Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

i) Beschreiben Sie, welche Voraussetzungen nachzurechnen sind, um die Wohldefiniertheit von Definition 2 zu gewährleisten (Sie müssen diese nicht zeigen!).

Sei f eine rechtsstetige monoton wachsende Funktion. Wir wollen Satz 2 auf μ_f auf $\{(s,t]_{s,t\in\mathbb{R}_+}\}$ anwenden. Wir wissen schon aus Wahrscheinlichkeitstheorie 1, dass $\sigma(\{(s,t]\}_{s,t\in\mathbb{R}_+}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Wenn f monoton wachsend ist, ist das Bild von μ_f auch in $[0,\infty]$. Dann ist noch zu überprüfen, ob μ_f eine additive, σ-subadditive, σ-endliche Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$ ist. Dann wäre nach Satz 2 μ_f auf $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R})_+)$ eindeutig gegeben.

ii) Sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass für messbare Abbildungen $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(u)\mu_f(du) = \int_{\mathbb{R}_+} h(u)f'(u)du,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.

Hinweis: Verwenden Sie für ii) den Satz über monotone Klassen. Sie brauchen das Argument nicht im Detail auszuführen.

Wie wir in der Übung gesehen haben und auch im Hinweis steht, verwenden wir das Moonotone-Klassen Theorem. Sei $\mathscr{H}$ der Vektorraum aller Abbildungen h, für die Formel gilt. Wir wollen zeigen, dass die Formel für $h = \mathbb{1}_{(a,b]}$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}_+$ gilt. Dann gilt sie nach dem Monotone-Klassen Theorem auch für alle $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-messbaren Abbildungen, denn $\sigma(\{(a,b]\}_{a,b\in\mathbb{R}_+}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Nach der Definition des Lebesgue-Integrals gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(a,b]}\mu_f(du) = \mu_f\big((a,b]\big)\,.$$

Nach der Definition 2 von μ_f gilt

$$= f(b) - f(a)\,.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(a,b]} f'(u)du\,.$$

Somit gilt die Formel für $h = \mathbb{1}_{(a,b]}$ und mit dem Monotone-Klassen Theorem auch für alle $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$-messbaren Funktionen h. Damit das Monotone-Klassen Theorem angewendet werden kann, müsste noch gezeigt werden, dass die Formel für $h = 1$ gilt. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu_f(du) = \mu_f(\mathbb{R}_+) = \mu_f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\mu_f((0,n])\,,$$

mit Stetigkeit von unten.

$$= \lim_{n\to\infty} f(n) - f(0) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f'(u)du = \int_{\mathbb{R}_+} f'(u)du\,,$$

wieder mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. *Außerdem wäre zu zeigen, dass sie für ein h mit $h_n \uparrow h$ gilt, wenn sie für jedes h_n gilt, was bestimmt mit monotoner Konvergenz geht.*

iii) Berechnen Sie $\int_{(0,t]} h(u)df(u) := \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(0,t]} h(u)\mu_f(du)$ für

a) $h(t) = t$ und $f(t) = \exp(t)$.

Nach Teilaufgabe (ii) gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(0,t]}(u) u \mu_{\exp}(du) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(0,t]}(u) u \exp(u) du = \int_0^t u \exp(u) du$$
$$= \exp(u)(u-1)\Big|_{u=0}^{t} = \exp(t)(t-1) + 1 \,.$$