Aufgabe 2 (CIR-Prozess; 4 Punkte)**.**

1. Überprüfen Sie die Zulässigkeitsbedingungen in [DFS03], um herauszufinden, unter welchen Bedingungen an $b, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$ ein affinierter Prozess X auf $\mathbb{R}_+$ existiert, der

$$dX_t = (b + \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

   für eine Brownsche Bewegung W erfüllt.

2. Schreiben Sie die Funktionen F und R auf, die diesen Parametern gemäß [CT13, Theorem 7] oder [DFS03, Theorem 2.7] zugeordnet sind und finden Sie Lösungen $\phi, \psi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ der Riccati-Gleichungen

$$\partial_t\phi(t,u) = F\big(\psi(t,u)\big), \quad \partial_t\psi(t,u) = R\big(\psi(t,u)\big)\,.$$

   Hinweis: Sie können die Lösungen ϕ, ψ in der Literatur finden und überprüfen, dass sie die Riccati-Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{t\nearrow 1} E[B_t] = 0$.

Lösung. Wir definieren $Y_t := (1 - t)$. Dann gilt mit der Definition des stochastischen Integrals, mit $W_0 = 0$ und mit der partiellen Integration

$$B_t = Y_t(1/Y \cdot W)_t = \big(Y \cdot (1/Y \cdot W)\big)_t + \big((1/Y \cdot W) \cdot Y\big)_t + \big[Y, (1/Y \cdot W)\big]_t$$

denn Y und $1/Y \cdot W$ sind stetig. Da Y stetig ist, gilt mit Theorem 81.iv, dass $\big[Y, (1/Y \cdot W)\big] = 0$. Mit der Kettenregel folgt dann *wobei ich nicht ganz weiß, wie die Kettenregel funktioniert,*

$$\big(Y \cdot (1/Y \cdot W)\big)_t = W_t$$

und da $dY = Y'dt$ folgt

$$\big((1/Y \cdot W) \cdot Y\big)_t = -\int_0^t 1/Y \cdot W_s ds\,.$$

Insgesamt erhält man die Darstellung

$$dB_t = -\frac{B_t}{1 = t}dt + dW_t\,.$$

Für den zweiten Teil gilt, weil Y deterministisch ist

$$E\big[Y_t^2(1/Y \cdot W)_t^2\big] = Y_t^2 E\big[(1/Y \cdot W)_t^2\big]\,.$$

Mit der Itô-Isometrie können wir schreiben

$$= Y_t^2 \left[\int_0^t (1/Y_s)^2 d\langle W\rangle_s\right]$$

Nun ist $\langle W\rangle_t = t$ und $(1/Y_t)' = (1/Y_t)^2$, sodass

$$= (1-t)^2 E\left[\frac{1}{1-s}\bigg|_{s=0}^{t}\right] = t(1-t)\,,$$

wodurch

$$\lim_{t \nearrow 1} E[B_t] = \lim_{t \nearrow 1} t(1-t) = 0\,.$$

Literatur

[CT13] Cuchiero, Christa ; Teichmann, Josef: Path properties and regularity of affine processes on general state spaces. In: *Séminaire de probabilités XLV* (2013), S. 201–244

[DFS03] Duffie, D. ; Filipović, D. ; Schachermayer, W.: Affine processes and applications in finance. In: *The Annals of Applied Probability* 13 (2003), Nr. 3, 984 – 1053. http://dx.doi.org/10.1214/aoap/1060202833. – DOI 10.1214/aoap/1060202833