МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Б. СОРОКИН, Е.В. БРАЖНИКОВА, О.В. ПЛАТОНОВА

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: ПРАКТИКУМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Москва — 2017

УДК 519.852.3
ББК 22.18
С 65

Сорокин А.Б. Линейное программирование: практикум [Электронный ресурс]: Учебно-методическое пособие / Сорокин А.Б., Бражникова Е.В., Платонова О.Е. — М.: Московский технологический университет (МИРЭА), 2017. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Учебно-методическое пособие содержит основные типы прикладных задач линейного программирования, описывается графический, симплексный метод и теория двойственности для их решения. Предназначено для студентов 3-го курса квалификации бакалавр, обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» по профилю «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» и 09.03.04 «Программная инженерия» по профилю «Системы поддержки принятия решений».

Учебно-методическое пособие издается в авторской редакции.

Авторский коллектив: Сорокин Алексей Борисович, Бражникова Елена Владимировна, Платонова Ольга Владимировна

Рецензенты:

Романов Александр Михайлович, к.т.н., доцент кафедры ВТ, института ИТ, МИРЭА

Лямин Юрий Алексеевич, к.т.н., с.н.с., начальник отдела ФГБУ НИИ «Восход»

Минимальные системные требования:
Наличие операционной системы Windows, поддерживаемой производителем.
Наличие свободного места в оперативной памяти не менее 128 Мб.
Наличие свободного места в памяти хранения (на жестком диске) не менее 30 Мб.
Наличие интерфейса ввода информации.
Дополнительные программные средства: программа для чтения pdf-файлов (Adobe Reader).
Подписано к использованию по решению Редакционно-издательского совета
Московского технологического университета от ___ __________ 2017 г.
Тираж 10

© Сорокин А.Б., 2017
© Московский технологический университет (МИРЭА), 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности. В экономике они предшествуют созданию производственных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие. В научных исследованиях – позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, предопределяют развитие экспериментальной базы и теоретического аппарата. При создании новой техники – составляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, комплексов, зданий, в разработке технологии их построения и эксплуатации; в социальной сфере – используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими процессами. Оптимальные (эффективные) решения позволяют достигать цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсов [1].

В классической математике методы поиска оптимальных решений рассматривают в разделах классической математики, связанных с изучением экстремумов функций, в математическом программировании.

Математическое программирование является одним из разделов исследования операций – прикладного направления кибернетики, используемого для решения практических организационных задач.

Методы математического программирования используются для решения так называемых распределительных задач, которые возникают в случае, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой из намеченных работ эффективным образом и необходимо наилучшим образом распределить ресурсы по работам в соответствии с выбранным критерием оптимальности. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий).

Традиционно в математическом программировании выделяют один из основных разделов линейное программирование. Линейное программирование – один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого и начала развиваться сама дисциплина «математическое программирование» [2].

Впервые постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж, дана в работе советского математика

А.Н. Толстого (1930 г.). В 1939 г. советский ученый Л.В. Канторович указал общий метод (метод разрешающих множителей) решения задач, связанных с составлением оптимального плана при организации производственных процессов (в связи с решением задачи оптимального распределения работы между станками фанерного треста в Ленинграде). Он же совместно с М.К. Гавуриным в 1949 г. разработал метод потенциалов, используемый при решении транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, А.Л. Лурье, А.Г. Аганбегяна, Д.Б. Юдина, Е.Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем. В 1949 г. американским математиком Дж. Данцигом был опубликован основной метод решения задач линейного программирования − симплекс-метод. Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах Дж. Данцига и Т. Купманса.

Термин «программирование» в названии дисциплины ничего общего с термином «программирование для ЭВМ» (т.е. составление программы) не имеет. Дисциплина «линейное программирование» возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться для решения математических, инженерных, экономических и др. задач. Термин «линейное программирование» возник в результате неточного перевода английского «linear programming». Одно из значений слова «programming» – составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом английского было бы не «линейное программирование», а «линейное планирование», что более точно отражает содержание дисциплины.

Линейное программирование применимо для решения математических моделей, в основу которых может быть положена гипотеза линейного представления реального мира. Таким образом, задача линейного программирования состоит в нахождении минимума (или максимума) линейной функции при линейных ограничениях [3].

Линейное программирование применяется при решении экономических задач, в таких задачах как управление и планирование производства; в задачах определения оптимального размещения оборудования на морских судах, в цехах; в задачах определения оптимального плана перевозок груза; в задачах оптимального распределения кадров и т.д.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Общая постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти значения переменных $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые:

a) удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le (=, \ge) b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

b) являются неотрицательными

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{1.2}$$

c) обеспечивают экстремум целевой функции (максимум или минимум)

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{1.3}$$

Примечательно, что среди ограничений могут одновременно встречаться знаки ≤, = и ≥. Значения c_j, b_i, и a_{ij} ($i = \overline{1,m}$,, $j = \overline{1,n}$) предполагаются известными.

Более кратко ЗЛП в общей форме можно представить в следующем виде:

целевая функция

$$f\overline{(x)} = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max\,(min)$$

ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = \overline{1,m_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i = \overline{m_1+1,m_2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{m_2+1,m}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \text{ где}$$

x_j – произвольного знака, $j = \overline{n_1+1,n}$.

Определение 1.1. Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяющий условиям задачи (1.1) и (1.2) называется *допустимым решением* или *допустимым планом*.

Термины «решение» или «план» – синонимы, однако первый используется чаще, когда речь идет о формализованной постановке задачи, а второй – о содержательной [3].

Определение 1.2. Допустимое решение, удовлетворяющее экстремум целевой функции, называется *оптимальным решением задачи*.

При описании реальной ситуации с помощью линейной модели следует проверять наличие у модели таких свойств, как *пропорциональность* и *аддитивность*.

Пропорциональность означает, что вклад каждой переменной в целевую функцию и общий объем потребления соответствующих ресурсов должен быть прямо пропорционален величине этой переменной. Например, если, продавая j-й товар в общем случае по цене 100 рублей, фирма будет делать скидку при определенном уровне закупки до уровня цены 95 рублей, то будет отсутствовать прямая пропорциональность между доходом фирмы и величиной переменной x_j. Таким образом, в разных ситуациях одна единица j-го товара будет приносить разный доход.

Аддитивность означает, что целевая функция и ограничения должны представлять собой сумму вкладов от различных переменных. Примером нарушения аддитивности служит ситуация, когда увеличение сбыта одного из конкурирующих видов продукции, производимых одной фирмой, влияет на объем реализации другого.

1.2. Построение моделей задач линейного программирования

Задача о максимальном доходе.

Фабрика производит два вида красок: первый - для наружных, а второй – для внутренних работ. Для производства красок используются два ингредиента: А и В. Максимально возможные суточные запасы этих ингредиентов составляют 6 и 8 тонн соответственно. Известны расходы А и В на 1 тонну соответствующих красок (таблица 1.1). Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску 2-го вида никогда не превышает спроса на краску 1-го вида более, чем на 1 тонну. Кроме того, установлено, что спрос на краску 2-го вида никогда не превышает 2 тонны в сутки. Оптовые цены одной тонны (т.) красок равны:

для краски 1-го вида – 3 тыс. руб.;

для краски 2-го вида – 2 тыс. руб.

Необходимо построить математическую модель, позволяющую установить, какое количество краски каждого вида надо производить, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.1 Параметры задачи о максимальном доходе

Ингредиенты	Расход ингредиентов, т. ингр./т. краски		Запас, т. ингр./сутки
	Краска 1-го вида	Краска 2-го вида	
A	1	2	6
B	2	1	8

Прежде чем построить математическую модель задачи, необходимо четко разобраться с экономической ситуацией, описанной в условии. Для этого ответим на следующие вопросы:

1 *Что является искомыми величинами задачи?*

В задаче требуется установить, сколько краски каждого вида надо производить. Поэтому искомыми величинами, а значит, и переменными задачи являются суточные объемы производства каждого вида красок:

x_1 – суточный объем производства краски 1-го вида, [т. краски/сутки];

x_2 – суточный объем производства краски 2-го вида, [т. краски/сутки].

2 *Какова цель решения? Какой параметр задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения. В каком направлении должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?*

В условии задачи сформулирована цель - добиться максимального дохода от реализации продукции. Тогда критерием эффективности служит параметр суточного дохода, который должен стремится к максимуму. Чтобы рассчитать величину суточного дохода от продажи красок обоих видов, необходимо знать объемы производства красок, x_1 и x_2 т краски в сутки, а также оптовые цены на краски 1-го и 2-го видов. Согласно условию, соответственно 3 и 2 тыс. руб. за 1 т краски. Таким образом, доход от продажи суточного объема производства краски 1-го вида равен $3x_1$ тыс. руб. в сутки, а от продажи краски 2-го вида – $2x_2$ тыс. руб. в сутки. Поэтому запишем целевую функцию в виде суммы дохода от продажи красок 1-го и 2-го видов (при допущении независимости объемов сбыта каждой из красок)

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to max \ [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Примечание. Следует проверять размерность левой и правой части целевой функции, а также всех ограничений. Поскольку их несовпадение свидетельствует о принципиальной ошибке.

$$\left[\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{т. краски}} \times \frac{\text{т. краски}}{\text{сутки}} = \frac{\text{тыс. руб.}}{\text{сутки}}\right]$$

3 Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены? Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи.

Возможные объемы производства красок x_1 и x_2 ограничиваются следующими условиями:

- количество ингредиентов А и В, израсходованное в течение суток на производство красок обоих видов, не может превышать суточного запаса этих ингредиентов на складе;
- согласно результатам изучения рыночного спроса, суточный объем производства краски 2-го вида может превышать объем производства краски 1-го вида, но не более, чем на 1 т краски;
- объем производства краски 2-го вида не должен превышать 2 т в сутки, что также следует из результатов изучения рынков сбыта;
- объемы производства красок не могут быть отрицательными.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

a расходом ингредиентов;

Ограничения по расходу любого из ингредиентов имеют следующую содержательную форму записи:

$$\begin{pmatrix}\text{Расход конкретного ингредиента}\\ \text{на производство обоих видов краски}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально возможный}\\ \text{запас данного градиента}\end{pmatrix}$$

Тогда эти ограничения в математической форме будут выглядеть следующим образом:

Левая часть ограничения – это формула расчета суточного расхода конкретного ингредиента на производство красок. Так из условия известен расход ингредиента А на производство 1 т краски 1-го вида (1т ингр. А) и 1 т краски 2-го вида (2 т ингр. А) (см. табл. 1.1). Тогда на производство x_1 т краски 1-го вида и x_2 т краски 2-го вида потребуется $1x_1 + 2x_2$ т. ингр.А.

Правая часть ограничения – это величина суточного запаса ингредиента на складе, например, 6 т. ингредиента А в сутки (см. табл. 1.1). Таким образом, ограничение по расходу А имеет вид:

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \left[\frac{\text{т.ингр.А}}{\text{т.краски}} \times \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}} \le \frac{\text{т.ингр.А}}{\text{сутки}}\right]$$

Аналогична математическая запись ограничения по расходу В:

$$2x_1 + x_2 \le 8 \quad \left[\frac{\text{т.ингр.В}}{\text{т.краски}} \times \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}} \le \frac{\text{т.ингр.В}}{\text{сутки}}\right]$$

b рыночным спросом на краску;

Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида имеет содержательную форму:

$$\begin{pmatrix}\text{Превышение объема производства краски 2} - \text{го вида} \\ \text{над объемом производства краски 1} - \text{го вида}\end{pmatrix} \le \left(1\,\frac{\text{т. краски}}{\text{сутки}}\right)$$

Тогда

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}} \le \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}\right]$$

Ограничение по суточному объему производства краски 2-го вида имеет содержательную форму:

$$(\text{Спрос на краску 2} - \text{го вида}) \le \left(2\,\frac{\text{т. краски}}{\text{сутки}}\right)$$

И математическую форму:

$$x_2 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}} \le \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}\right]$$

с неотрицательностью объемов производства.

Неотрицательность объемов производства задается следующим образом:

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0$$

Таким образом, математическая модель этой задачи имеет вид.

Целевая функция.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to max \ [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \ [\text{т. ингр. А/сутки}] \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \ [\text{т. ингр. В/сутки}] \\ -x_1 + x_2 \le 1 \ [\text{т. краски/сутки}] \\ x_2 \le 2 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ x_1 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ x_2 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \end{cases}$$

Задача о минимальных затратах

Выполнить заказ по производству 32 изделий $И_1$ и 4 изделий $И_2$ взялись бригады $Б_1$ и $Б_2$. Производительность бригады $Б_1$ по производству изделий $И_1$ и $И_2$ составляет соответственно 4 и 2 изделия в час, фонд рабочего времени этой бригады 9,5 ч. Производительность бригады $Б_2$ – соответственно 1 и 3 изделия в час, а ее фонд рабочего времени – 4 ч. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады $Б_1$ равны соответственно 9 и 20 руб., для бригады $Б_2$ – 15 и 30 руб.

Составьте математическую модель задачи, позволяющую найти оптимальный объем выпуска изделий, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение заказа.

Аналогично задаче о максимальном доходе ответим на вопросы.

1 *Что является искомыми величинами задачи?*

Искомыми величинами в задаче являются объемы выпуска изделий. Изделия $И_1$ будут выпускаться двумя бригадами $Б_1$ и $Б_2$. Поэтому необходимо различать количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_1$, и количество изделий $И_1$, произведенных бригадой $Б_2$. Аналогично, объемы выпуска изделий $И_2$ бригадой $Б_1$ и бригадой $Б_2$ также являются различными величинами. Вследствие этого в данной задаче 4 переменные.

x_{11} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{12} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_1$, [шт.];

x_{21} – количество изделий $И_1$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.];

x_{22} – количество изделий $И_2$, изготавливаемых бригадой $Б_2$, [шт.].

Примечание. В данной задаче нет необходимости привязываться к какому-либо временному интервалу (в задаче о максимальном доходе была привязка к суткам), поскольку здесь требуется найти не объем выпуска за определенное время, а способ распределения известной плановой величины заказа между бригадами.

2 *Какова целевая функция?*

Целью решения задачи является выполнение плана с минимальными затратами, т.е. критерием эффективности решения служит показатель затрат на выполнение всего заказа. Поэтому целевая функция должна быть представлена формулой расчета этих затрат. Затраты каждой бригады на производство одного изделия $И_1$ и $И_2$ известны из условия. Таким образом, целевая функция имеет вид:

$$f(x) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to min \text{ [руб.]}$$

Проверим размерность левой м правой части.

$$\left[\frac{\text{руб.}}{\text{шт.}} \times \text{шт.} = \text{руб.}\right]$$

3 *Какие ограничения должны быть выполнены?*

Для удобства составления ограничений запишем исходные данные в виде таблицы 1.2.

Таблица 1.2. Параметры задачи о минимальных затратах

Бригада	Производительность бригад, шт./ч.		Фонд рабочего времени, ч.
	$И_1$	$И_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Заказ, шт.	32	4	

Возможные объемы производства изделий бригадами ограничиваются следующими условиями:

- общее количество изделий $И_1$, выпущенное обеими бригадами, должно равняться 32 шт., а общее количество изделий $И_2$ – 4 шт.;
- время, отпущенное на работу над данным заказом, составляет для бригады $Б_1$ – 9,5 ч, а для бригады $Б_2$ – 4 ч;
- объемы производства изделий не могут быть отрицательными величинами.

Таким образом, все ограничения задачи делятся на 3 группы, обусловленные:

a *величиной заказа на производство изделий;*

Ограничения по заказу изделий имеют следующую содержательную форму:

$$\begin{pmatrix}\text{Количество изделий } И_1\\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2\end{pmatrix} = (32 \text{ шт})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Количество изделий } И_2\\ \text{произведенных бригадами } Б_1 \text{ и } Б_2\end{pmatrix} = (4 \text{ шт})$$

Тогда математическая форма имеет вид:

$$x_{11} + x_{21} = 32 \quad [\text{шт.} = \text{шт.}]$$

$$x_{12} + x_{22} = 4 \quad [\text{шт.} = \text{шт.}]$$

b *фондами времени, выделенными бригадам;*

Ограничения по фондам времени имеет содержательную форму:

$$\begin{pmatrix}\text{Общее время, затраченное бригадой } Б_1\\ \text{на выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2\end{pmatrix} \le (9{,}5 \text{ ч})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Общее время, затраченное бригадой } Б_2\\ \text{на выпуск изделий } И_1 \text{ и } И_2\end{pmatrix} \le (4 \text{ ч})$$

Проблема заключается в том, что в условии задачи прямо не задано время, которое тратят бригады на выпуск одного изделия $И_1$ или $И_2$ (не задана трудоемкость производства). Но имеется информация о производительности каждой бригады (о количестве производимых изделий в 1 ч). Трудоемкость (Тр) и производительность (Пр) являются обратными величинами.

$$Тр = \frac{1}{Пр} \quad \left[\frac{ч.}{шт.}\right] = \left[1/\frac{шт.}{ч.}\right]$$

Используя табл. 1.2, получаем следующую информацию:

- $1/4$ ч. тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_1$;
- $1/2$ ч. тратит бригада $Б_1$ на производство одного изделия $И_2$;
- $1/1$ ч. тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_1$;
- $1/3$ ч. тратит бригада $Б_2$ на производство одного изделия $И_2$;

Запишем ограничения по фондам времени в математическом виде.

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{ч.}{шт.} \times шт.\right] \le [шт.]$$

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{ч.}{шт.} \times шт.\right] \le [шт.]$$

с неотрицательностью объемов производства.

Неотрицательность объемов производства задается следующим образом:

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1{,}2; j = 1{,}2)$$

Математическая модель этой задачи имеет вид:

Целевая функция.

$$f(x) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to min \ [руб.]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 & [шт.] \\ x_{12} + x_{22} = 4 & [шт.] \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 & [ч.] \\ x_{21} + \dfrac{x_{22}}{3} \le 4 & [ч.] \\ x_{ij} \ge 0 \ (i = 1{,}2; j = 1{,}2) & [шт.] \end{cases}$$

1.3. Понятие выпуклого множества в линейном программировании

Свойства ЗЛП тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств. Выпуклое множество опирается не только на наглядные геометрические представления, но имеет чисто аналитическую формулировку.

Определение 1.3. Вектор $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m$ называется выпуклой линейной комбинацией векторов $X_1, X_2, \ldots, X_m$, если коэффициенты удовлетворяют условиям [4].

$$\sum_{j=1}^{n} \propto_i = 1, \alpha_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m})$$

В частности выпуклой линейной комбинацией двух точек X_1 и X_2 является вектор (отрезок) соединяющий эти точки.

$$(1-\alpha)X_1+\alpha X_2, \text{ где } 0 \le \alpha \le 1.$$

Определение 1.4. Множество D векторов точек линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми его двумя точками X_1 и X_2 ему принадлежит отрезок, соединяющий эти точки.

Аналитически условие выпуклости $D \subset \mathbb{R}^n$ (условие строгого включения) записывается следующим образом: для любых $X_1 \in D$, $X_2 \in D$ и любого $0 \le \alpha \le 1$ выполняется условие:

$$(1-\alpha)X_1+\alpha X_2 \in D$$

Геометрическое представление изложенных определений представлено на рис.1.1.

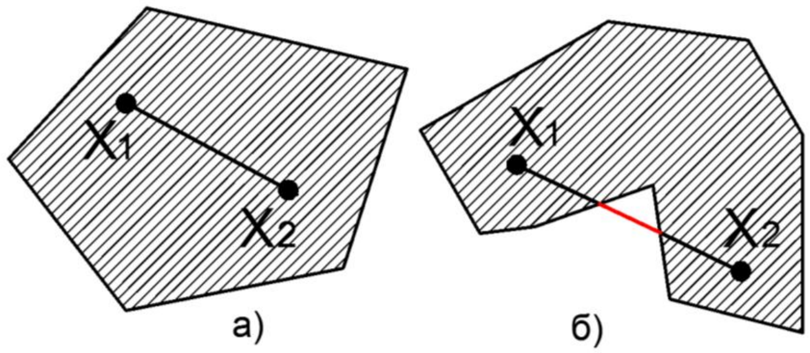


Рис.1.1. Примеры множеств: а) выпуклое множество;
б) множество не является выпуклым.

Приведем примеры выпуклых множеств:

- множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ представляют собой интервалы;
- множество в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ представлено правильными многоугольниками;
- множество в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ представлено правильными многогранниками.

Примечательно. Круг в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ является выпуклым множеством, а граница круга во множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ им не является.

Поэтому точки выпуклого множества разделяют на внутренние, граничные и угловые (крайние).

Определение 1.5. Точка X_1 выпуклого множества D называется внутренней, если существует сколь угодно малая ее окрестность, содержащая только точки данного множества (рис. 1.2).

Определение 1.6. Точка X_2 выпуклого множества D называется граничной, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему (рис. 1.2).

Определение 1.7. Точка X_3 выпуклого множества D называется угловой (крайней), если она не может быть представлена выпуклой линейной комбинацией двух других точек этого множества. Другими словами, граничная точка выпуклого множества называется угловой, если через нее можно провести отрезок, все точки которого не принадлежат данному множеству (рис. 1.2).

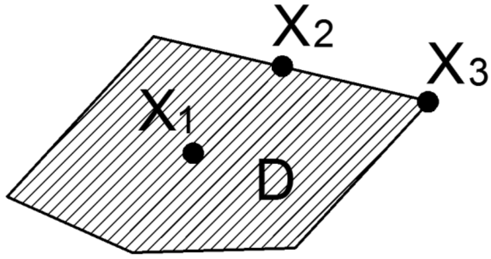


Рис.1.2. Примеры точек выпуклого множества

Примечательно. Не всякое выпуклое множество имеет крайние точки. Прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство крайних точек не имеют.

Исходя из свойств выпуклых множеств сформулированы ряд теоретических утверждений.

Теорема 1.1. Множество точек (векторов) $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ удовлетворяющих условиям 1.1 и 1.2 является выпуклым. Другими словами, множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования, является выпуклым [5].

Теорема 1.2. Для того чтобы точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области определения задачи 1.1 – 1.3 была крайней, необходимо и достаточно, чтобы X удовлетворяла не менее, чем n независимым линейным ограничениям системы 1.1 и 1.2, как равенствам. Другими словами, если оптимальный план ЗЛП существует, то, по крайней мере, одна из вершин ограничений является оптимальным планом [5].

Теорема 1.3. (Основная теорема линейного программирования). Линейная форма 1.3 достигает экстремума в вершинах многогранника условий. Если экстремум достигается не в одной, а в нескольких вершинах, то он достигается и на всем многограннике, порожденном этими вершинами. Другими словами, целевая функция ЗЛП достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. При этом если целевая функция достигает экстремального значения более, чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин [5].

Таким образом, теоремы указывают на принципиальный путь решения ЗЛП. Можно найти все угловые точки, множества $D \subset \mathbb{R}^n$, найти значение целевой функции в каждой угловой точке и выбрать из них экстремальное. На практике такой способ обычно не применяют, так как в реальных задачах угловых точек может быть достаточно большое количество, и объем вычислений будет достаточно громоздким.

1.4. Контрольные вопросы

1) Раскройте смысл термина «линейное программирование» и смысл термина «программирование» в линейных задачах.

2) Запищите ЗЛП в общей развернутой и сокращенной форме.

3) Что называется допустимым, оптимальным решением ЗЛП? Термины «решение» и «план».

4) Свойства линейной модели пропорциональность и аддитивность.

5) На какие вопросы желательно ответить при построении модели ЗЛП?

6) Смысл проверки размерности левой и правой части целевой функции, а также всех ограничений.

7) Определение выпуклой линейной комбинацией векторов. Какое множество называется выпуклым?

8) Геометрическое представление выпуклого и невыпуклого множества. Примеры выпуклых множеств в различных пространствах.

9) Точки выпуклого множества: внутренние, граничные и угловые. Геометрическое представление точек выпуклого множества.

10) Теоретические утверждения, выдвинутые на основании свойств выпуклых множеств.

11) Основная теорема линейного программирования. Принципиальный путь решения ЗЛП.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Стандартная форма задачи линейного программирования

Обратим внимание на раздел 1.2. В указанном разделе два примера задач имели достаточно разный вид: в задаче о максимальном доходе требовалось найти max целевой функции, а в задаче о минимальных затратах – min. В задаче о максимальном доходе ограничения имеют вид неравенств со знаком $\leq$, а в задаче о минимальных затратах ограничения имеют вид неравенств со знаками $\leq$ и $=$.

Такой разнобой неудобен при разработке алгоритмов решения этих ЗЛП. Поэтому имеются некоторые стандартные формы ЗЛП, к которым и приводят конкретные различные задачи.

Стандартная форма ЗЛП – это задача, в которой система функциональных и прямых ограничений состоит из одних неравенств, переменные являются неотрицательными, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму.

Стандартная форма ЗЛП имеет вид [3]:

целевая функция,

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow max \tag{2.1}$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

Для более краткой записи можно использовать векторную или матричную запись.

Тогда вводим в рассмотрение матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и векторы:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \overline{c} = (c_1, \ldots, c_n) \tag{2.5}$$

Комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ есть скалярное произведение векторов $\overline{c}$ и $\overline{x}$. Тогда в векторной форме задача (2.1 – 2.3) примет вид:

$$\overline{(c,x)} \Rightarrow max$$

$$\overline{A_1}x_1 + \overline{A_2}x_2 + \cdots + \overline{A_n}x_n \le \overline{b} \qquad (2.6)$$

$$\overline{x} \ge 0$$

Заметим, что комбинацию $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ можно представить как произведение $\overline{c}^T\overline{x}$. Поэтому задачу (2.1 – 2.3) можно представить не только в векторной форме (2.6), но и в матричной.

$$\overline{c}^T\overline{x} \Rightarrow max$$

$$A\overline{x} \le \overline{b} \qquad (2.7)$$

$$\overline{x} \ge 0$$

Стандартная форма ЗЛП интересна тем, что большое число прикладных задач естественным образом сводится к этому виду моделей. В стандартной форме ЗЛП удобно решать графическим методом, если число переменных равно двум (*n = 2*).

2.2. Рекомендации по построению модели в стандартной форме

Любую ЗЛП можно привести к стандартной форме используя следующие правила [4]:

Правило перехода от задачи максимизации целевой функции к задаче минимизации.

Задача максимизации целевой функции $f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow max$ легко может быть сведена к задаче минимизации $-f\overline{(x)} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_n x_n \Rightarrow min$ при тех же ограничениях, так как

$$min\, f(\overline{x}) = -max[-f(\overline{x})] \qquad (2.8)$$

При этом обе задачи имеют одно и тоже оптимальное решение, которое будем обозначать $\overline{x^*}$.

Проиллюстрируем этот факт графически на примере функции одной переменной (рис. 2.1).

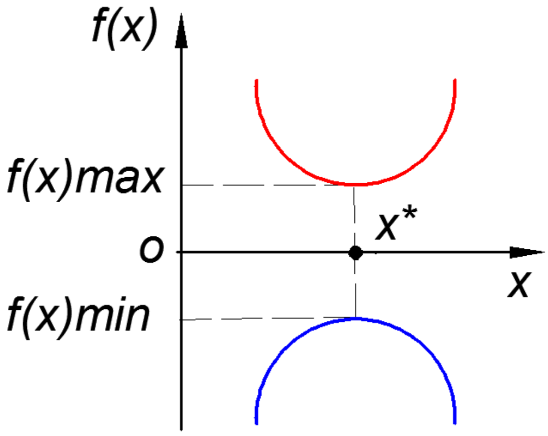


Рис.2.1. Иллюстрация перехода от *max* к *min*

Функция $f(x)$представляет собой зеркальное отражение функции относительно оси OX, ее максимум достигается в той же точке, что и минимум функции. Очевидно, имеет место соотношение 2.8. Соответственно, для перехода от задачи минимизации целевой функции к задаче максимизации выполняется аналогичная процедура.

Правило изменения типа ограничения.

Для изменения знака неравенства в одном из ограничений необходимо его умножить на -1.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ \geq b_1 \Rightarrow -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ ... - a_{1n}\, x_n \ \leq -b_1$$

Правило перехода от ограничений – равенств к неравенствам.

Для изменения типа ограничений с равенства на неравенство, достаточно изменить это ограничение на два противоположных неравенства [4].

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ = b_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ \leq b_1 \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ ... - a_{1n}\, x_n \ \leq -b_1 \end{cases}$$

При переходе из общей формы к стандартной форме, необходимо к каждой ЗЛП подходить индивидуально. Рассмотрим пример задачи о минимальных затратах, которая приведена в разделе 2.2.

Принимая во внимание условие неотрицательности переменных $x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,n}$, математическая модель этой задачи имеет вид [6]:

Целевая функция.

$$f(x) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow min$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \\ x_{12} + x_{22} = 4 \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \leq 9{,}5 \\ x_{21} + \dfrac{x_{22}}{3} \leq 4 \end{cases}$$

Умножим третье ограничение на 4 и четвертое ограничение на 3.

Получим:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \\ x_{12} + x_{22} = 4 \\ x_{11} + 2x_{12} \leq 38 \\ 3x_{21} + x_{22} \leq 12 \end{cases}$$

Выразим x_{11} и x_{22} из первых двух ограничений:

$$\mathrm{x}_{11} = 32 - \mathrm{x}_{21}, \mathrm{x}_{22} = 4 - \mathrm{x}_{12}$$

Подставим выделенные переменные в целевую функцию и в другие ограничения – неравенства. В результате преобразования получим:

Целевая функция.

$$f(x) = 20x_{12} - 10x_{21} + 1488 \to min$$

Ограничения

$$\begin{cases} x_{21} \le 32 \\ x_{12} \le 4 \\ 2x_{12} - x_{21} \le 6 \\ 3x_{21} - x_{12} \le 8 \end{cases}$$

2.3. Решение задач с двумя переменными графическим методом

Если в ЗЛП только две переменные, то наиболее простой и наглядный способ ее решения – это графический метод.

Тогда ЗЛП в стандартной форме будет иметь следующий вид:

Целевая функция.

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow max$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

при условии неотрицательности

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Для решения ЗЛП необходимо ввести понятие «область допустимых решений».

Определение 2.1. Совокупность всех допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР) ЗЛП

При этом ОДР является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек. Тогда согласно основной теореме линейного программирования (см. теорему 1.3) оптимальное решение ЗЛП достигается в одной из угловых точек ОДР.

Таким образом, графический метод решения ЗЛП условно можно разбить на два этапа:

Первый этап. Построение ОДР ЗЛП.

Второй этап. Нахождение среди всех точек ОДР такой точки (x_1^*, x_2^*) в которой целевая функция $f\overline{(x)}$ принимает максимальное значение.

Перейдем к рассмотрению этих этапов.

Первый этап.

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию множества решений линейного неравенства***. Пусть дано неравенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

Тогда уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ будет граничной прямой (см. определение 1.6), которая разбивает плоскость на две полуплоскости. Согласно правилу перехода от ограничений – равенств к неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

Следовательно, геометрической интерпретацией множества решений линейного неравенства является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничащей прямой, включая ее.

Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-либо точку, не принадлежащую граничной прямой, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой эта точка принадлежит, в противном случае – это противоположная полуплоскость.

Рассмотрим пример геометрической интерпретации решений неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (см. задачу о максимальном доходе). Данное неравенство есть полуплоскость, изображенная на рис. 2.2 стрелками.

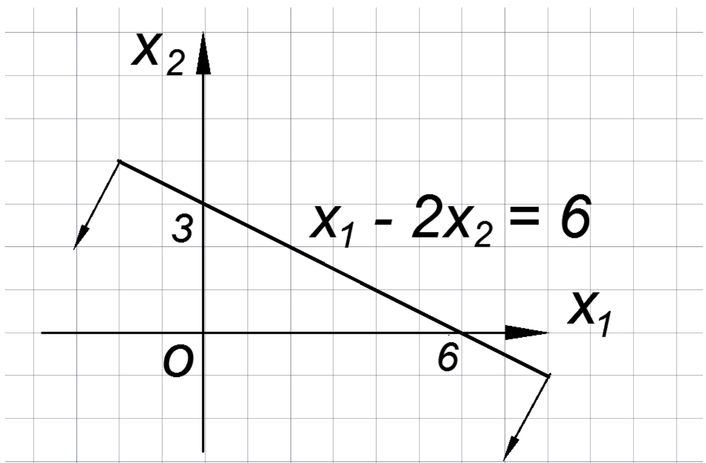


Рис.2.2. Геометрическая интерпретация неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$

При геометрической интерпретации в неравенстве $x_1 + 2x_2 \leq 6$ заменили знак $\leq$ на $=$ и построили прямую $x_1 + 2x_2 = 6$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Точка $O(0,0)$ искомому неравенству, то областью решения данного неравенства является полуплоскость, которой принадлежит эта точка (отмечена стрелками).

Таким образом, ***геометрическая интерпретация множества решений системы линейных*** неравенств заключается в определении пересечения всех полуплоскостей ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

Результат данных пересечений будет представлять ОДР системы линейных неравенств.

Рассмотрим пример геометрической интерпретация системы ограничений задачи о максимальном доходе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Знаки неравенств $\leq$ заменим на $=$, построим полученные прямые, найдем соответствующим неравенствам полуплоскости и их пересечения (рис. 2.3).

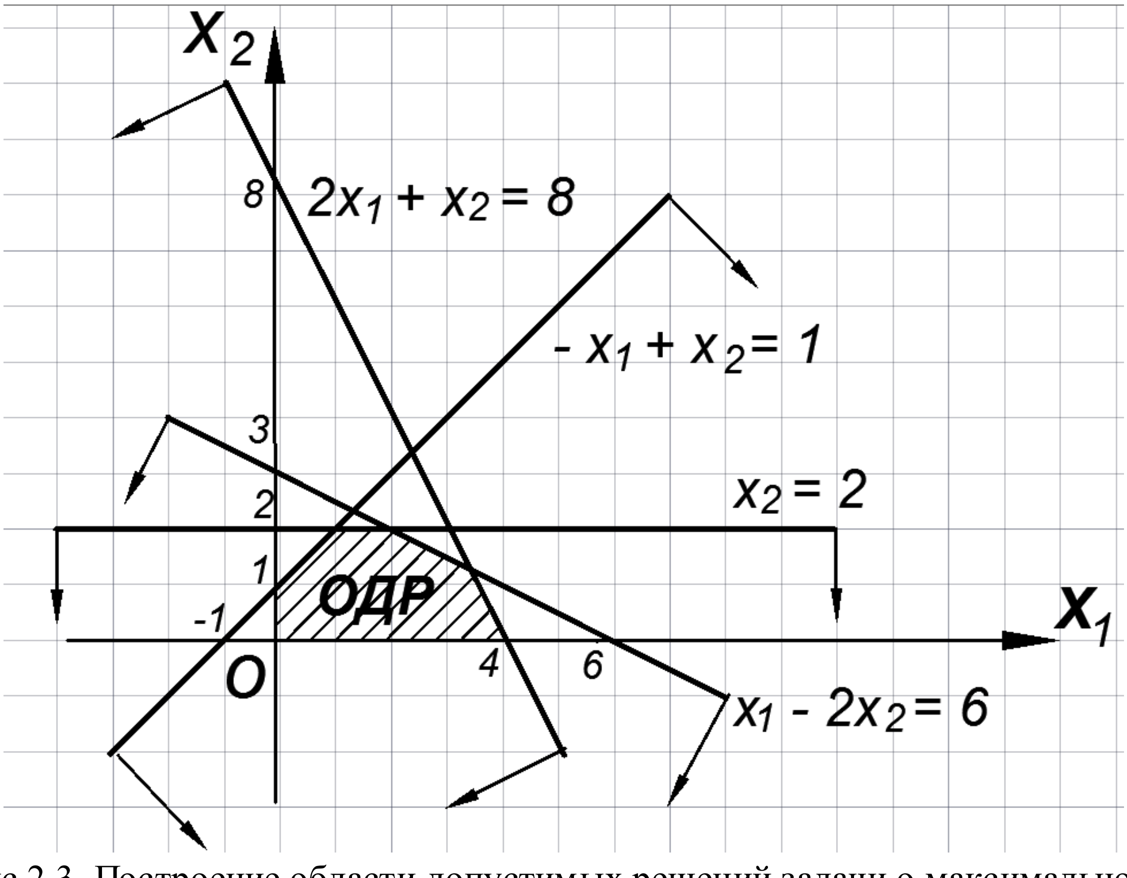


Рис.2.3. Построение области допустимых решений задачи о максимальном доходе

Таким образом, ОДР системы линейных неравенств является выпуклый многоугольник ABCDEF (рис. 2.4).

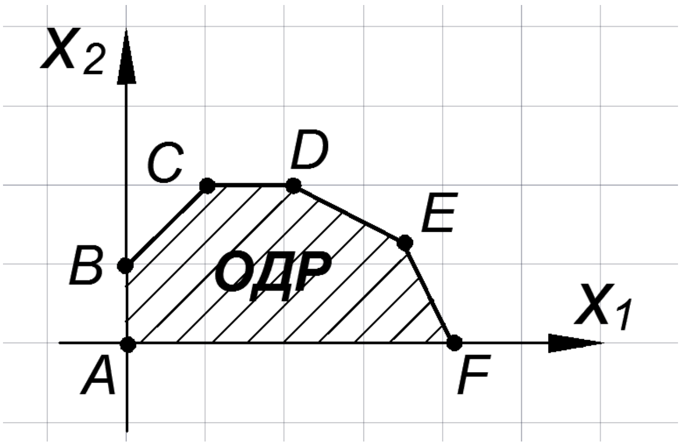
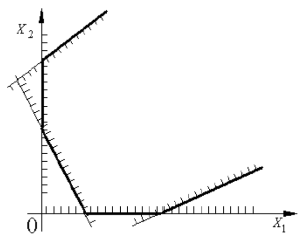
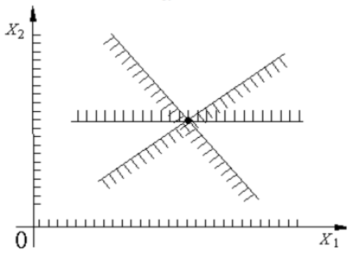
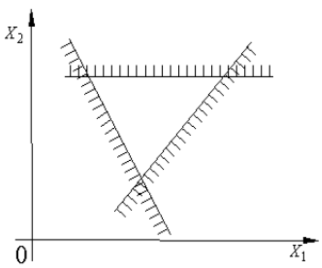
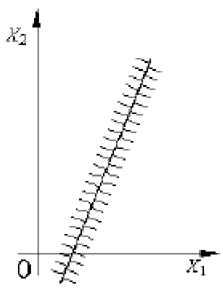
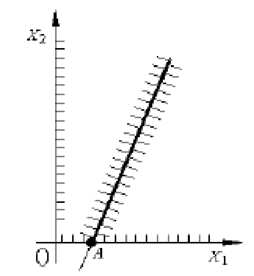
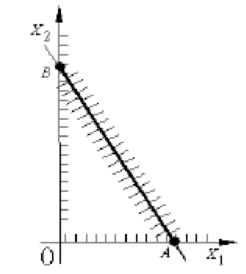


Рис.2.4. Область допустимых решений задачи в виде

Рассмотрим возможные случаи ОДР, сведенные в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Возможные случаи области допустимых решений

№	Возможные ситуации	Вид ОДР
1		Неограниченная выпуклая многоугольная область
2		Единственная точка
3		Пустое множество
4		Прямая линия

5		Луч
		Отрезок

Второй этап.

Теперь необходимо найти среди всех точек ОДР такую точку, в которой функция цели принимает максимальное значение. Для этого рассмотрим целевую функцию решаемой задачи о максимальном доходе

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

При этом если значение $\overline{f(x)}$ фиксировано, то функция определяется как прямая, а при изменении значения $\overline{f(x)}$, как семейство параллельных прямых.

Определение 2.1. Для всех точек, лежащих на одной из прямых функции $\overline{f(x)}$ принимает одно и то же значение, поэтому указанные прямые называют ***линиями уровня*** для функции $\overline{f(x)}$

Определение 2.2. Вектор, координаты которого являются частными производными функции $\overline{f(x)}$ – называется ***градиентом функции*** $\overline{grad\ f(x)}$. Градиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наибольшего возрастания функции $\overline{f(x)}$ [4].

$$\overline{grad\ f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow max, \text{ где} \tag{2.9}$$

$c_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, $c_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Соответственно, антиградиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наименьшего убывания функции $\overline{f(x)}$.

$$\overline{-grad\ f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow min, \text{ где} \tag{2.10}$$

$c_1 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$, $c_2 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Согласно формуле 2.9., градиент целевой функции решаемой задачи о максимальном доходе будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\,f(x)} = \{2,3\} \rightarrow max$$

Антиградиент, согласно формуле 2.9., будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\,f(x)} = \{-2,-3\} \rightarrow min$$

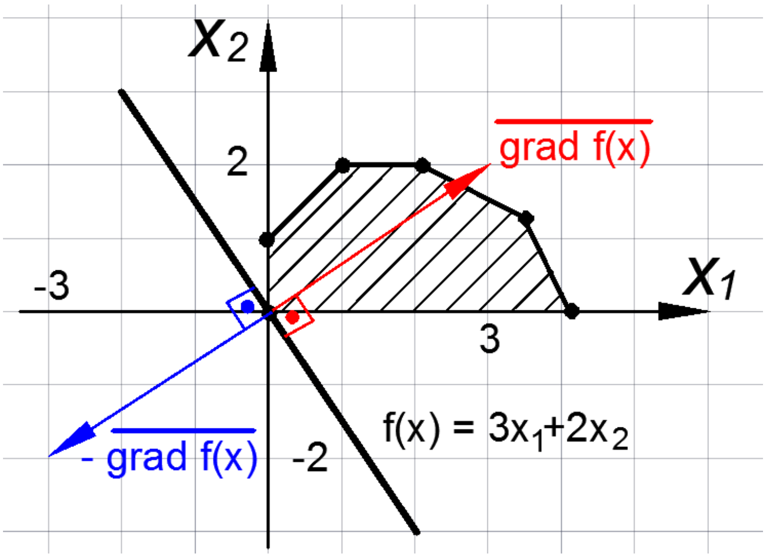


Рис.2.5. Градиент и антиградиент функции $f(x) = 3x_1 + 2x_2$

Рассматриваемая задача решается на максимум, тогда принимаем значения $\{2,3\}$. Далее будем перемещать линию уровня по ОДР параллельно самой себе в направлении $\overline{grad\,f(x)}$, пока она не пройдет через последнюю (крайнюю) точку ОДР (рис.2.6). Координаты этой точки являются оптимальным решением.

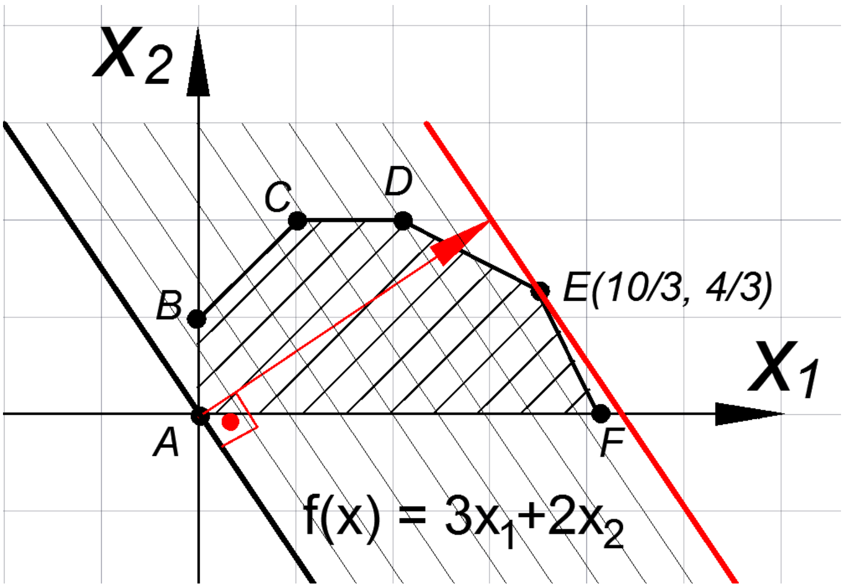


Рис.2.6. Определение оптимального решения

Таким образом, оптимальное решение для задачи о максимальном доходе будут координаты точки $E\ ({x_1}^*, {x_2}^*)$ (см. рис. 2.6). Для их нахождения необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующих прямых, пересекающихся в точке оптимума E.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Решив систему линейных уравнений, получим, что точка максимума соответствует суточному производству ${x_1}^* = \frac{10}{3}$ т. краски 1-го вида и ${x_2}^* = \frac{4}{3}$ т. краски 2-го вида. Подставив координаты ${x_1}^*$ и ${x_2}^*$ в целевую функцию получим общий доход от продажи суточного объема двух видов краски $f(x) = 12\frac{2}{3}[\text{тыс. руб./сутки}]$.

2.4. Графический анализ чувствительности оптимального решения

Неизбежное колебание значений экономических параметров, таких как цены, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится анализ чувствительности, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение ЗЛП.

Для решения задач анализа на чувствительность введем ряд определений.

Определение 2.3. Ограничения, проходящие через оптимальную точку, называются ***связывающими ограничениями***, а соответствующие им ресурсы – ***дефицитными*** [5].

Определение 2.4. Ограничения, не проходящие через оптимальную точку, называются несвязывающими ограничениями, а соответствующие им ресурсы – ***недефицитными*** [5].

Определение 2.5. Ограничение называют ***избыточным*** в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и, следовательно, на оптимальное решение.

Для простоты дальнейшего изложения пронумеруем ограничения задачи о максимальном доходе [5].

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Таким образом, понятие «связывающие ограничения» (1) и (2) означает, что при производстве красок в точке E (10/3; 4/3) запасы ингредиентов A и B расходуются полностью и по этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономический смысл понятия дефицитности ресурсов, т.е. если фирма сможет увеличить суточные запасы ингредиентов, то это позволит увеличить выпуск красок. В связи с этим возникает вопрос, до какого уровня целесообразно увеличить запасы ингредиентов и в какой степени при этом увеличится оптимальное производство красок?

Правило 1. Чтобы графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, вызывающее улучшение оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения целевой функции до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.

При прохождении прямой (1) через точку К (рис. 2.7) многоугольник ABCKF становится ОДР, а ограничение (1) - избыточным. Действительно, если удалить прямую (1), проходящую через точку К, то ОДР ABCKF не изменится. Точка К становится оптимальной, в этой точке ограничения (2) и (4) становятся связывающими.

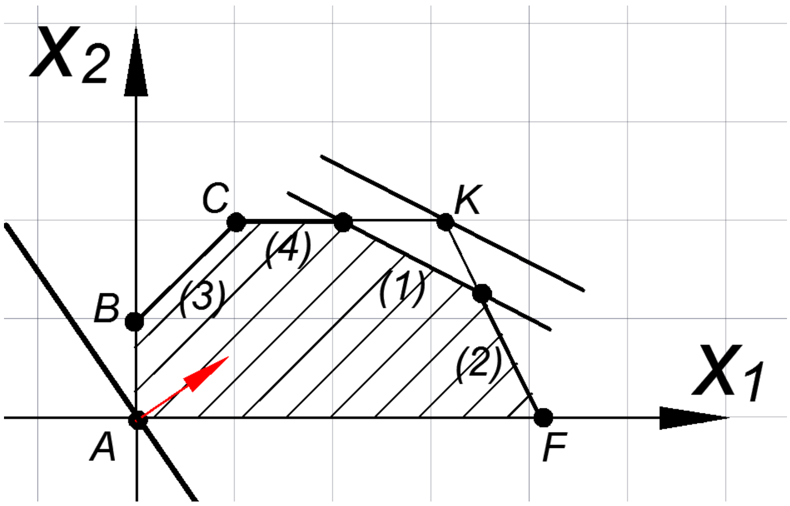


Рис.2.7. Анализ увеличения ресурса А

Правило 2. Чтобы численно определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, вызывающую улучшение оптимального решения, необходимо:

1) определить координаты точки (x_1, x_2) в которой соответствующее ограничение становится избыточным;

2) подставить координаты (x_1, x_2) в левую часть соответствующего ограничения.

Координаты точки К находятся путем решения системы уравнений прямых (2) и (4).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ x_2 = 2 & (4) \end{cases}$$

Таким образом, в этой точке К (3; 2) фирма будет производить 3 т. краски 1-го вида и 2 т. краски 2-го вида. Подставим x_1 и x_2 в левую часть ограничения (1) и получим максимально допустимый запас ингредиента А.

$$x_1 + 2x_2 = 7 \text{ [т. ингр. А/сутки]}$$

Дальнейшее увеличение запаса ингредиента А нецелесообразно, потому что это не изменит ОДР и не приведет к другому оптимальному решению (см.

рис. 2.7). Доход от продажи красок в объеме, соответствующем точке К, можно рассчитать, подставив ее координаты в выражение целевой функции.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 = 13 \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Рассмотрим вопрос о целесообразности увеличения запаса ингредиента В. Согласно правилу №1, соответствующее ограничение (2) становится избыточным в точке J, в которой пересекаются прямая (1) и ось переменной x_1 (рис. 2.8). Многоугольник ABCDJ становится ОДР, а точка J(6;0) –оптимальным решением.

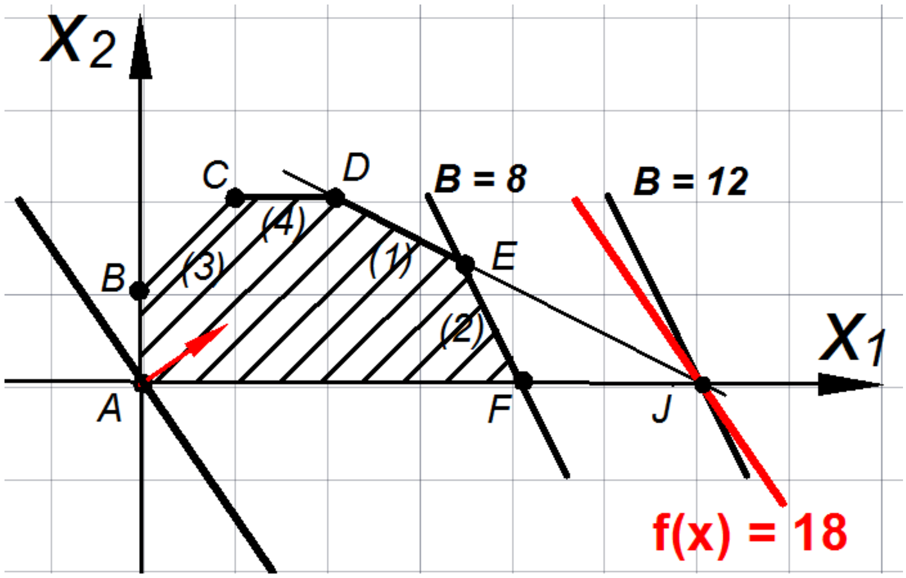


Рис.2.8. Анализ увеличения ресурса В

В точке J выгодно производить только краску 1-го вида (6 т в сутки). Доход от продажи при этом составит

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \times 6 = 18 \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Чтобы обеспечить такой режим работы, согласно правилу № 2, запас ингредиента В надо увеличить до величины

$$2x_1 + x_2 = 2 \times 6 = 12 \text{ [т. ингр. А/сутки]}$$

Ограничения (3) и (4) являются не связывающими, т.к. не проходят через оптимальную точку Е (см. рис. 2.8). Соответствующие им ресурсы (спрос на краски) являются недефицитными. С экономической точки зрения это означает, что в данный момент уровень спроса на краски непосредственно не определяет объемы производства. Поэтому некоторое его колебание может никак не повлиять на оптимальный режим производства в точке Е.

Например, увеличение (уменьшение) спроса на краску 2-го вида будет соответствовать перемещению прямой ограничения $x_2 \leq 2$ (4) вверх (вниз).

Перемещение прямой (4) вверх никак не может изменить точку Е максимума целевой функции. Перемещение же прямой (4) вниз не влияет на существующее оптимальное решение только до пересечения с точкой Е (см. правило

№ 3). Дальнейшее перемещение (4) приведет к тому, что точка Е будет за пределами новой ОДР. Кроме того, любое оптимальное решение для этой новой ОДР будет хуже точки Е.

Правило 3. Чтобы определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимальное решение, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой [5].

Правило 4. Чтобы численно определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, не меняющую оптимальное решение, необходимо подставить координаты оптимальной точки в левую часть соответствующего ограничения [5].

Определим, до каких пределов падение спроса на краску 2-го вида не повлияет на производство в точке Е (10/3; 4/3). При этом будем использовать правило № 4.

Подставляем в левую часть ограничения (4) координаты точки Е, получаем $x_2 = 4/3$. Делаем вывод: предельный уровень, до которого может упасть спрос на краску 2-го вида и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен 4/3 т. краски в сутки.

Экономический смысл ограничения (3) $-x_1 + x_2 \leq 1$ [т. краски/сутки] в том, что объем продаж краски 2-го вида может превысить объем продаж краски 1-го вида максимум на 1 т. Дальнейшее увеличение продаж краски 2-го вида по сравнению с краской 1-го вида графически отобразится перемещением прямой (3) влево и вверх, но никак не повлияет на оптимальность точки Е. Но если разность спросов на краску 2-го и 1-го видов будет уменьшаться, то прямая (3) будет перемещаться ниже и правее. Последним положением прямой (3), при котором точка Е остается оптимальной, является пересечение с точкой Е.

Согласно правилу № 4, подставим координаты точки Е (10/3; 4/3) в левую часть ограничения (3)

$$-\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \text{ [т. краски/сутки]}$$

Получаем, что разность спросов на краску 2-го и 1-го вида в точке стала отрицательной. То есть, прохождение прямой (3) через точку Е означает, что краску 2-го вида будут покупать в меньшем объеме, чем краску 1-го вида

$$\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 = 2 \text{ [т. краски/сутки]}$$

Делаем вывод: максимальное превышение спроса на краску 1-го вида над спросом на краску 2-го вида, при котором оптимальное решение в точке Е не изменится, составляет 2 т краски в сутки.

Результаты решения первой задачи анализа оптимального решения на чувствительность представлены в таблица 2.2.

Таблица 2.2. Результаты анализа ресурсов задачи о максимальном доходе.

№	Тип ресурса	Max изменение ресурса, $max\Delta R_i$ т./сутки	Max изменение дохода, $max\Delta F(X^*)$ тыс. руб./сутки	Ценность дополнительной единицы ресурса $y_i = \frac{max\Delta F(X^*)}{max\Delta R_i}$ тыс. руб./т.
(1)	дефицитный	$7 - 6 = 1$	$13 - 12\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$y_1 = \frac{1}{3}$
(2)	дефицитный	$12 - 8 = 4$	$18 - 12\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$	$y_2 = 1\frac{1}{3}$
(3)	недефицитный	$-2 - 1 = -3$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_3 = 0$
(4)	недефицитный	$\frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_4 = 0$

Анализ табл. 2.2 показывает, что к улучшению оптимального решения, т.е. к увеличению суточного дохода приводит увеличение дефицитных ресурсов. Для определения выгодности увеличения этих ресурсов используют понятие ценности дополнительной единицы i-го ресурса y_i.

$$y_i = \frac{max\Delta F(X^*)}{max\Delta R_i}$$

где $max\Delta F(X^*)$ – максимальное приращение оптимального значения целевой функции; $max\Delta R_i$–максимально допустимый прирост объема i-го ресурса.

Например, из табл. 2.2 следует, что увеличение суточного запаса ингредиента А [ограничение (1)] на 1т позволит получить дополнительный доход, равный $y_1 = 1/3$ тыс. руб. / сутки, в то время как увеличение запаса В [ограничение (2)] на 1 т принесет $y_2 = 1\frac{1}{3}$ тыс. руб. / сутки. Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

Можно сделать следующий вывод: дополнительные вложения в первую очередь необходимо направлять на увеличение ресурса В, а лишь потом на ресурс А. Изменять недефицитные ресурсы нет необходимости.

2.5. Реализация графического метода в среде Microsoft Excel

Рассмотрим процесс решения задачи линейного программирования с двумя переменными графическим методом в среде Microsoft Excel на конкретном примере. Допустим, для некоторой задачи была построена следующая математическая модель;

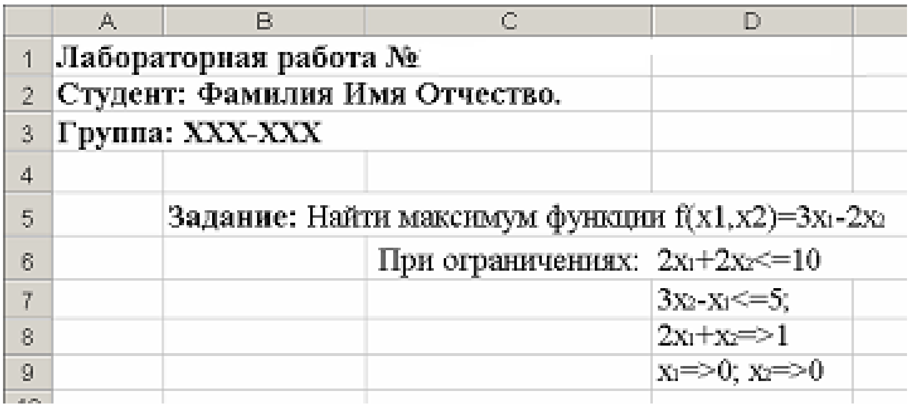
$$f(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10 \\ -x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для решения задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Запустить Microsoft Excel, в результате чего по умолчанию будет создан новый документ.

2. На текущей странице сделать заглавие документа, которое в обязательном порядке должно включать ФИО и группу студента, а также постановку задачи (рис. 2.9).



	A	B	C	D
1	**Лабораторная работа №**			
2	**Студент: Фамилия Имя Отчество.**			
3	**Группа: XXX-XXX**			
4				
5		**Задание:** Найти максимум функции f(x1,x2)=3x1-2x2		
6			При ограничениях:	2x1+2x2<=10
7				3x2-x1<=5;
8				2x1+x2=>1
9				x1=>0; x2=>0

Рис.2.9. Оформление работы

3. Сформировать столбец исходных значений для переменной x_1 в диапазоне от 0 до, например, 10 с шагом 0,5. Если потом окажется, что такого диапазона исходных данных не хватает для изображения всей области допустимых решений (ОДР), то диапазон нужно будет расширить.

Для начала следует ввести в пустую ячейку имя столбца – X_1. Допустим, что адрес этой ячейки A11. Далее в следующую ячейку столбца (A12) вводим начальное значение, равное нулю. В ячейку A13 помещаем формулу =A12+0,5. Выделяем ячейку A13 и копируем ее в буфер. Выделяем группу ячеек A14-A32 и вставляем в эту группу формулу из буфера. Таким образом, у нас получился столбец исходных данных, в каждой ячейке которого (кроме первой), находится значение, вычисленное по формуле Z+0,5, где Z – адрес предыдущей ячейки столбца (рис.2.10).

	A	B	C	D	E
11	X_1	$X_2=(10-2X_1)/2$	$X_2=(5+X_1)/3$	$X_2=1-2X_1$	$X_2=3X_1/2$
12	0	5	1,666666667	1	0
13	0,5	4,5	1,833333333	0	0,75
14	1	4	2	-1	1,5
15	1,5	3,5	2,166666667	-2	2,25
16	2	3	2,333333333	-3	3
17	2,5	2,5	2,5	-4	3,75
18	3	2	2,666666667	-5	4,5
19	3,5	1,5	2,833333333	-6	5,25
20	4	1	3	-7	6
21	4,5	0,5	3,166666667	-8	6,75
22	5	0	3,333333333	-9	7,5
23	5,5	-0,5	3,5	-10	8,25
24	6	-1	3,666666667	-11	9
25	6,5	-1,5	3,833333333	-12	9,75
26	7	-2	4	-13	10,5
27	7,5	-2,5	4,166666667	-14	11,25
28	8	-3	4,333333333	-15	12
29	8,5	-3,5	4,5	-16	12,75
30	9	-4	4,666666667	-17	13,5
31	9,5	-4,5	4,833333333	-18	14,25
32	10	-5	5	-19	15

Рис.2.10. Оформление матрицы

4. Рассматривая ограничения как равенства, выразить x_2 через x_1 и сформировать для каждого уравнения столбец значений x_2, вычисляемых по соответствующим значениям x_1. Считая целевую функцию равной нулю, проделать аналогичную операцию также и для нее.

$$3x_1 + 2x_2$$

Столбцы со значениями должны располагаться рядом друг с другом и образовывать матрицу. Каждый столбец должен иметь имя. В данном случае именами являются уравнения: $x_2 = (10 - 2x_1)/2$; $x_2 = (5 + x_1)/3$; $x_2 = 1 - 2x_1$; $x_2 = 3x_1/2$.

Далее в следующей ячейке столбца, т.е. под его именем, записываем формулу для вычисления значения x_2 от первого значения x_1 Например, для второго столбца в ячейке В12 будем иметь формулу =(10-2*A12)/2. После чего содержимое ячейки В12 следует скопировать в буфер и, выделив последующие ячейки В13-В32, вставить в них содержимое буфера. Аналогичные манипуляции следует выполнить для вычисления значений x_2 от x_1 для всех оставшихся выражений. В результате у вас должна получиться матрица, похожая на изображенную на рисунке 2.10.

5. Построить графики по имеющимся данным. Для этого следует выделить всю матрицу, включая имена столбцов, кроме первого столбца, и запустить мастера построения диаграмм. В рассматриваемом примере выделенными будут ячейки B11-E32. На закладке «Нестандартные» следует выбрать тип диаграммы «Гладкие графики» и нажать кнопку «Далее». На втором шаге построения диаграммы необходимо указать источник данных по оси абсцисс. По умолчанию это ряд чисел 1,2,3,…, который необходимо сменить на ряд, записанный в столбце X_1. Для этого выбираем закладку «Ряд» и в поле «Подписи по оси X» задаем диапазон адресов ячеек, в которых хранится интересующий нас ряд. Задать диапазон удобней всего при помощи специального инструмента выбора Excel, вызвать который можно нажатием кнопки, расположенной в правой части поля ввода (рис.2. 11).

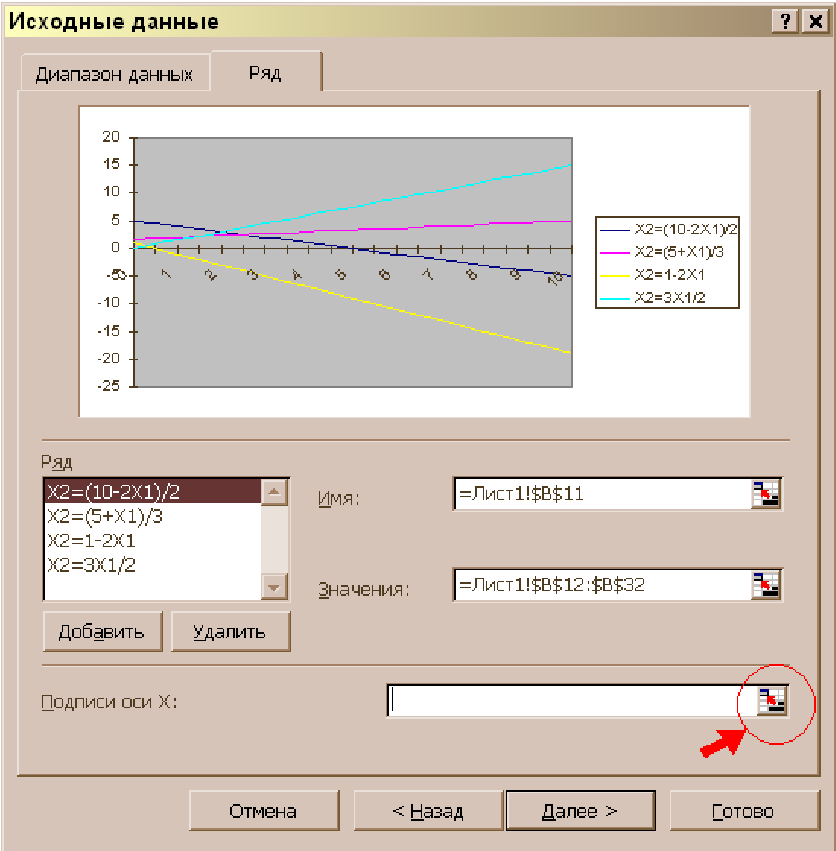


Рис.2.11. Построение графиков по данным

В результате нажатия на показанную кнопку диалог свернется до одного поля ввода, чтобы не мешать процессу выбора, и указатель мыши сменится на крестик. Далее необходимо выбрать ячейки, содержащие значения X_1 (в нашем примере это ячейки A12-A32), за исключением ячейки с именем столбца. Адреса выбранных ячеек с учетом рабочего листа появятся в поле ввода свернувшегося диалога. Далее диалог следует развернуть, нажав кнопку, справа от поля ввода и перейти к третьему шагу построения диаграммы, нажав кнопку «Далее». На третьем шаге в закладке «Заголовки» следует ввести название диаграммы - «Область допустимых решений», названия оси X – «X1», название оси Y – «X2». В других закладках диалога третьего этапа лучше ничего не менять и нажать кнопку «Далее». На четвертом шаге требуется просто подтвердить расположение создаваемой диаграммы на текущем листе, нажав кнопку «Готово».

Появившуюся диаграмму расположите под таблицей исходных данных и увеличьте в размерах в два раза (рис.2.12).

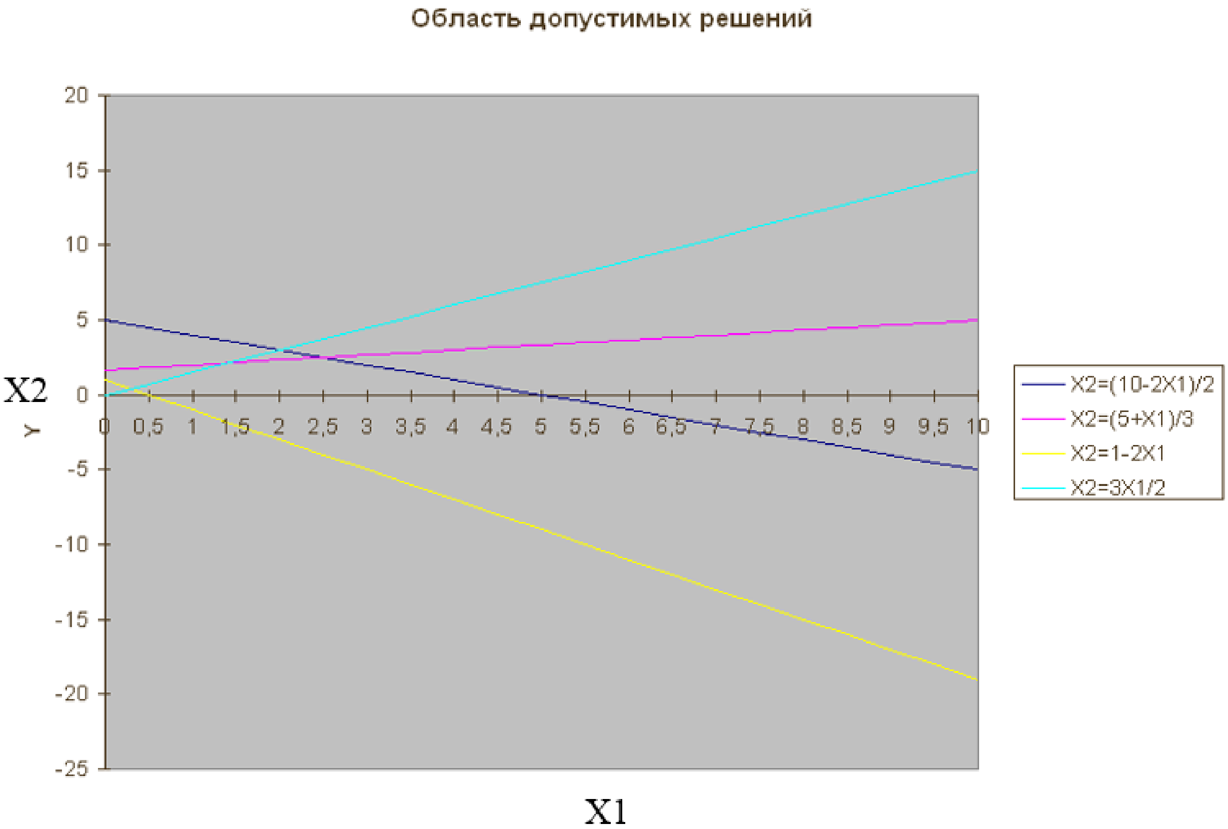


Рис.2.12. Реализация диаграммы

6. Рассмотреть получившуюся диаграмму и определить, существует ли ОДР. Напоминаем, что ОДР должна быть выпуклой, и может представлять собой точку, отрезок, выпуклый многоугольник, полуплоскость. ОДР также может и не существовать, если ограничения несовместны. В ОДР может не существовать оптимального решения, если она не ограничена в направлении поиска оптимума. В случае несовместности ограничений или неограниченности ОДР в нужном направлении следует обратиться к преподавателю, доказать полученные выводы, внести предложения по изменению условий задачи так, чтобы оптимальное решение существовало и решить задачу при новых условиях.

Чтобы определить форму ОДР надо рассмотреть каждую из построенных прямых по отдельности и, заменив мысленно в соответствующем уравнении знак равенства на исходное неравенство, определить, с какой стороны от рассматриваемой прямой лежит ОДР. Для этого необходимо решить соответствующее неравенство относительно точки (0,0). Если неравенство истинно, то ОДР лежит в полуплоскости, которой принадлежит точка (0,0), если ложно – то в полуплоскости, которая не содержит точку (0,0). ОДР будет являться областью пересечения всех полуплоскостей, задаваемых неравенствами-ограничителями.

7. Определив на диаграмме область расположения ОДР, диаграмму нужно отмасштабировать таким образом, чтобы ОДР была четко видна.

Масштабирование состоит из двух этапов: изменения масштаба оси абсцисс и изменения масштаба оси ординат.

Дважды щелкните левой кнопкой мыши на оси значений (ось ординат). В появившемся диалоге «Формат оси» выберите закладку «Шкала» и установите максимальное и минимальное значение шкалы так, чтобы получившийся диапазон был немного больше протяженности ОДР по этой оси. Также может потребоваться изменить цену основных и промежуточных делений.

В рассматриваемом примере минимальное значение по оси значений было установлено равным -5, максимальное 5, цена основных делений 1, цена промежуточных делений 0,5.

Изменение формата оси абсцисс производится путем сокращения рядов данных, по которым строятся графики. Для этого необходимо вызвать диалог «Исходные данные» из всплывающего меню диаграммы и уменьшить (при необходимости) на некоторое число адрес последней ячейки с данными, а также увеличить (при необходимости) адрес начальной ячейки с данными. Указанную операцию по изменению адресов начальных и конечных ячеек с данными надо проделать для *всех рядов*, изображаемых на данной диаграмме, а также для разметки оси абсцисс (иначе увеличения масштаба изображения, не растягивая диаграмму до огромных размеров, достичь не удастся).

В рассматриваемом примере крайняя правая точка ОДР имеет координаты (5,0), а это значит, что часть диаграммы, расположенную правее этой точки можно не рассматривать. Отсечем диаграмму справа, начиная с точки (6,0). Для этого определим адрес ячейки столбца данных X_1, в которой лежит число 6. Это ячейка A24, значит 24-я строка должна ограничивать ряд исходных данных для всех графиков. Вызываем диалог «Исходные данные» и в закладке «Ряд» изменяем адреса последних ячеек для всех рядов с $B$32, $C$32, $D$32, $E$32 соответственно на $B$24, $C$24, $D$24, $E$24. Также изменяем адрес последней ячейки в поле «Подписи по оси X» с $A$32 на $A$24 (рис. 2.13).

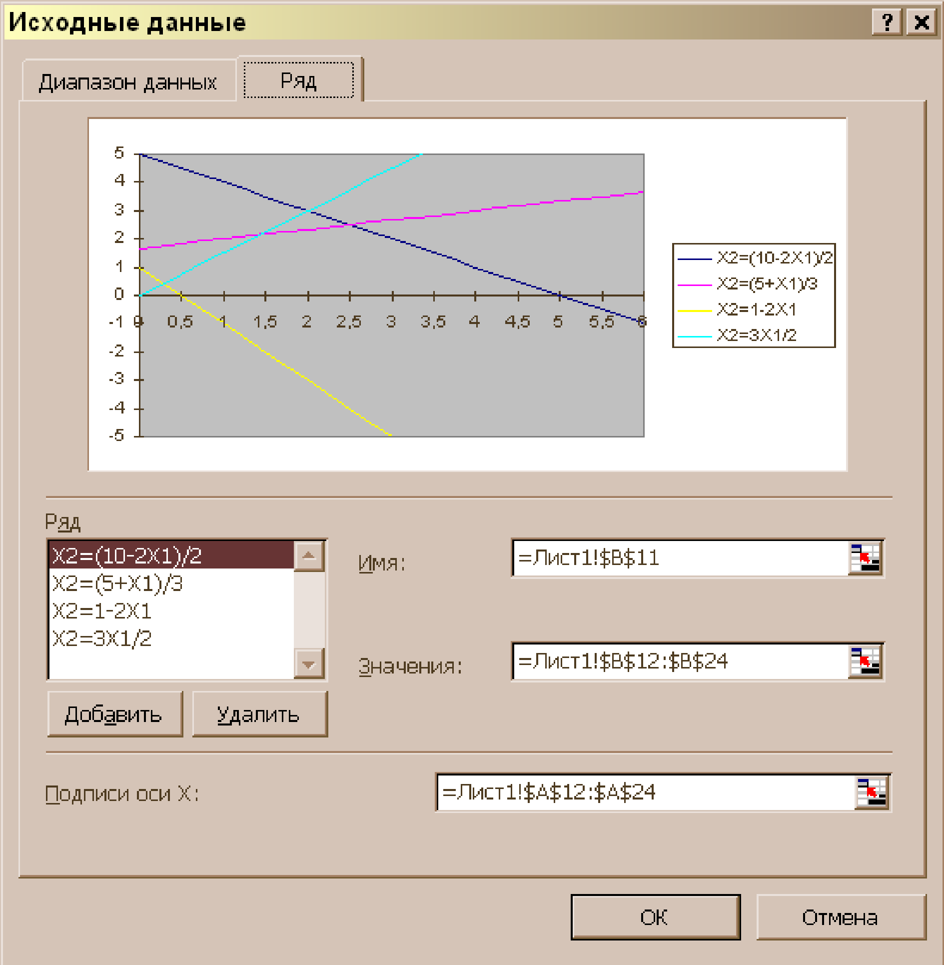


Рис. 2.13. Реализация масштабирования

Нажимаем ОК. После масштабирования диаграмма выглядит как показано на рисунке 2.14.

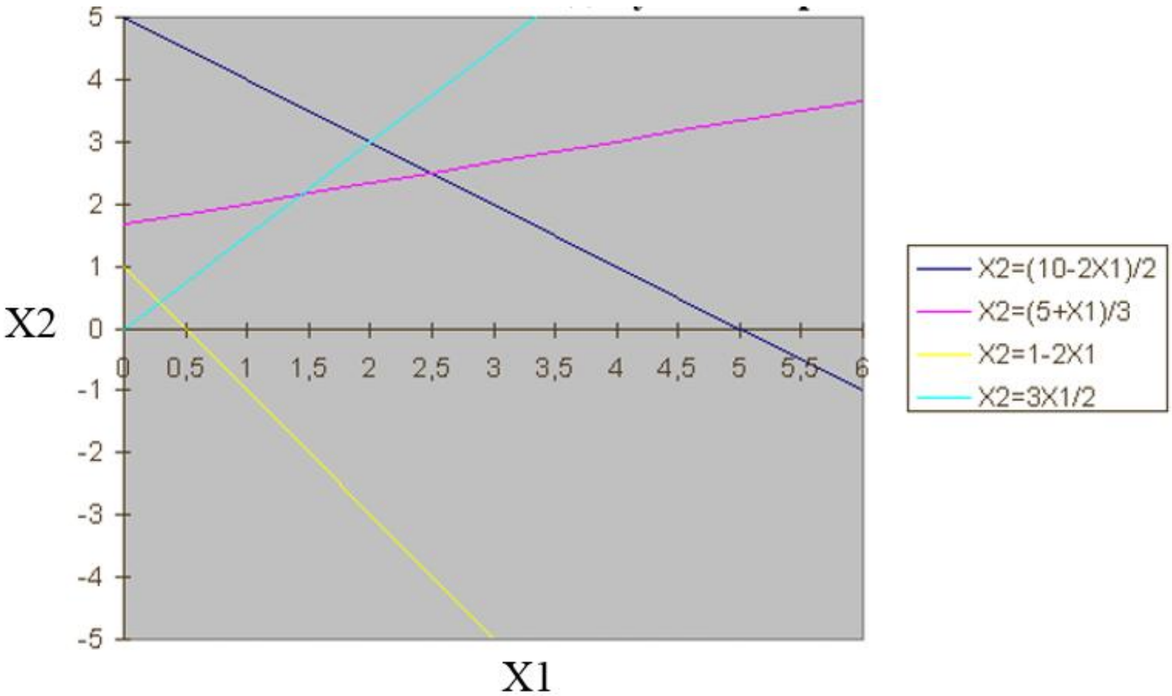


Рис. 2.14. Масштабированная диаграмма

__Примечание:__ масштабирование следует проводить так, чтобы фрагменты всех прямых, включая прямую целевой функции, были видны.

На построенной диаграмме выделить ОДР жирными линиями или обвести полилинией, для чего воспользоваться соответствующим инструментом Excel для рисования. Пример выделения ОДР полилинией показан на рисунке 2.15. Здесь полилиния образовала пятиугольник, залитый белым цветом.

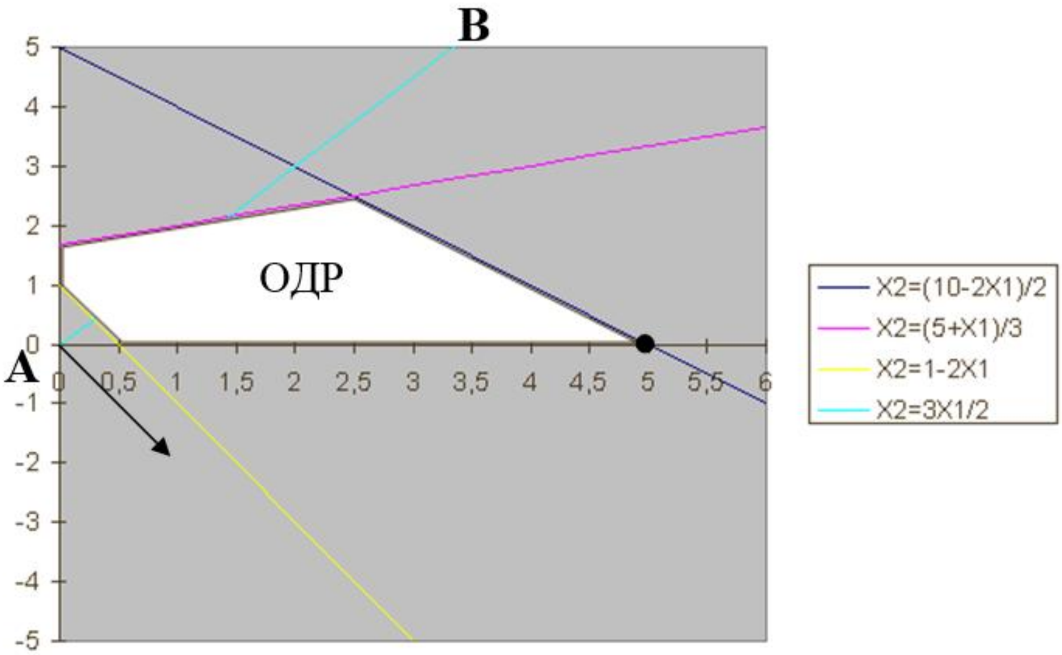


Рис. 2.15. Выделение ОДР

8. Найти на графике прямую целевой функции. На рис.2.15 фрагмент этой прямой обозначен отрезком АВ. Найти градиент целевой функции в точке (0,0) и обозначить его направление стрелкой. В данном случае градиент имеет координаты {(0,0), (3,-2)}. Поскольку требуется найти максимум целевой функции, то начинаем мысленно сдвигать прямую целевой функции в направлении градиента (в случае поиска минимума сдвигать следует в направлении антиградиента), и определяем, что последняя точка ОДР, которая лежит на пути прямой, имеет координаты (5,0) (выделяем точку на графике), а максимум функции равен 15 (подставляем координаты точки в целевую функцию).

9. В случае, если точку оптимума по графику точно определить нельзя, то ее координаты следует находить путем решения уравнения, составленного из уравнений 2-х прямых, пересекающихся в ней.

Для решения уравнения также можно воспользоваться возможностями Excel. Например, найдем точку пересечения прямых $x_2 = 1 - 2x_1$ и $x_2 = 3x_1/2$. Для этого приравняем правые части этих уравнений $3x_1/2 = 1 - 2x_1$ и преобразуем данное уравнение так, чтобы оно было равным, например, нулю: $3X_1/2 + 2X_1 - 1=0$. Далее в какой либо свободной ячейке (допустим это B50) записываем формулу: =3*A50/2 + 2*A50 – 1. Здесь ячейка А50 нужна нам для хранения значения искомой переменной X1. Предположим, что эта переменная равна 0 и занесем 0 в ячейку A50.

Для решения уравнений, а также для аналитического решения задач ЛП, в Excel используется компонент «Поиск решения». Данный компонент вызывается из меню «Сервис» и может быть недоступен по умолчанию. Если так, то его необходимо подключить, выбрав пункт «Надстройки» из меню «Сервис». В появившемся диалоге необходимо поставить галочку напротив компонента «Поиск решения» и нажать «ОК».

Вызываем компонент «Поиск решения» и в появившемся диалоге в качестве целевой ячейки устанавливаем ячейку, содержащую решаемое уравнение (в нашем примере это $B$50), а ячейку $A$50 устанавливаем в качестве изменяемой. ($ обозначает абсолютную адресацию ячеек) В разделе «Параметры» рассматриваемого диалога выбираем тип модели «Линейная модель», нажимаем «ОК» и «Выполнить». Excel решит заданное уравнение с определенной точностью и сформирует решение в ячейке A50. В нашем случае X_1 искомой точки равен 0,285714285714227. Чтобы узнать теперь чему равна координата X_2 точки пересечения просто корректируем формулу в ячейке B50, приводя ее к виду одного из уравнений пересекающихся прямых. В нашем случае получаем, что искомая точка имеет точные координаты (0,285714285714227; 0,428571429).

2.6. Контрольные вопросы

1) Запищите ЗЛП в стандартной форме;
2) Сущность перехода от задачи максимизации к задаче минимизации.
3) Сущность перехода от ограничений – равенств к неравенствам;
4) Графическая интерпретация ОДР ЗЛП;
5) Какие могут возникнуть возможные случаи ОДР при решении ЗЛП?
6) Нахождение оптимальной точки в ОДР
7) Что такое линии уровня для функции $f\overline{(x)}$?
8) Что называется градиентом функции $\overline{grad\ f(x)}$?
9) Как графически найти антиградиент функции $\overline{-grad\ f(x)}$?
10) Сущность графического анализа чувствительности оптимального решения;
11) Что называется связывающими ограничениями и дефицитными ресурсами? Отличие от несвязывающих ограничений и недефицитных ресурсов.
12) Что называется избыточными ограничениями?
13) Как определить увеличение запаса дефицитного ресурса?

3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Регулярным симплексом в n-мерном пространстве называется правильный многогранник с n+1 вершиной. При n = 2 симплексом является правильный треугольник, при n = 3 – тетраэдр и т.д.

В симплексе решение задачи начинается с рассмотрений одной из вершин многогранника условий. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум и уменьшая при решении задачи на минимум. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима [7].

Таким образом, симплексный метод - это метод целенаправленного перебора опорных решений ЗЛП.

3.1. Каноническая форма задачи линейного программирования

Симплексный метод применяется для ЗЛП заданной в канонической форме. Предположим, что система ограничении (3.1) содержит m единичных векторов. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти максимальное значение целевой функции [3]

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_n + \cdots + x_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \qquad (3.1)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, m.$$

Предполагается, что $b_i \geq 0, i = 1, m.$

Более кратко ЗЛП в канонической форме можно представить в следующем виде:

целевая функция

$$f\overline{(x)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Любую ЗЛП можно привести к канонической форме используя следующее правило:

Правило перехода от ограничений – неравенствам к равенствам. Для этого нужно ввести дополнительную переменную $x_{n+1} \geq 0$

a) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}\,x_n \ \leq b_1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}\,x_n \ + x_{n+1} \ \leq b_1$

b) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}\,x_n \ \geq b_2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}\,x_n \ - x_{n+1} \ \leq b_2$

Рассмотрим пример перевода к каноническому виду следующей задачи.

$$f(x) = \ -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Чтобы привести задачу к каноническому виду (3.1) используем правила преобразования задач (см. раздел 2.2).

Перейдем к задаче на максимум

$$f(x) = \ x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow max$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 в левые части первого и второго неравенства.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \ + \ x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - \ x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \ \overline{1,5}$$

3.2. Сущность симплексного метода

Запишем систему (3.1) в векторной форме [7]

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_mX_m + A_{m+1}x_{m+1} + \cdots + A_nx_n = A_{0,} \qquad (3.2)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix},$$

$$\dots\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Векторы A_1, A_2, $\cdots$, A_m являются линейно независимыми единичными векторами m-мерного пространства и образуют базис этого пространства. Соответствующие этим векторам переменные x_1, x_2, $\cdots$, x_m принимаем за базисные переменные. Остальные переменные x_{m+1}, x_{m+2}, $\cdots$, x_n считаются свободными или небазисными. Базисные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Процесс оптимизации начнем с некоторого опорного решения. Положим все небазисные переменные равными нулю: $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. В результате получаем первоначальный опорный план

$$x^0 = (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = \left(b_{1,} b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0\right).$$

Определение 3.1. Неотрицательное базисное решение системы ограничений ЗЛП называется опорным решением (опорным планом) ЗЛП [4] .

Из определения следует, что:

1) если , $b_1 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$ то соответствующее базисное решение является опорным решением ЗЛП;

2) число положительных координат опорного плана не может превышать m.

Определение 3.2. Опорный план называется невырожденным, если число его положительных компонентов равно m, и вырожденным в противном случае [4].

Теорема 3.1. Вектор X является опорным планом ЗЛП тогда и только тогда, когда X – вершина многогранника допустимых планов [4].

Итак, для нахождения оптимального решения ЗЛП достаточно исследовать вершины выпуклого многогранника допустимых решений. Допустимое базисное решение соответствует одной из угловых точек области допустимых решений (вершин). В этом и состоит основная идея симплекс-метода решения ЗЛП.

Для исследования плана на оптимальность построим начальную симплекс-таблицу (таблица 3.1)

Таблица 3.1. Начальная симплекс-таблица

	c_j	c_{m+1}	c_{m+2}		c_n	
$\overline{C_B}$		x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	$\overline{A_0}$
C_{B1}	x_1	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	$\cdots$	a_{1n}	b_1
C_{B1}	x_2	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
C_{Bm}	x_m	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	$\boldsymbol{f}$	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	$\cdots$	Δ_n	Q

Рассмотрим заполнение таблицы. В первом столбце таблицы записываются базисные переменные x_i, $\left(i = \overline{1, m} \right)$ и передними коэффициенты целевой функции C_{Bi} при текущих базисных переменных, записанных в том же порядке. В верхней части таблицы располагаются небазисные переменные x_j, $\left(j = \overline{m+1, n} \right)$ и коэффициенты целевой функции c_j, с которыми эти переменные входят в целевую функцию. В столбце x_j, $\left(j = \overline{m+1, n} \right)$ записываются коэффициенты разложения вектора $\overline{A_j}$ по базису (3.2). Крайний справа столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$ в разложении (3.2), в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план [7].

Заполнение f-строки. В f-строке записываются относительные оценки Δ_j $\left(j = \overline{m+1, n} \right)$, характеризующие прирост целевой функции при включении в базис небазисной переменной x_j и Q – значение целевой функции, для текущих базисных переменных.

$$\Delta_j = \left(\overline{C_B}, \overline{A_j} \right) - c_j, \qquad j = \overline{m+1, n},$$

$$Q = (\overline{C_B}, \overline{A_0}).$$

Здесь $\left(\overline{C_B}, \overline{A_j} \right)$ – скалярное произведение соответствующих векторов.

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta_j \geq 0$. Если всё оценки положительны, то расчет закончен и в последнем столбце таблицы $\overline{A_0}$ находятся оптимальные значения базисных переменных. Если хотя бы одна оценка отрицательна, то можно улучшить полученное решение.

3.3. Алгоритм симплексного метода

Алгоритм симплекс метода заключается в составлении новых таблиц с помощью процедуры повторяющихся расчетов итераций до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение задачи, либо сделан вывод о неразрешимости поставленной задачи. Итерационный процесс состоит из трех шагов.

Первый шаг. Найти переменную для включения в базис.

Выберем наибольшую по модулю отрицательную оценку Δ_n. Соответствующая переменная x_n включается в базис. Все элементы над выбранной оценкой образуют разрешающий столбец.

Второй шаг. Найти переменную для исключения из базиса.

Для этого составим отношение свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. В той строке, где достигается минимум, соответствующая переменная x_r исключается из базиса. Эта строка называется ***разрешающей строкой***.

Таким образом, для выбора разрешающей строки составляем неотрицательные отношения и выбираем среди них наименьшее.

$$b_i/a_{ij} \geq 0 \; (i = \overline{1,m}) \qquad (3.3)$$

Замечание. Если min достигается для нескольких строках, то за разрешающую строку можно принять любую из них, при этом в новом опорном плане значения некоторых базисных переменных станут равны нулю, т.е. получаем вырожденный опорный план.

Число a_{rs}, находящееся на пересечений разрешающей строки r и разрешающего столбца s, называется ***разрешающим элементом***.

Третий шаг. Построить новую симплекс-таблицу.

Построение новой симплекс таблицы состоит из следующих шагов [7]:

- Переменные x_r и x_n меняются местами;
- Разрешающий элемент a_{rn} заменяется на обратный $a_{rn} = \frac{1}{a_{rn}}$;
- Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак;
- Остальные элементы пересчитываются по «правилу прямоугольника». Находится разность произведений элементов, стоящих в противоположных вершинах прямоугольника (рис. 3.1), деленная на разрешающий элемент.

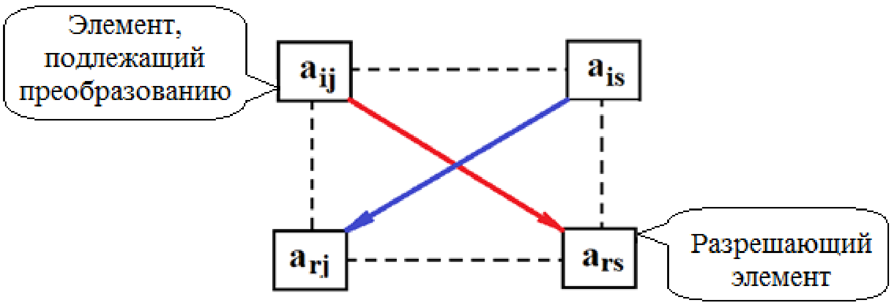


Рис. 3.1. Правило прямоугольника

Формальный вид «правила прямоугольника»:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}},$$

где a_{ij} – рассчитываемый элемент новой симплекс таблицы.

3.4. Решение задач симплексным методом

Рассмотрим алгоритм симплексного метода для решения задачи о максимальном доходе. Напомним ее условие:

Целевая функция.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \; [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \text{ [т. ингр. А/сутки]} \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \text{ [т. ингр. В/сутки]} \\ -x_1 + x_2 \le 1 \text{ [т. краски/сутки]} \\ x_2 \le 2 \quad \text{[т. краски/сутки]} \\ x_1 \ge 0 \quad \text{[т. краски/сутки]} \\ x_2 \ge 0 \quad \text{[т. краски/сутки]} \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + x_6 = 2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6} \end{cases} \qquad (3.4)$$

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_{3+}0x_4 + 0x_5 + 0x_6. \qquad (3.5)$$

Физически x_j, $j = \overline{1,6}$ означают остатки неиспользованных ресурсов.

Теперь построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему (3.4) в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0, \qquad (3.6)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_3, A_4, A_5, A_6 являются линейно независимыми единичными векторами 4х-мерного пространства и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (3.6) за базисные переменные выбираем переменные x_3, x_4, x_5, x_6. Небазисными переменными являются x_1, x_2.

Разложение (3.6) позволяет найти первое базисное допустимое решение. Для этого свободные переменные x_1, x_2 приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0,$$

которому соответствует первоначальный опорный план

$$x^{(0)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 6, 8, 1, 2),$$
$$f\left(x^{(0)}\right) = 0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных

$$\overline{C_B} = (c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6)^T = (0, 0, 0, 0)^T.$$

В левый столбец таблицы 3.2 запишем переменные x_3, x_4, x_5, x_6 образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные x_1, x_2. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции соответствующие небазисным переменным $c_1 = 3$, $c_2 = 2$. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной x_1, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной x_2, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_2}$. Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Таблица 3.2. Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходе

	c_j	3	2	
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	1	2	6
0	x_4	2	1	8
0	x_5	-1	1	1
0	x_6	0	1	2
	f			
		Δ_1	Δ_2	Q

Заполнение *f*-строки (таблица 3.3). Найдем относительные оценки Δ_1, Δ_2 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1 = (\overline{C_B} * \overline{A_1}) - c_1 = 0*1 + 0*2 - 0*1 + 0*0 - 3 = -3;$$
$$\Delta_2 = (\overline{C_B} * \overline{A_2}) - c_2 = 0*2 + 0*1 + 0*1 + 0*1 - 2 = -2;$$
$$Q = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 0*6 + 0*8 + 0*1 + 0*2 = 0.$$

Таблица 3.3. Заполнение f-строки

	c_j	3	2		
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	1	2	6	$6/1 = 6$
0	x_4	2	1	8	$8/2 = 4\ min$
0	x_5	-1	1	1	-1 – отрицательное значение
0	x_6	0	1	2	не имеет смысла
	f	-3	-2	0	
		Δ_1	Δ_2	Q	

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta_j \geq 0$. Так как оценки $\Delta_1 = -3$ и $\Delta_2 = -2$ в f-строке отрицательны, то это свидетельствуют о возможности улучшения полученного решения.

Наибольшая по модулю отрицательная оценка $\Delta_1 = -3$. В базис будет включена соответствующая ей небазисная переменная x_1. Составим отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (3.3). Тогда отношения по строкам x_5 и x_6 отбрасываются. Данные отношения приведены справа от таблицы. Наименьшему частному min (6, 4) =4 соответствует строка с переменной x_4. Эта переменная исключается из базиса. В таблице 3.3 разрешающий столбец и разрешающая строка выделены. Разрешающим элементом является число $a_{21} = 2$.

Далее построим новую симплекс-таблицу. Ниже поэтапно демонстрируется процесс заполнения новой симплекс-таблицы (таблицы 3.4 – 3.7).

Таблица 3.4. Новая симплекс-таблица

	c_j	0	2	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3			
3	x_1	$1/2$		
0	x_5			
0	x_6			
	f			
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.4 переменные x_1 и x_4 меняются местами вместе с коэффициентами c_j. Разрешающий элемент заменяется на обратный.

Таблица 3.5. Симплекс преобразования

	c_j	0	2	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	$-1/2$		
3	x_1	$1/2$	$1/2$	4
0	x_5	$1/2$		
0	x_6	0		
	f	$3/2$		
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.5 элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак.

Таблица 3.6. Итерация 0

	c_j	0	2		
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	$-1/2$	$3/2$	2	$4/3\ min$
3	x_1	$1/2$	$1/2$	4	8
0	x_5	$1/2$	$3/2$	5	$10/3$
0	x_6	0	1	2	2
	f	$3/2$	$-1/2$	12	
		Δ_1	Δ_2	Q	

Остальные элементы (табл. 3.6) рассчитываются по «правилу прямоугольника».

$$a_{12} = \frac{(2 \times 2) - (1 \times 1)}{2} = \frac{3}{2}; \quad a_{32} = \frac{(2 \times 1) - (-1 \times 1)}{2} = \frac{3}{2};$$

$$a_{42} = \frac{(2 \times 1) - (0 \times 1)}{2} = 1; \quad a_{13} = \frac{(2 \times 6) - (1 \times 8)}{2} = 2;$$

$$a_{33} = \frac{(2 \times 1) - (-1 \times 8)}{2} = 2; \quad a_{24} = \frac{(2 \times 2) - (0 \times 8)}{2} = 2;$$

$$\Delta_2 = \frac{(-2 \times 2) - (-3 \times 1)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 0, 2, 0, 5, 2),$$

$$f(x^{(1)}) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 0 * 2 + 3 * 4 + 0 * 5 + 0 * 2 = 12.$$

Это решение не является оптимальным, так как в *f*-строке имеется отрицательная оценка Δ_1. Принимая последнюю таблицу за исходную, повторяем описанный выше процесс и строим новую симплекс-таблицу (таблица 3.7).

Таблица 3.7. Итерация 1

	c_j	0	0	
$\overline{C_B}$		x_4	x_3	$\overline{A_0}$
2	x_2	$-1/3$	$2/3$	$4/3$
3	x_1	$2/3$	$-1/3$	$10/3$
0	x_5	1	-1	3
0	x_6	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
	f	$4/3$	$1/3$	$12\frac{2}{3}$
		Δ_1	Δ_2	Q

В последней таблице f-строка не содержит отрицательных оценок, что свидетельствует об оптимальности полученного решения:

$$x^* = x^{(2)} = (x_1 = 10/3, x_2 = 4/3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 3, x_6 = 2/3),$$
$$f_{max} = f(x^*) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 2 * 4/3 + 3 * 10/3 + 0 * 3 + 0 * 2/3 = 12\tfrac{2}{3}.$$

Проверим решение по «правилу прямоугольника».

$$f_{max} = Q = \frac{(3/2 \times 12) - (-1/2 \times 1/2)}{3/2} = 12\tfrac{2}{3}$$

Проверим полученное решение с графическим методом (раздел 2.3).

Таким образом, фабрика должна выпускать в сутки $x_1 = \frac{10}{3}$ т. краски 1-го вида и $x_2 = \frac{4}{3}$ т. краски 2-го вида. Тогда фабрика получит максимальный доход от продажи $12\frac{2}{3}$[тыс. руб./сутки].

При этом ингредиенты A и B будут использованы полностью. Эти ресурсы – дефицитные, что соответствует рис. 2.7 и рис.2.8. Однако остается спрос на краску второго вида $2/3\ \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}$, а разница между остатками спроса красок 1-го и 2-го вида будет составлять $3\,\frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}$.

Замечания.

- Для того, чтобы решить симплекс-методом задачу минимизации, необходимо изменить правило выбора разрешающего столбца (выбирать столбец s, для которого $\Delta_s \geq 0$). Признаком оптимальности допустимого решения являются условия $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1,n}$. .
- Если для некоторой симплекс-таблицы все элементы разрешающего столбца отрицательны, то целевая функция неограниченна сверху (при нахождений максимума) или снизу (при нахождении минимума) и поставленная задача решения не имеет. Приведем, пример.

Решить симплекс-методом задачу минимизации целевой функции

$$f(x) = -x_1 + x_2 \to min,$$

при условии, что на ее переменные наложены ограничения

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Добавив в ограничения дополнительные переменные x_3, x_4, перейдем к канонической форме.

$$f(x) = -x_1 + x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 \to min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем систему ограничений и целевую функцию в виде следующей симплекс-таблицы (табл. 3.8).

Таблица 3.8. Начальная симплекс-таблица

	c_j	-1	1	
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	-1	1	2
3	x_4	1	-2	4
	f	1	-1	0
		Δ_1	Δ_2	Q

Поскольку отыскивается минимум задачи, оптимальный план будет достигнут, когда все относительные оценки $\Delta_j \leq 0$.

Разрешающий столбец (табл. 3.8) — первый ($\Delta_1 \geq 0$) определяется единственным образом. Учитывая, что в разрешающем столбце только один положительный элемент, то разрешающая строка также определяется единственным образом. Переходим к следующей симплекс-таблице (табл. 3.9).

Таблица 3.9. Итерация 0

	c_j	-1	1	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	1	-1	6
3	x_1	1	-2	4
	f	-1	1	-4
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.9 f-строка содержит единственную положительную оценку Δ_2. Однако выбрать разрешающую строку не удается, так как в разрешающем столбце нет положительных элементов. Отсюда делаем вывод, что исходная задача не разрешима ввиду неограниченности целевой функции снизу.

3.5. Реализация симплексного метода в среде Microsoft Excel

Для того, чтобы решить ЗЛП в табличном процессоре Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

Ввести условие задачи:

a) создать экранную форму для ввода условия задачи: переменных, целевой функции, ограничений, граничных условий;

b) ввести исходные данные в экранную форму: коэффициенты целевой функции, коэффициенты при переменных в ограничениях; правые части ограничений;

c) ввести зависимости из математической модели в экранную форму: формулу для расчета целевой функции; формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) задать целевую функцию в окне «Поиск решения»: целевую ячейку, направление оптимизации целевой функции;

e) ввести ограничения и граничные условия в окне «Поиск решения»: ячейки со значениями переменных, граничные условия для допустимых значений переменных, соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

Решить задачу:

a) установить параметры решения задачи в окне «Поиск решения»;

b) запустить задачу на решение в окне «Поиск решения»;

c) выбрать формат вывода решения в окне «Результаты поиска решения».

Рассмотрим пример решения ЗЛП от многих переменных на примере. Допустим, имеется следующая задача:

Целевая функция.

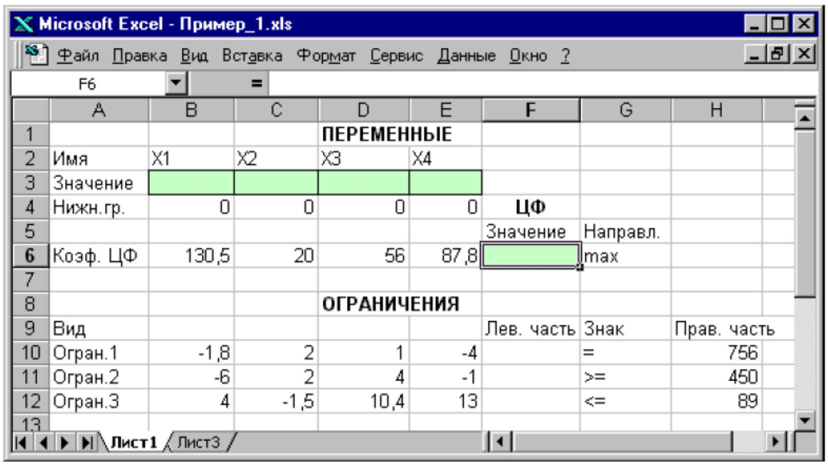
$$f(x) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to max$$

Ограничения.

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756 \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450 \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \leq 89 \end{cases}$$

$$\Delta_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Создадим экранную форму и введем в нее условия задачи. Экранная форма для ввода условий задачи вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис.3.2.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								

Рис. 3.2. Экранная форма задачи (курсор на ячейке F6)

В экранной форме на рис. 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект ЗЛП. Так, например, переменным задачи соответствуют ячейки B3 (x_1), C3 (x_2), D3 (x_3), E3 (x_4), коэффициентам целевой функции соответствуют ячейки B6 (c_1= 130,5), C6 (c_2 = 20), D6 (c_3 = 56), E6 (c_4 = 87,8), правым частям ограничений соответствуют ячейки H10 (b_1 = 756), H11 (b_2 = 450), H12 (b_3 = 89) и т.д.

Далее введем зависимости из математической модели в экранную форму.

Зависимость для целевой функции.

В ячейку F6, в которой будет отображаться значение целевая функция, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно условию задачи, значение целевой определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4$$

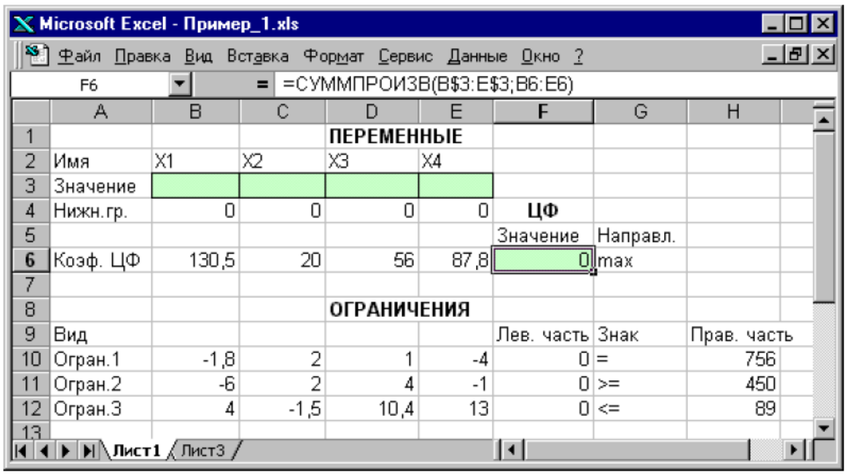
Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 3.2), формулу для расчета целевой функции можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов целевой функции (B6, C6, D6, E6), то есть

$$B6 * B3 + C6 * C3 + D6 * D3 + E6 * E3$$

Чтобы задать данную формулу необходимо в ячейку F6 ввести следующее выражение и нажать клавишу «Enter»

$$= \text{СУММПРОИЗВ}(B\$3{:}\,E\$3;\, B6{:}\,E6)$$

где символ «$» перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится; символ «:» означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись B6:E6 указывает на ячейки B6, C6, D6 и E6). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 3.3).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89
13								

Рис. 3.3. Экранная форма задачи после ввода формул (курсор на ячейке F6)

Примечание. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима «Формулы», который можно вызвать из меню «Математические» или при нажатии кнопки «f_x» на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу можно задать следующим образом:

- курсор в поле F6;
- нажав кнопку «f_x», вызовите окно «Мастер функций – шаг 1 из 2»;
- выберите в окне «Категория» категорию «Математические»;
- в окне «Функция» выберите функцию «СУММПРОИЗВ»;
- в появившемся окне «СУММПРОИЗВ» в строку «Массив 1» введите выражение B$3:E$3, а в строку «Массив 2» – выражение B6:E6 (рис. 3.4);
- после ввода ячеек в строки «Массив 1» и «Массив 2» в окне «СУММПРОИЗВ» появятся числовые значения введенных массивов (см. рис. 3.4), а в экранной форме в ячейке F6 появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

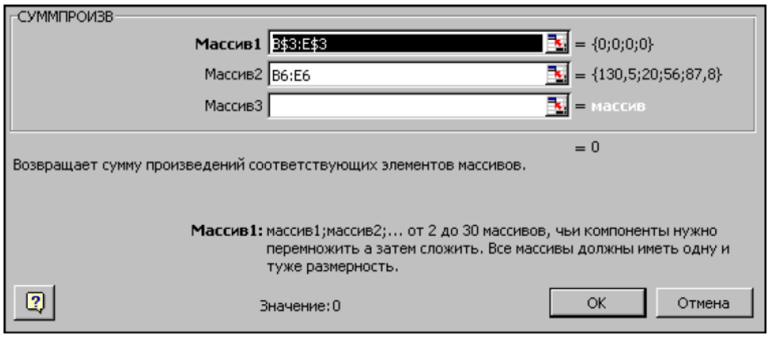


Рис. 3.4. Ввод формулы для расчета целевой функции

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – 1-е ограничение; B11, C11, D11, E11 – 2-е ограничение и B12, C12, D12, E12 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл. 3.10.

Таблица 3.10. Формулы, описывающие ограничения

Левая часть ограничения	Формулы Excel
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 * B3 + C10 * C3 + D10 * D3 + E10 * E3$	= СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 * B3 + C11 * C3 + D11 * D3 + E11 * E3$	= СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)
$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ или $B12 * B3 + C12 * C3 + D12 * D3 + E12 * E3$	= СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)

Как видно из табл. 3.10, формулы, задающие левые части ограничений задачи, отличаются друг от друга и от формулы в целевой ячейке F6 только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки F6 и скопировать в буфер содержимое ячейки F6 (клавишами «Ctrl-Insert»);
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в F10, F11 и F12, и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами "Shift-Insert") (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях F10, F11 и F12 появится 0 (нулевое значение) (см. рис. 3.3).

Проведем проверку правильности введения формул. Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 3.5).

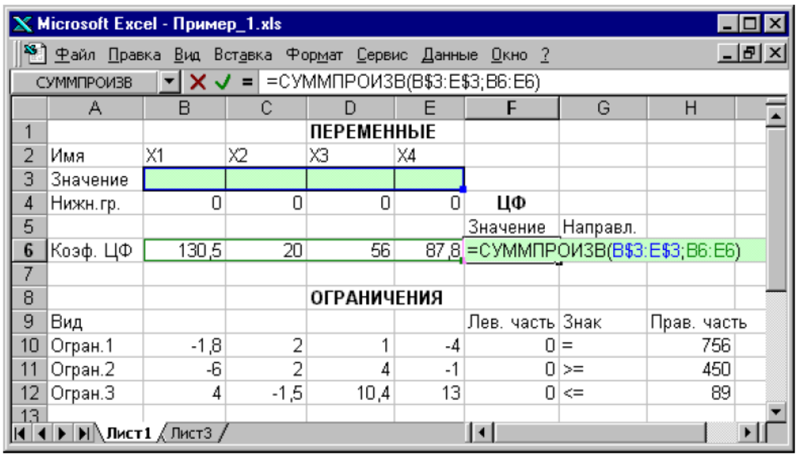


Рис. 3.5. Проверка правильности введения формулы

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из меню «Сервис» (рис. 3.6):

- поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;
- введите адрес целевой ячейки $F$6 или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме - это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации целевой функции, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «максимальному значению».

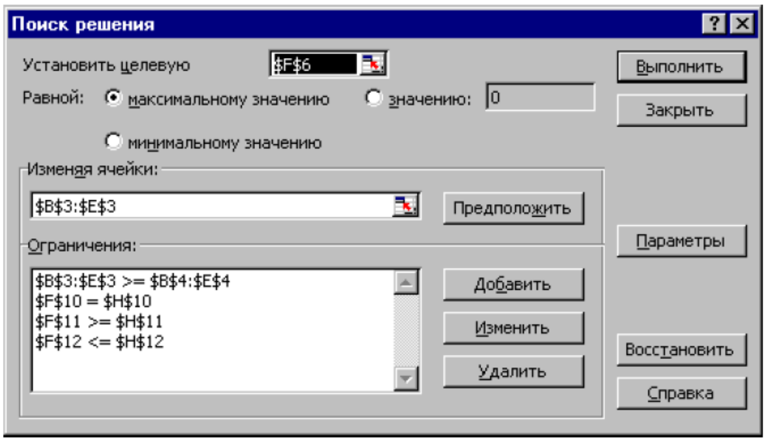


Рис. 3.6. Окно «Поиск решения»

Следующим этапом введем ограничения и граничные условия.

Задание ячеек переменных. В окно «Поиск решения» в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса $B$3:$E$3. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных. В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис. 3.2).

- Нажмите кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рис. 3.7).
- В поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных $B$3:$E$3. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите $\geq$.
- В поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть $B$4:$E$4. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

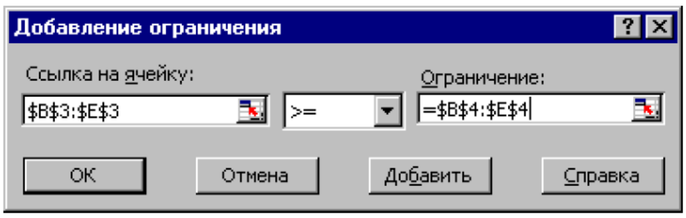


Рис. 3.7. Добавление условия неотрицательности переменных

Задание ограничений $\leq$, $\geq$, =

- Нажмите кнопку «Добавить» в окне «Добавление ограничения».
- В поле «Ссылка на ячейку» введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например: $F$10. Это можно сделать как с клавиатуры,

так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.

- В соответствии с условием задачи выбрать в поле знака необходимый знак, например: «=».
- В поле «Ограничение» введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например: $H$10.
- Аналогично введите ограничения: $F$11>=$H$11, $F$12<=$H$12.
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки ОК.

Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных задачи представлено на рис. 3.6. Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки «Изменить» или «Удалить».

Далее переходим непосредственно к решению задачи.

Установка параметров решения задачи. Задача запускается на решение в окне «Поиск решения». Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку «Параметры» и заполнить некоторые поля окна «Параметры поиска решения» (рис. 3.8).

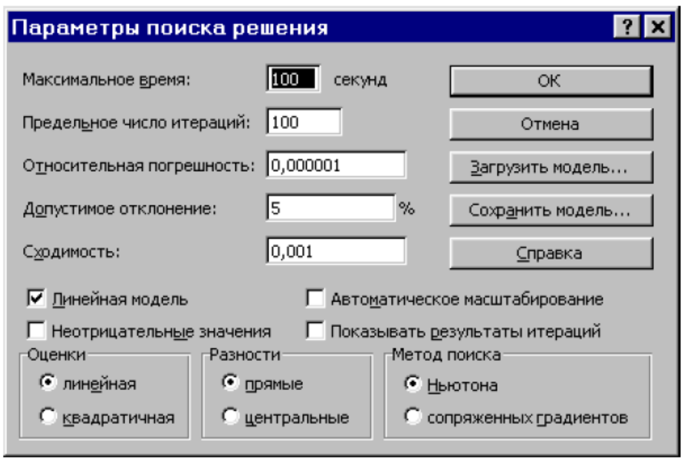


Рис. 3.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач линейного программирования

Параметр «Максимальное время» служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр «Предельное число итераций» служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр «Относительная погрешность» служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем меньше количество десятичных знаков во введенном числе, тем ниже точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр «Допустимое отклонение» служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр «Сходимость» применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка «Линейная модель» обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки «OK».

Запуск задачи на решение. Запуск задачи на решение производится из окна «Поиск решения» путем нажатия кнопки «Выполнить». После запуска на решение ЗЛП на экране появляется окно «Результаты поиска решения» с одним из сообщений, представленных на рис. 3.9, 3.10 и 3.11.

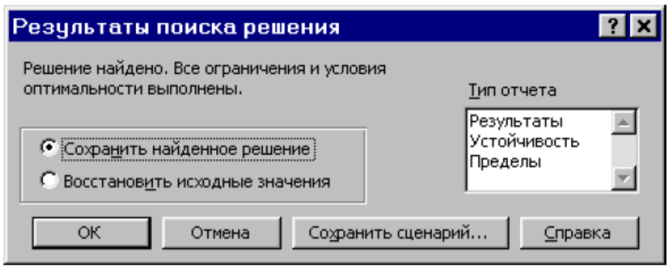


Рис. 3.9. Сообщение об успешном решении задачи

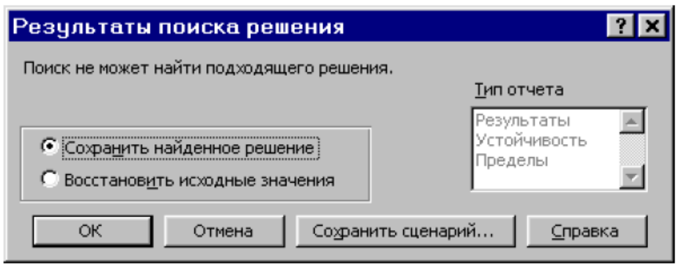


Рис. 3.10. Сообщение при несовместимой системе ограничений задачи

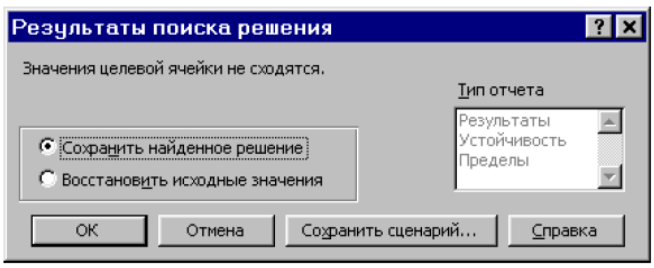


Рис. 3.11. Сообщение при ограниченности целевой функции

Иногда сообщения, представленные на рис. 3.10 и 3.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены ошибки, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует. Если при заполнении полей окна «Поиск решения» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра «Относительная погрешность» не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например: от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне «Результаты поиска решения" представлены названия трех типов отчетов: "Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, целевой функции и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «ОК». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 3.12).

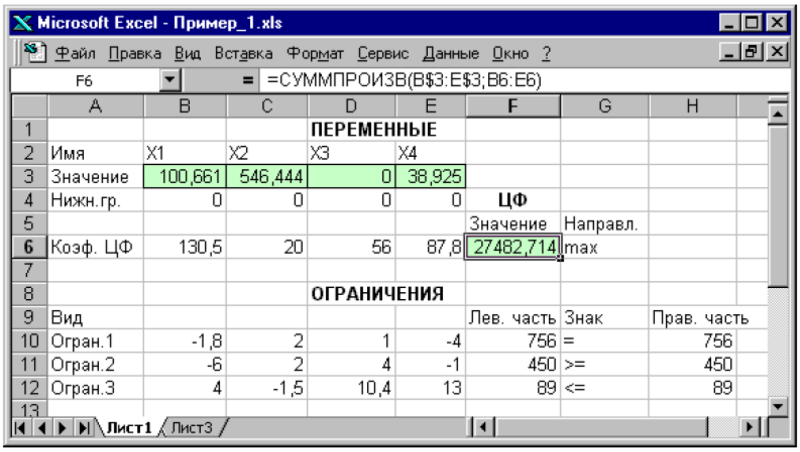


Рис. 3.12. Экранная форма задачи после получения решения

В результате решения получен оптимальный план ($x_1 = 100{,}661$; $x_2 = 546{,}444$; $x_3 = 0$; $x_4 = 38{,}925$), когда целевая функция достигает максимального значения $f(x) = 27482{,}714$.

3.6. Реализация симплексного метода на языке C++

Вычислительная процедура симплекс-метода является итерационным процессом. Если задача содержит несколько переменных и ограничений, то этот процесс очень громоздок. Во многие практические задачи входят десятки переменных и ограничений (иногда намного больше), и ясно, что неразумно решать эти задачи вручную. Симплексный метод – это метод для ЭВМ. Не случайно развитие теории линейного программирования совпало по времени с развитием ЭВМ.

Алгоритм симплексного метода может быть представлен в виде блок-схемы (рис. 3.13) для вычислений, который, в свою очередь, может быть реализован как программа на языке C++.

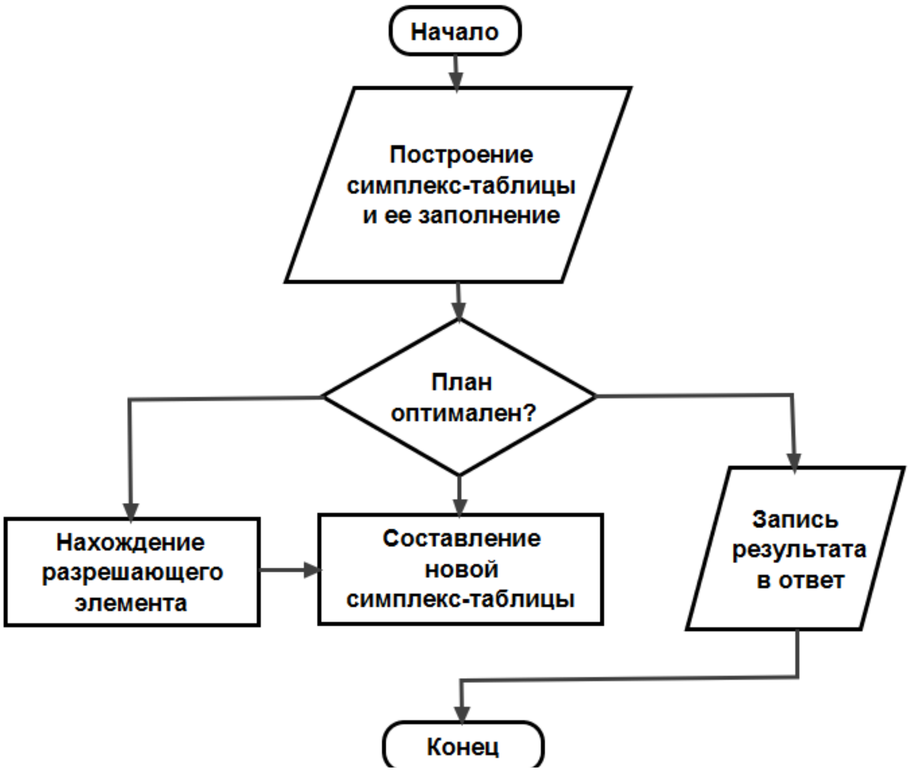


Рис. 3.13. Блок-схема процедуры симплексного метода

После построения блок-схемы симплексного метода, реализуется класс user_data. Рассмотрим содержимое заголовочного файла этого класса.

Листинг 1. user_data.h

```
#ifndef _USER_DATA_H_
#define _USER_DATA_H_

class user_data {
	public:
		void get_data_from_user();
		void user_data_is_valid();
	protected:
		double *function;
		double *fm;
		double **system;
		int *sign;
		int num_v;
		int num_l;
		bool way;
};
```

```
#endif /* _USER_DATA_H_ */
```

Рассмотрим переменные данного класса [8]:

- int num_v – хранит значение количества переменных задачи;
- int num_l – хранит значение количества ограничений задачи;
- double *function – хранит значения коэффициентов целевой функции задачи. Является указателем типа double, для которого в последующем будет выделена память и произведется инициализация его как одномерного массива с размером num_v;
- double *fm – хранит значения свободных членов системы ограничений. Является указателем типа double, который будет инициализирован как одномерный массив с размером num_l;
- double **system – хранит значения коэффициентов самой системы ограничений. Является указателем на массив указателей, который в последующем будет инициализирован как матрица, соответствующая по размеру системе ограничений поставленной задачи (num_l x num_v);
- int *sign – хранит знак каждого ограничения системы. Является указателем типа int, который будет инициализирован как одномерный массив типа с размером num_l. Рационально использовать в данном случае целочисленный тип а не строковый. т.к. Используются три знака <=, =, >=, которые храняться в *sign как 0, 1 и 2 соответственно;
- bool way – хранит направление целевой функции задачи (min/max). При решении задачи на максимум эта переменная-член будет хранить значение истины (true), а при решении на минимум, соответственно, ложь (false). Такой способ хранения данных очень рационален в данном случае, поскольку направлений у функции цели может быть только два. Поэтому тип bool идеально подходит для этого.

Функция void get_data_from_user(), собственно запрашивает у пользователя данные, которые обрабатывает должным образом и помещает в защищенные переменные-члены данного класса. В заголовочном файле хранится только прототип данной функции. Само определение функции находится в файле user_data.cpp. Рассмотрим его содержимое [8].

Листинг 2. user_data.cpp

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <cstdlib>

#include "user_data.h"
```

```
using std::cout;
using std::cin;
using std::endl;
using std::string;

void error(int err_no)
{
	switch(err_no) {
		case 0:
			cout << "\nВы ввели некорректное значение.\n" << endl;
			break;
		case 1:
			cout << "\nВы не можете задать менее двух ограничений.\n" << endl;
			break;
		case 2:
			cout << "\nВы не можете задать больше 500 ограничений.\n" << endl;
			break;
		case 3:
			cout << "\nВы не можете задать менее двух переменных.\n" << endl;
			break;
		case 4:
			cout << "\nВы не можете задать более 500 уравнений.\n" << endl;
			break;
	}
}

void user_data::get_data_from_user()
{
	string num_limits, num_vars, s_var, fr_m, sn, func, w;
	int i, j;
	bool validator = false;


	do {
		cout << "Введите количество ограничений в системе: ";
		getline(cin, num_limits);
		if (atoi(num_limits.c_str()) < 2)
			error(1);
		else if (atoi(num_limits.c_str()) > 500)
			error(2);
		else
			validator = true;

	} while (!validator);

	num_l = atoi(num_limits.c_str());
	validator = false;

	do {
		cout << "Введите количество переменных в системе ограничений: ";
		getline(cin, num_vars);
	if (atoi(num_vars.c_str()) < 2)
```

```
		error(3);
	else if (atoi (num_vars.c_str()) > 500)
		error(4);
	else
		validator = true;
	} while (!validator);

	num_v = atoi(num_vars.c_str());
	validator = false;

	function = new double [num_v];
	system = new double *[num_l];
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		system[i] = new double [num_v];
	fm = new double [num_l];
	sign = new int [num_l];

	cout << "\nЗаполните коэффициенты при целевой функции.\n" << endl;

	for (i = 0; i < num_v; i++) {
		do {
			cout << "Введите коэффициент целевой фукнции при x" << i + 1 << ": ";
			getline(cin, func);
			if (atof(func.c_str()) == 0)
				error(0);
			else {
				validator = true;
				function[i] = atof(func.c_str());
			}
		} while (!validator);
		validator = false;
	}

	do {
		cout << "Введите направление целевой функции ( min, max ) : ";
		getline(cin, w);
		if (w == "max" || w == "MAX" || w == "min" || w == "MIN") {
			validator = true;
			if (w == "max" || w == "MAX")
				way = true;
			else
				way = false;
		}
		else
			error (0);

	} while (!validator);
	cout << "\nЗаполните систему ограничений.\n" << endl;

	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		cout << "Заполните " << i + 1 << "-е ограничение.\n" << endl;
		for (j = 0; j < num_v; j++) {
```

```
			do {
				cout << "Введите коэффициэнт при x" << j + 1 << ": ";
				getline(cin, s_var);
				if (atof(s_var.c_str()) == 0)
					error (0);
				else {
					validator = true;
				}
			} while (!validator);
			system[i][j] = atof(s_var.c_str());
			validator = false;
		}

		do {
			cout << "Введите знак при " << i + 1 << "-м ограничении ( <=, =, >= ) : ";
			getline(cin, sn);
			if (sn == "<=" || sn == "=" || sn == ">=") {
				validator = true;
				if (sn == "<=")
					sign[i] = 0;
				if (sn == "=")
					sign[i] = 1;
				if (sn == ">=")
					sign[i] = 2;
				}
			else
				error(0);
			cout << sign[i] << endl;
		} while (!validator);

		validator = false;

		do {
			cout << "Введите свободный член при " << i + 1 << "-м ограничении: ";
			getline(cin, fr_m);
			if (atof(fr_m.c_str()) == 0)
				error(0);
			else
				validator = true;
		} while (!validator);

		fm[i] = atof(fr_m.c_str());
		validator = false;

		cout << endl;
	}

}
```

Функция error(int err_no) принимает в качестве аргумента номер ошибки, которая должна вывестись пользователю в том случае, если он ввел некорректные данные. Далее номер ошибки, переданный в функцию обрабатывается оператором switch(), и в зависимости от принимаемого функцией аргумента, выводится ошибка с помощью оператора cout.

Теперь рассмотрим функцию-член get_data_from_user() класса user_data. Все данные, который вводит пользователь, первоначально помещаются в объект типа string, а затем проверяется корректность данных, если все введено верно, то выполняется преобразование из std::string в int или double с помощью функций atoi() и atof() соответственно. При этом дробные значения необходимо вводить со знаком запятой а не точки. Функция atof() в MS Windows воспринимает как знак разделения целой и дробной части именно запятую

Вначале у пользователя запрашивается количество ограничений в системе. Если было введено целое число, от 2 до 500, то это значение преобразуется в int и заностится в переменную-член num_l. В противном случае вызывается функция error() с номером ошибки и снова запрашивается ввод данных. Далее, таким же образом пользователь вводит количество переменных задачи [8].

Затем выделяется память под массив function и матрицу system, а также идет ввод коэффициентов функции цели в цикле. После этого идет ввод значения направления функции. Если оно введено верно, то в переменная-член way заносится true или false, в зависимости от введенного значения. Регистр при вводе направления не учитывается при проверке. Если все верно, заполняется матрица system коэффициентами системы ограничений исходной задачи. Заполнение происходит в двух вложенных циклах, в первом из которых, также вводится знак ограничения и значение свободного члена при этом ограничении. Когда пользователь закончит ввод и все переменные-члены класса user_data будут заполнены, осуществляется переход к самому алгоритму, который реализован в классе simplex, являющимся прямым наследником класса user_data. Рассмотрим содержимое заголовочного файла этого класса [8].

Листинг 3. simplex.h

```
#ifndef _SIMPLEX_H_
#define _SIMPLEX_H_

#include <sstream>

#include "user_data.h"

class simplex : public user_data {
	public:
		void init();
		void gen_plane();
		bool plane_is_valid();
```

```
		bool function_is_undefined();
		void print_result_to_file(int it_num);
	private:
		double func;
		double **bv;
		double **sv;
		double *istr;
		double *th;
		double alm;
		int i_lrow;
		int i_lcol;
		std::stringstream table;
};

#endif /* _SIMPLEX_H_ */
```

Рассмотрим закрытые переменная данного класса [8]:

- double func – содержит значение целевой функции. При каждой итерации меняется;
- double **bv – содержит значения базисных переменных задачи. Данный член является указателем на массив указателей, который в последующем инициализируется двумерным массивом num_v * 2. В первом столбце которого содержатся значения базисных переменных задачи, а во втором номера этих переменных, которые изменяются при каждой последующей итерации;
- double **sv – матрица коэффициентов при переменных задачи размером num_l x num_v * 2. Первые num_v столбцы данной матрицы заполняются коэффициентами исходной системы ограничений, а последующие num_v столбцы заполняются единичной матрицей, если решается задача на максимум, если же производится решение задачи на минимум, единицы меняют свой знак;
- double *istr – индексная строка, является одномерным массивом размером num_v * 2, первая половина которого заполняется коэффициентами функции-цели с обратным знаком, а вторая нулями на первой итерации. На последующих итерациях значения индексной строки меняются;
- int i_lcol = индекс ведущего столбца текущего плана;
- double *th (греч. «тета») – последний столбец симплексной таблицы, инициализируется одномерным массивом размером num_l;
- int i_lrow = индекс ведущей строки текущего плана;
- double alm – разрешающий элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки;

- std::stringstream table – объект класса std::stringstream, который содержит весь пользовательский вывод в выходной файл;

Таким образом, были рассмотрены предназначения каждой переменная-члена класса simplex. Весь алгоритм вычисления вышеприведенных значений производится в файле simplex.cpp [8].

Листинг 4. simplex.cpp

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>
#include <sstream>
#include <string>

#include "user_data.h"
#include "simplex.h"

using std::cout;
using std::endl;

void simplex::init()
{
	int i, j;
	func = 0;
	sv = new double *[num_l];
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		sv[i] = new double [num_v * 2];
	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		for (j = 0; j < num_v; j++)
			sv[i][j] = system[i][j];
		for (; j < num_v * 2; j++)
			if (i + num_v == j)
				if (way)
					sv[i][j] = 1;
				else
					sv[i][j] = -1;
			else
				sv[i][j] = 0;
	}
	istr = new double [num_v * 2];
	bv = new double *[num_l];
	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		bv[i] = new double [2];
		bv[i][0] = i + num_v;
		bv[i][1] = fm[i];
```

```
	}
	for (i = 0; i < num_v * 2; i++)
		if (i < num_v)
			istr[i] = function[i] * -1;
		else
			istr[i] = 0;
	i_lcol = 0;
	for (i = 0; i < num_v * 2 - 1; i++) {
		if (istr[i] < 0)
			if (fabs(istr[i + 1]) > fabs(istr[i]))
				i_lcol = i + 1;
	}
	th = new double [num_l];
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		th[i] = bv[i][1] / sv[i][i_lcol];
	i_lrow = 0;
	for (i = 0; i < num_l - 1; i++)
		if (th[i] > th[i + 1])
			i_lrow = i + 1;
	alm = sv[i_lrow][i_lcol];
	print_result_to_file(0);
}
bool simplex::plane_is_valid()
{
	int i;
	bool result = true;
	if (way)
		for (i = 0; i < num_v * 2; i++)
			if (istr[i] < 0) {
				result = false;
				break;
			}
	if (!way)
		for (i = 0; i < num_v * 2; i++)
			if (istr[i] >= 0) {
				result = false;
				break;
			}

	return result;
}
bool simplex::function_is_undefined()
{
	int i;
```

```
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		if (th[i] < 0) {
			return false;
		}
	return true;
}
void simplex::gen_plane()
{
	int i, j, it_num = 0;
	double A, B;
	while (!plane_is_valid() && function_is_undefined()) {
	A = bv[i_lrow][1];
	B = istr[i_lcol];
	func -= A * B / alm;
	double *tmp_bv = new double [num_l];
	bv [i_lrow][0] = i_lcol;
	A = bv[i_lrow][1];
	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		B = sv[i][i_lcol];
		tmp_bv[i] = bv[i_lrow][1];
		if (i != i_lrow)
			tmp_bv[i] = bv[i][1] - A * B / alm;
		else
			tmp_bv[i] /= alm;
	}
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		bv[i][1] = tmp_bv[i];
	double *tmp_istr = istr;
	B = istr[i_lcol];
	for (i = 0; i < num_v * 2; i++) {
		A = sv[i_lrow][i];
		tmp_istr[i] = istr[i] - A * B / alm;
	}
	istr = tmp_istr;
	double **tmp_sv = new double *[num_l];
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		tmp_sv[i] = new double [num_v * 2];
	for (i = 0; i < num_l; i++)
		for (j = 0; j < num_v * 2; j++) {
			tmp_sv[i][j] = sv[i][j];
			A = sv[i_lrow][j];
			B = sv[i][i_lcol];
			if (i == i_lrow)
				tmp_sv[i][j] /= alm;
```

```
                    else
                              tmp_sv[i][j] = sv[i][j] - A * B / alm;
          }
    sv = tmp_sv;
    i_lcol = 0;
    for (i = 0; i < num_l; i++)
          th[i] = bv[i][1] / sv[i][i_lcol];
    i_lrow = 0;
    for (i = 0; i < num_l -1; i++)
          if (th[i] > th[i + 1])
                    i_lrow = i + 1;
          alm = sv[i_lrow][i_lcol];
          it_num++;
          print_result_to_file(it_num);
    }

    if (!function_is_undefined())
                    cout << "\nЦелевая фукнция не ограничена, данная задача решений не
имеет\n" << endl;
    else {
          cout << "\nf(x) = " << func << "\n" << endl;
          for (i = 0; i < num_l; i++) {
                    cout << "x" << bv[i][0] + 1 << " = " << bv[i][1] << endl;
          }
          cout << "\nВсе вычисления были записаны в файл table.txt\n" << endl;
    }
}
void simplex::print_result_to_file(int it_num)
{
    int i, j;
    if (!it_num) {
    table << "Задана целевая функция:\n" << endl;
    std::stringstream f_x;
    f_x << "f(x) = ";
    for (i = 0; i < num_v; i++) {
          if (!i)
                    f_x << function[i] << "x" << i + 1 << " ";
          else {
                    if (function[i] < 0)
                              f_x << "- " << fabs(function[i]) << "x" << i + 1 << " ";
                    if (function[i] > 0)
                              f_x << "+ " << function[i] << "x" << i + 1 << " ";
          }
    }
```

```
	std::string minmax;
	if (way)
		minmax = "max";
	else
		minmax = "min";
	f_x << "=> " << minmax << "\n" << endl;
	table << f_x.str();
	table << "И система ограничений:\n" << endl;
	std::stringstream math_sys;
	std::string math_sign;
	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		for (j = 0; j < num_v; j++) {
			if (!j)
				math_sys << system[i][j] << "x" << j + 1 << " ";
			else
				if (system[i][j] == 1)
					if (!j)
						math_sys << "x" << j + 1 << " ";
					else
						math_sys << "+ x" << j + 1 << " ";
				else
					if (system[i][j] == -1)
					if (!j)
						math_sys << "-x" << j + 1 << " ";
					else
						math_sys << "- x" << j + 1 << " ";
					else {
						if (system[i][j] < 0)
							math_sys << "- " << fabs(system[i][j])<< "x"
<< j + 1 << " ";

						else
							math_sys << "+ " << system[i][j] << "x" << i +
1 << " ";

						if (!sign[i])
								math_sign = "<=";
						if (sign[i] == 1)
							math_sign = "=";
						 if (sign[i] == 2)
							math_sign = ">=";
				}
		}
		math_sys << math_sign << " " << fm[i];
		math_sys << endl;
	}
```

```
	std::string min_or_max;
	if (way)
		min_or_max = "максимум";
	else
		min_or_max = "минимум";
	table << math_sys.str() << endl;
	table << "Решим данную задачу на " << min_or_max << " методом симплексных таб-
лиц.\nПостроим первый опорный план:\n" << endl;
	}
	for (i = 0; i < num_l; i++) {
		table << "x" << bv[i][0] + 1 << "\t" << bv[i][1] << "\t";
		for (j = 0; j < num_v * 2; j++)
			table << sv[i][j] << "\t";
		if (!plane_is_valid())
			table << th[i];
		table << "\n" << endl;
	}
	table << "f(x)\t" << func << "\t";
	for (i = 0; i < num_v * 2; i++)
		table << istr[i] << "\t";
	table << "\n";
	if (plane_is_valid()) {
		if (plane_is_valid() && function_is_undefined())
			table << "\nДанный план является оптимальным и не требует улучшения.
Решение найдено." << endl;
			std::ofstream outfile ("table.txt");
			outfile << table.str();
	}
	else {
		std::string ln_or_gn;
		if (way)
			ln_or_gn = "неположительные";
		else
			ln_or_gn = "положительные";
		std::stringstream num_of_plane;
		if (!it_num)
			num_of_plane << "Первый опорный план";
		else
			num_of_plane << it_num + 1 << "-й план также";
		table << "\n" << num_of_plane.str() << " не является оптимальным, поскольку\nв
индексной строке присутствуют " << ln_or_gn << " элементы.\nЕго необходимо улучшить.\n"
<< endl;
	}
}
```

В начале выполняется инициализация первого опорного плана. Этим занимается функция-член init() класса simplex.

Значение функции-цели в первом опорном плане всегда равно нулю, поэтому в init() выполняется инициализация переменной-члена func класса simplex именно нулем.

Затем выделяется память под матрицу коэффициентов sv. И производится ее заполнение. Первая часть данной матрицы заполняется коэффициентами системы ограничений исходной задачи, вторая часть является единичной матрицей, в случае решения задачи на максимум, если же решается задача на минимум, единицы в данной матрице меняют свой знак.

После заполнения sv производится выделение памяти под одномерный массив istr и инициализация этого массива (индексной строки первого опорного плана). Первая ее часть заполняется коэффициентами целевой функции с обратным знаком, вторая ее половина инициализируется нулями.

Вычисляется индекс ведущего столбца первого опорного плана задачи. Данный индекс соответствует индексу максимального по модулю отрицательного элемента индексной строки.

Далее выделяется память под массив th и производится его инициализация. Элементы этого массива вычисляются путем деления значений базисных переменных текущего плана на значения коэффициентов ведущего столбца. После вычисления колонки th производится вычисление индекса ведущей строки, который соответствует индексу минимального значения в столбце th.

Разрешающий элемент плана находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки текущего плана. После его вычисления производится вызов функции print_result_to_file(), которая заносит таблицу для первоначального опорного плана в объект table класса std::stringstream, который также является переменная-членом класса simplex [8].

После построения первого опорного плана необходимо вычислить оптимальный план исходной задачи. Нужно произвести итерирование цикла, пока план не станет оптимальным. Проверкой оптимальности плана занимается функция bool plane_is_valid, которая проверяет индексную строку текущего плана на наличие отрицательных элементов в случае решения задачи на максимум и неотрицательный в противном случае. Если таковые элементы имеются в индексной строке, то план является неоптимальным и его необходимо улучшить, поэтому функция возвращает значение false в данном случае. Если план является оптимальным, функция возвратит значение true, что будет являться сигналом о прекращении итерирования для цикла, реализованного в функции gen_plane().

Однако, бывают случаи, когда задача не имеет решений. Данная ситуация возникает тогда, когда в столбце th («тета») присутствуют отрицательные элементы. Данной проверкой занимается функция bool function_is_undefined(), которая возвратит истину, если в столбце th не имеется отрицательных элементов, и ложь, если таковые элементы имеются.

Теперь, когда присутствуют все проверки, можно переходить к вычислению оптимального плана, т. е. итерированию цикла до тех пор, пока план не оптимален и задача имеет решение. Этим занимается функция gen_plane().

Вычисление последующего плана весьма схоже с вычислением первого опорного плана. Единственным весомым отличием является метод «прямоугольника», по которому вычисляются необходимые элементы таблицы (см. 3.4).

Перед тем, как вывести на экран ответ, в цикле производится вызов функции print_result_to_file(), которая в данном случае принимает в качестве аргумента номер итерации цикла, начиная с единицы. Функция пишет в объект table класса std::stringstream весь вывод. При этом если план при текущей итерации стал оптимален, функция print_result_to_file() создает объект outfile класса std::oftream. Тогда если будет необходимо напечатать все решение на экран, нужно будет просто заменить «outfile <<» на «cout <<» или на любой другой потоковый оператор вывода.

Чтобы алгоритм заработал, необходимо реализовать функцию main() [8].

Листинг 5. main.cpp

```
include "simplex.h"

int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");
	simplex *ud = new simplex;
	ud->get_data_from_user();
	ud->init();
	ud->gen_plane();
	return 0;
}
```

Вначале листинга задается русская версия для консоли Windows, затем создается объект класса simplex, после чего вызывается функция get_data_from_user() наследуемого класса user_data, а затем init() и gen_plane() которые также были рассмотрены выше.

Найдем решение с помощью разработанной программы следующей задачи:

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow max$$
$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \leq 1100 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}02x_3 \leq 450 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8000 \end{cases}$$

Решим данную задачу (рис.3.14).

```
Введите количество ограничений в системе: 3
Введите количество переменных в системе ограничений: 3

Заполните коэффициенты при целевой функции.

Введите коэффициент целевой фукнции при x1: 3
Введите коэффициент целевой фукнции при x2: 5
Введите коэффициент целевой фукнции при x3: 4
Введите направление целевой функции ( min, max ) : max

Заполните систему ограничений.

Заполните 1-е ограничение.

Введите коэффициэнт при x1: 0.1
Введите коэффициэнт при x2: 0.2
Введите коэффициэнт при x3: 0.4
Введите знак при 1-м ограничении ( <=, =, >= ) : <=
Введите свободный член при 1-м ограничении: 1100

Заполните 2-е ограничение.

Введите коэффициэнт при x1: 0.05
Введите коэффициэнт при x2: 0.02
Введите коэффициэнт при x3: 0.02
Введите знак при 2-м ограничении ( <=, =, >= ) : <=
Введите свободный член при 2-м ограничении: 120

Заполните 3-е ограничение.

Введите коэффициэнт при x1: 3
Введите коэффициэнт при x2: 1
Введите коэффициэнт при x3: 2
Введите знак при 3-м ограничении ( <=, =, >= ) : <=
Введите свободный член при 3-м ограничении: 8000


f(x) = 27625

x2 = 5375
x1 = 250
x6 = 1875

Все вычисления были записаны в файл table.txt
```

Рис. 3.14. Запись условия задачи и ее решение

При этом в файл table.txt будет записано решение задачи в виде симплексных таблиц (рис.3.15).

```
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
Построим первый опорный план:

x4      1100    0.1     0.2     0.4     1       0       0       5500

x5      120     0.05    0.02    0.02    0       1       0       6000

x6      8000    3       1       2       0       0       1       8000

f(x)    0       -3      -5      -4      0       0       0

Первый опорный план не является оптимальным, поскольку
в индексной строке присутствуют неположительные элементы.
Его необходимо улучшить.

x2      5500    0.5     1       2       5       0       0       11000

x5      10      0.04    0       -0.02   -0.1    1       0       250

x6      2500    2.5     0       0       -5      0       1       1000

f(x)    27500   -0.5    0       6       25      0       0

2-й план также не является оптимальным, поскольку
в индексной строке присутствуют неположительные элементы.
Его необходимо улучшить.

x2      5375    0       1       2.25    6.25    -12.5   0

x1      250     1       0       -0.5    -2.5    25      0

x6      1875    0       0       1.25    1.25    -62.5   1

f(x)    27625   0       0       5.75    23.75   12.5    0

Данный план является оптимальным и не требует улучшения. Решение найдено.
```

Рис. 3.15. Запись условия задачи и ее решение

3.7. Контрольные вопросы

1. В чем заключается идея симплекс-метода?

2. В каком виде должна быть записана модель ЗЛП для решения симплекс-методом?

3. Как построить первое базисное решение? В каком случае оно будет опорным решением ЗЛП?

4. Из каких этапов состоит переход от одного опорного решения к другому?

5. Как определить, какой из столбцов выбирается за разрешающий в симплекс-преобразованиях

6. Каким образом сохраняется неотрицательность переменных нового базисного решения?

7. Что является критерием оптимальности решения ЗЛП в симплекс-методе?

8. Как определяется текущее значение целевой функции из таблицы?

4. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

С каждой ЗЛП тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. Тогда первоначальная задача называется исходной или прямой [7].

4.1. Сущность прямой и двойственной задачи

Математические модели двойственных задач могут быть симметричными или несимметричными. В таблицах 4.1, 4.2 приведены их матричные формы записи.

Таблица 4.1. Симметричные задачи

	Прямая	Двойственная
1	$f(\bar{x}) = (\bar{c},\bar{x}) \to max$ $A\bar{x} \leq \bar{b}$ $\bar{x} \geq 0$	$g(\bar{y}) = \left(\bar{b},\bar{y}\right) \to min$ $A^T\bar{y} \geq \bar{c}$ $\bar{y} \geq 0$
2	$f(\bar{x}) = (\bar{c},\bar{x}) \to min$ $A\bar{x} \leq \bar{b}$ $\bar{x} \gg 0$	$g(\bar{y}) = \left(\bar{b},\bar{y}\right) \to max$ $A^T\bar{y} \leq \bar{c}$ $\bar{y} \geq 0$

В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие не отрицательности [3].

Таблица 4.2. Несимметричные задачи

	Прямая	Двойственная
1	$f(\bar{x}) = (\bar{c},\bar{x}) \to max$ $A\bar{x} = \bar{b}$ $\bar{x} \geq 0$	$g(\bar{y}) = \left(\bar{b},\bar{y}\right) \to min$ $A^T\bar{y} \geq \bar{c}$
2	$f(\bar{x}) = (\bar{c},\bar{x}) \to min$ $A\bar{x} = \bar{b}$ $\bar{x} \geq 0$	$g(\bar{y}) = \left(\bar{b},\bar{y}\right) \to max$ $A^T\bar{y} \leq \bar{c}$

В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а в двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными [3].

В таблицах 4.1, 4.2 введены следующие обозначения:

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор столбец неизвестных прямой задачи;

$\bar{\mathrm{c}} = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \dots, \mathrm{c}_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции;

$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ – вектор столбец двойственных переменных;

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектор столбец правых частей системы ограничений;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы ограничений;

Т – операция транспонирования.

4.2. Общие правила составления двойственных задач

При составлении двойственных задач используют следующие правила [4]:

1) Матрица из коэффициентов при переменных в прямой задаче и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспортированием.

2) Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3) Если знаки неравенств в ограничениях прямой задачи «≤», то целевая функция должна $f(\bar{x})$ максимизироваться, если «≥» минимизироваться.

4) Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию не отрицательности, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5) Целевая функция двойственной задачи $g(\bar{x})$ должна оптимизироваться противоположно целевой функции $f(\bar{x})$, т.е. $f(\bar{x}) \to max$, то $g(\bar{y}) \to min$, если $f(\bar{x}) \to min$, то $g(\bar{y}) \to max$.

Рассмотрим примеры построения двойных задач.

Дана прямая задача на максимум. Построить к ней двойственную задачу.

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \geq 19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Рассматриваемая задача относится к симметричным двойственным задачам на отыскание максимального значения целевой функции.

Используем общие правила составления двойственных задач. Так как в задаче на максимум ограничения неравенства должны иметь вид «≤», то умножим второе ограничение-неравенство на – 1 (см. правило 2). Исходная задача запишется в виде.

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq -19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Найдем соответствующую двойственную задачу (строка 1, таблица 4.1). Введем вектор двойственных переменных размерности 3 (по числу уравнений системы ограничений) $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$. Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\bar{c} = (1, -2, 5),\ \bar{b} = (18, -19, 20),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 18y_1 - 19y_2 + 20y_3 \to min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -2, \\ 4y_1 - 6y_2 - 3y_3 \geq 5, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Укажем еще один метод, позволяющий значительно облегчить процесс построения двойственных задач. Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствии двойственные переменные.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq -19 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20 \end{cases} \quad \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

В соответствии с общими правилами двойственная задача запишется в виде:

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 18y_1 - 19y_2 + 20y_3 \to min,$$

Чтобы получить, например, первое ограничение двойственной задачи, надо найти сумму произведений элементов, стоящих в столбце x_1, на соответствующие двойственные переменные. Результат $2y_1 - 5y_2 + 2y_3$.

Считаем, что эта сумма не меньше $c_1 = 1$;

$$2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1.$$

Аналогично составляются и остальные ограничения двойственной задачи. Рассмотрим прямую задачу на минимум.

$$f(\bar{x}) = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \geq 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствие двойственные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq \ \ 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \geq \ \ 7 \end{cases} \quad \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}$$

Составим двойственную задачу:

$$g(\bar{y}) = 8y_1 - 10y_2 + 7y_3 \to max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 \leq -3, \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 \leq 4, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -6, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Переменная y_2, соответствующая ограничению равенству $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$, может быть любого знака (см. правило 4).

4.3. Первая теорема двойственности

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена не зависимо от другой. Связь задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Взаимная симметрия прямой и двойственной задач определяет существование определенного соответствия между их оптимальными решениями. Эти соответствия устанавливают теоремы двойственности.

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны [9]:

$$\max f(\bar{x}) = \min g(\bar{y}) \tag{4.1}$$

Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов, то система ограничений другой задачи противоречива.

Если совокупность ограничений одной из двойственных задач противоречива, то либо функция цели другой задачи не ограничена на множестве допустимых решений, либо система ограничений другой задачи также противоречива.

Таким образом, экономическое содержание первой теоремы двойственности заключается в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем стоимость выпущенной продукции, полученной при реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадение значений целевых функций для соответствующих планов пары двойственных задач достаточно, чтобы эти планы были оптимальными. Оценки в этом случае выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов, и обусловливают убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального.

Проиллюстрируем первую теорему двойственности на примере задачи о максимальном доходе. Напомним ее условие:

Целевая функция.

$$\mathrm{f(x)} = 3\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \to \max \ [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \le 6 \ [\text{т. ингр. А/сутки}] \\ 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \le 8 \ [\text{т. ингр. В/сутки}] \\ -\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \le 1 \ [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_2 \le 2 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_1 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_2 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \end{cases}$$

Составим математическую модель двойственной задачи. В качестве переменных двойственной задачи возьмем $y_1, y_2, y_3, y_4,$ представляющие собой условные оценки запасов сырья. Данная задача является симметричной, тогда двойственная задача в матричном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to min \\ A^T \bar{y} \ \ge \bar{c}, \\ \bar{y} \ge 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ – вектор двойственных переменных;

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица коэффициентов системы ограничений.

Раскрывая соотношения (4.2), можно сформулировать двойственную задачу так:

найти минимум целевой функции

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4$$

при следующих ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 2 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Ограничения означают, что суммарная оценка стоимость сырья, используемого на производство продукции, соответственно, А и В видов, была бы не меньше стоимости единицы продукции данного вида.

В ходе решения прямой задачи (подраздел 3.4) было определено: максимальный доход от продажи $f_{max} = (\overline{C_в}, \overline{A_0}) = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки], оптимальный план $\overline{x^*} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (10/3,\ 4/3,\ 0,\ 0,\ 3,\ 2/3)$.

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи.

Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы [9]

$$\overline{g^*} = \overline{C_B} \cdot D^{-1} \tag{4.3}$$

где D – матрица, составленная из компонентов векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В нашем примере в последней симплекс-таблице базисными переменными являются $x_2, x_1, x_5, x_{6.}$. Соответствующие этим переменным векторы $\overline{A_2}, \overline{A_1}, \overline{A_5}, \overline{A_6}$ в разложении (3.6) используются для формирования столбцов матрицы D

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$D = (\overline{A_2}, \overline{A_1}, \overline{A_5}, \overline{A_6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Напомним, как вычислять обратную матрицу D^{-1}.

Для вычисления обратной матрицы D^{-1} запишем матрицу D дописав к ней справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{cccc||cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Для нахождения обратной матрицы D^{-1} используем элементарные преобразования над строками матрицы. Таким образом, преобразуются левая часть полученной матрицы в единичную.

1-ую строку делим на 2;

$$\left(\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 2-ой, 3-ей и 4-ой строки отнимаем 1-ую строку;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

2-ую строку делим на $3/2$;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

от 1-ой строки отнимаем 2-ую строку, умноженную на 0,5; к 3-ей строке добавляем 2-ую строку, умноженную на 3/2; к 4-ой строке добавляем 2-ую строку, умноженную на 1/2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Запишем обратную матрицу.

$$D^{-1} = (y_2^*, y_1^*, y_5^*, y_6^*) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ -1/2 & 1/3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Примечательно, что обратная матрица может быть найдена либо по правилам нахождения обратной матрицы, либо составлена из упорядоченной матрицы коэффициентов при базисных переменных $x_2,\ x_1,\ x_5, x_6$ последней симплекс-таблицы

В нашем примере в последней симплекс-таблице базисными переменными являются

Так как $\overline{C_B} = (2, 3, 0, 0)$, то

$$\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = \overline{C_B} \cdot D^{-1} = \left(\left(2 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3}\right); \left(-2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3}\right); 0; 0\right) =$$

$$= (\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0)$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$g_{min} = g\overline{(y^*)} = \left(\bar{b}, \overline{y^*}\right) = 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{4}{3} + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 12\frac{2}{3}\left[\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{сутки}}\right]$$

совпадает с максимальным значением $f_{max} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности.

Таким образом, условие 4.1 выполнено.

$$max\ f(\bar{x}) \ = \ min\ g(\bar{y}) = \ 12\frac{2}{3}[\text{тыс. руб./сутки}]$$

При этом запасы ингредиента А составляют $y_1 = 1/3$ [т. ингр. А/сутки], а ингредиента В составляют $y_2 = 4/3$ [т. ингр. В/сутки].

4.4. Вторая теорема двойственности

Вторую теорему двойственности иногда называют теоремой о дополняющей нежесткости. Используя ее также можно прийти к решению двойственной задачи.

Вторая теорема двойственности. Для того, чтобы планы $\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{\mathrm{n}}^*)$ и $\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ ЗЛП двойственной пары (таблицы 4.1 и 4.2) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости (4.4) и (4.5).

$$\{x_j^*\left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n} \qquad (4.4)$$

$$\{y_i^*\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m} \qquad (4.5)$$

Эти условия можно сформулировать следующим образом [9]:

- Если какое-либо ограничение одной из задач с оптимальным решением обращается в строгое неравенство, то соответствующая этому ограничению переменная оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю.

$$\text{если } \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j,\ \text{то } x_j^* = 0 \qquad (4.6)$$

- Если значение какой-либо переменной в оптимальном решении одной из задач положительно, то соответствующее ей ограничение в двойственной задаче оптимальным решением этой задачи должно обращаться в точное равенство.

$$\text{если } x_j^* > 0,\ \text{то } \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j \qquad (4.7)$$

Условия (4.6) и (4.7) характеризуют производимый продукт с точки зрения рентабельности [9]:

- Если j-ый вид продукции включен в оптимальный план выпуска ($x_j^* > 0$), то стоимость затраченных на единицу этого продукта производственных факторов будет равна единице этого продукта. Следовательно, производство этого продукта рентабельно.
- Если производство j-ого вида продукции не рентабельно (затраты ресурсов на производство единицы продукта превышают его стоимость), то этот продукт не включен в оптимальный план ($x_j^* = 0$).

Также условия (4.8) и (4.9) характеризуют используемые факторы производства с точки зрения их дефицитности:

- Если оценка i-ого фактора положительна ($y_i^* > 0$), то весь его запас полностью используется в оптимальном плане производства, т.е. этот фактор является «дефицитным».

$$\textit{если } y_i^* > 0, \textit{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i \tag{4.8}$$

- Если i-ый фактор в процессе производства используется не полностью, т.е. этот фактор является «недефицитным», то он имеет нулевую оценку ($y_i^* = 0$).

$$\textit{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* < b_i, \textit{ то } y_i^* = 0 \tag{4.9}$$

Проиллюстрируем вторую теорему двойственности на примере задачи о максимальном доходе.

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи: суточный объем производства краски 1-го вида – $x_1 = 10/3$ [т. краски/сутки]; суточный объем производства краски 2-го вида – $x_2 = 4/3$ [т. краски/сутки]; максимальный доход от продажи $f_{max} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки]

Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке x_1 и x_2 в систему ограничений (таблица 4.3.)

Таблица 4.3. Выполнение неравенств прямой задачи

Ограничение	Расчет	Вывод
$x_1 + 2x_2 \le 6$	$\frac{10}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = 6$	Первое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что А ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_1 \ne 0$).
$2x_1 + x_2 \le 8$	$2 \times \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = 8$	Второе ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что В ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_2 \ne 0$)
$-x_1 + x_2 \le 1$	$-\frac{10}{3} + \frac{4}{3} = -2 < 1$	Третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию 1-го. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_3 = 0$).
$x_2 \le 2$	$\frac{4}{3} < 2$	Четвёртое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, т.е. остается спрос на продукцию 2-го. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_4 = 0$).
$x_1 \ge 0$	$\frac{10}{3} > 0$	Первое ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_1 + 2y_2 = 3$,

$x_2 \geq 0$	$\frac{4}{3} > 0$	Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством $2y_1 + y_2 = 2$

Примечание: Аналогичные выводы о оценках дефицитности ресурса были сделаны в подразделе 2.4.

Согласно таблице 4.3 имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений

$$y_1 = 3 - 2y_2 \Rightarrow 2(3 - 2y_2) + y_2 = 6 - 3y_2 = 2$$

$$y_2 = 4/3 \text{ [т. ингр. В/сутки]}$$

Тогда $y_1 = 1/3$ [т. ингр. А/сутки].

Решение, найденное из первой теоремы двойственности равнозначно решению из второй теоремы.

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 = 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{4}{3} + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 12\frac{2}{3}$$

$$min\ g(\bar{y}) = 12\frac{2}{3} \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Таким образом, вторая теорема дает нахождение оптимального решения двойственной задачи, пользуясь условием обращения в равенство сопряженных неравенств в системах ограничения.

Между переменными прямой задачи и переменными двойственной существует определенная связь, которая очевидна, если рассматривать последнюю симплекс-таблицу прямой задачи (см. таблицу3.7). Переменные y_1 и y_2 принимают значения *f*-строки и им соответствуют значения x_3 и x_4. Следовательно, можно из последней таблицы прямой задачи найти решение двойственной, не проводя никаких вычислений пользуясь только соответствием переменных.

4.5. Третья теорема двойственности

Третью теорему двойственности иногда называют теоремой об оценках. Рассматривая ограничения ЗЛП, можно констатировать: изменение правых частей ограничений исходной задачи приводит к изменению максимального значения целевой функции Z_{max}.

Третья теорема двойственности. В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции $G_{max} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующему аргументу b_i т.е.

$$\frac{\partial G_{max}}{\partial b_i} = y_i^*, (i = \overline{1,m}) \qquad (4.10)$$

Из теоремы об оценках вытекает, что при малом изменении правой части i-го ограничения в системе ограничений ЗЛП максимальное значение целевой функции изменяется на величину [9]

$$\Delta G^i_{max} \approx y_i^* \times \Delta b_i \qquad (4.11)$$

В частности, при $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta G^i_{max} \approx y_i^*$.

Применительно к задаче оптимального использования ресурсов можно сказать, что двойственная оценка y_i^* i-го ресурса приближенно равна приращению оптимальной прибыли, возникающему за счет увеличения объема i-го ресурса на единицу.

Оценим чувствительность решения задачи о максимальном доходе к изменению запасов сырья и спроса на продукцию. Напомним, что оптимальное решение двойственной задачи равно:

$$\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = (\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0)$$

Предположим, что спрос увеличился на единицу.

$$\Delta G_{max_3} = y_3 \times \Delta b_3 = 0 \times 1 = 0$$

$$\Delta G_{max_4} = y_4 \times \Delta b_4 = 0 \times 1 = 0$$

Спрос на продукцию 1-го и 2-го вида используется не полностью, поэтому они имеют нулевые двойственные оценки. Это свидетельствует о его недефицитности.

Для двойственных оценок y_1 и y_2 имеем:

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2 = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$

Это означает, что если увеличить запасы ингредиента A на 1 [т./сутки], то данное решение приведет к увеличению значения целевой функции на $G_{max} + \Delta G_{max} = 12\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 13$ [тыс. руб./сутки]. Если, аналогично, увеличить запасы ингредиента B на 1 [т./сутки], то доход возрастет $G_{max} + \Delta G_{max} = 12\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 14$ [тыс. руб./сутки]. Таким образом, снова подтверждается, что запасы ингредиентов A и B полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными и сдерживают рост целевой функции.

Из теоремы также вытекает, что если изменится объем каждого ресурса на величину Δb_i $(i = \overline{1,m})$, то эти изменения приведут к суммарному изменению прибыли ΔG_{max}, которое может быть вычислено по формуле [9]:

$$\Delta G_{max} \approx \sum_{i=1}^{m} y_i^* \times \Delta b_i \qquad (4.12)$$

Эта формула имеет место лишь тогда, когда при изменении величин b_i значения переменных y_i^*в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными, поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов b_i, в которых оптимальный план двойственной задачи не меняется. Такие интервалы называют интервалами устойчивости двойственных оценок.

Нижнюю и верхнюю границы интервала $(b_i - \Delta b_i^{н}, b_i + \Delta b_i^{в})$ устойчивости двойственных оценок определяют по формулам [9]:

$$\Delta b_i^{н} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \forall d_{ji} \le 0, \\ min_j \left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\}, \text{для } d_{ji} > 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\Delta b_i^{в} = \begin{cases} \left|max_j \left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\}\right|, \text{для } d_{ji} < 0, \\ +\infty, \text{ если } \forall d_{ji} \ge 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

В формулах (4.13) и (4.14) d_{ji}– элементы обратной матрицы D^{-1} базиса оптимального плана, а j принимает значения индексов базисных переменных x_j^* оптимального плана.

Для удобства проведения расчета выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе:

- обратная матрица базиса оптимального плана;

$$D^{-1} = (y_2^*, y_1^*, y_5^*, y_6^*) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- индексы базисных переменных оптимального плана;

$$\overline{A_0^*} = (x_2^*, x_1^*, x_5^*, x_6^*) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

- свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи;

$$\overline{A_0} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можем воспользоваться формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

Ресурс 1 (Ингредиент А). Найдем нижнюю границу. Во втором столбце обратной матрицы три положительных элемента $(2/3, 1, 1/3)$, им соответствуют индексы базисных переменных оптимального плана $(10/3, 3, 2/3)$.

$$\Delta b_1^{н} = \begin{cases} min\{10/3 \times 3/2\} = 5 \\ min\{3/1\} = 3 \\ min\{2/3 \times 3/1\} = 2 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 5.

Найдем верхнюю границу. Во втором столбце единственное отрицательное значение $(-1/3)$, которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана $(4/3)$.

$$\Delta b_1^{в} = |max\{4/3 \times (-3/1)\}| = |-4| = 4$$

Таким образом, получаем $\Delta b_1 \in (-5; 4)$.

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_1 - \Delta b_1^{н}, b_1 + \Delta b_1^{в}) = (6 - 5; 6 + 4) = (1; 10) \text{ т. ингр. А/сутки.}$$

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным.

Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

Ресурс 2 (Ингредиент В). Рассматриваем первый столбец D^{-1}, в котором один положительный элемент $(2/3)$ и три отрицательных $(-1/3, -1, -1/2)$. Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – $4/3$; для отрицательных – $10/3, 3, 2/3$.

Тогда находим нижнюю границу.

$$\Delta b_2^{н} = min\{4/3 \times 3/2\} = 2$$

Найдем верхнюю границу.

$$\Delta b_2^{в} = \begin{cases} |max\{10/3 \times (-3/1)\}| = |-10| = 10 \\ |max\{3/(-1)\}| = |-3| = 3 \\ |max\{2/3 \times (-2/1)\}| = |-4/3| = 4/3 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 10.

Получаем $\Delta b_2 \in (-2; 10)$.

Тогда второй ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_2 - \Delta b_2^{н}, b_2 + \Delta b_2^{в}) = (8 - 2; 8 + 10) = (6; 18) \text{ т. ингр. В/сутки.}$$

Ресурс 3 (Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида). Рассматриваем третий столбец D^{-1}.

Нижняя граница: $\Delta b_3^н = min\{3/1\} = 3$, так как среди элементов третьего столбца одно положительное значение.

Верхняя граница: $\Delta b_3^в = +\infty$, так как среди элементов третьего столбца нет отрицательных значений.

Тогда, получаем $\Delta b_3 \in (-3; +\infty)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

$$(b_3 - \Delta b_3^н, b_3 + \Delta b_3^в) = (1 - 3; +\infty) = (-2; +\infty) \text{ т. краски/сутки}$$

Ресурс 4 (Ограничение по суточному объему производства краски 2-го вида). Рассматриваем четвертый столбец D^{-1}. В данном столбце все элементы равны 0, т.е. нет положительных и отрицательных элементов.

Тогда нижняя граница $\Delta b_4^н = -\infty$, а верхняя граница $\Delta b_4^в = +\infty$.

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы $y_1^* = 1/3$ и $y_2^* = 4/3$. Введем верхние границы $\Delta b_1^в$ и $\Delta b_2^в$ в формулу 4.11.

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1^в = \frac{1}{3} \times 4 = 1\frac{1}{3}$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2^в = \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}$$

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции G_{max} на величину (согласно формуле 4.12):

$$\Delta G_{max} = \Delta G_{max_1} + \Delta G_{max_2} = 1\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3} = 14\frac{2}{3}$$

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов

$$G_{max} \approx 12\frac{2}{3} + 14\frac{2}{3} = 27\frac{1}{3} \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Таким образом, двойственные оценки позволяют судить о чувствительности решения к изменениям.

4.6. Контрольные вопросы

1) Запишите математические модели пары двойственных ЗЛП.

2) Дайте экономическую интерпретацию пары двойственных задач.

3) Сформулируйте правила построения двойственной задачи к исходной.

4) Сформулируйте правила построения симметричных и несимметричных двойственных задач.

5) Сформулируйте первую теорему двойственности и дайте экономическую интерпретацию.

6) Сформулируйте и дайте экономическую интерпретацию второй теоремы двойственности.

7) Перечислите свойства двойственных оценок. В чем заключается их экономический смысл?

8) Понятие дефицитности ресурсов и использование двойственных оценок для их сравнения.

9) Понятие устойчивости двойственных оценок. Определение интервалов устойчивости.

Список литературы

1. Шатина А.В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебно-метод. пособие / А.В. Шатина. – М.: МИРЭА, 2016. – Электрон. опт. диск (ISO)
2. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2013. – 438 с.
3. Струченков В.И. Линейное и динамическое программирование [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению лабораторных работ / В. И. Струченков. – М.: МГТУ МИРЭА, 2013. – Электрон. опт. диск (ISO)
4. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях: Учеб. пособие для вузов / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – СПб.: Лань, 2012. – 447 с.
5. Гончаров В.А. Методы оптимизации: Доп. УМО в кач. учеб. пособия для вузов / В.А. Гончаров. – М.: Юрайт, 2013. – 191 с.
6. Панченко В.М. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. и практических работ для студ., обуч. по спец. 09.03.04 / В. М. Панченко, А. И. Комаров. – М.: МГТУ МИРЭА, 2014. – 32 с. – Электрон. опт. диск (ISO)
7. Соболь Б.В. Метолы оптимизации: практикум / Б.В. Соболь, Б.Ч. Месхи, Г.И. Каныгин. – Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.
8. Симплекс метод. Курсовой проект на C++/https://code-live.ru/post/simplex-method-cpp/
9. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации. [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – Электрон. дан. – М.: Физматлит, 2011. – 384 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2330.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Задания для практических работ

П.1. Графический метод

Задание. Решить графическим методом ЗЛП, указанную в таблице П.1.

Таблица П.1. Варианты заданий для графического метода

№	Условие задачи	№	Условие задачи
1	$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	2	$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$f(x) = -x_1 - 3x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	4	$f(x) = -2x_1 - x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ 3x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5	$f(x) = -3x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 0 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	6	$f(x) = 2x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 7x_1 + x_2 \le 34 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
7	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	8	$f(x) = -2x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9	$f(x) = x_1 - x_2 \to min/max$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	10	$f(x) = -2x_1 + 4x_2 \to min/max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
11	$f(x) = -3x_1 + 12x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 16 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	12	$f(x) = -x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 - 8x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
13	$f(x) = -x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	14	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

15	$f(x) = x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 25 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	16	$f(x) = x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
17	$f(x) = x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	18	$f(x) = x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 40 \\ -5x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
19	$f(x) = 5x_1 + 6x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 6x_1 + x_2 \le 34 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	20	$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 18 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
21	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	22	$f(x) = 3x_1 - 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
23	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 25 \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	24	$f(x) = 2x_1 - x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
25	$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 28 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 42 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	26	$f(x) = x_1 + 3x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 8x_2 \le 36 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
27	$f(x) = x_1 + 2x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	28	$f(x) = 2x_1 + x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$
29	$f(x) = -x_1 - x_2 \to min/max$ $\begin{cases} 2x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$	30	$f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to min/max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 10 \\ x_2 \ge 5 \\ -x_1 + 4x_2 \le 20 \\ x_{1,} x_2 \ge 0 \end{cases}$

П.2. Симплексный метод и двойственные задачи

Задание. Решить прямую ЗЛП с помощью симплексного метода и обратную с помощью теорем двойственности. Определить интервалы устойчивости.

Задача 1. Фабрика выпускает три вида тканей. Суточные ресурсы фабрики, следующие: 700 ед. производственного оборудования, 800 ед. сырья, 600 ед. электроэнергии, расход которых на единицу ткани представлен в таблице П.1.

Таблица П.1. Расход на единицу ткани.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена одного метра ткани I равна 8 ден.ед., ткани II – 7 ден.ед. и ткани III – 6 ден.ед. Сколько нужно произвести ткани каждого вида, чтобы прибыль от реализации была наибольшей?

Задача 2. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и В, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В таблице приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т. чая сорта А и В.

Таблица П.2. Нормы расхода ингредиентов.

Ингредиенты	Нормы расхода		Объем запасов (т.)
	А	В	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1 т. продукции, ден.ед.	320	290	

Требуется составить план производства чая сорта А и В с целью максимизации суммарной прибыли.

Задача 3. Фирма выпускает изделия четырех типов. При этом используется сырье двух видов, запасы которого соответственно 1200 и 1000 единиц. Нормы расхода сырья на изготовление каждого типа продукции, а также доход, полученный от выпуска единицы каждого типа продукции, заданы таблицей:

Таблица П.3. Нормы расхода сырья.

Сырье	Нормы расхода				Объем ресурсов
	I	II	III	IV	
1	4	2	1	4	1200
2	1	5	3	1	1000
Доход	15	5	3	20	

Составить план производства, обеспечивающий фирме наибольший суммарный доход.

Задача 4. Фирма специализируется на производстве шкафов. Она может производить три типа шкафов А, В и С, что требует различных затрат труда на каждой стадии производства (таблица П.4):

Таблица П.4. Затраты труда.

Производственный участок	Затраты труда, чел.час		
	А	В	С
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

В течении недели можно планировать работу на: лесопилке – на 360 чел.-час., сборочном цехе – 520 чел.-час., отделочном цехе – на 220 чел.-час. Прибыль от каждого шкафа типов А, В и С составляет соответственно 9, 11 и 15 ден.ед. Требуется составить оптимальный план производства шкафов типов А, В и С с целью максимизации суммарной прибыли.

Задача 5. Для изготовления двух видов изделий А и В завод использует в качестве сырья алюминий и медь. На изготовлении изделий заняты токарные и фрезерные станки. Исходные данные задачи приведены в таблице П.4.

Таблица П.5. Исходные данные задачи.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		А	В
Алюминий, кг.	570	10	70
Медь, кг.	420	20	50
Токарные станки, станко-час	5000	300	400
Фрезерные станки, станко-час	3400	200	100
Прибыль на 1 изделие, ден. ед.		3	5

Определить количество изделий А, В, которые необходимо изготовить для достижения максимальной прибыли.

Задача 6. Фирма производит 4 типа Internet-маршрутизаторов: Backbone, Subnet, Local, T2000. В таблице П.6 приведены затраты труда на производство, стоимость производства, спрос и прибыль для каждого маршрутизатора.

Таблица П.6. Исходные данные задачи.

Вид маршрутизатора	Число часов труда / ед.	Стоимость, у.е./ед.	Максимальный ежедневный спрос	Прибыль с продажи единицы
Backbone	30	1000	100	70
Subnet	20	700	80	80
Local	20	500	100	60
T2000	35	1100	60	80

Фирма располагает ежедневным бюджетом в 180000 у.е. и 5000 часами человеко-труда. Необходимо сформулировать такой производственный план, чтобы обеспечить максимальную ежедневную прибыль.

Задача 7. Фирма поставляет компьютеры под ключ четырех базовых комплектаций: «домашний», «игровой», «офисный» и «экстрим». Известны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров. Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции (таблица П.6).

Таблица П.7. Исходные данные задачи.

Компьютер	Прибыль за модель у.е.	Максимальный спрос на товар	Требуется часов на подключение	Требуется часов на сборку	Требуется часов на проверку
Домашний	33	87	0,9	1,2	1,3
Игровой	39	67	1,1	1,5	1,5
Офисный	36	110	0,7	0,9	0,9
Экстрим	43	45	1,3	1,1	1,2
Доступно чел.-час. на каждую операцию			70	55	35

Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

Задача 8. Для изготовления четырех видов продукции A, B, C и D используются три вида ресурсов I, II, III. Дальнейшее условие задачи в таблице П.8.

Таблица П.8. Исходные данные задачи.

Ресурсы	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.				Запасы ресурсов, ед.
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	7,5	3	6	12	

Требуется определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Задача 9. Детали двух видов A и B обрабатываются последовательно на трех станках. Известны время обработки одной детали каждого вид каждым станком и суммарное время работы станков в планируемый период, а также прибыль, получаемая от реализации одной детали каждого вида. Эти данные приведены в таблице П.9.

Таблица П.9. Исходные данные задачи.

Станки	Время работы станков	Время обработки одной детали	
		A	B
I	16	1	2
II	28	2	3
III	30	3	3
Прибыль, ден. ед.		4	2

Составить план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача 10. Для изготовления двух видов изделий A и B завод имеет четыре вида машин. Каждое изделие последовательно обрабатывается этими машинами В таблице П.10 указано время, необходимое для обработки каждого изделия и время работы каждой машины.

Таблица П.10. Исходные данные задачи.

Виды изделий	Виды машин			
	I	II	III	IV
A	1	0,5	0	0,8
B	1	1	1	1,5
Время работы машин, ед	16	12	12	16

От реализации одного изделия типа A завод получает прибыль 20 ден.ед., одного изделия типа B – 30 ден. ед. Найти план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача 11. Предприятие может работать по двум технологическим процессам, причем за единицу времени по I технологии выпускает 260 изделий, по II – 300 изделий. В таблице П.11 указаны затраты каждого ресурса в единицу времени.

Таблица П.11. Затраты ресурсов.

Ресурсы	Технологический процесс		Объем ресурса
	I	II	
Сырье	16	12	1200
Электроэнергия	0,2	0,4	30
Накладные расходы	6	5	600
Зарплата, ден. ед.	3	4	300

Найти программу максимального выпуска продукции из имеющихся ресурсов.

Задача 12. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м^3 досок I типа и 1000 м^3 II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 300 чел.-ч. В таблице П.12 приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 единицы изделия и прибыль на 1 единицу изделия:

Таблица П.12. Нормативы затрат ресурсов.

Ресурсы	Затраты на 1 единицу изделия			
	Столы	Стулья	Бюро	Шкафы
Доски I типа, $м^3$	5	1	9	12
Доски II типа, $м^3$	2	3	4	1
Трудовые ресурсы, чел.-час.	3	2	5	10
Прибыль, р./шт	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если отношение количества столов к количеству стульев равно 1:6.

Задача 13. В кондитерском цехе выпускают печенье двух сортов. В таблице П.13 указан расход продуктов для каждого сорта и количество имеющихся продуктов.

Таблица П.13. Исходные данные задачи.

Сорт	Масло	Яйца	Сахар	Молоко	Цена 1 кг, ден. ед.
1-й сорт	0,2	0,75	0,15	0,15	1,4
2-й сорт	0,1	0,20	0,20	0,25	0,9
Запасы продуктов	100	150	100	150	

Какое общее количество печенья каждого сорта надо выпекать, чтобы общая стоимость была наибольшей?

Задача 14. Для изготовления двух видов тары (бочек и ящиков) употребляется два вида древесины. Расход древесины каждого вида на каждое изделие, объем ресурсов и прибыль на единицу изделия заданы в таблице П. 14.

Таблица П.14. Исходные данные задачи.

Изделия	Расход древесины в $м^2$		Прибыль на единицу продукции, ден. ед.
	I	II	
Бочки	0,15	0,2	1,5
Ящики	0,2	0,1	1,2
Объем ресурсов, $м^2$	60	40	

Определить сколько ящиков и бочек должен изготовить завод, чтобы прибыль была максимальной.

Задача 15. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью.

Таблица П.15. Исходные данные задачи.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Производительность и норма труда		
		1	2	3
Станки I вида	30	20	10	25
Станки II вида	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена		15	15	20

Для изготовления ткани используется пряжа и красители. В таблице П.15. указаны мощности станков (тыс. станко-час), ресурсы пряжи и красителей (тыс. кг), производительность станков по каждому виду ткани (м/ч), нормы расхода пряжи и краски (кг на 1000 м) и цена (у. е.) 1 м ткани. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 м ткани составляет соответственно 3, 5 и 15 у.е.

Задача 16. Предприятие располагает запасами сырья, рабочей силы, оборудованием для производства двух видов товара. Затраты ресурсов на единицу каждого вида товаров, прибыль, запасы ресурсов даны в таблице П.16.

Таблица П.16. Исходные данные задачи.

Виды ресурса	Вид товара		Объем ресурса
	I	II	
Сырье, кг	6	5	50
Рабочая сила, час	2	4	128
Оборудование	4	16	150
Прибыль, ден. ед.	10	30	

Составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Задача 17. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. В таблице П.17 представлены три сорта угля A, B и C, которые доступны по следующим ценам:

Таблица П.17. Исходные данные задачи.

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси золы, %	Цена, ден. ед.
A	0,06	2	30
B	0,04	4	30
C	0,02	3	45

Как их смешивать, чтобы получить максимальную цену и удовлетворить ограничениям на содержание примесей?

Задача 18. Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок (I и II). Для производства кирпича применяется глина трех видов (А, В, С). По месячному плану завод должен выпустить 10 условных единиц кирпича марки I и 15 условных единиц кирпича марки II.

Таблица П.18. Исходные данные задачи.

Марка	Количество глины, необходимой для производства 1 условной единицы кирпича		
	А	В	С
I	1	0	1
II	0	2	2
Запас глины	15	36	47

В таблице П.18 указаны расход различных видов глины для производства одной условной единицы кирпича каждой марки и месячный запас глины.

Сколько условных единиц кирпича различных марок должен выпустить завод сверх плана, чтобы обеспечить наибольшую прибыль, если известно, что от реализации 1 условной единицы кирпича марки I завод получает прибыль, равную 4 у.е., а от реализации кирпича марки II – 7 у.е.?

Задача 19. Фабрика может производить тарелки и кружки. На производство тарелки идет 5 единиц материала, на производство кружки – 20 единиц (керамики). Тарелка требует 10 человеко-часа, кружка – 15. На производство тарелки тратится 0,5 кВатт электроэнергии, кружки – 0,3. Расходы при производстве тарелки равны 1 рубль, а кружки – 2 рубля. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов, 25 кВатт энергии и объем накладных расходов равен 300 рублей. Эти данные представлены в таблице П.19.

Таблица П.19. Исходные данные задачи.

Ресурс	Товар		Объем ресурса
	Тарелки	Кружки	
Материал	5	20	400
Человеко-часы	10	15	450
Электроэнергия	0,5	0,3	25
Расходы	1	2	300

Прибыль при производстве тарелки – 20 рублей, при производстве кружки – 50 рублей. Сколько надо сделать тарелок и кружек, чтобы получить максимальную прибыль?

Задача 20. В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1, Д-2, Д-3, Д-4. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость приведены в таблице П.20:

Таблица П.20. Исходные данные задачи.

Тип квартир	Тип домов			
	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Однокомнатные	10	18	20	15
Двухкомнатные смежные	40	-	20	-
Двухкомнатные несмежные	-	20	-	60
Трехкомнатные	60	90	10	-
Четырехкомнатные	20	10	-	5
Плановая себестоимость, у.е.	830	835	360	450

Годовой план ввода жилой площади составляет соответственно 800, 1000, 900, 2000 и 700 квартир указанных типов. Сформулировать и решить задачу перевыполнения плана.

Задача 21. Предприятие производит 3 вида продукции: $A_1$1, A2, A3, используя сырьё двух типов. Известны затраты сырья каждого типа на единицу продукции, запасы сырья на планируемый период, а также прибыль от единицы продукции каждого вида (таблица П.21).

Таблица П.21. Исходные данные задачи.

Сырье	Затраты сырья на единицу продукции			Запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
I	3,5	7	4,2	1400
II	4	5	8	2000
Прибыль от ед. прод.	1	3	3	

Сколько изделий каждого вида необходимо произвести, чтобы получить максимум прибыли?

Задача 22. Производитель элементов центрального отопления изготовляет радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготовляются радиаторы. Условия задачи представлены в таблице П.22.

Таблица П.22. Исходные данные задачи.

Модель радиатора	A	B	C	D
Необходимое количество рабочей силы, чел.-час.	0,5	1,5	2	1,5
Необходимое количество стального листа, $м^2$	4	2	6	8
Прибыль от продажи одного радиатора, у.е.	5	5	12,5	10

Решите эту задачу с максимизацией прибыли.

Задача 23. Небольшая фирма производит два типа подшипников A и B, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно на токарном – I, шлифовальном – II и сверлильном – III. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице П.23.

Таблица П.23. Исходные данные задачи.

Тип подшипника	Время обработки, ч			
	I	II	III	Прибыль от продажи одного подшипника, у.е.
A	0,01	0,02	0,04	80
B	0,02	0,01	0,01	125
Полное возможное время работы в неделю, ч	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих ее прибыль.

Задача 24. Для производства компотов двух видов используются вишни, груши и алыча. Наличие количества фруктов, расход их (в кг) для изготовления одной банки компота заданы таблицей П.24.

Таблица П.24. Количество фруктов и их расход.

Виды компота	Фрукты			Цена одной банки, ден. ед.
	Алыча	Груши	Вишни	
I	6	42	-	100
II	18	-	45	80
Запасы, кг.	4000	5200	7600	

Составить план производства, при котором сумма от реализации компотов была бы наибольшей.

Задача 25. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цена каждого продукта приведены в таблице П.25.

Таблица П.25. Исходные данные задачи.

Типы сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена изделия, ден. ед.	10	14	12	

Определить, сколько изделий каждого вида нужно произвести, чтобы стоимость изготовления продукции была максимальной.

Задача 26. Три вида деталей можно изготовить на станках разных типов без переналадки. Мощность станков, ограничение на рабочее время и себестоимость одной детали каждого вида указаны в таблице П.26.

Таблица П.26. Исходные данные задачи.

Вид деталей	Производительность станков, дет. в час		Себестоимость деталей, ден. ед.
	1-й тип	2-й тип	
1	20	45	8
2	30	30	6
3	50	60	0,5

Фонд рабочего времени для станков составляет соответственно 12 и 8 часов. Составить оптимальный план производства деталей, при котором доход от реализации всей продукции был максимальным.

Задача 27. Изготовление продукции двух видов I и II требует использование четырех видов сырья A, B. C и D. Запасы сырья ограничены. В таблице П.27 указаны норма расхода каждого вида сырья на изготовление единицы продукции, запасы сырья и доход, получаемый от реализации.

Таблица П.27. Исходные данные задачи.

Вида сырья	Нормы расхода сырья, ед.		Запасы сырья, ед.
	I	II	
A	2	3	1000
B	2	1	1300
C	0	3	1500
D	3	0	1800
Доход, ден. ед.	7	5	

Составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальный доход от выпускаемой продукции.

Задача 28. Для производства двух видов изделия используется 3 вида ресурсов. Объем ресурсов ограничен. В таблице П.28 даны объемы ресурсов, нормы расходов каждого из ресурсов на одно изделие каждого вида и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица П.28. Исходные данные задачи.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода	
		I	II
Сталь, т	500	10	70
Цветные металлы, кг	510	20	50
Станки, станко-час	3100	200	100
Прибыль, ден. ед.		5	5

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

Задача 29. Фирма производит два продукта A и B, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II, III. Время обработки в часах для каждого из изделий A и B приведено в таблице П.29.

Таблица П.29. Время обработки.

Продукт	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы машин I, II, III соответственно 40, 36 и 36 часов в неделю. Прибыль от изделий A и B составляет 3 и 5 ден. ед. Определить недельные нормы выпуска изделий A и B, максимизирующие прибыль

Задача 30. Предприятие выпускает 3 вида микросхем: М1, М2, М3. Для производства используются одни и те же ресурсы: кремний (S), алюминий (Al), золото (Au), пластик (P), которые берутся в разных количествах. Расход ресурсов на единицу продукции каждого вида приведен в таблице П.30. Максимальные суточные запасы ресурсов приведены в таблице П.31. Изучение рынка сбыта показало, что разница суточного спроса между отдельно взятыми видами микросхем (Продукт1 – Продукт2) никогда не превышает величин, приведенных в таблице П.32. Цены за микросхему каждого вида приведены в таблице П.33.

Таблица П.30. Расход ресурсов на единицу продукции.

Ресурс	Продукт		
	М1	М2	М3
S	3	4	8
Al	1	2	3
Au	2	1	4
P	3	2	0

Таблица П.31. Максимальные суточные запасы ресурсов.

Ресурс	Максимальный запас
S	100
Al	120
Au	90
P	70

Таблица П.32. Разница суточного спроса между отдельно взятыми видами микросхем

Продукт1	Продукт2		
	М1	М2	М3
М1	0	-1	-3
М2	1	0	-2
М3	3	2	0

Таблица П.33. Цены за микросхему каждого вида

Продукт	М1	М2	М3
Цена	1,6	1,7	1,9

Какое количество микросхем каждого вида должно производить предприятие, чтобы суммарный суточных доход от реализации был максимальным? Чему равен максимальный суточный доход?