

Satz 6 Hier haben wir verschiedene Ungleichungen Für Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und \mathcal{L}^p -Normen zu Verfügung. Seien X, Y reellwertige Zufallsvariable. Dann gilt folgendes.

(i) Die *Markov-Ungleichung* – Sei $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton wachsend, $\varepsilon > 0$ so, dass $f(\varepsilon) > 0$. Dann gilt

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\varepsilon)}.$$

(ii) Die *Tschebyscheff-Ungleichung* – ist $E[X^2] < \infty$, so gilt

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

(iii) Die *Hölder-Ungleichung* – Für $0 < p, q, r \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gilt

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

(iv) Die *Minkowski-Ungleichung* – für $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

(v) Das Analogon der Minkowski-Ungleichung im konkaven Fall – für $0 < p < 1$ gilt

$$E[|X + Y|^p] \leq E[|X|^p] + E[|Y|^p].$$

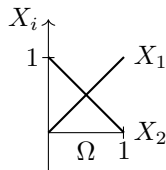
(vi) Eine Abschätzung Normen verschiedener \mathcal{L}^p -Räume. Für $p \leq q$ und $X \in \mathcal{L}^q$ gilt

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q.$$

Satz 8 Die *Jensen-Ungleichung* – sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $X \in \mathcal{L}^1$, dann gilt

$$E[g(X)] \geq g(E[X]).$$

B4A1.1 Haben $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ die gleiche Verteilung auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda|_{[0, 1]})$? Ja. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 auf $[0, 1]$ sehen wie in der folgenden Skizze aus.



Es reicht, die Verteilung auf $\{[a, b]\}_{a, b \in \mathbb{Q}}$ zu betrachten. Wegen dem Eindeutigkeitssatz A.16 wird die Verteilung auf ganz $\mathcal{B}([0, 1])$ gleich sein. Die Verteilung von X_1 ist $P_{\#}X_1 = P \circ X_1^{-1}$. Aus der Skizze erkennt man, $X_1^{-1}([a, b]) = [a, b]$, sodass $P_{\#}X_1([a, b]) = \lambda|_{[0, 1]}([a, b]) = b - a$. Da auch X_2 monoton ist, können wir $X_2^{-1}([a, b])$ ebenfalls durch die Urbilder des Grenzen a und b von $[a, b]$ angeben. Da X_2 fallend ist, müssen wir lediglich die Grenzen umdrehen, also $X_2^{-1}([a, b]) = [X_2^{-1}(b), X_2^{-1}(a)] = [1 - b, 1 - a]$ und $P_{\#}X_2([a, b]) = \lambda|_{[0, 1]}([1 - b, 1 - a]) = 1 - a - 1 + b = b - a = P_{\#}X_1([a, b])$.

B4A1.2 Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$, so dass $X_1(\omega) = \omega$ und $X_2(\omega) = 1 - \omega$ nicht die gleiche Verteilung haben? *Siehe handschriftliches Blatt.*

B4A1.3 Wenn $X \sim \mathcal{N}(2, 2)$ verteilt ist, gilt $P[|X - 2| \geq 2] \leq \frac{1}{2}$? Ja. Nach der Tschebyscheff-Ungleichung gilt $P[|X - 2| \geq 2] \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$.

B4A1.4 Jede reellwertige Zufallsvariable, also $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar hat eine Dichte bezüglich λ ? Nein. Sei $X = 0$. Dann ist X stetig und somit messbar mit $P(X = 0) = 1$, also $P = \delta_0$. Da $0 = \lambda(\{0\}) \neq \delta_0(\{0\}) = 1$, ist δ_0 nicht absolut stetig bezüglich λ . Nach dem Satz von Radon-Nikodym, so wie er als Korollar 7.34 in (Kle20) steht, besitzt dann δ_0 keine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes.

B4A1.5 Auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ sind alle Abbildungen $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar? Ja. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$, denn in $\mathcal{P}(\Omega)$ sind alle Mengen, die nach A abbilden könnten, drin.

B4A1.6 Für $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$ gilt $E[XY] \leq \sqrt{2}$? Ja, denn nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, also der Hölder-Ungleichung mit $r = 1$ und $p = q = 2$ gilt

$$E[XY] \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Mit der Definition der \mathcal{L}^p -Norm und weil Quadrate positiv sind haben wir

$$= \sqrt{E[X^2]} \sqrt{E[Y^2]}.$$

Die Angabe $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ heißt $E[X] = E[Y] = 0$ und wir können schreiben

$$= \sqrt{E[(X - E[X])^2]} \sqrt{E[(Y - E[Y])^2]}.$$

Mit der Definition der Varianz ergibt sich

$$= \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}.$$

Die Angabe $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ heißt, $\text{Var}(X) = 1$ und $\text{Var}(Y) = 2$. Somit folgt

$$= \sqrt{2}.$$

B4A1.7 \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable X zu sich selbst unabhängig gilt genau dann, wenn X fast sicher konstant ist. *Siehe handschriftliches Blatt.*

B4A1.8 Es gilt $E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = E[\mathbb{1}_A]E[\mathbb{1}_B]$ genau dann, wenn A und B unabhängig sind. Ja. Es gelte $E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = E[\mathbb{1}_A]E[\mathbb{1}_B]$. Dann gilt auch $P(A \cap B) = E[\mathbb{1}_{A \cap B}] = E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = E[\mathbb{1}_A]E[\mathbb{1}_B] = P(A)P(B)$. Gelte andererseits, dass A und B unabhängig sind, dann folgt daraus, dass $E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B] = E[\mathbb{1}_{A \cap B}] = P(A \cap B) = P(A)P(B) = E[\mathbb{1}_A]E[\mathbb{1}_B]$.

B4A1.9 Für X exponentialverteilt mit $\lambda = 1$ gilt $E[X^4] \geq E[X]^4$. Ja. Das gilt mit konvexem $g(x) = x^4$ mithilfe der Jensen-Ungleichung aus Satz 8.

B4A1.10 Gilt $\mu(A) = 0$ genau dann, wenn $\nu(A) = 0$, dann gibt es ein messbares f , sodass $\mu(A) = \int_A f(\omega) \nu(d\omega)$? Ja. Denn wenn μ und ν dieselben Nullmengen besitzen gilt insbesondere $\mu \ll \nu$. Da μ und ν als Wahrscheinlichkeitsmaße σ -endlich sind, können wir den Satz von Radon-Nikodym anwenden, nachdem μ eine Dichte bezüglich ν besitzt, also gerade eine Borel-messbare Abbildung, sodass $\mu(A) = \int_A f(\omega) \nu(d\omega)$.

B4A1.11 Auf $(\omega, \{\Omega, \emptyset\})$ gibt es keine Borel-messbare Abbildung? Doch.

Sei $f = 0$, dann für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & 0 \notin A, \\ \Omega, & 0 \in A. \end{cases}$$

Somit gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dass $f^{-1}(A) \in \{\emptyset, \Omega\}$ und folglich ist f Borel-messbar.

B4A1.12 Seien $X \sim \text{Exp}(6)$ und $Y \sim \text{Exp}(\frac{1}{3})$, dann gilt $E[XY] \leq 1$, wobei für $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt $E[Z] = \frac{1}{\lambda}$ und $E[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2}$? Ja. Wie bei Aufgabenteil 6 gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$E[XY] \leq \sqrt{E[X^2]} \sqrt{E[Y^2]}.$$

Mit den Angaben zu den Parametern $\lambda = 6$ beziehungsweise $\lambda = \frac{1}{3}$ der Verteilungen von X beziehungsweise Y , sowie dem Hinweis auf dem Blatt ergibt sich

$$= \sqrt{\frac{2}{6^2} \cdot \frac{2}{(\frac{1}{3})^2}} = \frac{2}{6} = 1.$$

B4A1.13 Ist $q \leq p$ und $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so ist $X \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$? Ja. Nach Satz 6.vi gilt $\|X\|_q \leq \|X\|_p < \infty$, da nach Aufgabe $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da in $L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alle P -messbaren \mathbb{R} -wertigen Funktionen mit endlicher L^q -Norm sind, ist $X \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

B4A2 Seien (X_n) Zufallsvariablen sodass $X_1 = 0$ und $X_n = \sqrt{n} \mathbb{1}_{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})}$ auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda|_{[0, 1]})$.

B4A2.1 (X_n) konvergiert in Wahrscheinlichkeit.

B4A2.2 (X_n) konvergiert fast sicher.

B4A2.3 (X_n) konvergiert in L_2 .

B4A2.4 (X_n) ist gleichgradig integrierbar.

Siehe zur Lösung der Aufgabe 2 das handschriftliche Blatt.

B4A3 Seien (X_n) Zufallsvariablen, sodass $X_n(\omega) = \omega^{\frac{1}{n}}$ auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$, wobei $P \ll \lambda|_{[0,1]}$ mit Dichte $f(\omega) = \frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}$.

B4A2.1 (X_n) konvergiert in Wahrscheinlichkeit. Wir möchten entscheiden, ob (X_n) in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Da die Folge $\omega^{\frac{1}{n}}$ für alle $\omega \in (0, 1]$ gegen 1 konvergiert, vermuten wir, dass $X_n \xrightarrow{P} 1$. Um das zu prüfen, sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in [0, 1]$ gilt, $X_n(\omega) \leq 1$, können wir in der Definition der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die Betragsstriche weglassen. Nach Markov-Ungleichung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon P(1 - \omega^{\frac{1}{n}} \geq \varepsilon) \leq E[1 - \omega^{\frac{1}{n}}].$$

Mit einsetzen der Dichte vom Aufgabenblatt folgt

$$\int_0^1 (1 - \omega^{\frac{1}{n}}) \frac{1}{2} \omega^{-\frac{1}{2}} d\omega.$$

Durch Ausmultiplizieren und Integrieren von $\frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}$ erhalten wir

$$= \sqrt{1} - \sqrt{0} + \int_0^1 \frac{1}{2} \omega^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}} d\omega.$$

Ausführen der Wurzel und Erneutes Integrieren liefert

$$= 1 - \frac{n}{n+2} \omega^{\frac{n+2}{2n}} \Big|_0^1.$$

Indem wir die Grenzen einsetzen und beide Terme auf einen gemeinsamen Nenner bringen, erhalten wir

$$= \frac{2}{n+2}.$$

Da für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_n \frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{n+2} = 0$ sehen wir, dass (X_n) in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

B4A2.2 (X_n) konvergiert fast sicher. Wir möchten uns überlegen, ob $P(\lim \omega^{\frac{1}{n}} < 1) = 0$. Das einzige Problem könnte in einer Umgebung um $\omega = 0$ auftauchen, denn $0^{\frac{1}{n}} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\omega = 0$ jedoch der einzige Punkt ist, sodass $\lim \omega^{\frac{1}{n}} < 1$, ist $\{\lim \omega^{\frac{1}{n}} < 1\}$ in der Tat eine P -Nullmenge.

Somit konvergiert (X_n) fast sicher.

B4A2.3 (X_n) konvergiert aufgrund der Argumentation in Teilaufgabe 1 in L^1 . Es gilt $E[1 - \omega^{\frac{1}{n}}] = \frac{2}{n+2}$, was für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

B4A2.4 (X_n) ist gleichgradig integrierbar, da es in L^1 konvergiert.

Literatur

- [Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)