Aufgabe 1 (4 Punkte). Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(s)f(s)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t) X_t dt + G(t) dW_t, \quad X_0 = x\,.$$

Lösung. Mit $A_t = f(t)$ und $B_t = x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s$ und partieller Integration

$$AB = A_0 B_0 - A_- \cdot B - B_- \cdot A - [A, B] = A_0 B_0 - A \cdot B - B \cdot A$$

folgt

$$f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s)$$
$$= f(0)x + \int_0^t f(s) d(\int_0^s f(u)^{-1} G(u) dW_u) + \int_0^t (x + \int_0^s f(u)^{-1} G(u) dW_u) df(s)$$

und mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie der Differentialgleichung $f'(t) = F(s)f(s)$ aus der Aufgabenstellung

$$= x + \int_0^t G(s) dW_s + \int_0^t F(s) f(s)(x + \int_0^s f^{-1}(u) G(u) dW_u) ds\,.$$

Mit der Definition von X_t kriegen wir schließlich

$$= x + \int_0^t G(s) dW_s + \int_0^t F(s) X_s ds\,.$$