Wir betrachten ein stetiges Finanzmarktmodell

$$\mathcal{M} = \{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P), T, (S, B)\}$$

mit dem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ und einem Endzeitpunkt $0 < T < \infty$. Es sei $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ein Semimartingal und $(B_t)_{t\in[0,T]}$ ein Prozess gegeben durch $B_t = e^{-\int_t^T r_s ds}$, wobei r_s die Shortrate darstellt. Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß Q existiert, das den diskontierten Preisprozess zu einem Martingal macht.

Der Preis einer Call-Option ist dann gegeben durch

$$C_t = E_Q\left(e^{-\int_t^T r_s ds} C_T | \mathscr{F}_t\right) \,,$$

wobei $C_t = \max[S_T - K, 0]$ für einen Strike $K > 0$. Im Folgenden werden wir einen Fourier basierten Ansatz untersuchen, mit welchem wir in der Lage sind den Wert C_0 zu berechnen.

Definition 1 (Fourier Transformierte). Die Fourier Transformation einer integrierbaren Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx \,. \tag{1}$$

Durch die Fourier-Inversion erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \hat{f}(u) du$$

für $u \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + iu_i}^{\infty + iu_i} e^{-iux} \hat{f}(u) du \,,$$

für $u \in \mathbb{C}$ mit $u = u_r + iu_i$, wobei u_r und u_i den Real- bzw. Imaginärteil von u bezeichnen.

Definition 2 (Charakteristische Funktion). Sei X eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $q(x)$. Die charakteristische Funktion $\hat{q}$ von X ist die Fourier-Transformierte ihrer Dichte:

$$\hat{q}(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} q(x) dx = \mathbb{E}_Q\left(e^{iuX}\right) .$$

Aufgabe 1 (all-Option-Transformation; 4 Punkte). Zeigen Sie, für $u \in \mathbb{R}$ ist die Fourier-Transformierte von $C_T(u) = \max[e^u - K, 0]$ gegeben durch

$$\hat{C}_T(u) = -\frac{K^{iu+1}}{u^2 - iu} \,. \tag{2}$$

Lösung: aus [Sch10, Abschnitt 4.5]. Die Fourier-transformierte von $C_T(u)$ ist nach Gleichung (1) gegeben durch

$$\hat{C}_T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \max[e^u - K, 0] dx \,.$$

Hierbei verschwindet der Integrand, sobald $e^u - K < 0$ gilt, oder umgestellt für alle $x < \ln K$, sodass wir schreiben können

$$= \int_{\ln K}^{\infty} e^{iux}(e^x - K) dx \,.$$

Aufleiten ergibt

$$= \left(\frac{e^{(iu+1)x}}{iu+1} - K \frac{e^{iux}}{iu} \right) \Bigg|_{\ln K}^{x=\infty} \,.$$

Durch Einsetzen von $x = \infty$ verschwindet der Term *wobei nicht ganz klar ist, warum.* Einsetzten der unteren Grenze liefert

$$= -\left(\frac{K^{iu+1}}{iu+1} - K \frac{K^{iu}}{iu} \right) \,.$$

Erweitern mit iu beziehungsweise $iu + 1$ führt zu

$$= -\frac{K^{iu+1}}{u^2 - iu} \,,$$

wie in Gleichung 2.

Literatur

[Sch10] Schmelzle, Martin: Option pricing formulae using Fourier transform: Theory and application. In: *Preprint, http://pfadintegral.com* (2010)