B6A1 Seien $X_1, X_2, \dots$ *iid* uniform auf $[0,1]$ verteilt. Weiter sei $f \in L^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass die Monte-Carlo Simulation $\hat{I}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$ fast sicher gegen das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Beispiel 5.21 in [Kle20], funktioniert mit starkem Gesetz der großen Zahlen. Betrachte hierzu die Zufallsvariablen $f(X_i)$. Das Starke Gesetz der großen Zahlen gemäß Theorem 51 lautet hierfür, dass für reellwertige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E[|f(X_1)|] < \infty$ gilt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to E[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}P = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

Nach dem Blockungslemma 30 sind diese ebenfalls unabhängig. Die $f(X_i)$ sind ebenfalls identisch verteilt, denn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $(f \circ X_i)_\# P = P \circ X_i^{-1} \circ f^{-1} = P \circ X_1^{-1} \circ f^{-1}$, weil die X_i identisch verteilt sind. Somit können wir das starke Gesetz der großen Zahlen mit L^1-Voraussetzung, quasi Theorem 51, benutzen. Nach diesem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{I}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) E[f(X_1)]\,.$$

Mit der Definition des Erwartungswertes folgt

$$= \int f \circ X_1 \mathrm{d}P\,.$$

weil X_1 uniform auf $[0,1]$ verteilt ist, kriegen wir

$$= \int_0^1 f \circ \mathrm{id}(x)\lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

B6A2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz (also nicht notwendig identisch verteilt) und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die $X_i^{(n)}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen, d.h. beweisen Sie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i^{(n)} - E\big[X_i^{(n)}\big]\big) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty\,.$$

Seien $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben und betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$Y_i = \begin{cases} \frac{X_i^{(n)}}{n} & \text{falls } i \leq n \text{ und} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Da $X_i^{(n)} \in L^2$ gilt auch $Y_i \in L^2$. Da nach Aufgabenstellung gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[X_i^{(n)}\big] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\big[Y_i\big] = 0$, kann ich n_0 so wählen, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_i) < \delta$. Wir haben dann mit der Definition von $(Y_i)_i$

$$P\Big(\frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} \big(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]\big) > \varepsilon\Big) = P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i - E[Y_i]\Big| > \varepsilon\Big)\,,$$

sowie nach der Maximalungleichung aus Satz 42

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var}(Y_i)}{\varepsilon^2}\,.$$

Nach der Wahl von n_0 gilt für alle $n \geq n_0$, dass $\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_i) < \delta$. Somit gilt insgesamt schließlich

$$< \delta\,,$$

sodass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^{(n)} - E[X_i^{(n)}]) \xrightarrow{P} 0$.

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n\log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - E[X_i]) \xrightarrow{P} 0\,.$$

Wir wollen die Chebycheff-Ungleichung verwenden. Hiernach gilt ...

Zeigen Sie weiter, dass die obige Folge nicht fast sicher konvergiert und sie somit nicht dem Gesetz der großen Zahlen genügt. Verwenden Sie dazu das Lemma von Borel–Cantelli.

B6A3 Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $V := \sup\{\mathrm{Var}[X_n] : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Definiere $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hinweis: Definieren Sie $k_n = 2^n$ *und* $l(n) = n^{1/2}(\log(n))^{1/2+\varepsilon}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und betrachten Sie* $l(k_{n+1})/l(k_n)$*. Zeigen Sie, dass für hinreichend großes* n *und für* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k_{n-1} \le k \le k_n$ *gilt* $\frac{|S_k|}{l(k)} \le \frac{2|S_k|}{l(k_n)}$*. Verwenden Sie nun die Kolmogorov'sche Ungleichung und Borel–Cantelli, um zu zeigen, dass für beliebiges* $\delta > 0$ *gilt, dass* $\limsup_{n\to\infty} l(k_n)^{-1} \max\{|S_k| : k \le k_n\} \le \delta$ *fast sicher.*

B6A4 Beweisen Sie folgende Aussagen

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, dann folgt $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0$.

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge und es gebe eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $a_{n_k} \to a$, dann folgt $a_n \to a$.

Hinweis: Diese zwei Aussagen wurden im Beweis von Lemma 43 verwendet. Es ist sinnvoll, diesen nach dem Bearbeiten der Übungsaufgabe zu wiederholen.

Literatur

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)