B9A2 Wir wollen zeigen, dass $\{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \mid (\mu,\sigma^2) \in L \subset \mathbb{R} \times (0,\infty)\}$ genau dann straff ist, wenn L beschränkt ist. Angenommen L ist beschränkt. Wir wollen zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ existiert, sodass für alle $(\mu,\sigma) \in L$ gilt $\mathcal{N}(\mu,\sigma)([-r,r]) > 1-\varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gilt

$$\mathcal{N}(\mu,\sigma)([-r,r]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-r}^{r} \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big]\mu(\mathrm{d}x)\,.$$

Substitution mit $z = (x-\mu)/\sigma$ liefert

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{(-r-\mu)/\sigma}^{(r-\mu)/\sigma} \exp\Big[-\frac{1}{2}z^2\Big]\mu(\mathrm{d}x)\,.$$

B9A4 Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $(P_i)_{i\in I}$ ist straff
2. Für alle Projektionen $\pi_1,\dots,\pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

Sei zunächst $(P_i)_{i\in I}$ straff. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \in \mathbb{R}^d$, sodass für alle $i \in I$ gilt $P_i(K) > 1-\varepsilon$. Da für alle $k \le d$ gilt, dass $K \subset \pi_k^{-1}\big(\pi_k(K)\big)$, gilt aufgrund der Monotonie des Maßes auch für alle $\varepsilon > 0$ und alle $i \in I$ dass $P_i^{\pi_k}\big(\pi_k(K)\big) > 1-\varepsilon$. Damit ist für $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ für alle Projektionen $\pi_1,\dots,\pi_d$ straff.

Seien nun für alle Projektionen $\pi_1,\dots,\pi_d$ die Familien der Bildmaße $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Kompakta $K_1,\dots,K_d$, sodass für alle $i \in I$ gilt $P_i^{\pi_k}(K_k) = P_i\big(\pi_k^{-1}(K_k)\big) > 1-\varepsilon$. Sei $r > 0$ so, dass $\overline{B}_r(0) \supset K_k$. Dann gilt auch $P_i^{\pi_k}\big(\overline{B}_r(0)\big) > 1-\varepsilon$. Betrachte $K = \bigtimes_{k=1}^d \overline{B}_r(0)$. Dann gilt für alle $i \in I$, dass $P_i(K) = P_i\big(\bigcap_{k=1}^d \{|\omega_k| \le r\}\big)$. Entsprechend gilt, dass

$$P_i(K^{\mathrm{c}}) = P_i\Big(\bigcup_{k=1}^d \{|\omega_k| > r\}\Big).$$

durch die σ-Subadditivität der Maße P_i können wir abschätzen

$$\le \sum_{k=1}^d P_i(|\omega_k| > r)\,,$$

wobei $\{|\omega_k| > r\} = \pi_k^{-1}\left(\overline{B}_r(0)^{\mathrm{c}}\right)$, sodass

$$\leq \sum\nolimits_{k=1}^{d} P_i^{\pi_k}\left(\overline{B}_r(0)^{\mathrm{c}}\right).$$

Da wir r so gewählt haben, dass $P_i^{\pi_k}\left(\overline{B}_r(0)\right) > 1 - \varepsilon$, erhalten wir

$$\leq d\varepsilon.$$

Sei nun $\delta > 0$ gegeben. Wähle $\varepsilon = \delta/d$, dann gilt für alle $i \in I$, dass $P_i(K) > 1 - \delta$. Somit ist (P_i) straff.