Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \iff \quad \forall j \in \mathbb{Z}\colon P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j).$$

Wir verwenden die Rücktransformation der charakteristischen Funktionen φ_n und φ von Y_n und Y. Für φ gilt

$$P(X = j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj}\varphi(t)\mathrm{d}t\,.$$

In der Tat gilt mit der Definition der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj}\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}E_k\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\big]\mathrm{d}t\,.$$

Da E_k nur Masse bei $X = k$ hat erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}P(X = k)\mathrm{d}t$$

Zusammenfassen liefert, *wobei man sich eventuell überlegen sollte, ob man die Summe und das Integral vertauschen darf*

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t}\mathrm{d}t\,.$$

Wenn $k - j = 0$, so ist der Integrand 1. Wenn $k - j = \ell \neq 0$, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\ell}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi}\big) = \frac{1}{\mathrm{i}\ell}\big((\pm 1) - (\pm 1)\big) = 0\,.$$

Eingesetzt in die obige Rechnung verschwinden somit alle Summanden mit $k \neq j$ und wir erhalten die Darstellung für die Rücktransformation der charakteristischen Funktion. Entsprechendes gilt dann auch für Y_n und φ_n. Mithilfe dieser Rücktransformationen erhalten wir die gesuchte Konvergenz. Für den Abstand von $P(Y_n = j)$ und $P(Y = j)$ gilt mithilfe

Rücktransformation

$$|P(Y_n = j) - P(Y = j)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi_n \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi \mathrm{d}t \right| .$$

Mit Zusammenfassen und der „Dreiecksungleichung“ des Integrals können wir abschätzen

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}tj} \big(\varphi_n(t) - \varphi(t) \big) \right| \mathrm{d}t \, .$$

Das vereinfacht sich, weil $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}\right| = 1$. Weiterhin konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen $\varphi(t)$ nach dem Portmanteau-Theorem, denn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}$ ist Lipschitz-stetig. Da $|\varphi_n(t)| \leq 1$ können wir schließlich den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden und erhalten

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0 \, .$$

Wenn andererseits für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j)$, dann gilt auch $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) P(Y = j)$ für alle $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}$ und somit $Y_n \Rightarrow Y$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Sei hierfür ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *und ein* $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ *gegeben. Dann gilt*

$$\int f \mathrm{d}P = \sup\left\{ \int g \mathrm{d}P \,\middle|\, g \leq f \text{ einfach} \right\}$$

wobei einfach heißt, dass Folgen (α_n) *in* $\mathbb{R}$ *und* $(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *existieren, sodass* $g = \sum \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ *und* $\int g \mathrm{d}P = \sum \alpha_n P(A_n)$*. Gebe es eine Folge diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße* (P_n)*, sodass* P *schwacher Limes von* (P_n) *ist, dann wäre* $\int f \mathrm{d}P_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P_n(X = j)$*. Eventuell kann man auch die Konstruktion* $\frac{1}{n} \sum \delta_{k/n}$ *aus Aufgabe 1 von Blatt 9 verwenden. Außerdem gibt es die einfache Funktion* $S_J := \sum_{j=-J}^{J} f(j) \mathbb{1}_{X^{-1}\{j\}}$*, die* g *approximiert, vergleiche [Gir].*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \in (0,\infty)$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, sodass X_n exponentialverteilt mit Parameter α_n ist, das heißt, X_n besitzt die Dichte

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\alpha_n \mathrm{e}^{-\alpha_n x}\,.$$

Zeigen Sie die schwache Konvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$, falls $\alpha_n\to\infty$ für $n\to\infty$.

Wir wollen den Satz von Lévy verwenden. Demnach konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X, wenn $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$. Es gilt $\varphi_n(t) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \mathrm{i}t}$ und mit dem Satz von de L'Hospital $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-\mathrm{i}t} = 1$. Da 1 stetig in 0 ist, konvergiert also auch (X_n).

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und den Dirac Maßen auf $\mathbb{R}$ mit der schwachen Konvergenz gibt.

Es gilt,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x\in A\,,\\ 0, & x\notin A\,.\end{cases}$$

Die Topologie auf den Dirac Maßen ist die gröbste Topologie, sodass für alle $f\in\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ die Abbildung $\delta_x \mapsto \int f\delta_x(\mathrm{d}y) = f(x)$ stetig ist. Wir nehmen an, dass der Homöomorphismus $x\mapsto\delta_x$ ist. Da x der einzige Parameter von δ_x ist, ist dieser schon mal bijektiv. Die Prohorov-Metrik d_P ist in Bemerkung 13.14. in [Kle20] definiert. In [Ana] steht, $d_\mathrm{P}(\delta_x,\delta_y) = d(x,y)\wedge 1$. *Das sollte noch nachgerechnet werden.* Eine Menge U im metrischen Raum (E,d) ist offen, wenn für alle $x\in U$ ein $\varepsilon>0$ existiert, sodass für alle $y\in E$ mit $d(x,y)<\varepsilon$ gilt $y\in U$. *Es sollte gezeigt werden, dass wenn U offen bezüglich d auf $\mathbb{R}$ ist, auch δ_U offen bezüglich d_P ist.*

Literatur

[Ana] ANALYST: *Compute explicitly Lévy–Prokhorov metric for 2 finite Dirac measures.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.`

`stackexchange.com/q/4438264`. – 2022-04-28

[Gir] GIRAUDO, Davide: *Equivalence of Lebesgue expectation to discrete expectation for discrete random variables.* Mathematics Stack Exchange. `https://math.stackexchange.com/q/217980`. – 2012-10-21

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)