

Lieber Moritz, es wäre super, wenn du deine Musterlösung für das Blatt direkt hochladen könntest. Dann könnten wir sie uns vor der Übung anschauen und hätten es einfacher zu folgen ☺

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und T und S Stoppzeiten. Zeigen Sie

$$\text{i) } \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{T \wedge S}.$$

Sei zunächst $A \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$. Da $T \wedge S \leq S, T$ gilt nach Lemma 12 $A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. Sei nun $A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. Nach Definition von \mathcal{F}_T und \mathcal{F}_S gilt $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ und $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Da \mathcal{F}_t eine σ -Algebra ist, gilt $A \cap (\{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$. Die Behauptung folgt, denn $\{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} = \{S \leq t \text{ oder } T \leq t\} = \{S \wedge T \leq t\}$.

$$\text{ii) Für } Y \in L^1 \text{ gilt } E[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathcal{F}_S] = E[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathcal{F}_T]$$

Nach Definition des bedingten Erwartungswertes müssen wir zwei Sachen zeigen. Erstens, dass $E[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathcal{F}_T]$ \mathcal{F}_S -messbar ist und zweitens, die definierende Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes, die besagt, dass für alle $F_S \in \mathcal{F}_S$ gilt $E[\mathbb{1}_{F_S} [Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathcal{F}_T]] = E[\mathbb{1}_{F_S} Y \mathbb{1}_{\{S=T\}}]$. *Die Messbarkeit ist noch zu zeigen.* Um die definierende Eigenschaft zu zeigen betrachte ein $F_S \in \mathcal{F}_S$. Nach Lemma 12.vi gilt $\mathcal{F}_S \cap \{S = T\} \in \mathcal{F}_T$. Da jedes Y einen bedingten Erwartungswertes bezüglich \mathcal{F}_T hat erhalten wir $E[\mathbb{1}_{F_S \cap \{S=T\}} Y] = E[\mathbb{1}_{F_S \cap \{S=T\}} E[Y | \mathcal{F}_T]] = E[\mathbb{1}_{F_S} E[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathcal{F}_T]]$, denn $\{S = T\} \in \mathcal{F}_T$ nach Lemma 15.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Zeigen Sie das *Optional Stopping Theorem*: Sei T eine Stoppzeit und X ein \mathbb{F} -Supermartingal. Dann ist der gestoppte Prozess X^T wieder ein Supermartingal bzgl. der Filtrationen \mathbb{F} und $\mathbb{F}^T = (\mathcal{F}_{T \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Hinweis: Dieses Resultat gilt analog für Submartingale und Martingale.

Wir gehen anhand des Beweises von Theorem 18 in [PP05] vor. Da $t \wedge T \leq T$ gilt mit dem Optional Sampling Theorem

$$X_{t \wedge T} \geq E[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}].$$

wir benutzen die Zerlegung $1 = \mathbb{1}_{\{T < t\}} + \mathbb{1}_{\{T \geq t\}}$ und erhalten

$$= E[X_T \mathbb{1}_{\{T < t\}} + X_T \mathbb{1}_{\{T \geq t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}].$$

Auf $\{T < t\}$ ist $t \wedge T = T$. Daher ist $X_T \mathbb{1}_{\{T < t\}}$ $\mathcal{F}_{t \wedge T}$ -messbar, wodurch

$$= X_T \mathbb{1}_{\{T < t\}} + E[X_T \mathbb{1}_{\{T \geq t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}].$$

Definition 1. Ein *einfacher Prozess* H (in Finanzmathe auch: *einfache Handelsstrategie*) ist ein \mathbb{R}^d -wertiger adaptierter stochastischer Prozess der Form

$$H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$$

für endliche Stoppzeiten $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n < \infty$ und $h_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{\tau_{i-1}})$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Definition 2. Sei S ein \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozess und H ein einfacher Prozess nach Definition 1. Das *stochastische Integral für einfache Prozesse* $H \cdot S$ ist definiert durch

$$(H \cdot S)_t := \int_0^t H_s dS_s := \sum_{i=1}^n \langle h_i, S_t^{\tau_i} - S_t^{\tau_{i-1}} \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte).

- iii) Zeigen Sie: Für ein Martingal S und einen einfachen Prozess H ist das stochastische Integral $H \cdot S$ auch ein Martingal.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage iii) für $d = 1$ und $H \cdot S = h(S^{T_2} - S^{T_1})$ für eine \mathcal{F}_{T_1} -messbare Zufallsvariable $h \in L^\infty$ und Stoppzeiten $T_2 \geq T_1$. Wieso genügt das? Um die vereinfachte Aussage zu zeigen, ist die Fallunterscheidung $1 = \mathbb{1}_{\{T_1 > s\}} + \mathbb{1}_{\{T_1 \leq s < T_2\}} + \mathbb{1}_{\{T_2 \leq s\}}$ sehr hilfreich.

References

- [PP05] PROTTER, Philip E. ; PROTTER, Philip E.: *Stochastic differential equations*. Springer, 2005