Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien (H_1, d_1) und (H_2, d_2) metrische Räume, (H_2, d_2) vollständig und $D \subset H_1$ eine dichte Teilmenge von H_1. Weiter sei $f\colon D \subset H_1 \to H_2$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung $\tilde{f}\colon H_1 \to H_2$ gibt, sodass $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}|_D = f$ gilt.

Wir orientieren uns an [Pro23]. Wenn H_1 abgeschlossen ist, dann ist $D = H_1$ und wir können $\tilde{f} = f$ wählen. Sei also H_1 nicht abgeschlossen. Sei (a_n) eine konvergente Folge in D. Dann ist der Limes von $(f(a_n))$ nur von dem Limes von (a_n) abhängig, das heißt, es gibt eine Funktion $L\colon H_1 \to H_2$, sodass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L(\lim_{n\to\infty} a_n)$ für jede konvergente Folge (a_n). Sei nun $\tilde{f} = f(a)\mathbb{1}_D + L(a)\mathbb{1}_{H_1\setminus D}$. Wir möchten zeigen, dass g gleichmäßig stetig ist. Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Wir möchten zeigen, dass es ein $\delta' > 0$ gibt, sodass aus $a, b \in D$ und $d_1(a, b) < \delta'$ folgt $d_2(\tilde{f}(a, \tilde{f}(b))) < \varepsilon$. Da D dicht in H_1 liegt, gibt es Folgen (a_n) und (b_n) in D, sodass $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Nach Dreiecksungleichung erhalten wir $d_2(\tilde{f}(a, \tilde{f}(b))) \leq d_2(g_a, f(a_n)) + d_2(f(a_n), f(b_n)) + d_2(f(b_n), \tilde{f}(b))$. Da nach Definition von $\tilde{f}$ gilt $f(a_n) \to \tilde{f}(a)$ und $f(b_n) \to \tilde{f}(b)$, können wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $n > N_1$ gilt $d_2(\tilde{f}(a), f(a_n)) < \varepsilon/3$, sowie ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N_2$ gilt, dass $d_2(\tilde{f}(b), f(b_n)) < \varepsilon/3$. Wir suchen nun ein $N_3 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N_3$ gilt $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon/3$. Da f gleichmäßig stetig ist, können wir ein $\delta > 0$ finden, sodass aus $d_1(a_n, b_n) < \delta$ folgt $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon/3$. Wieder durch Dreiecksungleichung erhalten wir $d_1(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n)$. Da $a_n \to a$, können wir ein $M_1 \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $d(a_n, a) < \delta/3$ für alle $n > M_1$. Da $b_n \to b$, können wir ein $M_2 \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $d(b_n, b) < \delta/3$ für alle $n > M_2$. Somit gilt, aus $d_1(a, b) < \delta/3$ und $n > M_1 \vee M_2 =: N_3$ folgt $d_1(a_n, b_n) < \delta$ und somit $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon/3$. Sei nun $N = N_1 \vee N_2 \vee N_3$, dann gilt für alle $n > N$ wann immer $d_1(a, b) < \delta/3$, dass $d_2(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) \leq d_2(\tilde{f}(a), f(a_n)) + d_2(f(a_n), f(b_n)) + d_2(f(b_n), \tilde{f}(b)) < \varepsilon$, sodass $d_2(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) < \varepsilon$, wann immer $d_1(a, b) < \delta/3$ und $\tilde{f}$ schließlich gleichmäßig stetig ist.

Zur Eindeutigkeit, sei f' eine andere stetige Funktion, die die Bedingungen an $\tilde{f}$ erfüllt. Dann haben wir für jedes $a \in D$ und jede Folge (a_n) mit $a_n \to a$, dass $f'(a_n) \to f'(a)$ und $f(a_n) \to \tilde{f}(a)$. Da $h|_D = f$, erhalten wir $f(a_n) \to f'(a)$. Da der Limes der Konvergenz eindeutig ist, erhalten wir $f'(a) = \tilde{f}(a)$.

Zeigen Sie mit 3 Gegenbeispielen, dass folgende Annahmen notwendig sind

i) (H_2, d_2) ist vollständig.

Seien $H_1 = [0,1]$, $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $H_2 = [0,1] \setminus \{\pi^{-1}\}$, $f = \mathbb{1}_{(\pi^{-1},1]}$. Dann ist f stetig auf D, kann aber nicht zu einer Funktion auf $[0,1]$, die stetig in π^{-1} ist, erweitert werden.

ii) f ist gleichmäßig stetig.

Sei $H_1 = H_2 = [0,\infty)$, $D = (0,\infty)$, $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist f nicht gleichmäßig stetig, es existiert aber auch nicht der Limes $\lim_{x\downarrow 0} f(x)$, sodass f nicht auf H_1 erweitert werden kann.

iii) D ist dicht in H_1.

Sei $H_1 = H_2 = \mathbb{R}$, $D = [0,\infty)$, $f = \mathrm{id}$, dann sind $\tilde{f}_1 = \mathrm{id}$ und $\tilde{f}_2 = \mathrm{id}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ zwei Erweiterungen von f, die die geforderten Eigenschaften erfüllen.

References

[Pro23] ProofWiki: *Uniformly Continuous Function to Complete Metric Space has Unique Continuous Extension to Closure of Domain.* `https://proofwiki.org/wiki/Uniformly_Continuous_Function_to_Complete_Metric_Space_has_Unique_Continuous_Extension_to_Closure_of_Domain`, 2023. – Accessed: 2023-12-07