Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in \mathbb{Z}\colon P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j).$$

Wir verwenden die Rücktransformation der charakteristischen Funktionen φ_n und φ von Y_n und Y. Für φ gilt

$$P(X = j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t \,.$$

In der Tat gilt mit der Definition der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} E_k \big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\big] \mathrm{d}t \,.$$

Da E_k nur Masse bei $X = k$ hat erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} P(X = k) \mathrm{d}t$$

Zusammenfassen liefert, *wobei man sich eventuell überlegen sollte, ob man die Summe und das Integral vertauschen darf*

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \mathrm{d}t \,.$$

Wenn $k - j = 0$, so ist der Integrand 1. Wenn $k - j = \ell \neq 0$, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\ell} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi}\big) = \frac{1}{\mathrm{i}\ell} \big((\pm 1) - (\pm 1)\big) = 0 \,.$$

Eingesetzt in die obige Rechnung verschwinden somit alle Summanden mit $k \neq j$ und wir erhalten die Darstellung für die Rücktransformation der charakteristischen Funktion. Entsprechendes gilt dann auch für Y_n und φ_n. Mithilfe dieser Rücktransformationen erhalten wir die gesuchte Konvergenz. Für den Abstand von $P(Y_n = j)$ und $P(Y = j)$ gilt mithilfe

Rücktransformation

$$|P(Y_n = j) - P(Y = j)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi_n \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi \mathrm{d}t \right| .$$

Mit Zusammenfassen und der „Dreiecksungleichung“ des Integrals können wir abschätzen

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}tj} \big(\varphi_n(t) - \varphi(t) \big) \right| \mathrm{d}t \, .$$

Das vereinfacht sich, weil $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}\right| = 1$. Weiterhin konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen $\varphi(t)$ nach dem Portmanteau-Theorem, denn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}$ ist Lipschitz-stetig. Da $|\varphi_n(t)| \leq 1$ können wir schließlich den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden und erhalten

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 \, .$$

Wenn andererseits für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j)$, dann gilt auch $\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)P(Y = j)$ für alle $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}$ und somit $Y_n \Rightarrow Y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Sei hierfür ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ und ein $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt

$$\int f \mathrm{d}P = \sup \left\{ \int g \mathrm{d}P \;\middle|\; g \leq f \textit{ einfach} \right\}$$

wobei einfach heißt, dass Folgen (α_n) in $\mathbb{R}$ und $(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ existieren, sodass $g = \sum \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ und $\int g \mathrm{d}P = \sum \alpha_n P(A_n)$. Gebe es eine Folge diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße (P_n), sodass P schwacher Limes von (P_n) ist, dann wäre $\int f \mathrm{d}P_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P_n(X = j)$. Eventuell kann man auch die Konstruktion $\frac{1}{n} \sum \delta_{k/n}$ aus Aufgabe 1 von Blatt 9 verwenden. Außerdem gibt es die einfache Funktion $S_J := \sum_{j=-J}^{J} f(j) \mathbb{1}_{X^{-1}\{j\}}$, die g approximiert, vergleiche [Gir].

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \in (0,\infty)$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n exponentialverteilt mit Parameter α_n ist, das heißt, X_n besitzt die Dichte

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\alpha_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\,.$$

Zeigen Sie die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$, falls $\alpha_n\to\infty$ für $n\to\infty$.

Wir wollen den Satz von Lévy verwenden. Demnach konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, wenn $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$. Es gilt $\varphi_n(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \mathrm{i}t}$ und mit dem Satz von de L'Hospital $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \mathrm{i}t} = 1$. Da 1 stetig in 0 ist, konvergiert also auch (X_n).

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und den Dirac Maßen auf $\mathbb{R}$ mit der schwachen Konvergenz gibt.

Es gilt,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x\in A\,,\\ 0, & x\notin A\,. \end{cases}$$

Die Topologie auf den Dirac Maßen ist die gröbste Topologie, sodass für alle $f\in\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ die Abbildung $\delta_x \mapsto \int f\delta_x(\mathrm{d}y) = f(x)$ stetig ist. Wir nehmen an, dass der Homöomorphismus $x\mapsto\delta_x$ ist. Da x der einzige Parameter von δ_x ist, ist dieser schon mal bijektiv.

Die Prohorov-Metrik d_P ist in Bemerkung 13.14.iii in [Kle20] definiert. Sei $d'_\mathrm{P}(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon>0 : \mu(B)\leq\nu(B^\varepsilon)+\varepsilon$ für jedes $B\in\mathcal{B}(E)\}$. Dann ist $d_\mathrm{P}(\mu,\nu) := \max\{d'_\mathrm{P}(\mu,\nu), d'_\mathrm{P}(\nu,\mu)\}$.

In [Ana] steht, $d_\mathrm{P}(\delta_x,\delta_y) = d(x,y)\wedge 1$. *Das sollte noch nachgerechnet werden.*

Wir zeigen noch, dass $x\mapsto\delta_x$ und $\delta_x\mapsto x$ stetig sind, also, dass Bilder und Urbilder offener Mengen offen sind. Sei $U\subset\mathbb{R}$ offen. Sei δ_x in δ_U gegeben. Sei $\varepsilon>0$ so, dass $B_\varepsilon(x)\subset U$. Dann gilt für ein $\delta_y\in\delta_U$, dass $|x-y|<\varepsilon$, also auch $d_\mathrm{P}(\delta_x,\delta_y) = |x-y|\wedge 1 < \varepsilon$. Somit ist δ_U offen. Sei nun andererseits δ_U offen. Sei $x\in U$ gegeben. Sei $0<\varepsilon<1$ so, dass

$B_\varepsilon\big(\delta(x)\big) \subset \delta_U$. Dann gilt für ein $y \in U$, dass $d_{\mathrm{P}}(x, y) = |x - y| \wedge 1 < \varepsilon$, also auch, dass $|x - y| < \varepsilon$, denn, $\varepsilon < 1$. Das heißt, $B_\varepsilon(x) \subset U$, also ist U offen.

Literatur

[Ana] Analyst: *Compute explicitly Lévy–Prokhorov metric for* 2 *finite Dirac measures.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/4438264`. – 2022-04-28

[Gir] Giraudo, Davide: *Equivalence of Lebesgue expectation to discrete expectation for discrete random variables.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/217980`. – 2012-10-21

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)