

B6A1 Seien X_1, X_2, \dots *iid* uniform auf $[0, 1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0, 1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x) dx$ konvergiert.

Beispiel 5.21 in [Kle20], funktioniert mit starkem Gesetz der großen Zahlen. Betrachte hierzu die Zufallsvariablen $f(X_i)$. Das Starke Gesetz der großen Zahlen gemäß Theorem 51 lautet hierfür, dass für reellwertige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|f(X_1)|] < \infty$ gilt, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \rightarrow E[f(X_1)] = \int_0^1 f(x) dP = \int_0^1 f(x) dx$$

Nach dem Blockungslemma 30 sind diese ebenfalls unabhängig. Die $f(X_i)$ sind ebenfalls identisch verteilt, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $(f \circ X_i)_\# P = P \circ X_i^{-1} \circ f^{-1} = P \circ X_1^{-1} \circ f^{-1}$, weil die X_i identisch verteilt sind. Somit können wir das starke Gesetz der großen Zahlen mit L^1 -Voraussetzung, quasi Theorem 51, benutzen. Nach diesem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) E[f(X_1)].$$

Mit der Definition des Erwartungswertes folgt

$$= \int f \circ X_1 dP.$$

weil X_1 uniform auf $[0, 1]$ verteilt ist, kriegen wir

$$= \int_0^1 f \circ \text{id}(x) \lambda(dx) = \int_0^1 f(x) dx.$$

B6A2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i^{(n)}] = 0.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die $X_i^{(n)}$ genügen dem starken Gesetz der großen Zahlen, wie es in Theorem 50 steht, denn ihre Varianz ist endlich. *Allerdings ist die Notation mit dem $^{(n)}$ unverständlich, das müsste man noch näher prüfen, insbesondere, ob die Voraussetzungen des starken Gesetzes der Großen Zahlen mit L^2 -Voraussetzung erfüllt werden.* Da das schwache Gesetz der großen Zahlen aus dem starken folgt, genügen die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen. *Es ist nicht ganz klar, wie man die einzelnen Y_i für das schwache Gesetz der großen Zahlen kriegt. Die $X_i^{(n)}$ haben für die ersten paar n folgende Struktur.*

$$\begin{aligned} n = 1: & X_1^{(1)} \\ n = 2: & X_1^{(2)}, X_2^{(2)} \\ n = 3: & X_1^{(3)}, X_2^{(3)}, X_3^{(3)} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Es ist irgendwie nicht klar, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} X_n^{(k)}$ existiert, beziehungsweise, wie man an dieses kommt.

Eine Idee könnte sein, die Maximalungleichung aus Satz 42 zu verwenden. Seien $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben und betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$

gegeben durch

$$Y_i = \begin{cases} \frac{X_i^{(n)}}{n} & \text{falls } i \leq n \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $X_i^{(n)} \in L^2$ gilt auch $Y_i \in L^2$. Da nach Aufgabenstellung gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i^{(n)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{Var}[Y_i] = 0$, kann ich n_0 so wählen, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) < \delta$. Wir haben dann mit der Definition von $(Y_i)_i$

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^n Y_i - E[Y_i] \right| > \varepsilon\right),$$

sowie nach der Maximalungleichung aus Satz 42

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(Y_i)}{\varepsilon^2}.$$

Nach der Wahl von n_0 gilt schließlich

$$< \delta,$$

sodass $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) \xrightarrow{P} 0$. Es sei $(X_n)_{n \geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n (X_i - E[X_i]) \xrightarrow{P} 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass die obige Folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel–Cantelli.

B6A3 Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $V := \sup\{\text{Var}[X_n] : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie $k_n = 2^n$ und $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ für $n \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie $l(k_{n+1})/l(k_n)$. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes n und für $k \in \mathbb{N}$ mit $k_{n-1} \leq k \leq k_n$ gilt $\frac{|S_k|}{l(k)} \leq \frac{2|S_{k_n}|}{l(k_n)}$. Verwenden Sie nun die Kolmogorov'sche Ungleichung und Borel-Cantelli, um zu zeigen, dass für beliebiges $\delta > 0$ gilt, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} l(k_n)^{-1} \max\{|S_k| : k \leq k_n\} \leq \delta$ fast sicher.

B6A4 Beweisen Sie folgende Aussagen

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.
2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $a_{n_k} \rightarrow a$, dann folgt $a_n \rightarrow a$.

Hinweis: Diese zwei Aussagen wurden im Beweis von Lemma 43 verwendet.

Es ist sinnvoll, diesen nach dem Bearbeiten der Übungsaufgabe zu wiederholen.

Literatur

[Kle20] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)