Aufgabe 1 4 Punkte)**.** Sei W eine Standard-Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, P)$ und H ein beschränkter, previsibler Prozess. Sei X ein stochastischer Prozess definiert durch

$$X_t = \int_0^t H_s ds + W_t \,.$$

Definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß Q durch

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 ds} \,,$$

mit $T > 0$. Zeigen Sie, dass X unter Q eine Standard-Brown'sche Bewegung bis zum Zeitpunkt T ist.

Lösung. Vergleiche [Pro05, Theorem 42]. Schreibe $Z_t = E[\frac{dQ}{dP}|\mathscr{F}_t]$. Nach Theorem 86 löst Z

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_{s-} H_s dW_s \,.$$

Nach dem Satz von Girsanov ist

$$N_t = W_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, W]_s \tag{1}$$

ein Q-lokales Martingal. Allerdings gilt mit der Definition von Z

$$[Z, W]_t = [-Z_- H \cdot W, W]_t \,.$$

Mit der Definition der quadratischen Kovariation und den Rechenregeln für das stochastische Integral erhalten wir, *wobei noch nicht ganz klar ist, wie*,

$$= \int_0^t -Z_s H_s d[W, W]_s = -\int_0^t Z_s H_s ds \,,$$

denn für eine Brown'sche Bewegung gilt $[W, W]_t = t$. Deshalb gilt mit

Einsetzen in Gleichung (1)

$$N_t = W_t - \int_0^t -\frac{1}{Z_s} Z_s H_s ds = W_t + \int_0^t H_s ds = X_t \,,$$

wie in der Aufgabenstellung gegeben. Damit ist auch X ein Q-lokales Martingal. Da $\left(\int_0^t H_s ds\right)_{t\geq 0}$ ein stetiger Prozess endlicher Variation ist, gilt $[X,X]_t = [W,W]_t = t$. Mit Theorem 2.1 aus Moritz' Skript kriegen wir schließlich, dass X eine Standard Brown'sche Bewegung ist.

Literatur

[Pro05] *Kapitel* III. In: Protter, Philip E.: *Semimartingales and Stochastic Integrals*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. – ISBN 978–3–662–10061–5, 51–100