Aufgabe 5 (2 Punkte). Betrachten Sie das Modell aus Aufgabe 3 und die Funktion v_t aus Aufgabe 4. Geben Sie eine explizite Darstellung für v_t an, falls $H = h(S_T)$.

Das wurde in Beispiel 5.42. in [HF16] gemacht. Nach Aufgabe 4 ist für $t = T-1, \ldots, 0$

$$v_T(x_0, \ldots, x_T) = h(x_0, \ldots, x_T)\,,$$
$$v_t(x_0, \ldots, x_t) = q v_{t+1}(x_0 \ldots, x_t, x_t(1+b)) + (1-q)v_{t+1}(x_0, \ldots, x_t, x_t(1+a))\,.$$

Wenn man nun $H = h(S_T)$ verwendet, so gilt mit $\bar{q} = 1-q$, $\hat{a} = 1+a$ und $\hat{b} = 1+b$

$$\begin{aligned}
v_T(x_T) &= h(x_T) \\
v_{T-1}(x_{T-1}) &= q h(x_{T-1}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-1}\hat{a}) \\
v_{T-2}(x_{T-2}) &= q v_{T-1}(x_{T-2}\hat{b}) + \bar{q} v_{T-1}(x_{T-2}\hat{a}) \\
&= q\Big(q h(x_{T-2}\hat{b}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-2}\hat{b}\hat{a})\Big) \\
&\quad + \bar{q}\Big(q h(x_{T-2}\hat{a}\hat{b}) + \bar{q} h(x_{T-2}\hat{a}\hat{a})\Big) \\
&= q^2\bar{q}^0 h(x_{T-2}\hat{b}^2\hat{a}^0) + 2q^1\bar{q}^1 h(x_{T-2}\hat{b}^1\hat{a}^1) + q^0\bar{q}^2 h(x_{T-2}\hat{b}^0\hat{a}^2)\,.
\end{aligned}$$

Dementsprechend ergibt sich für $v_{T-3}(x_{T-3})$

$$\begin{aligned}
v_{T-3}(x_{T-3}) &= q^3\bar{q}^0 h(x_{T-3}\hat{b}^3\hat{a}^0) + 3q^2\bar{q}^1 h(x_{T-3}\hat{b}^2\hat{a}^1) \\
&\quad + 3q^1\bar{q}^2 h(x_{T-3}\hat{b}^1\hat{q}^2) + q^0\bar{q}^3 h(x_{T-3}\hat{b}^0\hat{a}^3)\,,
\end{aligned}$$

und insgesamt mit dem Pascalschen Dreieck

$$v_t(x_t) = \sum_{k=0}^{T-t} h\tbinom{T-t}{k} q^k \bar{q}^{T-t-k} h(x_t\hat{b}^k\hat{a}^{T-t-k})\,.$$

Literatur

[HF16] Hans Föllmer, Alexander S.: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* 4th REV. ed. de Gruyter, 2016 (de Gruyter Textbook). – ISBN 311046344X; 9783110463446