ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель: Железняк Лилия Михайловна

zheleznyak@mirea.ru

laboratory.work.2017@gmail.com

Двойственная задача

1. Математическая модель исходной задачи

$$f(x) = 9x1 + 11x2 + 15x3 \to max$$

$$\begin{cases} x1 + 2x2 + 4x3 \le 360 \\ 2x1 + 4x2 + 2x3 \le 520 \\ x1 + x2 + 2x3 \le 220 \\ xi \ge 0,\ 1 \le i \le 3 \end{cases} \to \begin{cases} x1 + 2x2 + 4x3 + x4 = 360 \\ 2x1 + 4x2 + 2x3 + x5 = 520 \\ x1 + x2 + 2x3 + x6 = 220 \\ xi \ge 0,\ 1 \le i \le 3 \end{cases}$$

Векторный вид:

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{A_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \overline{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. В ходе решения прямой задачи было определено, что максимальный доход от продажи составляет $f_{max} = 2060$ тыс. ден.ед., оптимальный план

$$\overline{x^*} = (x1, x2, x3, x4, x5, x6) = (180, 40, 0, 100, 0,0)$$

2. Составим исходную двойственную задачу

Введем вектор двойственных переменных размерности три $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$. Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\overline{c} = (9, 11, 15), \overline{b} = (360, 520, 220), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Запишем двойственную задачу.

Найти минимум функции.

$$g(\overline{y}) = (\overline{b}, \overline{y}) = 360y_1 + 520y_2 + 220y_3 \to min$$

При ограничениях:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}, \text{следовательно}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 9, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 11, \\ 4y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 15, \\ yi \ge 0, \quad 1 \le i \le 3. \end{cases}$$

I Первая теорема двойственности

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны max F(x) = min G(y).

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи. Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы:

$$\overline{x^*} = \overline{C_B} \cdot D^{-1},$$

Где D – матрица, составленная из компонентов векторов входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В последней симплекс-таблице базисными переменными являются $x4$, $x2$, $x1$. Соответствующие этим переменным векторы $\overline{A_4}$, $\overline{A_2}, \overline{A_1}$ в разложении используются для формирования столбцов матрицы D.

$$\overline{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Тогда,

$$D = (\overline{A_4}, \overline{A_2}, \overline{A_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем обратную матрицу.

$$D^{-1} = (y_4^*, y_2^*, y_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Базисными переменными в симплекс-таблице являются $\overline{C_B} = (0, 11, 9)$, тогда

$$\overline{y^*} = (y_4^*, y_2^*, y_1^*) = \overline{C_B} \cdot D^{-1} = \left(0; \left(0 * \frac{-1}{2} + 11 * \frac{1}{2} - 9 * \frac{1}{2}\right); (0 * 0 - 11 * 1 + 9 * 2)\right) = \\ = (0;\ 1;\ 7)$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$g_{min} = g\overline{(y^*)} = (\bar{b}, \overline{y^*}) = 360 * 0 + 520 * 1 + 220 * 7 \\ = 2060 \text{ тыс. ден. ед}$$

совпадает с максимальным значением f_{max} = 2060 [тыс. ден.ед.] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности. Таким образом,

$$max f(\bar{x}) = min g(\bar{y}) = 2060 [\text{тыс. ден. ед.}]$$

II Вторая теорема двойственности

Если какое-либо ограничение одной из задач с оптимальным решением обращается в строгое неравенство, то соответствующая этому ограничению переменная оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю.

Оптимальное решение прямой задачи: При типа шкафов А: $x1 = 180$; В: $x2 = 40$; С: $x3 = 0$; максимальный доход от продажи $f_{max} = 2060$ [тыс. ден.ед. / неделю]. Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке $x1, x2, x3$ в систему ограничений.

Таблица 1- Определения дефицита продукции

Ограничение	Расчет	Вывод
$x1 + 2x2 + 4x3 \leq 360$	180 + 2*40 + 4*0 < 360 260 < 360	Первое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию шкафа С. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_1 = 0$).
$2x1 + 4x2 + 2x3 \leq 520$	2*180 + 4*40 = 520 520=520	Второе ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что шкафы типа В полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_2 \neq 0$).
$x1 + x2 + 2x3 \leq 220$	180 + 40 + 2*0 = 220 220=220	Третье ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что шкафы типа А полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_3 \neq 0$).
$x1 \geq 0$	180 > 0	Первое ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_1 + 2y_2 + y_3 = 9$, т.е. весь его запас полностью используется в оптимальном плане, он является дефицитным
$x2 \geq 0$	40 > 0	Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством $2y_1 + 4y_2 + y_3 = 11$
$x3 \geq 0$	0 = 0	Третье ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_1 = 0$, т.е. в процессе производства не используется является не дефицитном.

Согласно Таблице 1 имеем следующую систему уравнений из двойственной задачи:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 9 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 = 11 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений

$$y3 = 9 - 2y2 \Rightarrow 4y2 + 9 - 2y2 = 2y2 + 9 = 11$$
$$y2 = 1, \text{тогда } y3 = 7$$

Решение найденное из первой теоремы двойственности равнозначно решению из второй теоремы.

$$g\overline{(y^*)} = (\bar{b}, \overline{y^*}) = 360 * 0 + 520 * 1 + 220 * 7 = 2060 \text{ тыс. ден. ед}$$
$$min\ g(\bar{y}) = 2060 [\text{тыс. ден. ед.}]$$

III Третья теорема двойственности

Выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе. Обратная матрица базиса оптимального плана:

$$D^{-1} = (y_4^*, y_2^*, y_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Индексы базисных переменных оптимального плана:

$$\overline{A_0^*} = (x_4^*, x_2^*, x_1^*) = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи:

$$\overline{\mathrm{A}_0} = (b_1, b_2, b_3\ ) = \begin{pmatrix} 360 \\ 520 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

Ресурс 1 (Тип А). Найдем нижнюю границу. В третьем столбце обратной матрицы один положительный элемент (2), ему соответствует индекс базисной переменной оптимального плана (220).

$\Delta b_1^H = min\{220/2\} = 110$

Найдем верхнюю границу. В третьем столбце единственное отрицательное значение (−1), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (520).

$\Delta b_1^{\text{В}} = |max\{520/(-1)\}| = |-520| = 520$

Таким образом, получаем $\Delta b_1 \in (-110; 520)$.

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

$(b_1 - \Delta b_1^H, b_1 + \Delta b_1^B) = (360 - 110; 360 + 520) = (250; 880)$шт./неделю

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным. Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

Ресурс 2 (Ингредиент В). Рассматриваем второй столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (1/2) и два отрицательных (−1/2, −1/2). Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – 520; для отрицательных – 360, 220.

Тогда находим нижнюю границу.

$$\Delta b_2^H = min\{520\text{x}2/1\} = 1040$$

Найдем верхнюю границу.

$$\Delta b_2^{\text{В}} = \begin{cases} |max\{360\ x\ (-2/1)\}| = |-720| = 720 \\ |max\{220\ x\ (-2/1)\}| = |-440| = 440 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 720.

Получаем $\Delta b_2 \in (-1040; 720)$.

Тогда второй ресурс может изменяться в интервале:

$(b_2 - \Delta b_2^H, b_2 + \Delta b_2^B) = (520 - 1040; 520 + 720) == (-520; 1240)$ шт./неделю

Ресурс 3 (Ограничение по недельному объему производства шкафов типа А по сравнению с объемом производства шкафов типа В). Рассматриваем первый столбец обратной матрицы, в котором один положительный элемент (1). Данному элементу соответствует индекс соответствующего базисного переменного оптимального плана – 360.

Находим нижнюю границу.

$$\Delta b_3^H = min\{360/1\} = 360$$

Верхняя граница: $\Delta b_3^{\text{В}} = +\infty$, так как среди элементов первого столбца нет отрицательных значений.

Тогда, получаем что $\Delta b_3 \in (-360; +\infty)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

$$(b_3 - \Delta b_3^H, b_3 + \Delta b_3^B) = (220 - 360; +\infty) = (-140; +\infty) \text{ шт./неделю}$$

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы $\text{y}_1^* = 7$ и $\text{y}_2^* = 1$. Введем верхние границы $\Delta b_1^{\text{В}}$ и $\Delta b_2^{\text{В}}$ в формулу:

$$\Delta G_{max}^{i} \approx y_i^* \times \Delta b_i$$

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1^B = 1 \times 520 = 520$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2^B = 7 \times 220 = 1540$$

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции G_{max} на величину:

$$\Delta G_{max} = \Delta G_{max_1} + \Delta G_{max_2} = 520 + 1540 = 2060$$

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов:

$$G_{max} \approx 2060 + 2060 = 4120 \text{ [тыс. ден. ед./неделю]}$$