Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Das Cox-Ross-Rubenstein (CRR)-Modell ist wie folgt spezifiziert. Fixiere Zahlen $N \in \mathbb{N}$, $-1 < a < b$ und $r \geq 0$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist gegeben durch

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N ,$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Der Numéraire-Prozess $(\widetilde{S_n^0})_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{S}_n^0 := (1+r)^n$$

und der Preis eines Finanzinstruments $(\widetilde{S}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist definiert als $\widetilde{S}_0 := 1$ und

$$\widetilde{S}_n(\omega) := \omega_1 \cdots \omega_n \quad \text{für} n = 1, \ldots, N .$$

Die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_n) .$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass das CRR-Modell arbitragefrei ist, genau dann wenn $r \in (a, b)$ ist und, dass es in diesem Fall sogar vollständig ist.

1. Ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ wird als *Martingalmaß* bezeichnet, wenn der Prozess

$$\left(\frac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{S}_n^0} \right)_{n=0,\ldots,N}$$

ein Q-Martingal ist. Wir führen die Renditen $(T_i)_{i=1,\ldots,N}$ ein als

$$T_i := \frac{\widetilde{S}_i}{\widetilde{S}_{i-1}} \, .$$

Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ ein Martingalmaß ist, genau dann wenn

$$E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, N-1 \, .$$

Lösung: Q ist genau dann ein Martingalmaß, wenn $(\widetilde{S}_n/\widetilde{S}_n^0)$ ein Q-Martingal ist, also genau dann, wenn $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}/\widetilde{S}_{i+1}^0|\mathcal{F}_i] = \widetilde{S}_i/\widetilde{S}_i^0$ oder mit der Definition von $\widetilde{S}_n^0$ genau dann, wenn $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}|\mathcal{F}_i] = (1+r)\widetilde{S}_i$. Da $-1 < a < b$ gilt $\widetilde{S}_i > 0$ und wir können dadurch teilen, sodass wir erhalten, dass $E_Q[\widetilde{S}_{i+1}|\mathcal{F}_i]/\widetilde{S}_i = 1 + r$. Außerdem ist $\widetilde{S}_n$ nach Definition von $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_n$-messbar. Als Verkettung von messbaren Funktionen ist auch $1/\widetilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n$-messbar. Mit den Rechenregeln für die bedingte Erwartung können wir $1/\widetilde{S}_n$ $\mathcal{F}_n$ in die bedingte Erwartung reinziehen. Mit der Definition der Renditen T_i erhalten wir $E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r$ und somit die zu zeigende Aussage.