B10A1 Seien Y und Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$Y_n \Rightarrow Y \quad \iff \quad \forall j \in \mathbb{Z}\colon P(Y_n = j) \xrightarrow{n\to\infty} P(Y = j).$$

Wir verwenden die Rücktransformation der charakteristischen Funktionen φ_n und φ von Y_n und Y. Für φ gilt

$$P(X = j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t\,.$$

In der Tat gilt mit der Definition der charakteristischen Funktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} E_k \big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\big] \mathrm{d}t\,.$$

Da E_k nur Masse bei $X = k$ hat erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} P(X = k) \mathrm{d}t$$

Zusammenfassen liefert, *wobei man sich eventuell überlegen sollte, ob man die Summe und das Integral vertauschen darf*

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X = k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)t} \mathrm{d}t\,.$$

Wenn $k - j = 0$, so ist der Integrand 1. Wenn $k - j = \ell \neq 0$, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\ell}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi}\big) = \frac{1}{\mathrm{i}\ell}\big((\pm 1) - (\pm 1)\big) = 0\,.$$

Eingesetzt in die obige Rechnung verschwinden somit alle Summanden mit $k \neq j$ und wir erhalten die Darstellung für die Rücktransformation der charakteristischen Funktion. Entsprechendes gilt dann auch für Y_n und φ_n. Mithilfe dieser Rücktransformationen erhalten wir die gesuchte Konvergenz. Für den Abstand von $P(Y_n = j)$ und $P(Y = j)$ gilt mithilfe

Rücktransformation

$$|P(Y_n = j) - P(Y = j)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi_n \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tj} \varphi \mathrm{d}t \right| .$$

Mit Zusammenfassen und der „Dreiecksungleichung“ des Integrals können wir abschätzen

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}tj} \big(\varphi_n(t) - \varphi(t) \big) \right| \mathrm{d}t \, .$$

Das vereinfacht sich, weil $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}\right| = 1$. Weiterhin konvergiert $\varphi_n(t)$ gegen $\varphi(t)$ nach dem Portmanteau-Theorem, denn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tj}$ ist Lipschitz-stetig. Da $|\varphi_n(t)| \leq 1$ können wir schließlich den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden und erhalten

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0 \, .$$

Wenn andererseits für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $P(Y_n = j) \xrightarrow{n \to \infty} P(Y = j)$, dann gilt auch $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P(Y_n = j) \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P(Y = j)$ für alle $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}$ und somit $Y_n \Rightarrow Y$.

B10A2 Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ schwacher Limes einer Folge von diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Sei hierfür ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ und ein $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ gegeben. Dann gilt

$$\int f \mathrm{d}P = \sup \left\{ \int g \mathrm{d}P \;\middle|\; g \leq f \text{ einfach} \right\}$$

wobei einfach heißt, dass Folgen (α_n) in $\mathbb{R}$ und $(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ existieren, sodass $g = \sum \alpha_n \mathbb{1}_{A_n}$ und $\int g \mathrm{d}P = \sum \alpha_n P(A_n)$. Gebe es eine Folge diskreter Wahrscheinlichkeitsmaße (P_n), sodass P schwacher Limes von (P_n) ist, dann wäre $\int f \mathrm{d}P_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) P_n(X = j)$. Eventuell kann man auch die Konstruktion $\frac{1}{n} \sum \delta_{k/n}$ aus Aufgabe 1 von Blatt 9 verwenden.