

**B9A2** Wir wollen zeigen, dass  $\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \mid (\mu, \sigma^2) \in L \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)\}$  genau dann straff ist, wenn  $L$  beschränkt ist. Angenommen  $L$  ist beschränkt. Wir wollen zeigen, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $r > 0$  existiert, sodass für alle  $(\mu, \sigma) \in L$  gilt  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)([-r, r]) > 1 - \varepsilon$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben. Es gilt

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma)([-r, r]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-r}^r \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mu(dx).$$

Substitution mit  $z = (x - \mu)/\sigma$  liefert

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-r-\mu)/\sigma}^{(r-\mu)/\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] \mu(dx).$$

Es gilt  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)([-r, r])$

Sei  $L$  beschränkt und seien  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$  die Schranken. Sei zudem  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Mit der Tschebyscheffschen Ungleichung gilt

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma)(|X - \mu| < r) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{r^2}$$

Dann ist

**B9A4** Sei  $(P_i)_{i \in I}$  eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}^d$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1.  $(P_i)_{i \in I}$  ist straff
2. Für alle Projektionen  $\pi_1, \dots, \pi_d$  ist  $(P_i^{\pi_k})_{i \in I}$  straff.

Sei zunächst  $(P_i)_{i \in I}$  straff. Dann gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K \in \mathbb{R}^d$ , sodass für alle  $i \in I$  gilt  $P_i(K) > 1 - \varepsilon$ . Da für alle  $k \leq d$  gilt, dass  $K \subset \pi_k^{-1}(\pi_k(K))$ , gilt aufgrund der Monotonie des Maßes auch für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $i \in I$  dass  $P_i^{\pi_k}(\pi_k(K)) > 1 - \varepsilon$ . Damit ist für  $(P_i^{\pi_k})_{i \in I}$  für alle Projektionen  $\pi_1, \dots, \pi_d$  straff.

Seien nun für alle Projektionen  $\pi_1, \dots, \pi_d$  die Familien der Bildmaße  $(P_i^{\pi_k})_{i \in I}$  straff. Dann gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  Kompakta  $K_1, \dots, K_d$ , sodass für alle  $i \in I$  gilt  $P_i^{\pi_k}(K_k) = P_i(\pi_k^{-1}(K_k)) > 1 - \varepsilon$ . Sei  $r > 0$  so, dass  $\overline{B}_r(0) \supset K_k$ . Dann gilt auch  $P_i^{\pi_k}(\overline{B}_r(0)) > 1 - \varepsilon$ . Betrachte  $K = \times_{k=1}^d \overline{B}_r(0)$ . Dann

gilt für alle  $i \in I$ , dass  $P_i(K) = P_i(\bigcap_{k=1}^d \{|\omega_k| \leq r\})$ . Entsprechend gilt, dass

$$P_i(K^c) = P_i\left(\bigcup_{k=1}^d \{|\omega_k| > r\}\right).$$

durch die  $\sigma$ -Subadditivität der Maße  $P_i$  können wir abschätzen

$$\leq \sum_{k=1}^d P_i(|\omega_k| > r),$$

wobei  $\{|\omega_k| > r\} = \pi_k^{-1}(\overline{B}_r(0)^c)$ , sodass

$$\leq \sum_{k=1}^d P_i^{\pi_k}(\overline{B}_r(0)^c).$$

Da wir  $r$  so gewählt haben, dass  $P_i^{\pi_k}(\overline{B}_r(0)) > 1 - \varepsilon$ , erhalten wir

$$\leq d\varepsilon.$$

Sei nun  $\delta > 0$  gegeben. Wähle  $\varepsilon = \delta/d$ , dann gilt für alle  $i \in I$ , dass  $P_i(K) > 1 - \delta$ . Somit ist  $(P_i)$  straff.