Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definition 1. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Eine Zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung von X gegeben $\mathcal{F}$, symbolisch $E[X|\mathcal{F}] := Y$, falls gilt:

i) Y ist $\mathcal{F}$-messbar.

ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $E[X\mathbb{1}_A] = E[Y\mathbb{1}_A]$

B7A1 Zeigen Sie, $E[X, \mathcal{F}]$ existiert und ist eindeutig (bis auf Gleichheit fast sicher). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Eindeutigkeit: Nehmen Sie an, dass Y und Y' Definition 1 erfüllen und betrachten Sie die Menge $A := \{Y - Y' > 0\}$.

ii) Existenz: Definieren Sie das Maß Q^+ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch $Q^+[A] := E[\mathbb{1}_A X^+]$ und analog Q^-. Konstruieren Sie nun die bedingte Erwartung mit dem Satz von Radon–Nikodym.

B7A2 Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bezüglich $\mathcal{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 3 \right\}$

(b) $\left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} \right\}$

B7A3

B7A4