Aufgabe 2 (4 Punkte). Zeigen Sie $\mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathcal{V} \subset \mathscr{A}_{\text{loc}}$

Hinweis: Betrachten Sie für $A \in \mathscr{M} \cap \mathcal{V}$ die Stoppzeitenfolge $T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \operatorname{Var}(A) > n\}$

Das ist Lemma 3.11 in [JS13]. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $A \in \mathscr{M} \cap \mathcal{V}$ gilt $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$. *Hierfür fehlt die Begründung.* Entsprechend Hinweis wählen wir $T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \operatorname{Var}(A)_t > n\}$. Damit gilt $T_n \uparrow \infty$. Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt nach Aufgabe 1.1, dass $|A_{t-}| \leq \operatorname{Var}(A)_{t-}$. Weiterhin gilt nach Aufgabe 1.2 und 1.3, dass $\Delta[\operatorname{Var}(A)]_t = |\Delta A_t| \leq |A_{t-}| + |A_t|$. Das heißt, $\operatorname{Var}(A)_{T_n} \leq 2n + |A_{T_n}|$. *Hier fehlt ebenfalls die Begründung.* Es gilt $A \in \mathscr{M}$. Nach dem Doobschen Grenzwertsatz gilt $E[|A_{T_n}|] < \infty$. Mit der gefundenen Abschätzung gilt auch $E[|\operatorname{Var}(A)_{T_n}|] < \infty$, also $\operatorname{Var}(A) \in \mathscr{A}^+_{\text{loc}}$. Das heißt $A \in \mathscr{A}_{\text{loc}}$.

References

[JS13] Jacod, Jean ; Shiryaev, Albert: *Limit theorems for stochastic processes*. Bd. 288. Springer Science & Business Media, 2013