B6A1 Seien $X_1, X_2, \dots$ *iid* uniform auf $[0,1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Beispiel 5.21 in [Kle20], funktioniert mit starkem Gesetz der großen Zahlen. Betrachte hierzu die Zufallsvariablen $f(X_i)$. Das Starke Gesetz der großen Zahlen gemäß Theorem 51 lautet hierfür, dass für reellwertige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|f(X_1)|] < \infty$ gilt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to E[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}P = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Nach dem Blockungslemma 30 sind diese ebenfalls unabhängig. Die $f(X_i)$ sind ebenfalls identisch verteilt, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $(f \circ X_i)_\# P = P \circ X_i^{-1} \circ f^{-1} = P \circ X_1^{-1} \circ f^{-1}$, weil die X_i identisch verteilt sind. Somit können wir das starke Gesetz der großen Zahlen mit L^1-Voraussetzung, quasi Theorem 51, benutzen. Nach diesem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) E[f(X_1)]\,.$$

Mit der Definition des Erwartungswertes folgt

$$= \int f \circ X_1 \mathrm{d}P\,.$$

weil X_1 uniform auf $[0,1]$ verteilt ist, kriegen wir

$$= \int_0^1 f \circ \mathrm{id}(x)\lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

B6A2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i^{(n)} - E\big[X_i^{(n)}\big]\big) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty\,.$$

Seien $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben und betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$Y_i = \begin{cases} \frac{X_i^{(n)}}{n} & \text{falls } i \leq n \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Da $X_i^{(n)} \in L^2$ gilt auch $Y_i \in L^2$. Da nach Aufgabenstellung gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[Y_i\big] = 0$, kann ich n_0 so wählen, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_i) < \delta$. Wir haben dann mit der Definition von $(Y_i)_i$

$$P\Big(\frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \big(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]\big) > \varepsilon\Big) = P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i - E[Y_i]\Big| > \varepsilon\Big)\,,$$

sowie nach der Maximalungleichung aus Satz 42

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}(Y_i)}{\varepsilon^2}\,.$$

Nach der Wahl von n_0 gilt für alle $n \geq n_0$, dass $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_i) < \delta$. Somit gilt insgesamt schließlich

$$< \delta\,,$$

sodass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) \xrightarrow{P} 0$.

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n\log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E[X_i]) \xrightarrow{P} 0\,.$$

https://math.stackexchange.com/questions/1288502/sequence-satisfies-weak-law-of-large-numbers-but-doesnt-satisfy-strong-law-of-l

Zeigen Sie weiter, dass die obige Folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel–Cantelli.

B6A3 Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $V := \sup\{\mathrm{Var}[X_n] : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie $k_n = 2^n$ *und* $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und betrachten Sie* $l(k_{n+1})/l(k_n)$*. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes* n *und für* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k_{n-1} \le k \le k_n$ *gilt* $\frac{|S_k|}{l(k)} \le \frac{2|S_k|}{l(k_n)}$*. Verwenden Sie nun die Kolmogorov'sche Ungleichung und Borel–Cantelli, um zu zeigen, dass für beliebiges* $\delta > 0$ *gilt, dass* $\limsup_{n\to\infty} l(k_n)^{-1} \max\{|S_k| : k \le k_n\} \le \delta$ *fast sicher.*

B6A4 Beweisen Sie folgende Aussagen

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, dann folgt $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $a_{n_k} \to a$, dann folgt $a_n \to a$.

Hinweis: Diese zwei Aussagen wurden im Beweis von Lemma 43 verwendet. Es ist sinnvoll, diesen nach dem Bearbeiten der Übungsaufgabe zu wiederholen.

Literatur

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)