B1A1 Wir möchten zeigen, dass $\mu \mapsto F_\mu$ überhaupt in die Verteilungsfunktionen abbildet und dass diese Abbildung bijektiv ist. In der Tat ist $\mu(\emptyset) = 0$, sodass $F_\mu(-\infty) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}) = 1$, sodass $F_\mu(\infty) = 1$. Da μ endlich und σ-additiv ist, ist es nach Satz A.14 stetig von oben, sodass F_μ rechtsseitig stetig ist. Schließlich ist F_μ monoton, da μ nach Lemma A.10 monoton ist. Durch das oben Gesagte bildet $\mu \mapsto F_\mu$ tatsächlich in die Menge der Verteilungsfunktionen ab.

Zur Injektivität, sei $F_\mu = F_\nu$ auf $\{(-\infty, x]\}_{x\in\mathbb{Q}}$. Dann gilt auch nach Definition von F_μ, dass für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$. Betrachtet man die Zuordnung als Abbildung zwischen $\{(-\infty, x]\}_{x\in\mathbb{Q}} \times [0, 1]$ und $\mathbb{R} \times [0, 1]$, so sieht man schon mal die Isomorphie der Definitionsbereiche. Da $\{(-\infty, x]\}_{x\in\mathbb{Q}}$ die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt, gilt nach dem Eindeutigkeitssatz auch die Gleichheit auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass $\mu \mapsto F_\mu$ injektiv ist.

Zur Surjektivität sei eine Verteilungsfunktion F gegeben und wir suchen ein Maß μ, sodass $F = F_\mu$. Betrachte zunächst die Menge der reellwertigen Abbildungen auf $\{(a, b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ und ordne F die Abbildung $\tilde{\mu}\colon (a, b] \mapsto F(b) - F(a)$ zu. Dann gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \tilde{\mu}((a, a]) = F(a) - F(a) = 0$ für ein beliebiges a. Für $\{(a_i, b_i]\}_{i\leq n}$ disjunkt folgt $\tilde{\mu}(\sum^n (a_i, b_i]) = \sum^n (F(b_i) - F(a_i)) = \sum^n \tilde{\mu}((a_i, b_i])$, sodass F ein Inhalt auf $\{(a, b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ ist. Zudem wähle Folge $((a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{(a, b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$, dann ist, da F, sowie $\tilde{\mu}$ monoton sind und nicht kleiner werden, $\tilde{\mu}\big(\bigcup^\infty (a_i, b_i]\big) \leq \tilde{\mu}((\inf\{a_n\}, \sup\{b_n\}) \leq \sum^\infty (F(b_n) - F(a_n))$. $\tilde{\mu}$ ist somit σ-subadditiv und nach Lemma A.10 somit auch σ-additiv, also ein Prämaß auf $\{(a, b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$. Nach dem Erweiterungssatz von Carathéodory finden wir zum Prämaß $\tilde{\mu}$ ein Maß μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, welches auf $\{(a, b]\}_{a,b\in\mathbb{Q}}$ mit $\tilde{\mu}$ übereinstimmt und somit das Urbild von F ist. Wieder nach dem Eindeutigkeitssatz ist μ auf ganz $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert und somit $\mu \mapsto F_\mu$ surjektiv.

B1A3 Wir sollen für $f(x) = |x|$ die $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen g finden. Wir überlegen uns zunächst, was $\sigma(f)$ ist. f bildet Intervalle $(-\infty, x]$ auf $[-x, x]$ ab. Da $\{(-\infty, x]\}_{x\in\mathbb{Q}}$ die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugt, gilt für die von f erzeugte σ-Algebra $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(f^{-1}(\{(-\infty, x]\}_{x\in\mathbb{Q}}) = \sigma(\{[-x, x]\}_{x\in\mathbb{Q}})$. Hierbei muss $\sigma(\{[-x, x]\}_{x\in\mathbb{Q}})$ für alle aus $\{[-x, x]\}_{x\in\mathbb{Q}}$ die Komplemente, sowie beliebige Vereinigungen beinhalten. Die Komplemente sind gegeben durch die offenen Intervalle $\{(-\infty, x) \cup (x, \infty)\}_{x\in\mathbb{Q}}$. Durch beliebiges Vereinigen lassen sich in Analogie zu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebige Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen, mit der Einschränkung, dass für alle $x \in A$ gilt $-x \in A$. Aus dem oben Gesagten folgt, dass für $\sigma(f)$ gilt $\sigma(f) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid x \in A \implies -x \in A\}$.

Damit g $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, muss gelten $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \sigma(f)$, insbesondere muss für die einelementigen Mengen $\{x\}$ gelten $g^{-1}(\{x\}) \in \sigma(f)$. Die kleinsten Mengen aus $\sigma(f)$, die als $g^{-1}(\{x\})$ infrage kommen, sind $\{\pm g^{-1}(x)\}$, sodass alle $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Messbaren Funktionen die Borel-messbaren Funktionen g mit $g(-x) = g(x)$ sind.

B1A4 Für $A \in \mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ ist A^{C} in den beiden σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ enthalten und damit im Schnitt. Entsprechendes gilt für $\bigcup^{\infty} A_i$ mit A_i in $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$. Damit ist $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ eine σ-Algebra. $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ ist im Allgemeinen jedoch keine σ-Algebra. Sei nämlich $A \in \mathcal{A}, A \notin \mathcal{B}$ und $B \in \mathcal{B}, B \notin \mathcal{A}$, dann ist $A\cup B \notin \mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, denn wäre $A \cup B \in \mathcal{A}$, müsste wegen der Schnittstabilität von $\mathcal{A}$ auch $B \in \mathcal{A}$ sein, beziehungsweise wenn $A \cup B \in \mathcal{B}$, müsste wegen der Schnittstabilität von $\mathcal{B}$ auch $A \in \mathcal{B}$ sein – im Widerspruch zur Wahl von A und B.

B1A5 Wir sollen zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist. Es sind $\emptyset, \Omega \in \mathcal{D}$. Da Für alle $D \in \mathcal{D}$ auch $|D^{\mathrm{C}}|$ gerade ist, ist $D^{\mathrm{C}} \in \mathcal{D}$. Sind D_1 und D_2 disjunkt, so gilt $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$ und somit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. Haben $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ jedoch zum Beispiel einen einelementigen Schnitt, so ist $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2| - 1$ ungerade und damit $\mathcal{D}$ keine σ-Algebra.

B1A6 Hier setzen wir immer $A, B \in \mathcal{R}$ voraus. Wir zeigen die Äquivalenz von (a) und (b), (b) und (d) und (c) und (d).

(a) $\Longrightarrow$ (b) Es gilt $\emptyset = A\Delta A$. Da der Ring $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ abgeschlossen unter den Verknüpfungen ist, folgt die Behauptung.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Damit $(\mathcal{R}, \Delta, \cap)$ ein Ring ist, muss $(\mathcal{R}, \Delta)$ eine abelsche Gruppe sein, $(\mathcal{R}, \cap)$ eine Halbgruppe und das Distributivgesetz gelten.

Zur abelschen Gruppe, Δ hat auf $\mathcal{R}$ das neutrale Element $\emptyset$ und für ein $A \in \mathcal{R}$ das Inverse Element $A^{-1} = A$. Zum Distributivgesetz setzen wir die Definition von Δ in die ausgeklammerte Seite des Distributivgesetzes.

$(A \cap B)\Delta(B \cap C) = [(a \cap C) \setminus (B \cap C)] \cup [(B \cap C) \setminus (A \cap C)]\,.$
Mit Überlegungen, die man leicht mit Venn Diagrammen sehen kann, ergibt sich

$$= [(A \setminus B) \cap C] \cup [(B \setminus A) \cap C] = [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cup C\,,$$

und wieder durch die Definition von Δ

$$= (A\Delta B) \cap C\,.$$

Weiterhin sind Δ und $\cap$ kommutativ und assoziativ, sodass insgesamt $(\mathcal{R}, \Delta)$ eine abelsche Gruppe und $(\mathcal{R}, \cap)$ eine Halbgruppe ist.

(b) $\Longrightarrow$ (d) Falls $A \cap B, A\Delta B \in \mathcal{R}$ gilt $B \setminus A = B\Delta(A \cap B) \in \mathcal{R}$.

(d) $\Longrightarrow$ (b) Sind $B \setminus A, A \cup B \in \mathcal{R}$, gilt $A\Delta B \in \mathcal{R}$ nach Definition von Δ. Weiterhin ist $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B)$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Sind $A\Delta B, A \cup B \in \mathcal{R}$, gilt $B \setminus A = (A \cap B)\Delta B$.

(d) $\Longrightarrow$ (c) Hier gilt, wie bei (d) $\Longrightarrow$ (b), $A\Delta B \in \mathcal{R}$ wieder nach Definition von Δ.