

ЛЕКЦИЯ 1. Введение. Парето-оптимальность.

Введение в теорию принятия решений.

Управление основывается на определенных решениях, которые необходимы для достижения цели. Важнейшим признаком таких решений является его непосредственная направленность их на организацию коллективной деятельности. Такие решения принято называть управленческими решениями.

Управленческое решение – важнейший вид управленческого труда, а также совокупность взаимосвязанных, целенаправленных и логически последовательных управленческих действий, которые обеспечивают реализацию управленческих задач;

Термин «управленческое решение» употребляется в нескольких значениях:

- обдуманное намерение сделать что-либо, предполагающее предварительное осознание целей и средств действия;
- процесс выработки и принятия наилучшего варианта (альтернативы) для решения возникшей проблемы или задачи;
- фиксированный управленческий акт;
- волевой акт руководителя организации по выбору варианта деятельности ее персонала при достижении поставленной цели.

Субъектом управленческого решения является лицо, принимающее решение (ЛПР), которое наделено полномочиями и несет ответственность за реализацию управленческого решения. ЛПР может быть представлено как одним человеком, так и группой людей (коллективом). Соответственно относительно признака *численности ЛПР* выделяют следующие виды управленческих решений:

- Индивидуальные – решения, принимаемые единолично. Ярким примером этой группы является «соломоново решение», т.е. быстрое и одновременно справедливое, мудрое решение принятое одним человеком.
- Коллективные – решения, принимаемые группой людей. Даже при монархическом управлении люди стремятся к принятию коллективных решений. Пример, британский эпос, круглый стол при дворе короля Артура в Камелоте. При этом оговариваются определенные условия – общее согласие (консенсус), простое большинство и т.д.

Решения могут быть разделены *по характеру процесса принятия решений*:

- Рациональные решения – определяются аналитическим стилем мышления, основаны на суждениях, логических выводах имеющих

определенную последовательность взаимосвязанных шагов и не зависит от опыта, накопленного в прошлом.

- Адаптационные решения – приниматься с учетом накопленного опыта в прошлом, т.е. решения здравого смысла.
- Интуитивные решения – мысленные процессы не задействуются, основываются на ощущении, что выбор правилен.

Таким образом, принятие решений не всегда продиктовано трезвым рассудком, но зачастую инстинктами, эмоциями или тем, что принято называть интуицией (выводами на недостаточных основаниях).

В 2002 году Нобелевскую премию в области экономики получил психолог Дэниэл Канеман, который пришел к интересному выводу: человеческими поступками (следовательно, экономическими тенденциями, а, следовательно – и всей Историей человечества) руководит не только и не столько разум людей, сколько их глупость, так как великое множество поступков, совершаемых людьми, иррациональны. Мысль конечно не нова но Канеман экспериментально доказал, что нелогичность поведения людей закономерна и показал, что масштабы ее неправдоподобно велики. При этом, когда люди в жизни принимают интуитивные решения, то, если угадывают, – запоминают их и ставят себе в заслугу, а если ошибаются, то валят на обстоятельства.

Пример. Абстрагируемся. Сложим лист бумаги 42 раза (хотя его больше 7 раз сложить нельзя). Толщина среднего листа бумаги составляет 1/10 миллиметра (0,0001 метра).

Вопрос: Какова будет возможная длина (толщина) материала? Что это будет сантиметры, метры, километры? Примерно сколько?

Если даже люди знают формулу экспоненциального роста и могут сделать простейший расчет, но в большинстве случаев начинают с интуитивных решений, т.е. с угадывания.

Экспоненциальный рост — возрастание величины, когда скорость роста пропорциональна значению самой величины, имеет вид:

$$f(x) = ab^x$$

где ab – положительные константы.

В нашем случае $x = 0,0001 * 2^{42} = 439\,804\,651,11 \text{ м} \sim 439\,804,6 \text{ км}$

Ответ: 42 складывания доведут Вас до Луны – 384 400 км

Объектом управленческого решения могут быть явления и процессы определенной предметной области, на которые ЛПР может влиять непосредственно с помощью тех или иных управляющих воздействий. Таким образом, объект разделяет управленческое решение *по содержанию*:

- Экономическое содержание решений заключается в максимизации прибыли и минимизации затрат, а для индивидуума – материальная заинтересованность.

- Социальное содержание решений рассматривается как результат достижения социальных целей повышающих качество трудовой деятельности, развитие системы участия в управлении при разрешении социальных проблем.

- Организационное содержание решений – это результат достижения организационных целей за счет меньших усилий при выполнении определённой деятельности, меньшего числа работников и меньшего времени.

- Экологическое содержание решений – результатом является производство экологически чистой продукции, благоприятные для человека условия труда, экологически безопасное производство.

- Правовое содержание решений заключается в соблюдении правовых норм при подготовке, принятии и реализации управленческих решений. Придания ему формы нормативного или распорядительного акта для работы в правовом поле.

- Технологическое содержание решений результатом достижения является повышение технического и технологического уровня производства, внедрение современных приемов творческого труда и увеличение конкурентоспособности продукции.

- Педагогическое содержание решений носит воспитательный и обучающий характер, является общественно значимым благом и осуществляется в интересах, как организации, так и отдельной личности.

Наверное, можно найти еще множество различных содержаний. Апогеем будет политическое содержание решений, которое влияет на все приведенные ПрО.

Зафиксированная классификация по содержанию позволяет определить *сущность задач управления* в различных предметных областях (ПрО), которые сводятся к:

- Оптимальному решению – это его свойство быть наилучшим в соответствии с критерием (системой критериев) оптимальности.

- Эффективному решению – это ресурсная результативность, полученная по итогам реализации управленческих решений.

- Результативному решению – это то, которое минимизирует либо максимизирует ряд причин по принятию управленческого решения.

Упрощение реальности, ошибочное восприятие окружающей среды и недооценка ситуации приводит к нерезультативным решениям.

Поэтому целесообразно группировать решения *по достоверности и полноте предоставляемой информации* использованной для принятия решений:

- Детерминированные решения – решения, принимаемые в условиях определенности, применяются тогда, когда есть исчерпывающая информация о ситуации. Такие решения полностью программируемы. Программирование можно считать важным вспомогательным средством в принятии эффективных решений. Определив, каким должно быть решение, руководство снижает вероятность ошибки и программирует решения под ситуации, повторяющиеся с определенной регулярностью.

- Вероятностные решения – решения, принимаемые в условиях риска, применяются с осознанием того, что имеющейся информации недостаточно или она может быть недостоверной. Как правило, можно предвидеть все варианты последствий реализации такого решения. Эти решения частично программируемы.

- Решения, принимаемые в условиях неопределенности, когда невозможно оценить вероятность потенциальных результатов, информации о проблемной ситуации явно недостаточно для принятия правильного решения. Эти решения непрограммируемые и принимаются по новым, сложным и творческим задачам.

Решения ЛПР в определенной степени воздействуют в той или иной мере на будущее состояние объекта управления. При этом решения можно рассматривать не только как функцию времени, но также как функцию направления развития объекта управления, его *изменения масштаба и характера*. Возникают следующие разновидности управленческих решений:

- Стратегические решения – ориентированы на перспективу (будущее) и имеют чрезвычайно долгосрочные последствия; сопряжены со значительной неопределенностью и рисками, поскольку учитывают неконтролируемые внешние факторы окружающей среды; связаны с вовлечением значительных ресурсов. Эти решения принимаются высшим руководством организации – стратегами.

Примером стратегического решения может служить деятельность компании Microsoft, которая многие годы определялась целью: «Компьютер в каждом доме, на каждом рабочем столе, плюс первоклассное программное обеспечение». Однако появление интернета и портативных компьютеров заставило Microsoft в 1999 году изменить стратегию следующим образом: «Обеспечивать новые возможности в любое время, в любом месте, на любом устройстве с помощью первоклассного программного обеспечения». При этом

отсутствие видения стратегического развития у компаний «Motorola», «Polaroid» привело к их падению былого величия. Здесь несомненно, прав Конфуций: «Того, кто не задумывается о далеких трудностях, непременно поджидают близкие неприятности».

- Тактические решения связаны с конкретной расстановкой сил и ресурсов в каждом временном периоде реализации стратегического видения. Стратег (высшее руководство организации), осмысливает свое решение, наполняет его своим содержанием и трансформирует в необходимую для тактика форму. Таким образом, тактик имеет дело с определенными задачами, которые могут носить вероятностный характер и должны быть решены в среднесрочный или краткосрочный период. Применяя военную терминологию можно говорить, что тактические решения приводят к победе в сражении, а стратегические к победе в войне. Успешное решение тактических задач предполагает их взаимосвязь с оперативными решениями.

- Оперативные решения связаны с разовыми действиями, имеют краткосрочный характер и носят регулирующую направленность, возникают в тех случаях, когда нарушается ход процесса деятельности тактика через любые непредвиденные внутренние или внешние обстоятельства. Ситуация, в которой возникает необходимость принятия оперативного решения, требует немедленных энергичных действий.

Каждое управленческое решение должно быть аргументировано и обосновано. Аргументы должны по возможности носить формализованный характер, что в реальной обстановке не всегда возможно. Поэтому предлагается классифицировать *по методам обоснования (с определенной степенью условности)*:

- Формализованные решения, при обосновании которых широко используют методы, основанные на получении количественных результатов вычислений.

- Неформализованные решения, при обосновании которых широко используют методы, основанные на выявлении обстоятельств качественного характера, не сводящихся к однозначным ответам – генерации множества альтернатив.

Под альтернативой понимают необходимость выбора одной из двух или более исключаящих друг друга возможностей, а также каждая из этих возможностей. В зависимости от количества альтернатив разделяют:

- Инновационное решение — выбор при отсутствии очевидных альтернатив, приходится формировать абсолютно новое, не имеющее аналогов,

творческое решение. Заранее невозможно сделать предположение о каких-либо вариантах действий, когда сама ситуация нова и неопределенна. Соответственно, рационально обосновать новшества довольно сложно, они всегда связаны с определенными рисками и интуицией руководителя. Поэтому иногда новшества приносят больше вреда, чем пользы.

Так критика общественно-политического и экономического строя СССР казалась вполне обоснованной – пока не проявились результаты реформ проводившихся со второй половины 1980-х и до начала 1990-х годов под общим названием «Перестройка», которые привели к падению всех макроэкономических показателей страны и уровню жизни населения. Однако надо учитывать и тот факт, что любая реорганизация на некоторое время резко снижает эффективность работы. Недаром древнее китайское проклятие гласит: «Чтоб тебе жить во время перемен». Но отказаться от инновационных решений невозможно.

- Бинарное решение – определено двумя диаметрально противоположными альтернативами, которые вынуждают к выбору типа «да/нет».

Как-то ученик спросил Сократа – мудрец, скажи, жениться мне или нет? На что философ ответил: «Женись, конечно. Попадется хорошая жена, будешь счастливым, а не повезет - станешь философом...». Юноша лукавил, он знал, что Сократу ужасно не повезло в семейной жизни. Его жена Ксантиппа была известна своим вздорным и дурным характером. Её имя стало даже нарицательным для сварливых жен.

- Многоальтернативное решение – имеется выбор из некоторого конечного числа возможных альтернатив. На первый взгляд может показаться, что многоальтернативное решение представляет собой наиболее простой выбор. Кажется в этом случае достаточно лишь «сравнить» между собой альтернативы и выбрать из них наилучшую. Однако на самом деле такой выбор оказывается весьма сложным. Даже бинарное решение требует от ЛПР определенных умственных усилий, а по мере увеличения альтернатив возникает парадокс выбора, когда человек отказывается от решения. Надо учитывать, что люди обладают ограниченными возможностями в плане обработки информации и часто идут по пути наименьшего сопротивления и, действуя подобным образом, они лишь защищают себя от информационной перегрузки и усталости

Интересные выводы на эту тему много делает Барри Шварц: «Когда количество вариантов выбора продолжает увеличиваться, начинают проявляться негативные аспекты многообразия альтернатив. А когда возможностей выбирать

становится еще больше, негативные чувства обостряются до того, что мы оказываемся перегруженными многообразием выбора. В этот момент выбор больше не добавляет свободы, а вызывает беспомощность. Можно даже сказать, подавляет».

Я не ставил задачу рассмотреть все возможные признаки классификации управленческих решений, их достаточно большое количество (в связи с разнообразными условиями и ситуациями принятия решений), но даже из сравнения приведенного выше, становится ясно, что они не противоречат и хорошо дополняют друг друга. Представленная систематизация управленческих решений, в значительной мере помогает определить методы принятия решений.

Как видно из выше сказанного задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам, характеризующим количество и качество доступной информации. В общем случае задачи принятия решений можно представить следующим набором информации:

$\langle T, A, K, X, F, G, D \rangle$, где

T - постановка задачи (например, выбрать лучшую альтернативу);

A - множество допустимых альтернативных вариантов;

K - множество критериев выбора;

X- множество методов измерения предпочтений (например, использование различных шкал);

F- отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок (исходы);

G - система предпочтений эксперта;

D - решающее правило, отражающее систему предпочтений.

Под сущностью «принятия решений» понимают процесс выбора относительно устойчивого управленческого решения, определяющую его роль в функционировании и развитии объекта управления.

Рассматривая процесс принятия решений, следует учитывать два момента. Первый заключается в том, что принимать решения, как правило, сравнительно легко, трудно принять хорошее решение. Второй момент состоит в том, что принятие решения – это психологический процесс. Часто способы, используемые руководителем для принятия решений, варьируют от спонтанных до высокологических.

Для решения проблемы требуется не единичное решение, а совокупность выборов. Фактическое число этапов определяется самой проблемой. М. Мескон предложил пять этапов процесса решения проблемы (рис. 2.1):

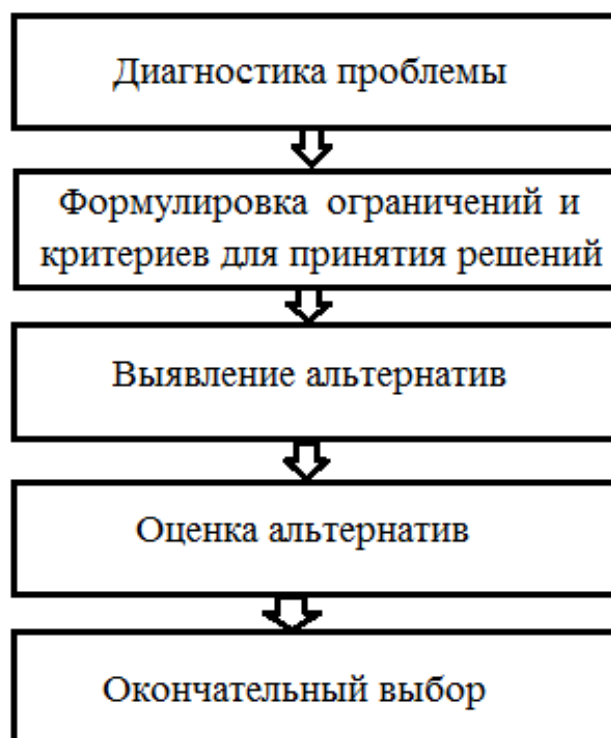


Рис. 2.1. Этапы процесса принятия решений.

Согласно рисунку, процесс решения задачи не заканчивается выбором альтернативы. Для разрешения проблемы или извлечения выгоды из имеющейся возможности решение должно быть реализовано. Уровень эффективности осуществления решения повысится, если оно будет признано теми, кого оно затрагивает.

Пример:

1. Диагностика проблемы (задачи) – опаздываю на важное совещание на 20 минут.
2. Формулировка критериев – время в пути до работы; риск пробок.
3. Выявление альтернатив – ехать на метро или на автомобиле
4. Оценка альтернатив

Альтернативы	Время в пути до работы	Риск пробок
Ехать на метро	40 мин	0
Ехать на автомобиле	20 мин	Попасть в пробку на 30 мин вероятность 0,7

5. Окончательный выбор?

Многокритериальная оптимальность.

Для понимания материала рассмотрим важнейшие термины и понятия многокритериальной оптимизации (МКО).

Лицо, принимающее решение (ЛПР) – субъект решения (управленец,

менеджер), наделённый определёнными полномочиями и несущий ответственность за последствия принятого и реализованного управленческого решения. ЛПР – один или несколько человек (коллектив), на которых лежит ответственность за принятое решение.

Альтернатива – необходимость выбора одной из двух или более исключаящих друг друга возможностей, а также каждая из этих возможностей. Альтернативы – неотъемлемая часть проблемы принятия решений: если не из чего выбирать, то нет и выбора. Для постановки многокритериальной задачи необходимо иметь хотя бы две альтернативы.

Критерии – признак, основание, правило принятия решения по оценке чего-либо на соответствие предъявленным требованиям. Иными словами, критерии оценки альтернатив – это показатели их привлекательности (или непривлекательности) для участников процесса выбора. В профессиональной деятельности выбор критериев часто определяется многолетней практикой и опытом. При небольшом количестве критериев (два - три) задача сравнения альтернатив достаточно проста и прозрачна, качества по критериям могут быть непосредственно сопоставимы, и выбран компромисс.

Исход – отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок. Исход управленческого решения - это те результаты, которых ожидает руководство при принятии решения. Исход является основным аспектом управленческого решения просто потому, что в нем отражается преобладающее отношение менеджеров, которое существовало на момент принятия решения.

Задача МКО ставится следующим образом: требуется найти числа x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющие системе ограничений

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

для которых функции

$$z_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (2)$$

достигают максимального или минимального значения.

Множество точек $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям (1), образует *область допустимых решений* $D \subset R^n$ (является подмножеством евклидова пространства n -мерных векторов с вещественными компонентами). Элементы множества D называются *допустимыми решениями* или *альтернативами*, а числовые функции f_k , $k = 1, 2, \dots, K$ – *целевыми функциями*, или *критериями*, заданными на множестве D . В формулировке задач

присутствует K целевых функций. Эти функции отображают множество $D \subset R^n$ в множество $F \subset R^K$, которое называется *множеством достижимости*.

В векторной форме математическую модель МКО (1,2) можно записать следующим образом:

$$\overset{P}{f}(X) = (f_1(X), \dots, f_K(X)) \rightarrow \max \text{ при } X \in D. \quad (3)$$

Здесь $\overset{P}{f}(X)$ – вектор-функция аргумента $X \in D$.

Различают 2 группы методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив: *векторные и скалярные*.

Скаляр описывается одним числом, а вектор двумя или более числами.

Под *векторной оптимизацией* на конечном множестве объектов понимается нахождение варианта (альтернативы) с наилучшим значением векторного критерия.

Наибольшее распространение получили следующие методы векторной оптимизации:

- *оптимизация по Парето;*
- *лексиминная оптимизация (упорядочивание по качеству);*
- *оптимизация по приоритету критериев (лексикографическая оптимизация).*

Под скалярной оптимизацией на конечном множестве объектов понимается нахождение варианта (альтернативы) с наилучшим значением скалярного критерия. Скалярные оценки объектов вычисляются путём преобразования векторного аргумента в скаляр. Наибольшее распространение получили функции, усредняющие значения признаков, которые называются обобщающими (синтезирующими). При задании обобщающей функции важная роль отводится выбору шкал признаков и их весовым коэффициентам.

Таким образом, многокритериальная модель задачи принятия решений может быть представлена фиксированным набором переменных следующего вида:

$$\langle A, K, V, f, P, r \rangle, \text{ где:}$$

A - множество допустимых вариантов решений;

K - множество критериев, по которым оцениваются решения;

V - множество оценочных шкал;

f – множество оценочных функций, задающих отображение множества допустимых решений во множество векторных оценок;

P - система предпочтений лица, принимающего решение;

r - решающее правило.

Решающее правило представляет собой алгоритм, который позволяет задать на множестве векторных оценок отношение предпочтения. В качестве решающего правила в практике используются следующие методы:

- метод простейшего многокритериального ранжирования;
- метод линейной свертки;
- метод «ЭЛЕКТРА»;
- метод анализа иерархий (МАИ); и др.

Отношение доминирования по Парето. Парето-оптимальность

Если функции f_1, f_2, \dots, f_K достигают максимум в одной и той же точке $X^* \in D$, то говорят, что задача (3) имеет *идеальное решение*.

Случаи существования идеального решения в многокритериальной задаче крайне редки. Поэтому основная проблема при рассмотрении задачи (3) – формализация принципа оптимальности, т.е. определение того, в каком смысле «оптимальное» решение лучше других. В случае отсутствия «идеального решения» в задаче (3) ищется *компромиссное решение*.

Для всякой альтернативы $X \in D$ вектор из значений целевых функций $(f_1(X), f_2(X), \dots, f_K(X))$ является *векторной оценкой* альтернативы X . Векторная оценка альтернативы содержит полную информацию о ценности (полезности). Сравнение любых двух исходов заменяется сравнением их векторных оценок.

Пусть $X_1, X_2 \in D$. Если для всех критериев f_1, f_2, \dots, f_K имеют место неравенства $f_k(X_2) \geq f_k(X_1)$, $k = 1, 2, \dots, K$, причем хотя бы одно неравенство строгое, то говорят, что решение X_2 *предпочтительнее* решения X_1 . Условие предпочтительности принято обозначать в виде $X_2 \succ X_1$.

Определение (оптимальность по Парето). В задаче МКО точка $X_0 \in D$ называется оптимальной по Парето, если не существует другой точки $X \in D$, которая была бы предпочтительнее, чем X_0 .

Точки, оптимальные по Парето, образуют множество точек, оптимальных по Парето (множество неувлучшаемых или эффективных точек) $D_p \subset D$.

Оптимальные решения многокритериальной задачи следует искать только среди элементов множества альтернатив D_p . В этой области ни один критерий не может быть улучшен без ухудшения хотя бы одного из других. Важным

свойством множества Парето D_p является возможность «выбраковывать» из множества альтернатив D заведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям. Обычно решение многокритериальной задачи должно начинаться с выделения множества D_p . При отсутствии дополнительной информации о системе предпочтений ЛПР должно принимать решение именно из множества Парето D_p .

В векторной оптимизации кроме множества Парето в общем случае нет общих правил, по которому варианту X_2 отдается предпочтение по сравнению с другим вариантом X_1 . Часто решение многокритериальной задачи состоит в построении множества Парето-оптимальных точек и дальнейшем выборе одной из них на основе «здравого смысла» или с помощью какого-либо другого критерия. Во всех случаях задача многокритериальной оптимизации каким-то способом сводится к задаче с одним критерием. Существует много способов построения такого окончательного критерия, однако ни одному из них нельзя заранее отдать наибольшее предпочтение. Для каждой задачи этот выбор должен делаться ЛПР.

Пример.

Проиллюстрируем (рис. 1.1) приём выделения паретовских решений на примере задачи с двумя критериями F_1 и F_2 (оба требуется максимизировать). Множество D состоит из 11 возможных решений. Каждому решению соответствуют определённые значения показателей F_1 и F_2 . Пусть имеются следующие векторные оценки: $F(X_1)=(2;4)$, $F(X_2)=(3;5)$, $F(X_3)=(3;3)$, $F(X_4)=(5;2)$, $F(X_5)=(4;3)$, $F(X_6)=(1;3)$, $F(X_7)=(2;3)$, $F(X_8)=(3;2)$, $F(X_9)=(2;2)$, $F(X_{10})=(3;1)$, $F(X_{11})=(2;1)$.

Решение X_1 вытесняется решением X_2 , решение X_2 лучше решений X_3 , X_7 , X_8 , X_9 , X_{10} и X_{11} . Решение X_4 по первому критерию лучше решения X_5 , а по второму наоборот, т.е. имеем неувлучшаемые решения, и т.д. После проведённого анализа у нас остались три решения X_2, X_4, X_5 оптимальных по Парето.

Векторные оценки исходов представим точками координатной плоскости (по оси абсцисс откладываем значения критерия F_1 , а по оси ординат – значения критерия F_2).

Из рис.1.1 видно, что эффективные точки лежат на правой верхней границе области возможных решений (*Ауд. решить данную задачу, когда оба критерия нужно минимизировать*)

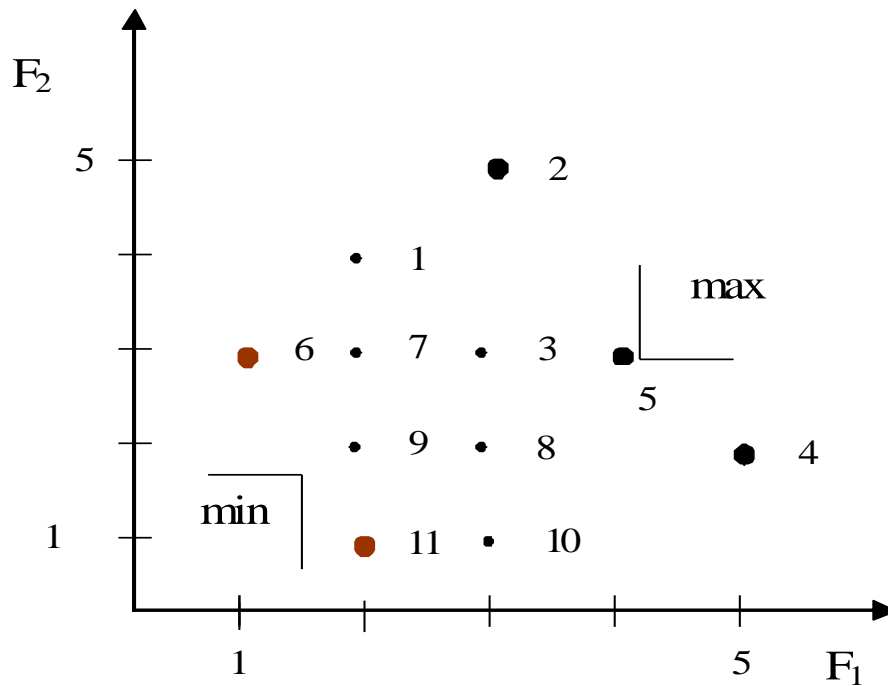


Рис. 1.1. Приём выделения паретовских решений

Графическая интерпретация на примере

Пусть требуется наилучшим образом выбрать соответствующий агрегат по показателям его мощности (x) и надежности (y). Пусть при этом указанные показатели уже выражены в таких единицах, что $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$. Необходимо минимизировать:

- 1) ожидаемые затраты, обуславливаемые его эксплуатацией в течении года, которые пусть задаются $\varphi(x, y) = 2x - y$ (первый частный критерий);
- 2) ожидаемые годовые задержки на «штрафы» из-за срывов и задержек в выполнении заказов, которые задаются функцией $\psi(x, y) = 5 - x - 2y$ (второй частный критерий)

Таким образом, рассматривается задача минимизации при двух частных критериях:

$$\varphi(x, y) \rightarrow \min \text{ и } \psi(x, y) \rightarrow \min$$

и при ограничениях $x \in [1; 2]$ и $y \in [0; 1]$.

В этой задаче множество D в плоскости (x, y) представляет собой четырехугольник $ABCD$ (рис. 1.2. а) вершины которого имеют координаты:

$$A(1; 0), B(1; 1), C(2; 1), D(2; 0)$$

Положим, $U = \varphi(x, y)$ и $V = \psi(x, y)$. Тогда в силу линейности заданных частных критериев U и V исходно заданный четырехугольник $ABCD$ из области допустимых альтернативных решений переходит в четырехугольник $A^*B^*C^*D^*$ (1.2. б) в плоскости (U, V) значений частных критериев. Его координаты составят:

$$A^*(2; 4), B^*(1; 1), C^*(3; 1), D^*(4; 3)$$

Соответственно, значения определяются исходя из формул ($\varphi(x, y) = 2x - y$ и $\psi(x, y) = 5 - x - 2y$)

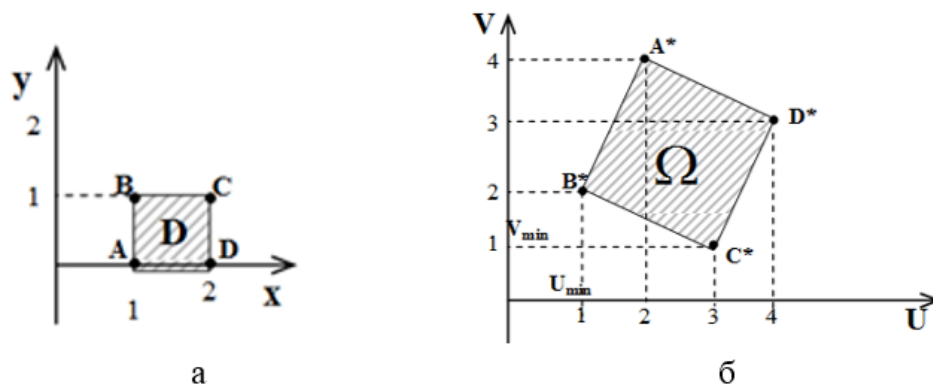


Рис. 1.2. Графическая интерпретация

Множество Парето

Предположим необходимо выбрать место работы из девяти вариантов. В качестве критериев взяты: зарплата (З в рублях, стремление положительное +), длительность отпуска (Д в днях, стремление положительное +) и время поездки (В в минутах, стремление –). Из смысла задачи следует, что критерии З и Д следует максимизировать, а критерий В – минимизировать

№	Альтернативы	Критерий		
		Зарплата, (руб.) +	Длительность отпуска, (дни) +	Время поездки, (мин) –
1	A1	900	20	60
2	A2	700	30	20
3	A3	700	36	40
4	A4	800	40	50
5	A5	400	60	15
6	A6	600	30	10
7	A7	900	35	60
8	A8	600	24	10
9	A9	650	35	40

1 и 2 – несравнимы (н);

1 и 3 – н;

1 и 4 – н;

1 и 5 – н;

1 и 6 – н;

1 и 7 – 7 доминирует;

1 и 8 – н;

1 и 9 – н;

Таким образом, предположим выделяются Парето-оптимальные варианты $p = \{3,4,5,6,7\}$ и доминируемые по Парето варианты $q = \{1,2,8,9\}$

Рассмотрим методы которые приводят к сужению множества Парето.

Сужение множества Парето

Мы нашли множество Парето оптимальных решений.

№	Альтернативы	Критерий		
		Зарплата, (руб.)	Длительность отпуска, (дни)	Время поездки, (мин)
3	A3	700	36	40
4	A4	800	40	50
5	A5	400	60	15
6	A6	600	30	10
7	A7	900	35	60

Было определено, что оптимизация по Парето использует отношение Парето-доминирования, которое отдаёт предпочтение одному объекту перед другим только» том случае, когда первый объект по всем критериям не хуже второго и хотя бы по одному из них лучше. При истинности этого условия первый объект считается *доминирующим*, а второй - *доминируемым*. Два объекта, для которых предпочтение хотя бы, по одному критерию расходится, считаются *несравнимыми*.

Очевидно, что выделение множества Парето часто не является удовлетворительным решением. Это связано с тем, что при достаточно большом исходном множестве вариантов множество Парето оказывается недопустимо большим для того, чтобы ЛПР было бы в состоянии осуществить выбор самостоятельно. Таким образом, выделение множества Парето можно рассматривать лишь как предварительный этап оптимизации, и налицо проблема дальнейшего сокращения этого множества.

Для выбора одной оптимальной стратегии из множества эффективных решений в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию.

Общая методика исследования задач принятия решения на основе математического моделирования для задач МКО должна быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

Первый подход. Для заданной многокритериальной задачи оптимизации находится множество её Парето-оптимальных решений, а выбор конкретного оптимального варианта из множества Парето-оптимальных предоставляется ЛПР.

Второй подход. Производится сужение множества Парето-оптимальных исходов (в идеале – до одного элемента) с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный исход для ЛПР.

Рассмотрим некоторые простейшие способы сужения Парето-оптимального множества, акцентируя при этом внимание на необходимость дополнительной информации.

Указание верхних/нижних границ критериев. Дополнительная информация об оптимальном исходе $X_{opt} \in D$ в этом случае имеет вид

$$F_i(X_{opt}) \leq C_i, i = \overline{1, m}.$$

Число C_i рассматривается здесь как верхняя граница по i – му критерию. Соответственно для установления нижних границ используется знак «больше или равно».

Наложим, например, следующие ограничения на оптимальное решение:

- зарплата — не менее 500 рублей;

Отбрасывается 5 вариант

- длительность отпуска — не менее 30 дней;

Остаются все варианты

- время поездки — не более 40 минут.

Отбрасывается 4 и 7 варианты

Варианты, удовлетворяющие этим дополнительным ограничениям: из них оптимальными по Парето являются варианты 3 и 6. Остаётся сделать окончательный выбор между вариантами 3 и 6.

Основной недостаток метода состоит в том, что оптимальное решение становится здесь субъективным, так как зависит, во - первых, от величин назначаемых верхних/нижних границ критериев и, во-вторых, от окончательного выбора, совершаемого принимающим решение.

Субоптимизация. производят следующим образом: выделяют один из критериев, а по всем остальным критериям назначают нижние границы. Оптимальным при этом считается исход, максимизирующий выделенный критерий на множестве исходов, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных.

Пусть в качестве главного критерия выступает критерий зарплата;

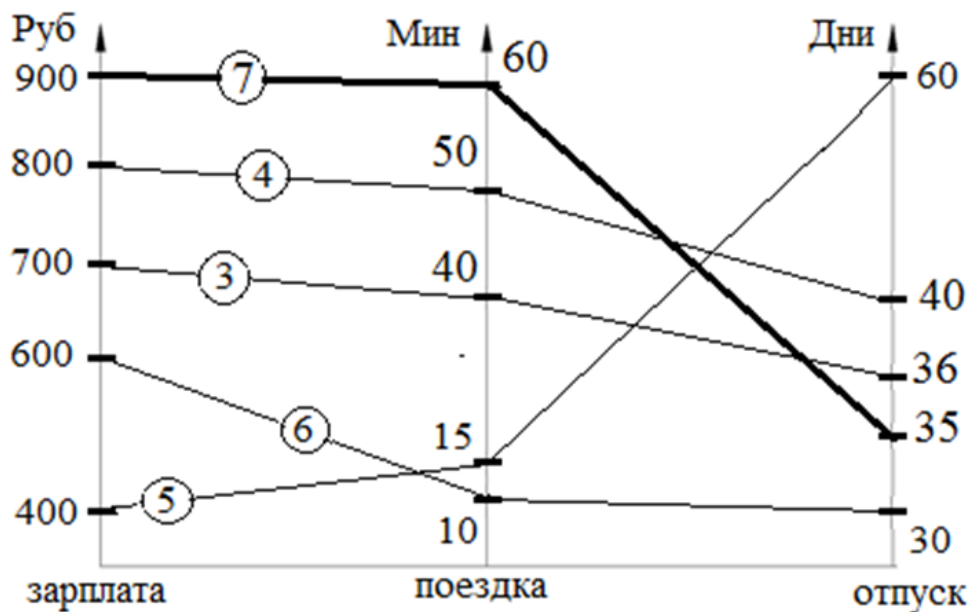
Ограничения

- длительность отпуска — не менее 30 дней;
- время поездки — не более 40 минут.

Отбросим варианты, которые не удовлетворяют данным ограничениям: {4, 7}. Из них максимальную зарплату имеет вариант 3. *Этот вариант и будет оптимальным.*

Лексикографическая оптимизация Основана на упорядочении критериев по их относительной важности. Процедуру нахождения оптимального решения проводят следующим образом: На первом шаге отбирают исходы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такой исход единственный, то его и считают оптимальным. Если же таких исходов несколько, то среди них отбирают те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию. В результате такой процедуры всегда остается как правило один исход.

Упорядочим критерии по относительной важности. *Например*, следующим образом: $\mathbf{З > В > Д}$ (т.е. важнейший критерий — зарплата, следующий за ним по важности время поездки, наименее важный критерий длительность отпуска).



Максимальное значение по критерию Зарплата имеют варианты 7. Далее сравниваем эти варианты по второму по важности критерию Время поездки. Потом переходим к третьему критерию Длительность отпуска. *Лучшим является вариант 7, который и является здесь оптимальным.*

При упорядочении $\mathbf{В > Д > З}$ оптимальным является вариант 6, а при упорядочении $\mathbf{Д > З > В}$ — оптимальным становится вариант 5.

Проблемы решения задач методом Парето

1. Несравнимость решений.

Несравнимость решений является формой неопределённости, которая, в отличие от неопределённости, вызванной воздействием среды, связана со стремлением лица принимающего решение "достичь противоречивых целей" и может быть названа ценностной неопределённостью. Выбор между несравнимыми решениями является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

2. Нормализация критериев.

Так как частные критерии имеют различный физический смысл, т.е. измеряются в различных единицах; масштабы их не соизмеримы, поэтому невозможно сравнение качества полученных результатов по каждому критерию.

Операция приведения масштабов локальных критериев к единому, обычно безразмерному, носит название нормализации критериев.

После нормализации частных критериев векторные критерии приобретают некоторые полезные свойства.

3. Выбор принципа оптимальности.

Требуется определить правило, которое позволило бы сказать какое решение лучше. Выбор принципа оптимальности – основная проблема векторной оптимизации. Формально описать принцип оптимальности (критерии "правильности решения") – оказывается затруднительным.

Оценивая в целом метод Парето оптимизации, можно заметить, что все они, так или иначе, сводятся к сужению множества Парето с последующим выбором одного решения лицом, принимающим решение (ЛПР).