

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie die Polarisierungsformel $[X, Y] = \frac{1}{4}([X + Y] - [X - Y])$.

Es gilt

$$\begin{aligned} [X + Y] - [X - Y] &= (X + Y)^2 - (X_0 + Y_0)^2 - 2(X_- + Y_-) \cdot (X + Y) \\ &\quad - (X - Y)^2 + (X_0 - Y_0)^2 + 2(X_- - Y_-) \cdot (X - Y) \\ &= 4XY - 4X_0Y_0 - 4X_- \cdot Y - 4Y_- \cdot X = 4[X, Y]. \end{aligned}$$

Definition 1 (Die Differentielle Schreibweise). Wir vereinbaren folgende Notation, unter der Bedingung, dass alle Ausdrücke wohldefiniert sind. Wir schreiben

$$dX_t = H_t dt + K_t dY_t,$$

falls folgende Integraldarstellung gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dY_s.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1 - t) \int_0^t \frac{1}{1 - s} dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1 - t} dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{t \nearrow 1} E[B_t] = 0$.

Da $\frac{B_t}{1 - t} = \int_0^t \frac{1}{1 - s} dW_s$ gilt $d\left(\frac{B_t}{1 - t}\right) = K_t dW_t$ mit $K_t = \frac{1}{1 - t}$, wobei

$$d\left(\frac{B_t}{1 - t}\right) = \frac{dB_t}{1 - t} + B_t d\frac{1}{1 - t}$$

und mit Kettenregel

$$= \frac{dB_t}{1 - t} + B_t \frac{dt}{(1 - t)^2} = \frac{1}{1 - t} dW_t.$$

Multiplikation mit $1 - t$ liefert die Behauptung.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(t)f(t)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t) \left(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s \right)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

$X_0 = x$ folgt mit Definition 1. Es gilt $\frac{X_t}{f(t)} = x + \int_0^t K_s dW_s$ mit $K_s = f(s)^{-1}G(s)$.