Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brown'sche Bewegung. Finden Sie Funktionen $a, b\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass der Prozess X gegeben durch

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, B_s)ds + \int_0^t b(s, B_s)dB_s$$

folgende Darstellungen besitzt:

(i) $X_t = B_t^3$.

Wir gehen wie in Aufgabe 1 von Blatt 10 vor. Die Itô-Formel sagt uns $f(B_t, t) = X_0 + \int_0^t \partial_x f(B_s, s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x f(B_s, s)d\langle B_s\rangle + \int_0^t \partial_t f(B_s, s)ds$. Mit $\langle B_t\rangle = t$ und Koeffizientenvergleich ergibt sich $a(x, t) = \frac{1}{2}\partial_x^2 f + \partial_t f$ und $b(x, t) = \partial_x f$.

Sei $f(x, t) = x^3$, dann ist $\partial_x f = 3x^2$, $\partial_x^2 f = 6x$ und $\partial_t f = 0$. Somit ist $a(B_t, t) = 3B_t$ und $b(B_t, t) = 3B_t^2$.

(ii) e^{B_t}.

Sei $f(x, t) = e^x$. Dann gilt $\partial_x f = \partial_x^2 f = e^x$ und $\partial_t f = 0$, sodass $a = \frac{1}{2}e^{B_t}$ und $b = e^{B_t}$.

(iii) $tB_t^2 e^{B_t}$.

Sei $f(x, t) = tx^2e^x$. Dann gilt $\partial_x f = t(2x + x^2)e^x$, $\partial_x^2 f = t[(2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x] = t(x^2 + 4x + 2)e^x$ und $\partial_t f = x^2e^x$, sodass $a = e^{B_t}\Big(\frac{1}{2}B_t^2 t + 2B_t t + t + B_t^2\Big)$ und $b = t(2B_t + B_t^2)e^{B_t}$.

Aufgabe 3 (Binomiales Modell; 6 Punkte). Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ und $P[\omega_u] = p = 1 - P[\omega_d]$. Die gehandelten Vermögenswerte werden durch den zweidimensionalen Prozess $S = (S^0, S^1)$ gegeben, mit

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1+r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \tag{1}$$

i) Zeige, dass es ein Maß $Q \sim P$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ gibt, so dass der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Ist dieses Marktmodell arbitragefrei?

Wir folgen der Argumentation von Beispiel 3.3.1 in [DS06]. Der diskontierte Prozess $X_t = (1, S_t^1/S_t^0)$ ergibt sich zu

$$X_0^0 \equiv 1, \quad X_1^0 \equiv 1, \quad X_0^1 \equiv s_0, \quad X_1^1(\omega_u) = s_0(1+\tilde{u}), \quad X_1^1 = s_0(1+\tilde{d})\,,$$

mit $1+\tilde{u} = \frac{1+u}{1+r}$ und $1+\tilde{d} = \frac{1+d}{1+r}$. Damit X ein Martingal unter Q ist, muss gelten $E_Q[X_1^i] = X_0^i$, also $Q[\omega_u] + Q[\omega_d] = 1$ und $s_0(1+\tilde{u})Q[\omega_u] + s_0(1+\tilde{d})Q[\omega_d] = s_0$. Schreiben wir $Q[\omega_u] = q$ gilt nach der ersten Gleichung $Q[\omega_d] = 1-q$. Wenn wir das in die zweite Gleichung einsetzen ergibt sich $(1+\tilde{u})q + (1+\tilde{d})(1-q) = 1$, sodass $Q[\omega_u] = q = \frac{\tilde{d}}{\tilde{d}-u} = \frac{r-d}{u-d}$ und $Q[\omega_d] = 1-q = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}-\tilde{d}} = \frac{u-r}{u-d}$. Da $Q(A) = 0$ nur für $A = \emptyset$ gilt ist $Q \sim P$, sodass Q ein äquivalentes Martingalmaß ist. Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist dieses Marktmodell arbitragefrei.

ii) Angenommen, $p = 0{,}7$, $s_0 = 100$, $r = 0$, $1 + d = 0{,}8$ und $1 + u = 1{,}2$. Was ist das entsprechende risikoneutrale Maß? Zeige, dass $E_P[(S_1 - 100)^+]$ kein arbitragefreier Preis für $H = (S_1 - 100)^+$ (Kaufoption mit Ausübungspreis $K = 100$) ist.

Das risikoneutrale Maß ist das Martingalmaß Q aus Teilaufgabe (i). Durch Einsetzen der Werte erhalten wir $d = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$ und $u = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$, sodass $Q[\omega_u] = \frac{r-d}{u-d} = \frac{-(-0{,}2)}{0{,}4} = \frac{1}{2} = 1 - Q[\omega_d] = Q[\omega_d]$. Das Maß P gegeben durch $P[\omega_u] = 0{,}7$ und $P[\omega_d] = 0{,}3$ ist kein äquivalentes Martingalmaß für H. Durch Einsetzen erhalten wir nämlich $S_1(\omega_u) = s_0(1 + u) = 120$ und $S_1(\omega_d) = 80$, sodass $H(\omega_u) = 20$ und $H(\omega_d) = 0$ und damit $E_P[H] = 0{,}7 \cdot 20 + 0{,}3 \cdot 0 = 14 \neq S_0^1 = 100$. Nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing ist der Preis damit auch nicht arbitragefrei.

iii) Finden Sie einen Wert ξ_1, so dass $x + \xi_1(S_1 - S_0) = H$. Was ist der anfängliche Preis x? Berechnen Sie $E_Q[H]$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Um ξ_1 und x herauszufinden, lösen wir das lineare Gleichungssystem gegeben durch $x+\xi_1(S_1(\omega_u)-s_0) = H(\omega_u)$ und $x+\xi_1(S_1(\omega_d)-s_0) = H(\omega_d)$. Durch Einsetzen erhalten wir $x + 20\xi_1 = 20$ und $x - 20\xi_1 = 0$. Durch addieren der beiden Gleichungen erhalten wir $2x = 20$, sodass $x = 10$ und durch abziehen der zweiten Gleichung von der ersten $40\xi_1 = 20$, sodass $\xi_1 = \frac{1}{2}$. Schließlich berechnen wir durch Einsetzen $E_Q[H] = 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}5 \cdot 0 = 10$. Damit ist Q ein risikoneutrales Maß für die Kaufoption mit Ausübungspreis $K = 100$, falls der anfängliche Preis $x = 10$ ist. In der Tat ist $E_Q[H] = 10$ dann ein arbitragefreier Preis für H.

References

[DS06] Delbaen, Freddy ; Schachermayer, Walter: *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Berlin Heidelberg, 2006