Aufgabe 3 (Binomiales Modell; 6 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ und $P[\omega_u] = p = 1 - P[\omega_d]$. Die gehandelten Vermögenswerte werden durch den zweidimensionalen Prozess $S = (S^0, S^1)$ gegeben, mit

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1+r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \tag{1}$$

i) Zeige, dass es ein Maß $Q \sim P$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ gibt, so dass der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Ist dieses Marktmodell arbitragefrei?

Wir folgen der Argumentation von Beispiel 3.3.1 in [DS06]. Der diskontierte Prozess $X_t = (1, S_t^1/S_t^0)$ ergibt sich zu

$$X_0^0 \equiv 1, \quad X_1^0 \equiv 1, \quad X_0^1 \equiv s_0, \quad X_1^1(\omega_u) = s_0(1+\tilde{u}), \quad X_1^1 = s_0(1+\tilde{d}),$$

mit $1 + \tilde{u} = \frac{1+u}{1+r}$ und $1 + \tilde{d} = \frac{1+d}{1+r}$. Damit X ein Martingal unter Q ist, muss gelten $E_Q[X_1^i] = X_0^i$, also $Q[\omega_u] + Q[\omega_d] = 1$ und $s_0(1+\tilde{u})Q[\omega_u] + s_0(1+\tilde{d})Q[\omega_d] = s_0$. Schreiben wir $Q[\omega_u] = q$ gilt nach der ersten Gleichung $Q[\omega_d] = 1 - q$. Wenn wir das in die zweite Gleichung einsetzen ergibt sich $(1+\tilde{u})q + (1+\tilde{d})(1-q) = 1$, sodass $Q[\omega_u] = q = \frac{\tilde{d}}{\tilde{d}-u} = \frac{r-d}{u-d}$ und $Q[\omega_d] = 1 - q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}} = \frac{u-r}{u-d}$. Da $Q(A) = 0$ nur für $A = \emptyset$ gilt ist $Q \sim P$, sodass Q ein äquivalentes Martingalmaß ist. Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist dieses Marktmodell arbitragefrei.

ii) Angenommen, $p = 0{,}7$, $s_0 = 100$, $r = 0$, $1 + d = 0{,}8$ und $1 + u = 1{,}2$. Was ist das entsprechende risikoneutrale Maß? Zeige, dass $E_P[(S_1 - 100)^+]$ kein arbitragefreier Preis für $H = (S_1 - 100)^+$ (Kaufoption mit Ausübungspreis $K = 100$) ist.

Das risikoneutrale Maß ist das Martingalmaß Q aus Teilaufgabe (i). Durch Einsetzen der Werte erhalten wir $d = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$ und $u = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$, sodass $Q[\omega_u] = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-(-0{,}2)}{0{,}4} = \frac{1}{2} = 1 - Q[\omega_d] = Q[\omega_d]$. Das Maß P gegeben durch $P[\omega_u] = 0{,}7$ und $P[\omega_d] = 0{,}3$ ist kein äquivalentes Martingalmaß für H. Durch Einsetzen erhalten wir nämlich $S_1(\omega_u) = s_0(1 + u) = 120$ und $S_1(\omega_d) = 80$, sodass $H(\omega_u) = 20$ und $H(\omega_d) = 0$ und damit $E_P[H] = 0{,}7 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 0 = 14 \neq S_0^1 = 100$. Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist der Preis damit auch nicht arbitragefrei.

iii) Finden Sie einen Wert ξ_1, so dass $x + \xi_1(S_1 - S_0) = H$. Was ist der anfängliche Preis x? Berechnen Sie $E_Q[H]$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Um ξ_1 und x herauszufinden, lösen wir das lineare Gleichungssystem gegeben durch $x+\xi_1(S_1(\omega_u)-s_0) = H(\omega_u)$ und $x+\xi_1(S_1(\omega_d)-s_0) = H(\omega_d)$. Durch Einsetzen erhalten wir $x + 20\xi_1 = 20$ und $x - 20\xi_1 = 0$. Durch addieren der beiden Gleichungen erhalten wir $2x = 20$, sodass $x = 10$ und durch abziehen der zweiten Gleichung von der ersten $40\xi_1 = 20$, sodass $\xi_1 = \frac{1}{2}$. Schließlich berechnen wir durch Einsetzen $E_Q[H] = 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}5 \cdot 0 = 10$. Damit ist Q ein risikoneutrales Maß für die Kaufoption mit Ausübungspreis $K = 100$, falls der anfängliche Preis $x = 10$ ist. $E_Q[H] = 10$ ist dann ein arbitragefreier Preis für H.

References

[DS06] Delbaen, Freddy ; Schachermayer, Walter: *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Berlin Heidelberg, 2006