

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель: Железняк Лилия Михайловна

zheleznyak@mirea.ru

laboratory.work.2017@gmail.com

МАИ –Метод анализ иерархии

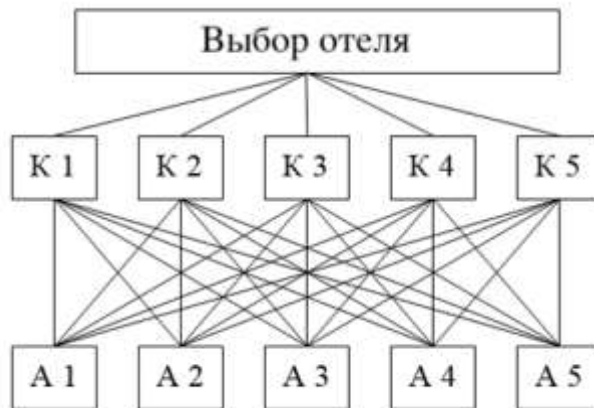
- МАИ –является замкнутой логической конструкцией.
- МАИ – включает процедуру синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.
- Имеет 3 основных этапа:
 - 1-й этап – представление систем критериев (целей) в виде иерархической структуры.
 - 2-й этап – оценки приоритетов (весов) критериев с учетом их места в иерархии относительности и важности.
 - 3-й этап – определение лучшей альтернативы по значениям ее характеристик важности критериев.

Иерархия – некоторая абстракция структуры системы, предназначенная для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействий на систему в целом.

Уровень 1.
Цель.

Уровень 2.
Критерии.

Уровень 3
Альтернативы



Цель: выбрать лучший отель в г. Москва.

Критерии:

- К 1 – цена дня проживания;
- К 2 – количество звезд;
- К 3 – рейтинг по отзывам пользователей;
- К 4 – удаленность от ближайшей станции метро;
- К 5 – удаленность от центра города.

Альтернативы:

- А 1 - Metallurg;
- А 2 - Измайлово;
- А 3 - Версаль;
- А 4 – Райкин Плаза;
- А 5 – Q-block.

➤ Установка приоритетов критериев

После иерархического представления задачи установлены приоритеты критериев и оценена каждая из альтернатив по критериям, определена наиболее важная из них. В методе анализа иерархий элементы сравниваются попарно по отношению к их влиянию на общую для них характеристику. Парные сравнения приводят к записи характеристик сравнений в виде квадратной таблицы чисел, которая называется матрицей. Для облегчения работы введена шкала относительной важности.

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснение
1	Равная важность	Равный вклад двух критериев в цель.
3	Слабое превосходство	Дают легкое превосходство одной альтернативы над другой
5	Умеренное превосходство	Опыт и суждения дают умеренное превосходство
7	Сильное превосходство	Одному из критериев дается настолько сильное предпочтение.
9	Абсолютное превосходство	Очевидность превосходства одного критерия над другим
2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяется в компромиссных случаях

Шкала содержит соответствующие обратные значения.

Синтез приоритетов для цели и критерий

После построения иерархии и определения величин парных субъективных суждений следует этап, на котором иерархическая декомпозиция и относительные суждения объединяются для получения осмысленного решения многокритериальной задачи принятия решений. Из групп парных сравнений формируется набор локальных критериев, которые выражают относительное влияние элементов на элемент, расположенный на уровне выше. Составлена обратная симметричная матрица для парного сравнения критериев.

При сравнении элемента с самим собой имеем равную значимость $=1$.

Таблица 1 - Матрица попарного сравнения критерий

Цель	К1	К2	К3	К4	К5	V_i	W_{2i}
К1	1	7	1/3	1	3	1.476	0.211
К2	1/7	1	1/7	1/7	1/5	0.226	0.032
К3	3	7	1	3	5	3.160	0.453
К4	1	7	1/3	1	3	1.476	0.211
К5	1/3	5	1/5	1/3	1	0.644	0.092
$\sum V_i$						6.98	

1. Для определения относительной ценности каждого элемента необходимо найти геометрическое среднее V_1 и с этой целью перемножить n элементов каждой строки и из полученного результата извлечь корни n -й степени (размерность матрицы $n=5$).

$$V_1 = (1 \times 7 \times 1/3 \times 1 \times 3)^{1/5} = 1.476;$$

$$V_2 = (1/7 \times 1 \times 1/7 \times 1/7 \times 1/5)^{1/5} = 0.226;$$

$$V_3 = (3 \times 7 \times 1 \times 3 \times 5)^{1/5} = 3.160;$$

$$V_4 = (1 \times 7 \times 1/3 \times 1 \times 3)^{1/5} = 1.476;$$

$$V_5 = (1/3 \times 5 \times 1/5 \times 1/3 \times 1)^{1/5} = 0.644.$$

2. Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_i$.

$$\sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 1.476 + 0.226 + 3.160 + 1.476 + 0.644 = 6.982.$$

3. Найдена важность приоритетов W_{2i} , для этого каждое из чисел V_i разделено на $\sum V_i$.

$$W_{21} = 1.476 / 6.982 = 0.211;$$

$$W_{22} = 0.226 / 6.982 = 0.032;$$

$$W_{23} = 3.160 / 6.982 = 0.453;$$

$$W_{24} = 1.476 / 6.982 = 0.211;$$

$$W_{25} = 0.644 / 6.982 = 0.092.$$

4. В результате получен вектор приоритетов:

$W_{2i} = (0.211; 0.032; 0.453; 0.211; 0.092)$, где индекс 2 означает, что вектор приоритетов относится ко второму уровню иерархии.

Синтез приоритетов для критерий

Составим матрицу для парного сравнения альтернатив к критерию.

K1	A1	A2	A3	A4	A5	V _{K1Y}	W _{3K1Y}
A1	1	3	3	5	1/3	1.719	0.246
A2	1/3	1	2	3	1/5	0.833	0.119
A3	1/3	1/2	1	3	1/5	0.631	0.09
A4	1/5	1/3	1/3	1	1/7	0.316	0.045
A5	3	5	5	7	1	3.500	0.5
ΣV _{K1Y}						6.998	

В результате получаем вектор приоритетов:
W_{3K1Y} = (0.246; 0.119; 0.09; 0.045; 0.5), где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K1.

№	Варианты решений	Критерии				
		Цена дня проживания (руб.) (-)	Количество звезд (+)	Рейтинг по отзывам пользователей (+)	Удаленность от ближайшей станции метро (км) (-)	Удаленность от центра города (км) (-)
1	Металлург	1960	3	8.6	0.1	3.8
2	Измайлово	2600	3	8.1	0.4	9.1
3	Версаль	2400	3	8.3	0.7	3.9
4	Райкин_Плаза	3500	4	9.5	0.3	4.8
5	Q-block	1250	3	9.3	0.9	3.1

K3	A1	A2	A3	A4	A5	V _{K3Y}	W _{3K3Y}
A1	1	3	2	1/5	1/4	0.786	м
A2	1/3	1	1/2	1/6	1/5	0.354	0.051
A3	1/2	2	1	1/5	1/5	0.525	0.075
A4	5	6	5	1	2	3.129	0.448
A5	4	5	5	1/2	1	2.187	0.313
V _{K35}						6.98	

W_{3K3Y} = (0.113; 0.051; 0.075; 0.448; 0.313), где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K3.

K2	A1	A2	A3	A4	A5	V _{K2Y}	W _{3K2Y}
A1	1	1	1	1/5	1	0.725	0.111
A2	1	1	1	1/5	1	0.725	0.111
A3	1	1	1	1/5	1	0.725	0.111
A4	5	5	5	1	5	3.624	0.556
A5	1	1	1	1/5	1	0.725	0.111
ΣV _{K2Y}						6.52	

W_{3K2Y} = (0.111; 0.111; 0.111; 0.556; 0.111), где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K2.

K4	A1	A2	A3	A4	A5	V _{K4Y}	W _{3K4Y}
A1	1	3	5	3	5	2.954	0.453
A2	1/3	1	3	1/2	4	1.149	0.176
A3	1/5	1/3	1	1/3	2	0.536	0.082
A4	1/3	2	3	1	4	1.516	0.233
A5	1/5	1/4	1/2	1/4	1	0.362	0.056
ΣV _{K4Y}						6.52	

W_{3K4Y} = (0.453; 0.176; 0.082; 0.233; 0.056), где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K4.

K5	A1	A2	A3	A4	A5	V _{K5Y}	W _{3K5Y}
A1	1	7	2	3	1/3	1.7	0.246
A2	1/7	1	1/7	1/5	1/7	0.226	0.033
A3	1/2	7	1	3	1/3	1.285	0.186
A4	1/3	5	1/3	1	1/4	0.674	0.098
A5	3	7	3	4	1	3.022	0.438
ΣV _{K5Y}						6.901	

W_{3K5Y} = (0.246; 0.033; 0.186; 0.098; 0.438), где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K5.

Согласованность локальных приоритетов

Любая матрица суждений в общем случае не согласована, так как суждения отражают субъективные мнения ЛПР, а сравнение элементов, которые имеют количественные эквиваленты, может быть несогласованным из-за присутствия погрешности при проведении измерений. Совершенной согласованности парных сравнений даже в идеальном случае на практике достичь трудно. Нужен способ оценки степени согласованности при решении конкретной задачи.

Метод анализа иерархий дает возможность провести такую оценку.

Вместе с матрицей парных сравнений есть мера оценки степени отклонения от согласованности. Когда такие отклонения превышают установленные пределы тем, кто проводит решение задачи, необходимо их пересмотреть.

Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного индекса согласованности СИ называется отношением согласованности ОС.

$$ОС = ИС/СИ = 0.0557 / 1,12 = 0,05.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица «Выбор лучшего отеля» согласована.

$$ИС = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$$

Максимальное среднее значение

$$\lambda_{\max} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \dots P_n$$

Вектор

$$P_n = S_n \times W_{2n},$$

где W_{2n} – нормализованный вектор приоритетов, S_n – сумма суждений каждого столбца.

Сумма оценок

$$S_j = S_{1j} + S_{2j} + \dots + S_{nj}$$

Согласованность локальных приоритетов

В нашей задаче размерность матрицы $n=5$, тогда среднее значение индекса случайной согласованности $СИ = 1,12$.
 Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы «Выбор лучшего отеля».

Таблица – Матрица «Выбор лучшего отеля».

Цель	К 1	К 2	К 3	К 4	К 5	W_{2i}
К 1	1	7	1/3	1	3	0.211
К 2	1/7	1	1/7	1/7	1/5	0.032
К 3	3	7	1	3	5	0.453
К 4	1	7	1/3	1	3	0.211
К 5	1/3	5	1/5	1/3	1	0.092

1. Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_1 = 1 + 1/7 + 3 + 1 + 1/3 = 5.476;$$

$$S_2 = 7 + 1 + 7 + 7 + 5 = 27;$$

$$S_3 = 1/3 + 1/7 + 1 + 1/3 + 1/5 = 2.01;$$

$$S_4 = 1 + 1/7 + 3 + 1 + 1/3 = 5.48;$$

$$S_5 = 3 + 1/5 + 5 + 3 + 1 = 12.2.$$

2. Полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов, т.е. сумму суждений первого столбца на первую компоненту, сумму суждений второго столбца - на вторую и т.д.

$$P_1 = S_1 \times W_{21} = 5.476 \times 0.211 = 1.158;$$

$$P_2 = S_2 \times W_{22} = 27 \times 0.032 = 0.872;$$

$$P_3 = S_3 \times W_{23} = 2.01 \times 0.453 = 0.91;$$

$$P_4 = S_4 \times W_{24} = 5.48 \times 0.211 = 1.158;$$

$$P_5 = S_5 \times W_{25} = 12.2 \times 0.092 = 1.126.$$

3. Сумма чисел P_j отражает пропорциональность предпочтений, чем ближе эта величина к n (числу объектов и видов действия в матрице парных сравнений), тем более согласованы суждения.

$$\lambda_{\max} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 5.223.$$

4. Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$ИС = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1) = (5.223 - 5)/(5 - 1) = 0.0557.$$

5. Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного индекса согласованности СИ называется отношением согласованности ОС.

$$ОС = ИС/СИ = 0.0557 / 1,12 = 0,05.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица «Выбор лучшего отеля» согласована.

Синтез альтернатив

Векторы приоритетов и отношения согласованности определяются для всех матриц суждений, начиная со второго уровня.

Для определения приоритетов альтернатив локальные приоритеты умножены на приоритет соответствующего критерия на высшем уровне и найдены суммы по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент.

$$W_{2i} = (0.211; 0.032; 0.453; 0.211; 0.092);$$

$$W_{3K1Y} = (0.246; 0.119; 0.09; 0.045; 0.5);$$

$$W_{3K2Y} = (0.111; 0.111; 0.111; 0.556; 0.111);$$

$$W_{3K3Y} = (0.113; 0.051; 0.075; 0.448; 0.313);$$

$$W_{3K4Y} = (0.453; 0.176; 0.082; 0.233; 0.056);$$

$$W_{3K5Y} = (0.246; 0.033; 0.186; 0.097; 0.438).$$

$$W_1 = W_{21} \times W_{3K11} + W_{22} \times W_{3K21} + W_{23} \times W_{3K31} + W_{24} \times W_{3K41} + W_{25} \times W_{3K51} = 0.152.$$

$$W_2 = W_{21} \times W_{3K12} + W_{22} \times W_{3K22} + W_{23} \times W_{3K32} + W_{24} \times W_{3K42} + W_{25} \times W_{3K52} = 0.205.$$

$$W_3 = W_{21} \times W_{3K13} + W_{22} \times W_{3K23} + W_{23} \times W_{3K33} + W_{24} \times W_{3K43} + W_{25} \times W_{3K53} = 0.183.$$

$$W_4 = W_{21} \times W_{3K14} + W_{22} \times W_{3K24} + W_{23} \times W_{3K34} + W_{24} \times W_{3K44} + W_{25} \times W_{3K54} = 0.193.$$

$$W_5 = W_{21} \times W_{3K15} + W_{22} \times W_{3K25} + W_{23} \times W_{3K35} + W_{24} \times W_{3K45} + W_{25} \times W_{3K55} = 0.198$$

Таким образом, приоритеты альтернатив равны:

альтернатива А1 (Металлург) - W_1 приоритет равен 0.152;

альтернатива А2 (Измайлово)- W_2 приоритет равен 0.205;

альтернатива А3 (Версаль) - W_3 приоритет равен 0.183;

альтернатива А4 (Райкин Плаза) – W_4 приоритет равен 0.193;

альтернатива А5 (Q-block) - W_5 приоритет равен 0.198.