8. ЛЕКЦИЯ. Оптимальность по Парето и линейное программирование в теории игр

Теория игр – это раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы принятия оптимальных решений (стратегий) в конфликтных ситуациях. Таким образом, в теории игр исследуются модели и методы принятия решений в конфликтных ситуациях. В рамках теории игр рассматриваются парные игры (с двумя сторонами) или игры многих лиц.

Игрой называется упрощенная модель таких ситуаций, которая отличается от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам. Игра состоит из последовательности действий (ходов), которые подразделяются на личные (совершаемые игроками осмысленно на основе некоторого правила – стратегии) и случайные (не зависящие от игроков). В теории игр рассматриваются ситуации, в которых обязательно присутствуют личные ходы.

Стратегия игрока – это набор правил, используемых при выборе очередного личного хода. Целью игры является нахождение оптимальной стратегии для каждого игрока, т. е. такой, при которой достигается максимум ожидаемого среднего выигрыша при многократном повторении игры. Предполагается, что игроки ведут себя разумно, исключаются элементы азарта и риска.

Методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством многократной повторяемости. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, социологии, политике, а также в кибернетике и биологии. Первые математические аспекты и приложения теории игр были изложены в классической книге Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 г. Нейман и Моргенштерн занимались играми с нулевой суммой, в которых выигрыш одной стороны равен проигрышу другой. Математическое определение равновесной ситуации предложено американским математиком и экономистом Джоном Нэшем в 1951 г., при котором обе стороны используют соответствующие (оптимальные) стратегии, приводящие к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое отклонение от такой равновесной стратегии одной из сторон приведет к ухудшению ее положения.

8.1. Классификация игр

Формализация игровых ситуаций и поиск методов выбора приемлемых (или оптимальных в некотором смысле) стратегий приводит к выделению отдельных типов игр, группировке их в классы, определению общих средств исследования для выделенных классов. В современной теории игр существует множество классов игр с внутренним делением на подклассы (отдельные группы), для которых получены теоретические основы, определяющие существование оптимальных стратегий (оптимальных опять же в определенном смысле), разработаны алгоритмы поиска этих стратегий.

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином признаке, характеризующим игру: по *количеству игроков* (игры с двумя участниками — парные игры, игры n игроков, где $n > 2$); *по количеству стратегий* (конечное или бесконечное число); по *степени информированности игроков* о стратегиях, сделанных ходах и предпочтениях противника (игры с полной/неполной информацией); по *свойствам функций выигрыша* (в зависимости от вида функции — матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.; в зависимости *от характера выигрышей* — игры с нулевой суммой (антагонистические игры), игры с ненулевой суммой, в которых целевые критерии для игроков различны); *по возможности предварительных переговоров и взаимодействий между игроками в ходе игры* (коалиционные, кооперативные, бескоалиционные игры).

Самое широкое деление игр выполняется на основе понятия координации игроков, участвующих в игре. Это бескоалиционные и коалиционные (кооперативные) игры. *Бескоалиционные игры* — это класс игр, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков (изолированно), не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками. К бескоалиционным играм относятся статистические игры (игры с «природой»), антагонистические игры (игры с противоположными интересами сторон), игры с непротивоположными интересами (в том числе биматричные игры – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока) и др.

В *коалиционных (кооперативных) играх*, напротив, игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом (им разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях), они вправе вступать в коалиции. Образовав коалицию, игроки принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. При этом они должны решить вопрос о дележе общего выигрыша между членами коалиции.

8.2. Пример классической игры двух лиц «Дилемма заключенного»

В совершении преступления подозреваются двое: А и Б. Есть основания полагать, что они действовали по сговору, и полиция, изолировав их друг от друга, предлагает им одну и ту же сделку: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается за помощь следствию, а второй получает максимальный срок лишения свободы (10 лет). Однако иных доказательств их вины у следствия нет. Если оба молчат, их деяние квалифицируется как неоказание помощи следствию, и они приговариваются к 6 месяцам. Если оба свидетельствуют друг против друга, они получают минимальный срок (по 3 года). Каждый подозреваемый выбирает, молчать ему или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них не знает точно, что сделает другой. Игру можно представить в виде следующей таблицы.

Альтернативы	**Б** хранит молчание	**Б** дает показания
А хранит молчание	Оба получают по полгода тюрьмы	**А** получает 10 лет, **Б** освобождается
А дает показания	**А** освобождается, **Б** получает 10 лет	Оба получают по 3 года тюрьмы

Будем рассматривать подозреваемых как игроков в данной игре: игрок А и игрок Б. Сформируем таблицу выигрышей игроков, выбрав в качестве их выигрышей величины, противоположные по знаку их возможным срокам заключения. Цель каждого из игроков — минимизация собственного срока заключения (т. е. максимизация выигрыша).

Стратегии игроков		**Игрок Б**	
		Хранить молчание	Давать показания
Игрок А	Хранить молчание	$-0{,}5;\ -0{,}5$	$-10;\ 0$
	Давать показания	$0;\ -10$	$-3;\ -3$

Попытаемся определить наилучшие стратегии игроков с позиций некоторых критериев оценки результатов игры. Введем следующие понятия.

1. *Ситуация равновесия* игры (равновесия по Нэшу) — пара стратегий игроков, отклонение от которых в одиночку невыгодно ни одному из игроков. Поиск стратегий, образующих ситуацию равновесия, выполняется на основе индивидуального рационального выбора.

2. Ситуация (пара стратегий игроков) является оптимальной по Парето, если не существует другой ситуации, которая была бы предпочтительнее этой ситуации для всех игроков (т. е. увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого).

Отметим содержательное различие понятий ситуации равновесия и ситуации, оптимальной по Парето. В ситуации равновесия ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша; в оптимальной по Парето ситуации все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.

Представим рассуждения каждого из игроков. Если партнер молчит, то лучше свидетельствовать против него (стратегия «давать показания») и выйти на свободу (иначе — полгода тюрьмы). Если же партнер дает показания (свидетельствует против него), то лучше тоже свидетельствовать против партнера (опять стратегия «давать показания»), чтобы получить 3 года (иначе – 10 лет). Итак, стратегия «давать показания» строго доминирует над стратегией «хранить молчание», каждый игрок (подозреваемый) приходит к этому выводу. Таким образом, в условиях, когда каждый игрок оптимизирует свой собственный выигрыш, не заботясь о выгоде другого игрока, единственное возможное равновесие в игре — взаимное свидетельство обоих участников друг против друга — пара стратегий («давать показания», «давать показания»).

В то же время оптимальной по Парето ситуацией в данной игре является пара стратегий («хранить молчание», «хранить молчание»), для которой выигрыши игроков равны –0,5 (полгода заключения каждому). С точки зрения группы (этих двух подозреваемых) это наилучшее решение, при котором дальнейшее увеличение выигрыша одного из игроков (т. е. уменьшение его срока заключения) возможно только за счет уменьшения выигрыша другого (увеличение его срока заключения). Любое другое решение будет менее выгодным (для группы).

Суть дилеммы проявляется именно в том, что подозреваемые (как игроки), ведя себя по отдельности рационально (с позиции индивидуальной рациональности), вместе (как группа) приходят к нерациональному решению — к выбору стратегий, образующих ситуацию с худшим результатом.

Данный пример представляет собой бескоалиционную игру, причем игра парная — два игрока, биматричная, с ненулевой суммой (сумма выигрышей игроков в каждой ситуации отлична от нуля). Выигрыши каждого игрока задаются соответствующими матрицами:

матрица для игрока А: $H_{\text{А}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -10 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

матрица для игрока Б: $H_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

8.3. Нормальная форма игры

Рассмотрим формализованное представление бескоалиционной игры (в нормальной форме), в которой целью каждого игрока является оптимизация индивидуального выигрыша (причем игроки не могут координировать совместно свои стратегии).

Определение. Бескоалиционной игрой в нормальной (или стратегической) форме называется тройка $\Gamma = \{I, S, H\}$, где $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество всех игроков, которых различаем по номерам; S_i – множество стратегий, доступных игроку $i \in I$; отдельную стратегию игрока i обозначим $s_i \in S_i$. Иногда для большей определенности будем вводить дополнительные индексы:

$$S_i = \left\{s_i^{(1)}, s_i^{(2)}, \dots, s_i^{(k)}\right\}$$

где $s_i^{(k)}$ – k-я стратегия i-го игрока.

Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков одной своей стратегии $s_i \in S_i$. Таким образом, в результате каждой партии игры складывается набор стратегий $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, называемый ситуацией. Множество всех ситуаций $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ является декартовым произведением множеств стратегий всех игроков.

Обозначим $H_i(s)$ – выигрыш игрока i в ситуации s. Функция $H_i\colon S \to R$, определенная на множестве всех ситуаций S, называется функцией выигрыша игрока i.

Функция выигрышей игроков $H(s)$ определена на множестве ситуаций S:

$$H(s) = \big(H_1(s), H_2(s), \dots, H_n(s)\big)\colon S \to R$$

Целью каждого игрока является получение наибольшего возможного выигрыша. Но выбор лучшей стратегии одним из игроков (т. е. увеличивающей его возможный выигрыш) может вести к уменьшению выигрышей других игроков. Поэтому каждый из этих игроков также будет применять стратегию, увеличивающую уже его выигрыш, но при этом выигрыши остальных игроков могут уменьшиться и т. д. При этом может не быть такой ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$, где стратегия s_i^0 доставляет максимум игроку i, т. е. $H_i(s^0) = \max\limits_{s \in S} H_i(s)$. Поэтому требуется определение такой ситуации s, которая бы удовлетворяла всех игроков.

8.4. Ситуации равновесия по Нэшу

Пусть $s = (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)$ – произвольная ситуация в игре, где $s_i \in S_i$ – некоторая стратегия игрока i. Рассмотрим новую ситуацию, получившуюся из ситуации s заменой стратегии s_i игрока i на стратегию $s_i' \in S_i$, используя следующее обозначение: $s|_{s_i'} = (s_1, s_2, \dots, s_i', \dots, s_n)$. Очевидно, что $s|_{s_i'} = s$, если $s_i = s_i'$.

Определение. Ситуация s в игре называется приемлемой для игрока i, если $H_i\left(s|_{s_i'}\right) \le H_i(s)$ для любых $s_i' \in S_i$.

Таким образом, если в некоторой ситуации s для игрока i найдется такая стратегия $s_i' \in S_i$, что $H_i\left(s|_{s_i'}\right) > H_i(s)$, то игрок i в случае складывающейся ситуации $s|_{s_i'}$ может получить больший выигрыш. В этом смысле ситуация s для игрока i будет неприемлемая

Определение. Ситуация s называется ситуацией равновесия по Нэшу (или равновесной по Нэшу ситуацией), если она приемлема для всех игроков, т. е. для каждого $i \in I$ выполняется

$$H_i\left(s|_{s_i'}\right) \leq H_i(s) \text{ для любых } s_i' \in S_i$$

Очевидно, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от своей стратегии, приводящей к ситуации равновесия, в одиночку

Определение. Равновесной стратегией игрока в бескоалиционной игре называется такая его стратегия, которая входит хотя бы в одну из равновесных ситуаций игры.

Пример. Найти в следующей игре ситуации равновесия (здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2)):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} s_2^{(1)} & \quad s_2^{(2)} & \quad s_2^{(3)} \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}. \end{array}$$

Решение. Обозначим через $s_{ij} = (s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$ ситуацию при стратегиях игроков $s_1^{(i)}$ и $s_2^{(j)}$ соответственно. Функция выигрышей игроков $H(s_{ij}) = H\left(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}\right) = \left(H_1(s_{ij}), H_2(s_{ij})\right)$.

Ситуация $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ *приемлема для игрока 1*, так как имеем $H(s_{11}) = H\left(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}\right) = (4, 3)$,

$$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{21}) = 2,$$
$$H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{31}) = 3$$

Ситуация s_{11} также приемлема для игрока 2, поскольку

$$H_2(s_{11}) = 3 > H_1(s_{12}) = 1,$$
$$H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{13}) = 2$$

Таким образом, ситуация $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ приемлема для обоих игроков, т. е. это ситуация равновесия по Нэшу.

Ситуации s_{21}, s_{31} неприемлемы для обоих игроков.

Также можно проверить, что ситуации s_{12}, s_{22} неприемлемы для обоих игроков, а ситуация s_{32} приемлема только для игрока 1. Далее, ситуация s_{31} приемлема только для игрока 1, а ситуации s_{23}, s_{33} приемлемы только для игрока 2. Таким образом, других равновесных ситуаций (в чистых стратегиях) в данной игре нет.

8.5. Доминирование стратегий

Определение. Стратегия $s_i \in S_i$ игрока i в игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ строго доминируема (строго доминируется), если существует другая стратегия $\overline{s_i} \in S_i$ такая, что

$$H_i(s_1, \dots, \overline{s_i}, \dots, s_n) > H_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \quad (1)$$

для всех $s_k \in S_k$, $k = 1,2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

В этом случае стратегия $\overline{s_i} \in S_i$ строго доминирует стратегию $s_i \in S_i$.

Если неравенство (1) выполняется нестрого, но хотя бы для одного набора $(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ строго, то стратегия s_i слабо доминируется стратегией $\overline{s_i}$.

Рассмотрим игру из примера/ В соответствии с определением доминируемых стратегий следует, что стратегия $s_2^{(2)}$ строго доминируема стратегией $s_2^{(3)}$:

$$H_2\left(s_1, s_2^{(2)}\right) < H_2\left(s_1, s_2^{(3)}\right) \text{ для } \forall s_1 \in S_1$$

поэтому рациональный игрок 2 не должен играть $s_2^{(2)}$.

Игрок 1 (сам рационален и знает, что игрок 2 тоже рационален) понимает, что игрок 2 не будет играть $s_2^{(2)}$. Поэтому для него (при исключении стратегии $s_2^{(2)}$) стратегия $s_1^{(1)}$ будет лучше, чем другие две. Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2 не будет играть $s_2^{(2)}$, и игрок 2 знает, что игрок 1 будет играть $s_1^{(1)}$, то игрок 2 должен играть $s_2^{(1)}$. В результате приходим к ситуации $\left(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}\right)$ – *ситуации равновесия по Нэшу*.

Этот процесс – последовательное удаление строго доминируемых стратегий. Более наглядно выполнять этот процесс пошагово.

$$\begin{array}{cccc} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \\ \end{array}$$
$$H = \begin{pmatrix} (4,\ 3) & (5,\ 1) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (8,\ 4) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (9,\ 6) & (2,\ 8) \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array}.$$

Шаг 1. Удаляется стратегия $s_2^{(2)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_2^{(3)}$, т. е. имеем

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ H = & \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & (6,\ 2) \\ (2,\ 1) & (3,\ 6) \\ (3,\ 0) & (2,\ 8) \end{array}\right) & & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}$$

Шаг 2. Удаляется стратегия $s_1^{(2)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_1^{(1)}$, т. е. получим

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ H = & \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & (6,\ 2) \\ & \\ (3,\ 0) & (2,\ 8) \end{array}\right) & & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ s_1^{(3)} \end{array} \end{array}.$$

Шаг 3. Удаляется стратегия $s_1^{(3)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_1^{(1)}$, т. е. получим

$$\begin{array}{cccc} & s_2^{(1)} & s_2^{(3)} & \\ H = & \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & (6,\ 2) \\ & \\ & \end{array}\right) & & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Шаг 4. Удаляется стратегия $s_1^{(3)}$, так как она строго доминируется стратегией $s_2^{(1)}$, таким образом, имеем

$$\begin{array}{ccc} & s_2^{(1)} & \\ H = & \left(\begin{array}{cc} (4,\ 3) & \\ & \\ & \end{array}\right) & \begin{array}{c} s_1^{(1)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

8.6. Оптимальные по Парето ситуации

Определение. В бескоалиционной игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ ситуация $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$ называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$, для которой имеет место неравенство

$$H_i(s) \geq H_i(s^0) \text{ для } \forall i \in I$$

причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое.

Множество всех ситуаций, оптимальных по Парето, будем обозначать через S^p.

Содержательно ситуация $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$ означает, что не существует другой ситуации $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$, которая была бы предпочтительнее ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0)$ для всех игроков.

Определим понятие предпочтительности ситуаций. Пусть ситуации $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$, $s' = (s_1', s_2', \dots, s_n') \in S$. Ситуация s предпочтительнее s', если $H_i(s) \geq H_i(s')$ для всех $i \in I$, причем хотя бы для одного игрока неравенство строгое, т. е. имеем $H_i(s') \neq H_i(s)$/

Рассмотрим геометрическую интерпретацию предпочтительности ситуаций при $I = \{1, 2\}$. Тогда функция выигрышей игроков $H(s) = (H_1(s), H_2(s))$. Ситуации s', s'' предпочтительнее ситуации s, если точки $H(s')$, $H(s'')$, не совпадающие с точкой $H(s)$, попадают в область, образованную сторонами прямого угла (рис.1).

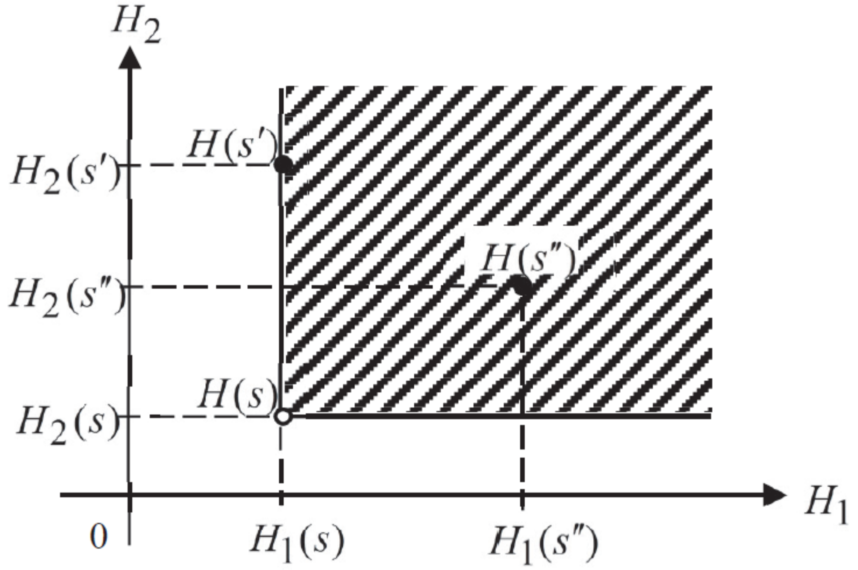

Рис. 1. Геометрическая интерпретация предпочтительности ситуаций

Свойство оптимальных по Парето ситуаций. В бескоалиционной игре $\Gamma = \{I, S, H\}$ для ситуации $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_n^0) \in S^p$ существует вектор $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$, такой, что

$$\lambda^T H(s^0) = \max_{s \in S} \lambda^T H(s) = \max_{s \in S} \lambda_i H_i(s),$$

где неравенство $\lambda^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$ означает $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$;

Данное свойство вполне согласуется с интерпретацией оптимальности по Парето через область прямого угла.

Однако для разных ситуаций, оптимальных по Парето, но не сравниваемых по области прямого угла (на рис. 1 ситуации s', $s'' \in S^p$), используют дополнительные условия эффективности стратегий (как решений). Например, условие «взвешенной эффективности» для оптимальных по Парето ситуаций $s \in S^p$:

$$\bar{\lambda}^T H(s) \to max$$

для некоторого фиксированного $\lambda > 0$.

При $\bar{\lambda} = (1, \dots, 1)$ имеем условие «взвешенной эффективности» для $s \in S^p$ в следующем виде: в качестве взвешенной оптимальной по Парето выбирают ситуацию $s^0 \in S^p$, доставляющую

$$\max_{s \in S} \sum_{i=1}^{n} H_i(s) = \sum_{i=1}^{n} H_i(s^0)$$

В примере, пользуясь геометрической интерпретацией предпочтительности ситуаций, получим (рис. 2), что ситуация $s_{32} = \left(s_1^{(3)},\ s_2^{(2)}\right)$ является оптимальной по Парето, причем $H(s_{32}) = H\left(s_1^{(3)},\ s_2^{(2)}\right) = (9, 6)$/

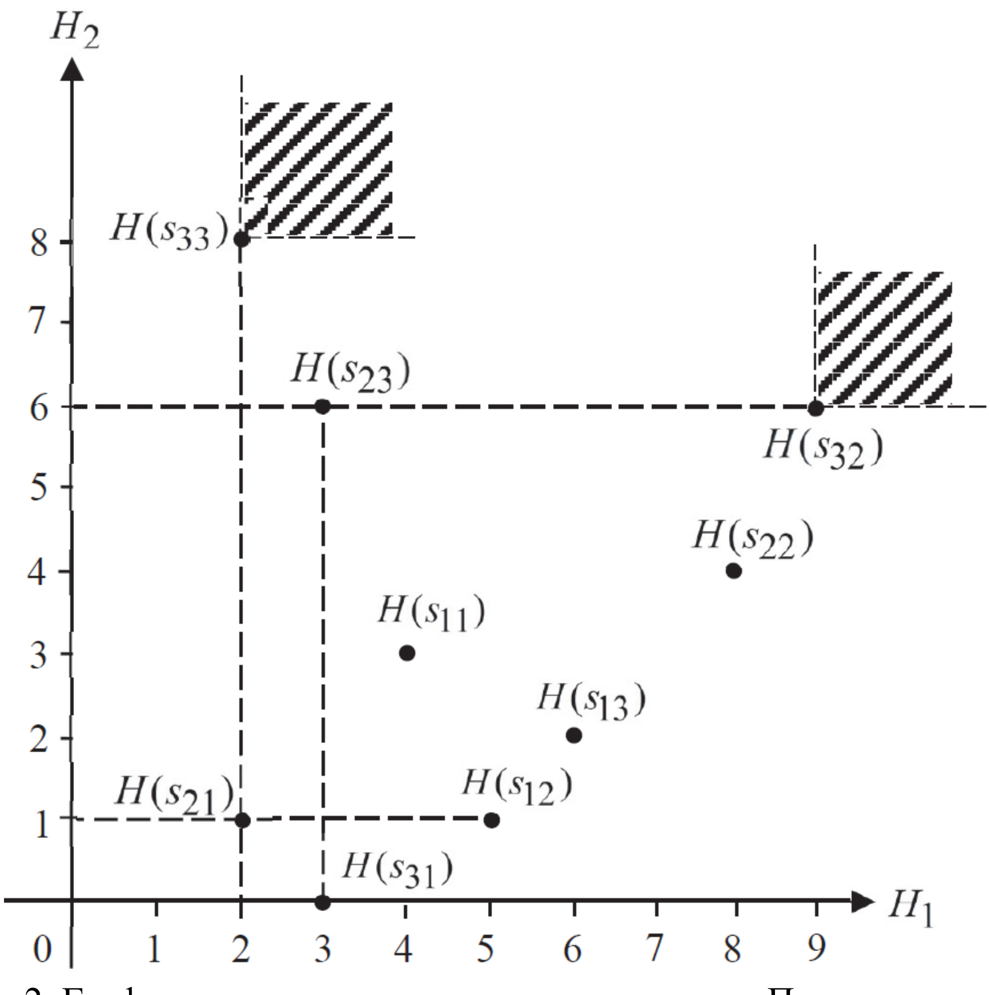

Рис. 2. Графическая иллюстрация оптимальных по Парето ситуаций

Также оптимальной по Парето является ситуация $s_{33} = \left(s_1^{(3)},\ s_2^{(3)}\right)$, причем $H(s_{32}) = (2, 8)$, однако (в отличие от ситуации s_{32}) не является более предпочтительной по сравнению с равновесной ситуацией $s_{11} = \left(s_1^{(1)},\ s_2^{(1)}\right)$.

1

Проверим условие «взвешенной эффективности» при $\bar{\lambda} = (1, \dots, 1)$ для полученных оптимальных по Парето ситуаций s_{32}, s_{33}. Для ситуации $s_{32} = \left(s_1^{(3)},\ s_2^{(2)}\right)$:

$$H_1(s_{32}) + H_2(s_{32}) = 9 + 6 = 15;$$

для ситуации $s_{33} = \left(s_1^{(3)},\ s_2^{(3)}\right)$

$$H_1(s_{33}) + H_2(s_{33}) = 2 + 8 = 10;$$

т. е. максимальное значение $\bar{\lambda}^T H(s)$ достигается для ситуации $s^0 = s_{32} = \left(s_1^{(3)},\ s_2^{(2)}\right)$, которая является взвешенной оптимальной по Парето ситуацией (более эффективной по этому условию).

8.7. Матричные игры

Определение. Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называются матричными играми. Итак, матричная игра — это конечная игра двух лиц с нулевой суммой (т. е. сумма выигрышей игроков в каждой ситуации равна нулю). Такая игра полностью определяется матрицей

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой строки соответствуют чистым стратегиям игрока 1, столбцы – чистым стратегиям игрока 2, на их пересечении стоит выигрыш игрока 1 в соответствующей ситуации, т. е. ситуации $s = (i, j)$ соответствует выигрыш $H_1(s) = H(i, j) = h_{ij}$. Тогда выигрыш игрока 2 равен $H_2(s) = -H_1(s)$ для всех $s \in S$.

Здесь игрок 1 имеет m стратегий, игрок 2 имеет n стратегий. Такая игра называется $m \times n$-игрой. Матрица H называется *матрицей игры* или *матрицей выигрышей* (платежной матрицей).

Цель игрока 1 — максимизировать свой возможный выигрыш, при этом увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 2 (так как игра антагонистическая). Аналогичное можно отметить и для игрока 2: увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 1. Поэтому при выборе стратегии игрок 1 (разумный игрок, действующий рационально) будет руководствоваться следующими соображениями. При стратегии i игрока 1 игрок 2 выберет стратегию j_*, максимизирующую его (игрока 2) выигрыш (тем самым минимизирующую выигрыш игрока 1):

$$h_{ij_*} = \min_j h_{ij}$$

Тогда оптимальная стратегия игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей h_{ij_*}, $i = 1, 2, \dots, m$, (т. е. при любой стратегии игрока 2), будет состоять в выборе стратегии i_*, для которой выполняется:

$$h_{i_* j_*} = \max_i h_{ij_*} = \max_i \min_j h_{ij}$$

Аналогичными соображениями будет руководствоваться игрок 2 при выборе стратегии: обеспечить наибольший возможный выигрыш при любом выборе стратегии игрока 1, т. е. выбрать стратегию, которая обеспечит ему max из возможных выигрышей

$$-h_{i^* j}, j = 1, 2, \dots, n, \text{ здесь } h_{i^* j} = \max_i h_{ij}$$

причем для второго игрока выигрыш равен $-h$, где h — выигрыш игрока 1.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 2 будет состоять в выборе стратегии j^*, для которой выполняется:

$$-h_{i^* j^*} = \max_j(-h_{i^* j}) = \max_j \left(-\max_i h_{ij}\right) = -\min_j \max_i h_{ij}$$

отсюда получим:

$$h_{i^* j^*} = \min_j \max_i h_{ij}$$

Теорема. Для любой матрицы H справедливо неравенство

$$\max_i \min_j h_{ij} \le \min_j \max_i h_{ij}$$

8.8. Ситуации равновесия в матричной игре

Определение. В игре с матрицей H стратегии, на которых достигаются $\max_i \min_j h_{ij}$, и $\min_j \max_i h_{ij}$ называются соответственно *максиминной* (игрока 1) и *минимаксной* (игрока 2). Величины $v_* = \max_i \min_j h_{ij}$ и $v^* = \min_j \max_i h_{ij}$ называются соответственно нижнее и верхнее значения игры.

Определение. Для матричной игры с платежной матрицей H ситуация равновесия по Нэшу $({s_1}^{(i^*)}, {s_2}^{(j^*)}) \equiv (i^*, j^*)$ определяется неравенствами:

$$h_{ij^*} \le h_{i^* j^*} \le h_{i^* j} \tag{2}$$

для любых $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Пара (i^*, j^*), удовлетворяющая неравенству (2), называется *седловой точкой* матрицы H. В седловой точке элемент матрицы $h_{i^* j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. Седловая точка существует не всегда.

Для матричных игр характерны следующие свойства.

1. Функция выигрыша $H(i,j) = h_{\text{ij}}$ принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия.

Если ситуация $(i^*,\ j^*)$ – ситуация равновесия по Нэшу в матричной игре Г, то $v = H(i^*,\ j^*)$ называется значением (ценой) игры Г.

2. $\max\limits_{1\le i\le m} \min\limits_{1\le j\le n} h_{ij} \le \min\limits_{1\le j\le n} \max\limits_{1\le i\le m} h_{ij}$

3. $v = \max\limits_{1\le i\le m} \min\limits_{1\le j\le n} h_{ij} = \min\limits_{1\le j\le n} \max\limits_{1\le i\le m} h_{ij} = h_{i^*j^*}$

4. Если существует седловая точка $(i^*,\ j^*)$ платежной матрицы H, то стратегии $({s_1}^{(i^*)}, {s_2}^{(j^*)})$ являются оптимальными стратегиями игроков в данной игре. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого игрока не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Теорема. Для существования в матричной игре седловых точек (ситуаций равновесия) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij}$$

Схема нахождения седловых точек матрицы H.

1. Для каждой стратегии i игрока 1 (по строкам) находится $\min\limits_j h_{ij}$

2. Среди полученных величин $\min\limits_j h_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, определяется наибольшая, т. е. $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij}$.

3. Для каждой стратегии j игрока 2 (по столбцам) находится $\max\limits_i h_{ij}$

4. Среди полученных величин $\max\limits_i h_{ij}$, $\mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$, определяется наименьшая, т. е. $\min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \min\limits_j h_{1j} \\ \to \min\limits_j h_{2j} \\ \to \dots \\ \to \min\limits_j h_{mj} \end{matrix} \Bigg\} \to \max_i \min_j h_{ij}.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\underbrace{\max_i h_{i1} \quad \max_i h_{i2} \quad \dots \quad \max_i h_{in}}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij}$$

5. Если выполняется равенство

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} = h_{i^0 j^0}$$

то существует седловая точка $s = (i^0,\, j^0)$, причем значение игры $v(H) = v^0 = h_{i^0 j^0}$

Пример. Рассмотрим игру с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to -3 \\ \to 0 \\ \to 2 \end{matrix} \Bigg\} \to \max_i \min_j h_{ij} = 2.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij} = 2$$

Итак, максимин и минимакс равны, следовательно, значение игры $v(H) = v^0 = 2$. Существует седловая точка матрицы H – ситуация $(i^0,\, j^0) = (3, 1)$, образованная третьей стратегией игрока 1 и первой стратегией игрока 2, которые являются оптимальными стратегиями игроков в данной игре.

Пример. Задана следующая игра с платежной матрицей:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 10 \\ \to 20 \end{matrix} \Big\} \to \max_i \min_j h_{ij} = 20.$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 40 & 30 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\min_j \max_i h_{ij} = 30$$

Максимин равен 20 и достигается при $i = 2$, а минимакс равен 30 и достигается при $j = 2$. Таким образом, игра не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). Однако игрок 1 может обеспечить себе гарантированный выигрыш, равный 20, поскольку $\max_i \min_j h_{ij} = 20$, а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем $\min_j \max_i h_{ij} = 30$ (гарантированный проигрыш игрока 2). Следует заметить, что ни одна из ситуаций не является приемлемой одновременно для обоих игроков.

8.9. Смешанные стратегии

Если в игре с платежной матрицей H максимин и минимакс не равны друг другу, то по теореме 2 игра с такой матрицей не имеет ситуации равновесия (в чистых стратегиях). В этом случае игрок 1 может обеспечить себе выигрыш

$$\max_i \min_j h_{ij} = v_* \text{ (гарантированный выигрыш)},$$

а игрок 2 может не дать ему выиграть больше, чем

$$\min_j \max_i h_{ij} = v^* \text{ (гарантированный проигрыш).}$$

Разность $v^* - v_* \geq 0$, поэтому в условиях повторяющейся игры возникает вопрос о разделе этой величины $v^* - v_*$ между игроками. Поэтому естественно желание игроков получить дополнительные стратегические возможности для уверенного получения в свою пользу возможно большей доли этой разности.

Оказывается, игрокам целесообразно выбирать свои стратегии случайно, т. е. определять распределение вероятностей на множестве чистых стратегий, а затем предоставлять выбор конкретной чистой стратегии случайному механизму, отвечающему заданному распределению вероятностей.

Выбор игроками своих чистых стратегий с некоторыми наперед заданными вероятностями — это, по существу, один из планов проведения игры и, таким образом, тоже является некоторой стратегией. В отличие от первоначально заданных чистых стратегий, такие стратегии называются смешанными.

Определение. Смешанной стратегией игрока называется распределение вероятностей на множестве его чистых стратегий. Смешанную стратегию игрока можно представить в виде вектора-столбца

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_m)^T$$

где x_i – вероятность выбора игроком его i-й стратегии, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, .., m$; $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$; X^T – транспонированный вектор X.

8.10. Решение матричных игр

Решить матричную игру – значит найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и значение (цену игры), определяющее выигрыши игроков.

Теорема (об аффинных преобразованиях). Оптимальные стратегии игроков в матричной игре с матрицей H и в матричной игре с матрицей $\widetilde{H} = kH + C$ совпадают, где число $k > 0$, $C = (c_{ij})$ – матрица размерности $m \times n$, $c_{ij} = c - const$. Значения игр связаны равенством:

$$v(\widetilde{H}) = kv(H) + c$$

Пример. Найти решение игры с платежной матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем минимальный элемент каждой строки и отметим из этих элементов максимальный:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{-2} \\ -4 \end{matrix}$$

Нижняя цена игры равна -2.

Найдем максимальный элемент каждого столбца и отметим из этих элементов минимальный:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{-2} \\ -4 \end{matrix} \\ 6 \quad 5 \quad \mathbf{4} \end{matrix}$$

Верхняя цена игры равна 4.

Нижняя цена игры не совпадает с верхней ценой игры, следовательно, данная матричная не имеет седловую точку в чистых стратегиях. Решим данную задачу в смешанных стратегиях. В соответствии с теоремой об аффинных преобразованиях рассмотрим стратегически эквивалентную игру с матрицей.

Сделаем платежную матрицу положительной, добавив каждому элементу матрицы число 5. Тогда значения игр связаны равенством: $v(\widetilde{H}) = v(H) + 5$.

$$\widetilde{H} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 \\ 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Сведем данную матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования:

Задача для игрока 1. Первая задача линейного программирования: среди чисел x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 10x_2 \geq 1 \\ 8x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

найти такие x_1^0, x_2^0, доставляющие $f^* = x_1 + x_2 \to min$.

Решим данную задачу линейного программирования геометрическим способом. Допустимое множество T, определяемое системой ограничений представлено на рис. 3 заштрихованной многоугольной неограниченной областью. Линии уровня целевой функции $x_1 + x_2 = \alpha$, $\alpha = const$, здесь прямые линии, перпендикулярные вектору-антиградиенту $-f^* = (-1, -1)$. При параллельном смещении линии уровня вдоль направления антиградиента величина α уменьшается. Тогда значение $f^*_{\min} = \min_{x \in T} f^*(x)$ достигается в точке $A(x_1^0, x_2^0)$ – точке пересечения линий

$$\begin{cases} 11x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases}$$

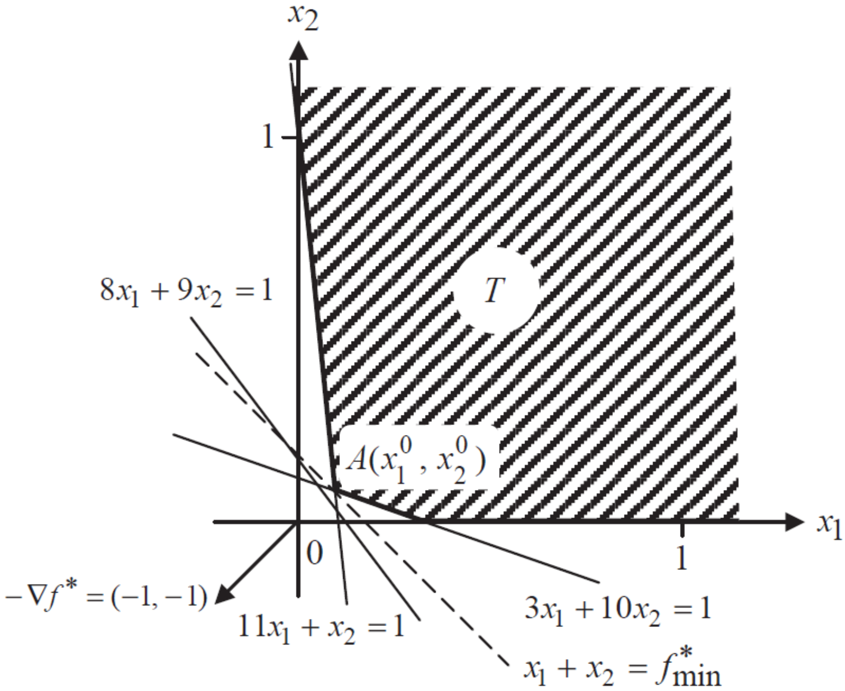

Рис. 3. Геометрический способ решения задачи линейного программирования

Таким образом, координаты точки A определяют решение данной задачи линейного программирования: $x_1^0 = 9/107$, $x_2^0 = 8/107$, $f^*_{\min} = 17/107$.

Запишем двойственную задачу – *задачу для игрока 2.*

Среди чисел $y_1,\ y_2, y_3$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} 11y_1 + 3y_2 + 8y_3 \le 1 \\ y_1 + 10y_2 + 9y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

найти такие y_1^0, y_2^0, y_3^0, доставляющие

$$y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

Для решения указанной задачи используем симплекс-метод, учитывая принцип двойственности $f_{max} = f_{min} = 17/107$.

Решение исходной задачи: $y_1 = \frac{7}{107}, y_2 = \frac{10}{107}, y_3 = 0$