) \in \mathscr{F}_t$, denn $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, da T eine Stoppzeit ist und $B \cap \{T \leq t\}$ nach Voraussetzung. Also gilt $B^C \in \mathscr{F}_T$. Schließlich gilt für $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}_T$, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$, denn $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra. Weiterhin ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \{T \leq t\}) \in \mathscr{F}_t$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ nach Voraussetzung und die σ-Algebra $\mathscr{F}_t$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Insgesamt ist $\mathscr{F}_T$ also eine σ-Algebra.

ii) Für die Stoppzeit $T \equiv t$ stimmt diese mit $\mathscr{F}_t$ überein für alle $t \geq 0$.

Hier gilt $\mathscr{F}_T = \left\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap \{t \leq t\} \in \mathscr{F}_t\right\} = \{A \in \mathscr{A} \mid A \in \mathscr{F}_t\} = \mathscr{F}_t$.

iii) Sind T und S Stoppzeiten mit $T \leq S$, so gilt $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}_S$.

Sei $A \in \mathscr{F}_T$, es gelte also für alle $t \geq 0$, dass $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da $T \leq S$, gilt $\{S \leq t\} \subseteq \{T \leq t\}$. Hierdurch ist $A \cap \{S \leq t\} = (A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\}$. Da $A \in \mathscr{F}_T$ ist $A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da S eine Stoppzeit ist, ist $\{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Da $\mathscr{F}_t$ eine σ-Algebra ist, ist dann auch $(A \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$. Somit ist $A \cap \{S \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, also $A \in \mathscr{F}_S$.