Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$, symbolisch $E[X|\mathcal{F}] := Y$, falls gilt:

i) Y ist $\mathcal{F}$-messbar.

ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $E[X\mathbb{1}_A] = E[Y\mathbb{1}_A]$

B7A1 Zeigen Sie, $E[X, \mathcal{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.

ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch $Q^+[A] := E[\mathbb{1}_A X^+]$ und analog Q^-. Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon–Nikodym.

B7A2 Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bezüglich $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n > 3\right\}$

(b) $\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 3\right\}$

Generell ist eine Menge A genau dann messbar bezüglich $\bigotimes_{\in\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wenn $A \in \bigotimes_{\in\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Hierbei gilt $\bigotimes_{\in\in\mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(A_J \times \Omega_{\mathbb{N}\setminus J} \mid J = \{j_1, \ldots, j_n\}, A_{j_k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$.

B7A3 Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = \big([0,1], \mathcal{B}([0,1])\big)$ für $i = 1,2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0,1]$ der ω_i-Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i,j = 1,2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.

Hinweis: Der ω_1-Schnitt der Menge A ist definiert als $A_{\omega_1} = \big(\{\omega_1\} \times \Omega_2\big) \cap A = \{(\omega_1, \omega_j) \in A\}$ und der ω_2-Schnitt analog.

Sei C die Cantor-Menge, die wir aus Analysis 1 kennen. Für diese gilt, dass sowohl C als auch $[0,1] \setminus C$ überabzählbar sind. Damit ist C nicht messbar, denn wir können C nicht als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}_i$ schreiben. Sei nun $A = \{(x,x) \mid x \in C\}$. Dann gilt entweder $A_{\omega_i} = \{\omega_i\}$, falls $\omega_i \in C$, oder aber $A_{\omega_i} = \emptyset$, falls $\omega_i \notin C$. Das sind alles messbare Mengen. Auch $x \mapsto (x,x)$ ist messbar, denn auf dem Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sind Urbilder von $A_i \times \Omega_j$ jeweils A_i. Angenommen A wäre nun messbar, dann wäre auch dessen Urbild unter der messbaren Einbettung $x \mapsto (x,x)$ messbar. Dieses Urbild ist aber gerade C, welches, wie eingangs erwähnt, nicht messbar ist. Damit ist auch A wie gewünscht nicht messbar.

(b) Sie $D = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in Ω, λ das Lebesguemaß auf Ω_1 und μ das Zählmaß au Ω_2, das heißt

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$ und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\mu(y) \quad \text{und} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\mu(y) &= \int_{\Omega_2} \int_{\{y\}} \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_2} \lambda(\{y\}) \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_2} 0 \mathrm{d}\mu(y) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\Omega_1} \int_{\{x\}} \mathrm{d}\mu(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\Omega_1} \mu(\{y\}) \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\Omega_1} 1 \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \lambda(\Omega_1) = 1\,. \end{aligned}$$

(c) Ist das Ergebnis in Teil (b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Nein, der kann hier gar nicht angewendet werden, weil μ auf $[0,1]$ nicht σ-endlich ist.

B7A4 Beweisen Sie mit dem Satz von Fubini die Regel der partiellen Integration. Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen und für $x \in [a,b]$ seien

$$F(x) := \int_a^x f(y)\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad G(x) := \int_a^x g(y)\mathrm{d}y\,.$$

Dann gilt

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x = F(b)G(b) - \int_a^b G(x)f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf die Funktion $h\colon (x,y) \mapsto f(y)g(x)\mathbb{1}_E(x,y)$ *an, mit* $E = \{(x,y) \in [a,b]^2 : y < x\}$. Der Satz von Fubini lautet,

$$\int h\mathrm{d}(\lambda \otimes \kappa_1) = \int \Big(\int h(x,y)\kappa_1(x,\mathrm{d}y)\Big)\lambda(\mathrm{d}x)$$

Hier ist noch unklar, was das Produkt der Übergangskern ist. Satz 14.19 in [Kle20]

Literatur

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)