B5A1 Zeigen Sie, dass eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] = 0\,. \tag{1}$$

Sei zunächst (X_n) gleichgradig integrierbar. Dann gilt nach Definition von gleichgradiger Integrierbarkeit, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}]\,.$$

Insbesondere heißt dass, dass für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m|>k\}}]\,.$$

Damit gilt auch für das Infimum über diese $n \in \mathbb{N}$, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} E[|X_m| \mathbb{1}_{\{|X_m|>k\}}]\,,$$

was nach der Definition des lim sup Gleichung (1) liefert. *Hier sollte man sich überlegen, ob man den Limes über k ebenfalls, wie in der Argumentation unten, mittels eines ε umschreiben sollte.*

Genüge nun (X_n) Gleichung (1). Wir wollen zeigen, dass (X_n) gleichgradig integrierbar ist. Sei hierfür ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da Gleichung (1) gilt, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k > k_0$

$$\limsup_{n\to\infty} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,.$$

Also gibt es auch ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}]\,. < \varepsilon$$

Wir nehmen an, es gilt, dass alle X_n integrierbar sind *was nicht in der Aufgabenstellung steht.* Dann gibt es für alle $X_1, \dots, X_{n_0-1}$ jeweils Schranken $k_1, \dots, k_{n_0-1} \in \mathbb{N}$, sodass für $n = 1, \dots, n_0 - 1$ gilt

$$E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n|>k_n\}}] < \varepsilon\,.$$

Setze nun $K = k_0 \vee \cdots \vee k_{n_0-1}$, dann gilt für alle $k \geq K$ und alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,,$$

also insbesondere, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X_n|>k\}}] < \varepsilon\,.$$

Hier fehlt noch die Folgerung von Korollar 27.

B5A2 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Es sei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big)$$

B5A3 Sei $\lambda > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei X_n eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter λ. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Borel–Cantelli, dass

$$P(\{\text{Für unendlich viele } n \text{ gilt } X_n > n\}) = 0\,.$$

B5A4 Nennen Sie jeweils ein Beispiel und ein Gegenbeispiel von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für die folgenden Identitäten

1. $P\left(\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\right\}\right) = P\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}\right)$
2. $P\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \in A\}\right) = \limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\})$
3. $\limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = P\left(\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \in A\right\}\right)$

B5A5 Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra liegen.

1. $\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) = 0\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
2. $\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$,$\}$