Musterlösung Analysis III 2. Übungsblatt

Achtung: Diese Lösung dient als Orientierungshilfe für die Tutorien und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit.

Aufgabe 7

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Zeigen Sie, dass durch die folgenden Abbidungen
$\mu, \mu_b : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,

a) $\mu : A \mapsto \begin{cases} |A|, & \text{falls } |A| < \infty \\ \infty, & \text{falls } |A| = \infty \end{cases}$ wobei $|A| := \#$ der Elemente in $\mathcal{A}$

b) Sei $b \in X$ fest, dann gelte $\mu_b : A \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } b \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{falls } b \notin \mathcal{A} \end{cases}$

Maße auf X definiert werden.
Lösung: Wir stellen zunächst fest, dass $\mu(A) \geqslant 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir zeigen nun die Eigenschaften (M1) und (M2) aus der Vorlesung.
(M1): Es ist $\mu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
(M2): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweis disjunkte Folge in $\mathcal{A}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: Angenommen jedes Folgeglied hat endlichen Betrag, d.h. $|A_n| < \infty \, \forall n \in \mathbb{N}$. Es ist dann $|\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n|$ da alle Folgenglieder paarweise disjunkt. Es gilt also direkt

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = |\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

2. Fall: Es existiert mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ sodass $|A_j| = \infty$. Es ist also

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(A_j) + \mu(\cup_{n\neq j} A_n) = \infty + \mu(\cup_{n\neq j} A_n) = \infty.$$

Gleichzeitig gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu_{A_j} + \sum_{n\neq j} \mu(A_n) = \infty + \sum_{n\neq j} \mu(A_n) = \infty.$$

Aufgabenteil b): Wir stellen wieder fest, dass $\mu_b \geqslant 0$ gilt. Wir zeigen nun die Eigenschaften (M1) und (M2) aus der Vorlesung.
(M1): Es ist $\mu_b(\emptyset) = 0$, denn $b \notin \emptyset$.
(M2): Sei nun Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweis disjunkte Folge in $\mathcal{A}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: $b \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann ex. genau ein $j \in \mathbb{N}$ sodass $b \in A_j$ und $b \notin A_k$ für $k \neq j$. Es gilt

$$1 = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n), \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu_{A_j} + \sum_{n\neq j} \mu(A_n) = 1 + 0 = 1$$

2. Fall: $b \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, daher ist $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$. Gleichzietig ist $b \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Es ist daher auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$.

— bitte wenden —

Aufgabe 8 Maße, Teil 2 (Fortsetzung von Blatt 1) [K]

Sei X eine beliebige Menge.

a) Geben Sie alle Maße auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ an.

b) Sei $A \subset X$, $A \neq \emptyset, X$. Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\sigma(\{A\})$ an.

c) Geben Sie sämtliche Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ an.

d) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Zerlegung von X, d.h. die Mengen A_i sind paarweise disjunkt und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X$. Geben Sie alle Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\sigma(\{A_i : i \in \mathbb{N}\})$ an.

Lösung:

a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra. Setzt man $\mu(X) = M \in [0, \infty]$ und $\mu(\emptyset) = 0$, so ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ (σ-Additivität folgt aus der Tatsache, dass jede paarweise disjunkte Folge in $\mathcal{A}$ höchstens einmal X enthalten kann).

b) Es ist $\mathcal{A} := \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{A}$ muss gelten $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$. Setz man $\mu(A) := p \in [0, 1]$, so muss $\mu(A^c) = \mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A) = 1 - p$ sein.

c) Gemäß Aufgabe 4(a) gibt es zu jedem $p \in [0, \infty]^{\mathbb{N}}$ genau ein Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $\mu(\{i\}) = p_i$. Für $\|p\|_1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1$ ist dies wegen

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

d) Es gilt $\sigma(\{A_i : i \in \mathbb{N}\}) = \left\{\bigcup_{i\in J} A_i : J \subset \mathbb{N}\right\} := \mathcal{A}$. Die Inklusion "$\supset$" ist klar, "$\subset$" folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\sigma(\{A_i : i \in \mathbb{N}\})$ nach Definition die kleinste σ-Algebra ist, die $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ enthält. Dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist überprüft man leicht:

(i) $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} A_i \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$, dann existiert eine Indexmenge $J \subset \mathbb{N}$ sodass $A = \bigcup_{i\in J} A_i$. Man hat

$$A^c = X \setminus \bigcup_{i\in J} A_i = \bigcup_{i\notin J} A_i \in \mathcal{A}.$$

(iii) Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gibt es Indexmengen $J_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $B_n = \bigcup_{i\in J_n} A_i$. Setze $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in J_n} A_i = \bigcup_{i\in J} A_i \in \mathcal{A}.$$

Zu jedem $p \in [0, \infty]^{\mathbb{N}}$ mit $\|p\|_1 = 1$ gibt es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\{A_i\}) = p_i$. Für $J \subset \mathbb{N}$ ist dann $\mu\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) = \sum_{i\in J} p_i$. Der Beweis geht analog zu Aufgabe 4(a).

— bitte wenden —

Aufgabe 9 **[K]**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, mit den Eigenschaften

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n^c \cap A_{n+1}\right) < \infty$

Zeigen Sie, dass $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

LÖSUNG: Definiere die Mengen $B_n := \cup_{k\geqslant n}^{\infty} A_k$, dann ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge. Es gilt

$$B_n = A_n \cup (A_n^c \cap A_{n+1}) \cup \left(A_{n+1}^c \cap A_{n+2}\right) \cup \dots$$

Mit der subadditivität folgt dann direkt

$$0 \leqslant \mu(B_n) \leqslant \mu(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu\left(A_k^c \cap A_{k+1}\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

nach Vorraussetzung a) und b). Es gilt nun aufgrund der Stetigkeit von oben

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geqslant n}^{\infty} A_k) = \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

Aufgabe 10

Erzeuger der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass folgende Mengen Erzeuger der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{E}_1 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_2 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{E}_3 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_4 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{E}_5 = \{(c, \infty) : c \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_6 = \{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{E}_7 = \{[d, \infty) : d \in \mathbb{Q}\} & \mathcal{E}_8 = \{[d, \infty) : d \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

LÖSUNG: Bezeichne $\mathcal{O}$ die offenen Mengen und $\mathcal{C}$ die abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}$. Es ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C})$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{J}^o) = \sigma(\mathcal{J}^o_{\mathbb{Q}})$$

wobei $\mathcal{J}_{(\mathbb{Q})}$ die Menge der halboffenen Intervalle (mit rationalen Endpunkten) bzw. $\mathcal{J}^o_{(\mathbb{Q})}$ die Menge der offenen Intervalle (mit rationalen Endpunkten) bezeichnet.
Offenbar gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{O}$ sowie $\mathcal{E}_5 \subset \mathcal{E}_6 \subset \mathcal{O}$ und damit

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \sigma(\mathcal{E}_5) \subset \sigma(\mathcal{E}_6) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1}$$

Ebenso hat man $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}_4 \subset \mathcal{C}$ und $\mathcal{E}_7 \subset \mathcal{E}_8 \subset \mathcal{C}$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ \sigma(\mathcal{E}_7) \subset \sigma(\mathcal{E}_8) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen

$$[a, b) = (-\infty, b) \cap (-\infty, a)^c \in \sigma(\mathcal{E}_1), \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

— bitte wenden —

gilt $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit $\sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.
Mit (1) folgt dann $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Weiter ist

$$(-\infty, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(-\infty, b + \frac{1}{n}\right)}_{\in\,\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

und damit $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}_4 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, also $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Umgekehrt gilt

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right]}_{\in\,\mathcal{E}_3/\mathcal{E}_4} \in \sigma(\mathcal{E}_3),$$

also $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$, woraus sofort $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ folgt. Damit ist

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

gezeigt.
Verwendet man, dass

$$(-\infty, a) = [a, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{E}_7),$$

so erhält man $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_7)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_7)$. Zusammen mit (2) folgt dann

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_7) \subset \sigma(\mathcal{E}_8) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Analog liefert

$$(-\infty, b] = (b, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{E}_5),$$

dass $\mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_5)$, also $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_5)$. Mit (1) erhält man

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_5) \subset \sigma(\mathcal{E}_6) \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Zusammenfassend wurde also gezeigt, dass jede der Mengen $\mathcal{E}_j$, $j = 1, \ldots, 8$, die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen.