B3A1 Bei Teilaufgabe (a) möchten wir zwei Äquivalenzen zeigen. Zunächst einmal, dass $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ äquivalent dazu ist, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt, $\lim_n \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0$. Als zweites möchten wir zeigen, dass dies wieder Äquivalent dazu ist, dass $\sup_{m \geq n} |X_n - X| \xrightarrow{P} 0$. Hierfür gehen wir wie im Beweis von Satz 6.1.2 in (Hes03) vor. Gilt $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, so heißt es nach Defintion, dass $P(\lim |X_n - X| = 0) = 1$, oder

$$0 = 1 - P(\lim |X_n - X| = 0)$$

Mit der Definition von Konvergenz bedeutet das für alle $\varepsilon > 0$

$$= 1 - P(\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \geq n\ |X_m - X| < \varepsilon)\,.$$

$\omega \in \{\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \geq n\ |X_m - X| < \varepsilon\}$ gilt genau dann, wenn ω in irgendeiner der Mengen $\{\forall m \geq 1 |X_m - X| < \varepsilon\}, \{\forall m \geq 2 |X_m - X| < \varepsilon\}, \dots$ ist. Entsprechend gilt $\omega \in \{\forall m \geq n\ |X_m - X| < \varepsilon\}$ genau dann, wenn ω in all den Mengen $\{|X_n - X| < \varepsilon\}, \{|X_{n+1} - X| < \varepsilon\}, \dots$ vorkommt. Entsprechend lässt sich umschreiben

$$= 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \{|X_m - X| < \varepsilon\}\right).$$

Dadurch, dass $\left(\bigcup A_i\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap A_i^{\mathrm{c}}$ und $\left(\bigcap A_i\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup A_i^{\mathrm{c}}$ folgt

$$= P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right).$$

Hierbei konvergiert die Folge $\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right)_n$ von oben gegen $\bigcap_n^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$, sodass wir nach Satz A.14 den Limes herausziehen können und sich ergibt

$$= \lim_n P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right),$$

womit wir schon mal die erste Äquivalenz gezeigt haben.

Zur zweiten Äquivalenz machen wir wie am Anfang wieder die Überlegung mit den Quantoren. Es gilt $\omega \in \bigcup_{m \geq n} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$ genau dann, wenn ω in mindestens einer der Mengen $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}, \{|X_{n+1} - X| \geq \varepsilon\}, \dots$ liegt, also in einer Menge $\{|X_k - X| \geq \varepsilon\}$ mit $k \geq n$ so, dass für alle $m \geq n$ gilt

$|X_k - X| \geq |X_m - X|$ und eventuell noch in weiteren $\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$, wobei $|X_m - X| \leq |X_k - X|$. Also genau dann, wenn $\omega \in \{\sup_{m \geq n} |X_m - X| \geq \varepsilon\}$. Es folgt $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\big) = \lim_n P(\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \varepsilon)$. Da die Beziehung für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, ist die gesuchte Äquivalenz mit der Definition der stochastischen Konvergenz 14.ii gezeigt.

Zur Teilaufgabe (b), wir bemerken, dass, wenn $(X_n)_n$ fast sicher gegen ein X konvergiert, dann konvergiert $|X_n - X| \wedge 1$ fast sicher gegen 0. Da $|X_n - X| \wedge 1$ die 1 als integrierbare Majorante hat, konvergiert mit Theorem 14 über majorisierte Konvergenz $E[|X_n - X| \wedge 1]$ fast sicher gegen 0 und schließlich nach Lemma 17 X_n stochastisch gegen X.

Als alternative Lösung gehen wie im Beweis zu Satz 6.2.2 in (Hes03) vor. Nach Teilaufgabe (a) gilt $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Inklusion $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| \geq \varepsilon\}$. Aufgrund der Monotonie von P gilt somit auch $\lim_n P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, also $X_n \xrightarrow{P} X$.

Zur Teilaufgabe (c), hier wollen wir zeigen, dass $(X_n)_n$ genau dann fast sicher konvergiert, wenn gilt, dass $\lim_n P\big(\bigcup_m^{\infty}\{|X_{m+n} - X_n| \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Wir gehen wie in Satz 2.3.3.3 aus (Rüs16) vor. Sei $(X_n)_n$ also fast sicher konvergent. Insbesondere ist es, außer in einer P-Nullmenge $N \subset \Omega$, punktweise konvergent. Das heißt für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ sind $\big(X_n(\omega)\big)_n$ Cauchy-Folgen in den reellen Zahlen und das ist äquivalent dazu, dass $(X_n)_n$ fast sicher eine Cauchy-Folge ist. Entsprechend der Argumentation aus Teilaufgabe (a) heißt das, für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$1 = P\Big(\bigcup_n^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \{|X_m - X_n| < \varepsilon\}\Big)\,,$$

Mit Stetigkeit von unten gilt

$$= \lim_n P\Big(\bigcap_{m\geq n}\{|X_m - X_n| < \varepsilon\}\Big)\,,$$

Da $\big(\bigcap A_n\big)^{\mathrm{c}} = \bigcap A_n^{\mathrm{c}}$ folgt schließlich die Behauptung.

B3A2 Bei Teilaufgabe (a) ist zu zeigen, dass wenn $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ sowie $Z_n \xrightarrow{P} Z$, dann $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$. Es ist also zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $P(|X_n - X + Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$. Für den Beweis gehen wir entsprechend (Tsi18) vor. Wir möchten zunächst zeigen, dass wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt, dann auch $a_n + b_n \to a + b$ gilt. $a_n \to a$ bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Weiterhin sei $n_0' \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wenn nun $n \geq n_0 \vee n_0'$ gilt nach Dreiecksungleichung $|a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sodass $a_n + b_n \to a + b$. Nun möchten wir die entsprechende Aussage für stochastische Konvergenz zeigen. Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. In Analogie zur Konvergenz der reellen Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gilt mit der Dreiecksungleichung und der Monotonie von P, dass

$$P(|X_n - X + Y_n - Y| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon)\,.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass $|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon$ kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur $|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}$ oder nur $|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt

$$\leq P\Big(\Big\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big)\,.$$

Da P subadditiv ist, können wir abschätzen

$$\leq P\Big(\Big\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big) + P\Big(\Big\{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big)\,.$$

Da $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$, sind die beiden Terme in der obigen Summe Folgen in $\mathbb{R}$, die gegen 0 konverieren. Wir haben vorhin auch erklärt, dass dann die Summe der Folgen gegen 0 konvergiert. Damit ist reelle Folge $P(|X_n - X + Y_n - Y| \geq \varepsilon)$ mit etwas nach oben abgeschätzt, dass für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, sodass $\lim_n P(|X_n - X + Y_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$ und $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Bei Teilaufgabe (b) konvergiert nun zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$ und wir sollen zeigen, dass $E[Y_n] \to E[Y]$, also $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} Y$. Entsprechend Tipp wollen wir Theorem 22 verwenden. Da laut Aufgabenstellung bereits $Y_n \xrightarrow{P} Y$ gilt, zeigen wir, dass (Y_n) gleichgradig integrierbar ist. Dann gilt nach Theorem 22, dass $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} Y$. Um die gleichgradige Integrierbarkeit von (Y_n) zu zeigen, reicht es nach Lemma 20 zu zeigen, dass $E[|Y_n|] < \infty$ und dass $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{A:P(A)<\varepsilon} \sup_n E[|Y_n|\mathbb{1}_A] = 0$. Da $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ ist $|Y_n| \leq |X_n| + |Z_n|$ für alle n. Wegen der Monotonie und Linearität des Erwartungswertes erhalten wir $E[|Y_n|] \leq E[|X_n| + |Z_n|] = E[|X_n|] + E[|Z_n|] < \infty$, da die Folgen $(E[X_n])$ und $(E[Z_n])$ konvergent und somit beschränkt sind.

Nun ist noch zu zeigen, dass (Y_n) den zweiten Part der Bedingung *(ii)* von Lemma 20 erfüllt. Wieder gilt wegen der Monotonie des Erwartungswertes

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{A:P(A)<\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|Y_n|\mathbb{1}_A] \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{A:P(A)<\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n| + |Z_n|\mathbb{1}_A]\,.$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{A:P(A)<\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|\mathbb{1}_A] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{A:P(A)<\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|Z_n|\mathbb{1}_A] = 0\,, \end{aligned}$$

da (X_n) und (Z_n) nach Theorem 22 gleichgradig integrierbar sind und somit Bedingung *(ii)* von Lemma 20 erfüllen.

Somit erfüllt (Y_n) Bedingung *(ii)* von Lemma 20 und ist damit gleichgradig integrierbar. Da $Y \xrightarrow{P} Y$ folgt mit Theorem 22, dass $E[Y_n] \to E[Y]$.

B3A3 Wir haben hier $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit $P\big(Y_i = \frac{5}{3}\big) = P\big(Y_i = \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ gegeben und sollen bei Aufgabe (a) EK_n bestimmen sowie zeigen, dass $\lim_n EK_n = \infty$. Nach der Definition der K_n gilt

$$E[K_n] = E\Big[\prod\nolimits_{i=1}^n Y_i\Big] .$$

Da die Y_i stochastisch unabhängig sind, erhalten wir nach Satz 27

$$= \Big(\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Big)^n = \Big(\frac{13}{12}\Big)^n .$$

Da $EK_{n+1} > EK_n$ gilt $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$.

Bei der Teilaufgabe (b) sollen wir zeigen, dass K_n dennoch stochastisch gegen 0 konvergiert. Hierfür nutzen wir den Tipp und betrachten $\log K_n = \sum^n \log Y_i$, auf was wir das schwache Gesetz der großen Zahlen auf die $\log Y_i$ an. $(\log Y_i)_i$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, wenn die $\log Y_i$ unabhängig identisch verteilt sind und ihr Erwartungswert sowie ihre Varianz endlich sind. Da die Y_i unabhängig identisch verteilt sind, sind es die $\log Y_i$ auch. Wir rechnen nach, dass $E[\log Y_i] = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} < 0$ und $|E[\log Y_i]| < \infty$. $E[(\log Y_i)^2] = \frac{1}{2}\big(\log \frac{5}{3}\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\log \frac{1}{2}\big)^2 < \infty$, sodass Erwartungswert und Varianz endlich sind. Somit genügt $(\log Y_i)_i$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, sodass gilt $\frac{1}{n} \sum^n \log Y_i \xrightarrow{P} E[\log Y_1] < 0$, also $\frac{\log K_n}{n} \xrightarrow{P} E[\log Y_1] < 0$. Da für den Nenner von $\frac{\log K_n}{n}$ gilt $n \to \infty$ und $|E[\log Y_1]| < \infty$, muss $\log K_n \xrightarrow{P} -\infty$, also $K_n \xrightarrow{P} \mathrm{e}^{-\infty} = 0$.

B3A4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, P-fast-sichere und L^p-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?

Wir fragen uns, ob $(X_n)_n$ stochastisch konvergiert, also ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$. Wir vermuten, dass, wenn $(X_n)_n$ konvergiert, es gegen $X = 0$ konvergiert. Die Frage ist also, ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim P(X_n \geq \varepsilon) = 0$. Sei, um das zu klären, ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wenn $X_n \geq \varepsilon$, dann gilt, weil X_n nach $\{0, \sqrt{n}\}$ abbildet, $X_n = \sqrt{n}$. Somit ist der Limes gegeben durch $\lim P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{n} = 0$. $(X_n)_n$ konvergiert also stochastisch gegen $X = 0$.

Wir folgen Beispiel 6.7 in (Hes03). Wir fragen uns, ob $(X_n)_n$ P-fast sicher konvergiert, das heißt also, ob $P(\lim |X_n - X| = 0) = 1$. Wir bemerken, dass, wenn $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, nach Aufgabe 1 (b) auch $X_n \xrightarrow{P} X$. Wegen Lemma 16 über die Eindeutigkeit der Grenzwerte der stochastischen Konvergenz $X = 0$ sein. Das heißt also, wenn $(X_n)_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, dann ist $X = 0$. Wir fragen uns also, ob $P(\lim X_n = 0) = 1$. Nach Aufgabe 1 können wir uns auch genauso gut fragen, ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^\infty \{X_m \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Da $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und für alle m gilt $\{X_m \geq \varepsilon\} = \{X_m < \varepsilon\}^c$, können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben $P\big(\bigcup_{m=n}^\infty \{X_m \geq \varepsilon\}\big) = 1 - P\big(\bigcap_{m=n}^\infty \{X_m < \varepsilon\}\big)$. P ist als Wahrscheinlichkeitsmaß endlich und somit nach Satz A.14 stetig von oben. Wir können somit schreiben

$$P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^\infty \{X_m < \varepsilon\}\Big) = \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^N \{X_m < \varepsilon\}\Big)\,.$$

Sei nun n so gewählt, dass $\sqrt{n} \geq \varepsilon$, also zum Beispiel $n = \lceil \varepsilon^2 \rceil$. Dann gilt für $m \geq n$, dass $\{X_m < \varepsilon\} = \{X_m = 0\}$, also

$$= \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^N \{X_m = 0\}\Big)\,.$$

Da die X_m unabhängig sind, gilt

$$= \lim_{N\to\infty} \prod\nolimits_{m=n}^N \frac{m-1}{m}\,.$$

Da gilt $\prod_{m=n}^{N+1} \frac{m-1}{m} < \prod_{m=n}^{N} \frac{m-1}{m}$ erhalten wir

$$= 0$$

und insgesamt somit $\lim_n P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m \geq \varepsilon\}\right) = 1$. Nach Aufgabe 1 konvergiert $(X_n)_n$ also nicht fast sicher.

Wir überlegen uns noch, ob $X_n \xrightarrow{L^p} X$ für $p \geq 1$ und folgen hier Beispiel 6.12 aus (Hes03). Für den Erwartungswert von $E[|X_n|^p]$ ergibt sich $E[|X_n|^p] = \sqrt{n}^p \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = n^{\frac{p}{2}-1}$. Somit konvergiert $E[|X_n|^p]$, falls $\frac{p}{2} - 1 < 0$, also $p < 2$. Bei uns ist aber $p \geq 1$, sodass $(X_n)_n$ für $1 \leq p < 2$ bezüglich der L_p-Norm konvergiert.

Da die Folge $(X_n)_n$ also bezüglich der L_1-Norm konvergiert, ist sie nach Theorem 22 auch gleichgradig integrierbar.

Literatur

[Hes03] HESSE, Christian H.: *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, 2003

[Rüs16] RÜSCHENDORF, Ludger: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2016

[Tsi18] TSITSIKLIS, John: *Convergence in probability of the sum of two random variables: Introduction to probability: Supplemental Resources*. `https://ocw.mit.edu/courses/res-6-012-introduction-to-probability-spring-2018/resources/convergence-in-probability-of-the-sum-of-two-random-variables/`, 2018