Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei X ein Submartingal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

1. Es gilt X^+ ist gleichgradig integrierbar.
2. Es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[X_\infty|\mathscr{F}_t] \geq X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Wir gehen nach dem Beweis von Theorem 9.30 in [Kal21]. Sei zunächst X^+ gleichgradig integrierbar. Nach Lemma 24 aus Wahrscheinlichkeitstheorie 1 gilt $\sup_{t\geq 0} E[X_t^+] < \infty$. Mit Satz 57, dem Doob'schen Grenzwertsatz, gibt es ein X_∞, sodass $X_t^+ \xrightarrow{\text{f.s.}} X_\infty^+$. Nach dem Satz 60, dem Satz von Vitaly, gilt auch $X_t^+ \xrightarrow{L^1} X_\infty^+$. Sei nun $A \in \mathscr{F}_t$. Dann kriegen wir für $t \leq s$

$$E[(X_\infty^+ - X_s^+)\mathbb{1}_A] = E[(X_\infty^+ - X_t^+)\mathbb{1}_A] + E[(X_t^+ - X_s^+)\mathbb{1}_A]\,.$$

Da X ein Submartingal ist, ist der zweite Term negativ. Somit kriegen wir

$$\leq E[(X_\infty^+ - X_t^+)\mathbb{1}_A] \leq E[|X_\infty^+ - X_t^+|] \to 0\,,$$

sodass auch

$$E[X_t^+|\mathscr{F}_s] \to E[X_\infty^+|\mathscr{F}_s]\,. \tag{1}$$

Da X ein Submartingal ist, können wir für alle $\geq 0 \leq t \leq s$ schreiben $X_t \leq E[X_s|\mathscr{F}_t]$ und damit auch

$$X_t \leq \lim_{s\to\infty} E[X_s^+] - \liminf_{s\to\infty} E[X_s^-|\mathscr{F}_t]\,.$$

Mit Gleichung (1) im ersten Term und dem Lemma von Fatou im zweiten kriegen wir

$$\leq E[X_\infty^+] - E[\liminf X_s^-|\mathscr{F}_t] = E[X_\infty|\mathscr{F}_t]\,.$$

Gibt es andererseits ein X_∞, sodass für alle $t \geq 0$ gilt $X_t \leq E[X_\infty|\mathscr{F}_t]$, so gilt nach Blatt 2 Aufgabe 3.ii, dass $X_t^+ \leq E[X_\infty^+|\mathscr{F}_t]$, denn $\cdot^+$ ist konvex. Mit Korollar 8.22 aus [Kle20] erhalten wir schließlich, dass X^+ gleichgradig integrierbar ist.

Formulieren Sie eine analoge Aussage für Supermartingale.

Sei X ein Supermartingal, dann ist $-X$ ein Submartingal. Somit gibt es genau dann ein $-X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[-X_\infty|\mathscr{F}_t] \geq -X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, wenn $(-X)^+$ gleichgradig integrierbar ist. Das heißt, die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. X^- ist gleichgradig integrierbar.
2. Es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E[X_\infty|\mathscr{F}_t] \leq X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

References

[Kal21] *Kapitel 9.* In: Kallenberg, Olav: *Optional Times and Martingales.* Cham : Springer International Publishing, 2021. – ISBN 978–3–030–61871–1, 185–206

[Kle20] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 2020 (Masterclass)