Aufgabe 1 Komlós Lemma für L^0; 6 Punkte). Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

i) Es existieren $g \in \langle f_n, f_{n+1}, \ldots \rangle_{\text{conv}}$, sodass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable mit Werten in $[0,\infty]$ konvergiert.

ii) Es gilt $P[g<\infty]=1$, falls $\langle f_n, f_{n+1}, \ldots \rangle_{\text{conv}}$ in L^0 beschränkt ist.

Hinweis: Eine Familie $F \subset L^0$ heißt beschränkt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $P[|X| \geq C] < \varepsilon$ für alle $X \in F$.

iii) Es gilt $P[g>0]>0$, falls ein $\alpha > 0$ existiert, sodass $P[f_n \geq \alpha] \geq a > 0$.

Hinweis:

i) Das Resultat folgt, falls es eine Folge $g_n \in \langle f_n, f_{n+1}, \ldots \rangle_{\text{conv}}$ gibt, sodass e^{-g_n} in L^1 konvergiert. Definieren Sie

$$J_n := \inf\{E[g^{-g}] | g \in \langle f_n, f_{n+1}, \ldots \rangle_{\text{conv}}\}.$$

Setzen Sie

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \middle| |x-y| \leq \varepsilon\right\}, \\
B_\varepsilon &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \middle| x\wedge y \geq 1/\varepsilon\right\}, \\
C_\varepsilon &= \mathbb{R}_+^2 \setminus (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Für $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ existiert für jedes ε ein δ, sodass

$$e^{-(x+y)/2} \leq \left(\frac{e^{-x}+e^{-y}}{2}\right) - \delta \mathbf{1}_{C_\varepsilon}(x,y). \tag{1}$$

iii) Zeigen Sie, dass $g_n = \sum_{n\leq k\leq N} \lambda_k f_k \in \langle f_n, f_{n+1}, \ldots \rangle_{\text{conv}}$ die Ungleichung

$$E[e^{-g_n}] \leq (1-\alpha) + e^{-\alpha}$$

erfüllt.

Lösung: Nach [Sch18]. J_n wächst bis zu einem $J \leq 1$. Sei $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g'_n \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots \rangle_{\text{conv}}$ und $E[e^{-g'_n}] \leq J_n + \frac{1}{n}$. Da $z \mapsto e^{-z}$ konvex ist, haben wir immer

$$e^{-(x+y)/2} \leq \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-y}) .$$

Für $(x, y) \in C_\varepsilon$ gilt für ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, dass

$$e^{-(x+y)/2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-y}) \leq -\delta ,$$

was noch überprüft werden sollte. Hierdurch erhalten wir Gleichung 1. Wenn wir nun $x := g'_m$ und $y := g'_n$ setzen, ergibt sich für $n \neq m$ mit der Definition von J_n, dass

$$J_m \leq E\left[e^{(-g'_m + g'_n)/2}\right] .$$

Mit Gleichung 1 erhalten wir

$$\leq \frac{1}{2}\left(E[e^{-g'_m}] + E[e^{-g'_n}]\right) - \delta P[(g'_m, g'_n) \in C_\varepsilon] .$$

Mit der Definition von g' erhalten wir

$$\leq \frac{1}{2}\big(J_m + \frac{1}{m} + J_n + \frac{1}{n}\big) - \delta P[(g'_m, g'_n) \in C_\varepsilon] ,$$

sodass $\lim_{n,m\to\infty} P[(g'_m, g'_n) \in C_\varepsilon] = 0$, *was auch nicht so ganz klar ist.*

Für $(x, y) \in A_\varepsilon$ und $(x, y) \in B_\varepsilon$ erhalten wir die Abschätzung

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq \varepsilon + 2e^{-1/\varepsilon} + 2\mathbf{1}_{C_\varepsilon}(x, y).$$

Eine analoge Rechnung wie oben ergibt

$$\left|E[e^{-g'_m} - e^{-g'_n}]\right| \leq \varepsilon + 2e^{-1/\varepsilon} + 2P[(g'_m, g'_n) \in C_\varepsilon] ,$$

was ebenfalls überprüft werden sollte. Damit ist $(e^{-g'_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(P)$ und somit konvergiert sie in $L^1(P)$. Deswegen hat die seine Teilfolge $(e^{-g_n})_{n\in\mathbb{N}}$, die P-fast sicher konvergiert. Hierdurch konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon selbst und wie für g'_n gilt auch $g_n \in \langle f_n, f_{n+1}, \dots \rangle_{\text{conv}}$.

Literatur

[Sch18] Schweizer, Martin: *Introduction to Mathematical finance*. `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-3888-00L/appendix/A6_Komlos.pdf`, 2018. – Accessed: 2024-12-08