

**Aufgabe 1** (Black-Scholes-Modell; 4 Punkte). Zeigen Sie, dass das Semimartingal

$$X_t = X_0 e^{\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)}$$

für  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  und einer Standard Brown'schen Bewegung  $W$  folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t = X_t d(\mu t + \sigma W_t).$$

Wir wenden die Itô-Formel auf  $f(Y_t) = e^{Y_t}$  mit  $Y_t = \sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)$  an. Da  $Y_t$  stetig ist, gilt  $Y_- = Y$  und  $\langle Y^c, Y^c \rangle = \langle Y \rangle = \sigma^2 t$ . Zunächst ist nämlich  $\sigma^2 t$  stetig, verschwindet für  $t = 0$  und ist wachsend, also ist  $\sigma^2 t \in \mathcal{V}$ . Es müsste noch gezeigt werden, dass  $Y_t^2 - \sigma^2 t$  ein Martingal ist. Mit  $f'(Y_t) = f''(Y_t) = e^{Y_t} = X_t$  erhalten wir

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s d\langle Y \rangle_s.$$

Durch Nachdifferenzieren, sowie  $d\langle Y \rangle_s = \sigma^2 ds$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} &= X_0 + \int_0^t X_s \sigma dW_s + \int_0^s \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \frac{1}{2} \int_0^t X_s \sigma^2 ds \\ &= X_0 + \int_0^t X_s \sigma dW_s + \int_0^s X_s \mu ds. \end{aligned}$$

Nach Definition 1 von Blatt 9 mit  $H_t = \mu X_t$  und  $K_t = \sigma X_t$  besitzt  $X_t$  dann die angegebene Darstellung.

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Wir betrachten das zweidimensionale Semimartingal  $\tilde{S} = (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1)_{t \geq 0} \in \mathcal{S}$ , welches für  $r > -1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  und einer (bezüglich dem Maß  $P$ ) Standard Brown'schen Bewegung  $W$  folgende Darstellung besitzt

$$d\tilde{S}_t^0 = r\tilde{S}_t^0 dt$$

und

$$d\tilde{S}_t^1 = \mu\tilde{S}_t^1 dt + \sigma\tilde{S}_t^1 dW_t.$$

Geben Sie eine explizite Form von  $\tilde{S}$  an.

*Lösung:* Für  $\tilde{S}_t^0$  gilt nach Umstellen  $\frac{d\tilde{S}_t^0}{dt} = r\tilde{S}_t^0$ , was durch  $\tilde{S}_t^0 = \tilde{S}_0^0 e^{rt}$  erfüllt wird. Die differentielle Darstellung von  $\tilde{S}_t^1$  ist die gleiche wie die von  $X_t$  in Aufgabe 1. Damit hat  $\tilde{S}_t^1$  die explizite Form  $\tilde{S}_t^1 = \tilde{S}_0^1 e^{\sigma W_t + t(\mu - \sigma^2/2)}$ .

Zeigen Sie, dass es zu fixem  $T > 0$  ein zu  $P_T$  äquivalentes Maß  $Q_T$  gibt, sodass der Prozess  $S$  gegeben durch  $S = \tilde{S}/\tilde{S}^0 = (1, \tilde{S}^1/\tilde{S}^0)$  ein lokales Martingal bis  $T$  ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 16 aus dem Skript (ohne Beweis).

*Lösung:* die 1 in der ersten Komponente ist schon mal ein lokales Martingal bezüglich jedem Maß, betrachte also  $\tilde{S}^1/\tilde{S}^0 = \tilde{S}_0^1/\tilde{S}_0^0 e^{\sigma W_t + t[(\mu-r) - \sigma^2/2]} =: \tilde{S}_0^1/\tilde{S}_0^0 X_t$ . Wählen wir  $\theta = -(\mu - r)/\sigma$  in Aufgabe 16 (und  $W = B$ ), dann kommt heraus, dass  $M'_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$  eine Brown'sche Bewegung unter  $Q$  ist. Somit ist  $X_t = e^{\sigma M'_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$  mit  $M'_t$  einer Brown'schen Bewegung bezüglich  $Q$ , also eine geometrische Brown'sche Bewegung ohne Drift. In diesem Fall ist  $X_t$  ein Martingal was noch gezeigt werden sollte.

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Sei  $S$  ein lokal beschränkter càdlàg Prozess. Die Menge  $K^{\text{simple}} \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sei gegeben durch

$$K^{\text{simple}} := \{(H \cdot S)_\infty \mid H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{\llbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket} \text{ einfacher Prozess, } S^{\tau_n} \text{ beschränkt}\}.$$

Weiter existiere ein Maß  $Q$  mit den Eigenschaften

1.  $Q \sim P$ , d.h.  $Q$  ist äquivalent zu  $P$ , und
2. der Prozess  $S$  ist ein lokales Martingal unter  $Q$ .

Sei weiter  $L_+^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) := \{f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) \mid f \geq 0\}$ . Zeigen Sie

$$K^{\text{simple}} \cap L_+^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{0\}.$$

Formulieren Sie die ökonomische Interpretation dieser Aussage.

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 5.

Entsprechend Proposition 5.1.7 in [DS06] ist dies eine direkte Konsequenz von Aufgabe 5. Sei in der Tat  $S$  ein lokal beschränktes Martingal, sodass

$(H \cdot S)_\infty \in (H \cdot S)_\infty \in K^{\text{simple}} \cap L_+^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Nach Aufgabe 5 gilt dann  $E_Q[(H \cdot S)_\infty] = 0$ . Da  $(H \cdot S)_\infty \in L_+^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$  gilt außerdem  $(H \cdot S)_\infty \geq 0$ . Somit muss schon  $(H \cdot S)_\infty = 0$  gelten. Das ist eine Richtung des Fundamental Theorem of Asset Pricing – Existiert ein äquivalentes Martingalmaß  $Q$ , so ist der Markt frei von Arbitrage.

**Aufgabe 5** (Bonus 4 Punkte). Zeigen Sie: Ein lokal beschränkter càdlàg Prozess  $S$  ist ein lokales Martingal genau dann, wenn

$$E[(H \cdot S)_\infty] = 0,$$

für alle einfachen Prozesse  $H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ , sodass  $S^{\tau_n}$  beschränkt ist.

*Hinweis: Betrachten Sie eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass  $S^{T_n}$  ein beschränkter Prozess ist. Die Martingaleigenschaft von  $S^{T_n}$  folgt nun, falls  $E[S_{\sigma_2}^{T_n} | \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}^{T_n}$  für alle Stoppzeiten  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$  (Diese Aussage muss ebenfalls gezeigt werden).*

Sei zunächst  $S$  ein lokales Martingal,  $H$  ein einfacher Prozess, sodass  $S^{\tau_n}$  beschränkt ist. Dann ist für die lokalisierende Folge  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $S$  der Prozess  $S^{T_k}$  ein Martingal. Sei  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $T_k \geq \tau_n$ , dann sind auch die  $S^{\tau_i}$  Martingale. Nach Definition 2 von Blatt 3 gilt  $(H \cdot S)_t = \sum_{i=1}^n h_i(S_t^{\tau_i} - S_t^{\tau_{i-1}})$  mit  $h_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{\tau_{i-1}})$ . Somit gilt für  $t = \infty$ , dass  $(H \cdot S)_\infty = \sum_{i=1}^n h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})$ . Entsprechend dem Beweis von Theorem 216 im Skript zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie gilt wegen der Definition des stochastischen Integrals für einfache Prozesse

$$E[(H \cdot S)_\infty] = \sum_{i=1}^n E[h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})].$$

Mit der Turmeigenschaft der bedingten Erwartung erhalten wir

$$= \sum_{i=1}^n E[E[h_i(S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}) | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}]].$$

Da die  $h_i$  jeweils  $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$ -messbar sind, folgt

$$= \sum_{i=1}^n E[h_i E[S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}]] .$$

Da  $S^{T_n}$  ein Martingal ist, erhalten wir schließlich

$$= \sum_{i=1}^n E[h_i (S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}})] = 0 .$$

Für die Rückrichtung gehen wir entsprechend Lemma 5.1.3 in [DS06] vor. Es gelte nun  $E[(H \cdot S)_\infty] = 0$  für alle einfachen Prozesse  $H$ , sodass  $S^{T_n}$  beschränkt ist. Wir wollen zeigen, dass  $S$  ein lokales Martingal ist, also eine Folge von Stoppzeiten  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finden, sodass  $S^{T_n}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Martingal ist. Da  $S$  lokal beschränkt ist gibt es eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass  $S^{T_n}$  beschränkt ist. Gilt nun  $E[S_{\sigma_2}^{T_n} | \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}^{T_n}$  für alle  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$ , so gilt auch  $E[S_t^{T_n} | \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}^{T_n}$  für alle  $t > T_n$ , denn hier gilt  $S_t^{T_n} = S_{T_n}$ . Somit ist  $S^{T_n}$  dann ein Martingal. *Es sollte noch gezeigt werden, dass der Prozess  $S^{T_n}$  gleichgradig integrierbar ist.* Um zu zeigen, dass  $S^{T_n}$  ein Martingal ist, reicht es also zu zeigen, dass für alle  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq T_n$  gilt  $E[S_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}$ . Hierzu gehen wir wie in der Rückrichtung des Beweises von Theorem 159, dem Fundamental Theorem of Asset Pricing, vor. Wählen wir für  $F \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$   $H_t = \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{(\sigma_1, \sigma_2]}(t)$ , sodass  $(H \cdot S)_\infty = \mathbb{1}_F (S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})$ , dann erhalten wir nach Voraussetzung  $0 = E[(H \cdot S)_\infty] = E[\mathbb{1}_F (S_{\sigma_2} - S_{\sigma_1})] = E[\mathbb{1}_F S_{\sigma_2}] - E[\mathbb{1}_F S_{\sigma_1}]$ , was uns die definierende Eigenschaft der Bedingten Erwartung  $E[S_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1}]$  nachrechnet. Somit ist  $E[S_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1}] = S_{\sigma_1}$ , was wir zeigen wollten.

## References

- [DS06] *Kapitel 5.* In: DELBAEN, Freddy ; SCHACHERMAYER, Walter: *The Kreps-Yan Theorem.* Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006. – ISBN 978-3-540-31299-4, 71–83