Definition 1 (T-Forward-Measure). Sei $(B_t)_{t\leq T}$, $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$ der Bankkonto/Numéraire in einem Finanzmarkt. Wenn $\mathbb{Q}$ ein risikoneutrales Maß ist, dann ist das Forward measure $\mathbb{Q}^T$ auf $\mathscr{F}_T$ definiert durch den Radon-Nikodym-Dichteprozess Z bezüglich $\mathbb{Q}$, gegeben durch

$$Z_t = \frac{P_t(T)}{P_0(T)B_t}\,.$$

Definition 2 (Zero-Coupon Bond). Der Prozess $(P_t(T))_{t\geq T}$ bezeichne den Preis einer Geldeinheit bei T am Zeitpunkt $t \leq T$. Dieser wird zero-coupon bond (Nullkuponanleihe) genannt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.** Betrachten Sie das Modell für die Instantaneous Forward Rate

$$f_t(T) = f_0(T) + \int_0^t \alpha_s(T)ds + \int_0^t \sigma_s(T)dW_s$$

mit einem Standard-Q-Wienerprozess W. Hierbei gilt folgende Gleichheit:

$$P_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)\,.$$

Wir fixieren T und S.

1. Zeigen Sie, dass der Dichteprozess von Q^S bezüglich Q^T gegeben ist durch
$$\frac{P_0(T)}{P_0(S)}\frac{P(S)}{P(T)}\,.$$

Nach Definition 1 gilt

$$\frac{dQ^S}{dQ^T} = \frac{dQ^S}{dQ}\frac{dQ}{dQ^T} = \frac{P(S)}{P_0(S)B_t}\frac{P_0(T)B_t}{P_t(T)} = \frac{P_0(T)}{P_0(S)}\frac{P(S)}{P(T)}\,.$$