B3A1 Zur Teilaufgabe (a) gehen wir wie im Beweis von Satz 6.1.2 in (Hes03) vor. Wir zeigen, dass $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$ äquivalent dazu ist, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt, $\lim_n \big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\big) = 0$. Konvergiert $(X_n)_n$ fast sicher gegen X, so heißt es nach Defintion, dass $P(\lim |X_n - X| = 0) = 1$, oder $P(\lim |X_n - X| > 0) = 0$. Mit anderen Worten gilt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$, dass $P(\lim |X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Für gegebene $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ schreiben wir $A_{n,\varepsilon} = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Existiert $\lim |X_n - X|$ fast sicher, dann gilt auch fast sicher $\lim |X_n - X| = \limsup |X_n - X|$, also

$$P(\lim |X_n - X| > \varepsilon) = P(\limsup\{|X_n - X|\varepsilon\})\,,$$

wobei man hier zwischen dem Abbildungen-$\limsup$ *und dem Mengen*-$\limsup$ *unterscheiden muss* und mit der Definition des $\limsup$

$$= P\Big(\bigcap_n^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\Big)\,.$$

Hierbei konvergiert die Folge $\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\big)_n$ von oben gegen $\bigcap_n^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}$, sodass wir nach Satz A.14 den Limes herausziehen können und sich ergibt

$$= \lim_n P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\Big)\,.$$

Wir möchten nun noch die Äquivalenz zu $\sup_{m\geq n} |X_n - X| \xrightarrow{P} 0$ zeigen. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}$ folgt mit der Monotonie von P, dass

$$P(\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \varepsilon) \leq P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\Big)\,.$$

Andererseits gilt für alle $k \geq n$, dass $\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq |X_k - X|$, sodass

$$\leq P(\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \varepsilon)\,.$$

Es folgt $\lim_n P(\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \varepsilon) = P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\big)$, denn $n \in \mathbb{N}$ war beliebig gewählt. Da die Beziehung für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, ist die gesuchte Äquivalenz mit der Definition der stochastischen Konvergenz 14.ii gezeigt.

Zur Teilaufgabe (b), wir bemerken, dass, wenn $(X_n)_n$ fast sicher gegen ein X konvergiert, dann konvergiert $|X_n - X| \wedge 1$ fast sicher gegen 0. Da $|X_n - X| \wedge 1$ die 1 als integrierbare Majorante hat, konvergiert mit Theorem 14 über majorisierte Konvergenz $E[|X_n - X| \wedge 1]$ fast sicher gegen 0 und schließlich nach Lemma 17 X_n stochastisch gegen X.

Als alternative Lösung gehen wie im Beweis zu Satz 6.2.2 in (Hes03) vor. Nach Teilaufgabe (a) gilt $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}\big) = 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Inklusion $\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_m - X| > \varepsilon\}$. Aufgrund der Monotonie von P gilt somit auch $\lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, also $X_n \xrightarrow{P} X$.

Zur Teilaufgabe (c), hier wollen wir zeigen, dass $(X_n)_n$ genau dann fast sicher konvergiert, wenn gilt, dass $\lim_n P\big(\bigcup_m^{\infty}\{|X_{m+n} - X_n| > \varepsilon\}\big) = 0$. Wir gehen wie in Satz 2.3.3.3 aus (Rüs16) vor. Sei $(X_n)_n$ also fast sicher konvergent. Analog zu Folgen in Reellen Zahlen, ist das äquivalent dazu, dass $(X_n)_n$ fast sicher eine Cauchy-Folge ist *was man noch genauer prüfen sollte.* Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$1 = P\Big(\bigcup_n^{\infty} \bigcap_{m\geq n}\{|X_m - X_n| \leq \varepsilon\}\Big)\,,$$

was ebenfalls noch genauer geprüft werden sollte. Mit Stetigkeit von unten gilt

$$= \lim_n P\Big(\bigcap_{m\geq n}\{|X_m - X_n| \leq \varepsilon\}\Big)\,,$$

Da $\left(\bigcap A_n\right)^{\mathrm{c}} = \bigcap A_n^{\mathrm{c}}$ folgt schließlich die Behauptung.

B3A2 Bei Teilaufgabe (a) ist zu zeigen, dass wenn $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ sowie $Z_n \xrightarrow{P} Z$, dann $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$, also dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $P(|X_n - X + Y_n - Y| > \varepsilon) = 0$. Aus (Tsi18). Wir möchten zunächst zeigen, dass wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt, dann auch $a_n + b_n \to a + b$ gilt. $a_n \to a$ bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Weiterhin sei $n_0' \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wenn nun $n \geq n_0 \vee n_0'$ gilt nach Dreiecksungleichung $|a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sodass $a_n + b_n \to a + b$. Nun möchten wir die entsprechende Aussage für stochastische Konvergenz zeigen. Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. In Analogie zur Konvergenz der reellen Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gilt mit der Dreiecksungleichung und der Monotonie von P, dass

$$P(|X_n - X + Y_n - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon)\,.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass $|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon$ kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur $|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}$ oder nur $|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt

$$\leq P\Big(\Big\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big)\,.$$

Da P subadditiv ist, können wir abschätzen

$$\leq P\Big(\Big\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big) + P\Big(\Big\{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\Big)\,.$$

Da $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$, sind die beiden Terme in der obigen Summe Folgen in $\mathbb{R}$, die gegen 0 konverieren. Wir haben vorhin auch erklärt, dass dann die Summe der Folgen gegen 0 konvergiert. Damit ist reelle Folge $P(|X_n - X + Y_n - Y| > \varepsilon)$ mit etwas nach oben abgeschätzt, dass für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, sodass $\lim_n P(|X_n - X + Y_n - Y| > \varepsilon) = 0$ und $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Bei Teilaufgabe (b) konvergiert nun zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$ und wir sollen zeigen, dass $E[Y_n] \to E[Y]$. Entsprechend dem Tipp zeigen wir, dass $(Y_n)_n$ gleichgradig integrierbar ist, also, dass $\lim_k \sup_n E[|Y_n| \mathbb{1}_{|X_n|>k}] = 0$. Nach Theorem 22 gilt dann $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} Y$, also $E[Y_n] \to E[Y]$. Da $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ ist $|Y_n| \leq |X_n| \vee |Z_n|$ für alle n. Da $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Y_n] \to E[Y]$ folgt mit Satz 10.v, dass $|X_n| \vee |Z_n|$ nach oben beschränkt ist. Somit hat $(Y_n)_n$ eine integrierbare Majorante und ist nach Beispiel 19.i gleichgradig integrierbar. Wie erwähnt, folgt mit Theorem 22, dass $E[Y_n] \to E[Y]$.

B3A3 Wir haben hier $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit $P\big(Y_i = \frac{5}{3}\big) = P\big(Y_i = \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}$ gegeben und sollen bei Aufgabe (a) EK_n bestimmen sowie zeigen, dass $\lim_n EK_n = \infty$. Nach der Definition der K_n gilt

$$E[K_n] = E\Big[\prod\nolimits_{i=1}^n Y_i\Big] .$$

Da die Y_i stochastisch unabhängig sind, erhalten wir nach Satz 27

$$= \Big(\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Big)^n = \Big(\frac{13}{12}\Big)^n .$$

Da $EK_{n+1} > EK_n$ gilt $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$.

Bei der Teilaufgabe (b) sollen wir zeigen, dass K_n dennoch stochastisch gegen 0 konvergiert. Hierfür nutzen wir den Tipp und betrachten $\log K_n = \sum^n \log Y_i$, auf was wir das schwache Gesetz der großen Zahlen auf die $\log Y_i$ an. $(\log Y_i)_i$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, wenn die $\log Y_i$ unabhängig identisch verteilt sind und ihr Erwartungswert sowie ihre Varianz endlich sind. Da die Y_i unabhängig identisch verteilt sind, sind es die $\log Y_i$ auch. Wir rechnen nach, dass $E[\log Y_i] = \frac{1}{2}\log\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} < 0$ und $|E[\log Y_i]| < \infty$. $E[(\log Y_i)^2] = \frac{1}{2}\big(\log\frac{5}{3}\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\log\frac{1}{2}\big)^2 < \infty$, sodass Erwartungswert und Varianz endlich sind. Somit genügt $(\log Y_i)_i$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, sodass gilt $\frac{1}{n}\sum^n \log Y_i \xrightarrow{P} E[\log Y_1] < 0$, also $\frac{\log K_n}{n} \xrightarrow{P} E[\log Y_1] < 0$. Da für den Nenner von $\frac{\log K_n}{n}$ gilt $n \to \infty$ und $|E[\log Y_1]| < \infty$, muss $\log K_n \xrightarrow{P} -\infty$, also $K_n \xrightarrow{P} \mathrm{e}^{-\infty} = 0$. *Hier sollte man eventuell die* $\xrightarrow{P}$ *mit* ε *ausschreiben.*

B3A4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} = 1 - P(X_n = 0)$. Untersuchen Sie diese auf stochastische, P-fast-sichere und L^p-Konvergenz für alle $p \geq 1$. Ist $(X_n)_n$ gleichgradig integrierbar?

Wir fragen uns, ob $(X_n)_n$ stochastisch konvergiert, also ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Wir vermuten, dass, wenn $(X_n)_n$ konvergiert, es gegen $X = 0$ konvergiert. Die Frage ist also, ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim P(X_n > \varepsilon) = 0$. Sei, um das zu klären, ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wenn $X_n > \varepsilon$, dann gilt, weil X_n nach $\{0, \sqrt{n}\}$ abbildet, $X_n = \sqrt{n}$. Somit ist der Limes gegeben durch $\lim P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{n} = 0$. $(X_n)_n$ konvergiert also stochastisch gegen $X = 0$.

Wir folgen Beispiel 6.7 in (Hes03). Wir fragen uns, ob $(X_n)_n$ P-fast sicher konvergiert, das heißt also, ob $P(\lim |X_n - X| = 0) = 1$. Wir bemerken, dass, wenn $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, nach Aufgabe 1 (b) auch $X_n \xrightarrow{P} X$. Wegen Lemma 16 über die Eindeutigkeit der Grenzwerte der stochastischen Konvergenz $X = 0$ sein. Das heißt also, wenn $(X_n)_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X$, dann ist $X = 0$. Wir fragen uns also, ob $P(\lim X_n = 0) = 1$. Nach Aufgabe 1 können wir uns auch genauso gut fragen, ob für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Da $(A\cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$ und für alle m gilt $\{X_m \geq \varepsilon\} = \{X_m < \varepsilon\}^{\mathrm{c}}$, können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben $P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{X_m \geq \varepsilon\}\big) = 1 - P\big(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{X_m < \varepsilon\}\big)$. P ist als Wahrscheinlichkeitsmaß endlich und somit nach Satz A.14 stetig von oben. Wir können somit schreiben

$$P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^{\infty}\{X_m < \varepsilon\}\Big) = \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^{N}\{X_m < \varepsilon\}\Big)\,.$$

Sei nun n so gewählt, dass $\sqrt{n} \geq \varepsilon$, also zum Beispiel $n = \lceil \varepsilon^2 \rceil$. Dann gilt für $m \geq n$, dass $\{X_m < \varepsilon\} = \{X_m = 0\}$, also

$$= \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap\nolimits_{m=n}^{N}\{X_m = 0\}\Big)\,.$$

Da die X_m unabhängig sind, gilt

$$= \lim_{N\to\infty} \prod\nolimits_{m=n}^{N} \frac{m-1}{m}\,.$$

Da gilt $\prod_{m=n}^{N+1} \frac{m-1}{m} < \prod_{m=n}^{N} \frac{m-1}{m}$ erhalten wir

$$= 0$$

und insgesamt somit $\lim_n P\big(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m \geq \varepsilon\}\big) = 1$. Nach Aufgabe 1 konvergiert $(X_n)_n$ also nicht fast sicher.

Wir überlegen uns noch, ob $X_n \xrightarrow{L^p} X$ für $p \geq 1$ und folgen hier Beispiel 6.12 aus (Hes03). Für den Erwartungswert von $E[|X_n|^p]$ ergibt sich $E[|X_n|^p] = \sqrt{n}^p \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = n^{\frac{p}{2}-1}$. Somit konvergiert $E[|X_n|^p]$, falls $\frac{p}{2} - 1 < 0$, also $p < 2$. Bei uns ist aber $p \geq 1$, sodass $(X_n)_n$ für $1 \leq p < 2$ bezüglich der L_p-Norm konvergiert.

Da die Folge $(X_n)_n$ also bezüglich der L_1-Norm konvergiert, ist sie nach Theorem 22 auch gleichgradig integrierbar.

Literatur

[Hes03] HESSE, Christian H.: *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer-Verlag, 2003

[Rüs16] RÜSCHENDORF, Ludger: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, 2016

[Tsi18] TSITSIKLIS, John: *Convergence in probability of the sum of two random variables: Introduction to probability: Supplemental Resources.* `https://ocw.mit.edu/courses/res-6-012-introduction-to-probability-spring-2018/resources/convergence-in-probability-of-the-sum-of-two-random-variables/`, 2018