Aufgabe 5 (2 Punkte). Betrachten Sie das Modell aus Aufgabe 3 und die Funktion v_t aus Aufgabe 4. Geben Sie eine explizite Darstellung für v_t an, falls $H = h(S_T)$.

Das wurde in Beispiel 5.42. in [HF16] gemacht. Nach Aufgabe 4 ist für $t = T-1, \ldots, 0$

$$v_T(x_0, \ldots, x_T) = h(x_0, \ldots, x_T)\,,$$

$$v_t(x_0, \ldots, x_t) = q v_{t+1}(x_0 \ldots, x_t, x_t(1+b)) + (1-q) v_{t+1}(x_0, \ldots, x_t, x_t(1+a))\,.$$

Wenn man nun $H = h(S_T)$ verwendet, so gilt mit $\bar{q} = 1-q$, $\hat{a} = 1+a$ und $\hat{b} = 1+b$

$$\begin{aligned}
v_T(x_T) &= h(x_T) \\
v_{T-1}(x_{T-1}) &= q h(x_{T-1}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-1}\hat{a}) \\
v_{T-2}(x_{T-2}) &= q v_{T-1}(x_{T-2}\hat{b}) + \bar{q} v_{T-1}(x_{T-2}\hat{a}) \\
&= q\Big(q h(x_{T-2}\hat{b}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-2}\hat{b}\hat{a})\Big) \\
&\quad + \bar{q}\Big(q h(x_{T-2}\hat{a}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-2}\hat{a}\hat{a})\Big) \\
&= q^2 \bar{q}^0 h(x_{T-2}\hat{b}^2\hat{a}^0) + 2q^1\bar{q}^1 h(x_{T-2}\hat{b}^1\hat{a}^1) + q^0\bar{q}^2 h(x_{T-2}\hat{b}^0\hat{a}^2)\,.
\end{aligned}$$

Dementsprechend ergibt sich für $v_{T-3}(x_{T-3})$

$$\begin{aligned}
v_{T-3}(x_{T-3}) &= q^3\bar{q}^0 h(x_{T-3}\hat{b}^3\hat{a}^0) + 3q^2\bar{q}^1 h(x_{T-3}\hat{b}^2\hat{a}^1) \\
&\quad + 3q^1\bar{q}^2 h(x_{T-3}\hat{b}^1\hat{q}^2) + q^0\bar{q}^3 h(x_{T-3}\hat{b}^0\hat{a}^3)\,,
\end{aligned}$$

und insgesamt mit dem Pascalschen Dreieck

$$v_t(x_t) = \sum_{k=0}^{T-t} h\tbinom{T-t}{k} q^k \bar{q}^{T-t-k} h(x_t \hat{b}^k \hat{a}^{T-t-k})\,.$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)**.** Betrachten Sie das Modell aus Aufgabe 3. Geben Sie die zu Aufgabe 4 korrespondierende replizierende Strategie explizit an.

Das ist Proposition 5.44 aus [HF16]. Wir behaupten, die replizierende Strategie hat die Form

$$\xi_t(\omega) = \Delta_t(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{t-1}(\omega)),$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\Delta_t(x_0, \ldots, x_{t-1}) \\
&:= (1+r)^t \frac{v_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}\hat{b}) - v_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}\hat{a})}{x_{t-1}\hat{b} - x_{t-1}\hat{a}} .
\end{aligned} \tag{1}$$

Damit ξ_t eine replizierende Strategie ist, muss gelten,

$$\xi_t(\omega)(X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)) = V_t(\omega) - V_{t-1}(\omega) \tag{2}$$

wobei nach Definition einer replizierenden Strategie zu erwarten wäre, dass gilt $\xi_t(\omega)X_t(\omega) = V_t(\omega)$. Nach Definition von X_t und V_t hängen X_{t-1} und V_{t-1} nur von den ersten $t-1$ Komponenten von ω ab. Auch ξ_t hängt nur von den ersten $t-1$ Komponenten von ω ab (*wobei unklar ist, warum*). Für ein festes t seien

$$\omega^{\pm} := (y_1, \ldots, y_{t-1}, \pm 1, y_{t+1}, \ldots, y_T),$$

Sodass $R_t(\omega^+) = b$ und $R_t(\omega^-) = a$. Einsetzen in (2) liefert

$$\begin{aligned}
\xi_t(\omega)\big(X_{t-1}(\omega)\hat{b}/(1+r) - X_{t-1}(\omega)\big) &= V_t(\omega^+) - V_{t-1}(\omega), \\
\xi_t(\omega)\big(X_{t-1}(\omega)\hat{a}/(1+r) - X_{t-1}(\omega)\big) &= V_t(\omega^-) - V_{t-1}(\omega)
\end{aligned}$$

und mit Umstellen nach ξ_t erhalten wir

$$\xi_t(\omega) = (1+r)\frac{V_t(\omega^+) - V_t(\omega^-)}{X_{t-1}(\omega)(\hat{b} - \hat{a})}$$

Nach der Definition X_t aus Aufgabe 3 und von $V_t(\omega)$ aus Aufgabe 4 hat dann ξ_t unter Verwendung von Δ_t aus (1) die Form

$$= \Delta\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_{t-1}(\omega)\big)$$

Literatur

[HF16] HANS FÖLLMER, Alexander S.: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. 4th REV. ed. de Gruyter, 2016 (de Gruyter Textbook). – ISBN 311046344X; 9783110463446