B9A4 Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $(P_i)_{i\in I}$ ist straff
2. Für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

Sei zunächst $(P_i)_{i\in I}$ straff. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \in \mathbb{R}^d$, sodass für alle $i \in I$ gilt $P_i(K) > 1 - \varepsilon$. Da für alle $k \leq d$ gilt, dass $K \subset \pi_k^{-1}\big(\pi_k(K)\big)$, gilt aufgrund der Monotonie des Maßes auch für alle $\varepsilon > 0$ und alle $i \in I$ dass $P_i^{\pi_k}\big(\pi_k(K)\big) > 1 - \varepsilon$. Damit ist für $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ straff.

Seien nun für alle Projektionen $\pi_1, \ldots, \pi_d$ die Familien der Bildmaße $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ Kompakta $K_1, \ldots, K_d$, sodass für alle $i \in I$ gilt $P_i^{\pi_k}(K_k) = P_i\big(\pi_k^{-1}(K_k)\big) > 1 - \varepsilon$. Dann gibt es auch abgeschlossene Kugeln $\overline{B}_r(0) \supset K_k$, sodass $P_i^{\pi_k}\big(\overline{B}_r(0)\big) > 1 - \varepsilon$. Betrachte $K = \bigtimes_{k=1}^d \overline{B}_r(0)$. Dann gilt für alle $i \in I$, dass $P_i(K) = P_i(\{\omega \in \mathbb{R}^d \mid \forall k \leq d \; |\omega_k| \leq r\})$. Entsprechend gilt, dass

$$P_i(K^c) = P_i\Big(\bigcup_{k=1}^d \{|\omega_k| > r\}\Big).$$

durch die σ-Subadditivität der Maße P_i können wir abschätzen

$$\leq \sum_{k=1}^d P_i(|\omega_k| > r)$$