Aufgabe 3 (Binomiales Modell; 6 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ und $P[\omega_u] = p = 1 - P[\omega_d]$. Die gehandelten Vermögenswerte werden durch den zweidimensionalen Prozess $S = (S^0, S^1)$ gegeben, mit

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1+r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \tag{1}$$

i) Zeige, dass es ein Maß $Q \sim P$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ gibt, so dass der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Ist dieses Marktmodell arbitragefrei?

Wir folgen der Argumentation von Beispiel 3.3.1 in [DS06]. Der diskontierte Prozess $X_t = (1, S_t^1/S_t^0)$ ergibt sich zu

$$X_0^0 \equiv 1, \quad X_1^0 \equiv 1, \quad X_0^1 \equiv s_0, \quad X_1^1(\omega_u) = s_0(1+\tilde{u}), \quad X_1^1 = s_0(1+\tilde{d}),$$

mit $1+\tilde{u} = \frac{1+u}{1+r}$ und $1+\tilde{d} = \frac{1+d}{1+r}$. Damit X ein Martingal unter Q ist, muss gelten $E_Q[X_1^i] = X_0^i$, also $Q[\omega_u] + Q[\omega_d] = 1$ und $s_0(1+\tilde{u})Q[\omega_u] + s_0(1+\tilde{d})Q[\omega_d] = s_0$. Schreiben wir $Q[\omega_u] = q$ gilt nach der ersten Gleichung $Q[\omega_d] = 1 - q$. Wenn wir das in die zweite Gleichung einsetzen ergibt sich $(1+\tilde{u})q + (1+\tilde{d})(1-q) = 1$, sodass $Q[\omega_u] = q = \frac{\tilde{d}}{\tilde{d}-u} = \frac{r-d}{u-d}$ und $Q[\omega_d] = 1 - q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}} = \frac{u-r}{u-d}$. Da $Q(A) = 0$ nur für $A = \emptyset$ gilt ist $Q \sim P$, sodass Q ein äquivalentes Martingalmaß ist. *Es sollte noch geprüft werden, ob das Modell damit arbitragefrei ist.*

References

[DS06] Delbaen, Freddy ; Schachermayer, Walter: *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Berlin Heidelberg, 2006