

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

"МИРЭА - Российский технологический университет" РТУ МИРЭА

Институт Информационных Технологий **Кафедра** Вычислительной Техники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

по дисциплине «Теория принятия решений» Метод анализа иерархий

Студент группы: <u>ИКБО-04-22</u>	<u>Кликушин В.И.</u>
	(Ф. И.О. студента)
Преподаватель	Железняк Л.М
	(Ф.И.О. преподавателя)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Представление проблемы в виде иерархии	4
1.3 Установка приоритетов критериев	5
1.4 Синтез приоритетов	6
1.5 Согласованность локальных приоритетов	14
1.6 Синтез альтернатив	21
1.7 Вывод	22
1.8 Результаты работы программы	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	25
СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ	26
ПРИЛОЖЕНИЯ	27

ВВЕДЕНИЕ

Метод анализа иерархии заключается в иерархическом представлении задачи. Метод имеет три этапа:

- 1. Представление задачи в виде иерархической структуры (сети).
- 2. Оценка приоритетов (весов) критериев с учётом их места в иерархии относительной важности.
- 3. Выбор лучшей альтернативы по значениям её характеристик и важности критериев.

1 МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

1.1 Постановка задачи

Задача практической работы: выбрать лучший технический ВУЗ.

1.2 Представление проблемы в виде иерархии

Первый этап — представление проблемы в виде иерархии или сети. В простейшем случае, иерархия строится, начиная с цели, которая помещается в вершину иерархии. Через промежуточные уровни, на которых располагаются критерии и от которых зависят последующие уровни, к самому низкому уровню, который содержит перечень альтернатив.

Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня является критерием для всех элементов нижнего уровня

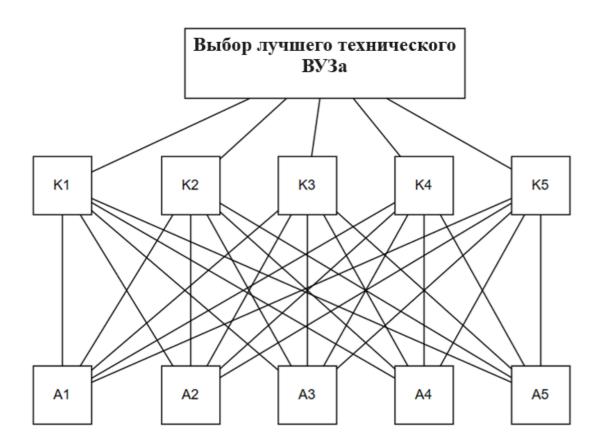


Рисунок 1 – Полная доминантная иерархия.

Критерии:

K 1 - проходной балл (+);

K 2 – количество бюджетных мест (-);

К 3 – стоимость обучения (+);

K4 – рейтинг университета (баллы) (+);

К 5 – расстояние до общежития (км) (-).

Альтернативы:

А 1 – МГТУ имени Н.Э. Баумана;

A2-ВШЭ;

A 3 - MAИ;

А 4 – НИЯУ МИФИ;

 $A 5 - M\Phi T И$.

1.3 Установка приоритетов критериев

После иерархического представления задачи установлены приоритеты критериев и оценена каждая из альтернатив по критериям, определена наиболее важная их них. В методе анализа иерархий элементы сравниваются попарно по отношению к их влиянию на общую для них характеристику. Парные сравнения приводят к записи характеристик сравнений в виде квадратной таблицы чисел, которая называется матрицей. Для облегчения работы введена шкала относительной важности (Таблица 1.3.1).

Таблица 1.3.1 – Шкала относительной важности.

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснение
1	Равная важность	Равный вклад двух
		критериев в цель.
3	Слабое превосходство	Дают легкое превосходство одной альтернативы над другой
5	Умеренное превосходство	Опыт и суждения дают умеренное превосходство

Продолжение таблицы 1.3.1

7		Одному из критериев дается		
/	Сильное превосходство	настолько сильное		
		предпочтение.		
9	A Saa Hattiga Haabaaya Hatta	Очевидность превосходства		
	Абсолютное превосходство	одного критерия над другим		
2,4,6,8	Промежуточные решения	Применяется в		
2,7,0,0	между двумя соседними	_		
	суждениями	компромиссных случаях		

Шкала содержит соответствующие обратные значения.

1.4 Синтез приоритетов

После построения иерархии и определения величин парных субъективных суждений следует этап, на котором иерархическая декомпозиция и относительные суждения объединяются для получения осмысленного решения многокритериальной задачи принятия решений. Из групп парных сравнений формируется набор локальных критериев, которые выражают относительное влияние элементов на элемент, расположенный на уровне выше. Составлена обратно симметричная матрица для парного сравнения критериев (Таблица 1.4.1).

Таблица 1.4.1 – Матрица парного сравнения критериев.

1 aostaga 1. i	.i mampa	ца парносо	ерионения к	ритерись.			
Цель	К 1	К 2	К3	К 4	К 5	Vi	W_{2i}
К 1	1	2	2	1/2	4	1.516	0.245
К 2	1/2	1	2	1/5	2	0.833	0.135
К 3	1/2	1/2	1	1/8	2	0.574	0.093
К 4	2	5	8	1	2	2.759	0.446
К 5	1/4	1/2	1/2	1/2	1	0.5	0.081
		\sum_{i}	Vi			6.182	

Для определения относительной ценности каждого элемента необходимо найти геометрическое среднее и с этой целью перемножить п элементов каждой строки и из полученного результата извлечь корни n-й степени (размерность матрицы n=5).

Строка № 1

$$V_1 = (1*2*2*1/2*4)^{1/5} = 1.516;$$

Строка № 2

$$V_2 = (1/2*1*2*1/5*2)^{1/5} = 0.833;$$

Строка № 3

$$V_3 = (1/2*1/2*1*1/8*2)^{1/5} = 0.574;$$

Строка № 4

$$V_4 = (2*5*8*1*2)^{1/5} = 2.759;$$

Строка № 5

$$V_5 = (1/4*1/2*1/2*1/2*1)^{1/5} = 0.5.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum Vi$.

$$\sum Vi = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 1.516 + 0.833 + 0.574 + 2.759 + 0.5 = 6.182.$$

Найдена важность приоритетов W_{2i} , для этого каждое из чисел Vi разделено на $\sum Vi$.

Строка № 1

$$W_{21} = 1.516 / \sum Vi = 0.245 = Y_{21};$$

Строка № 2

$$W_{22} = 0.833 / \sum Vi = 0.135 = Y_{22};$$

Строка № 3

$$W_{23} = 0.574 / \sum Vi = 0.093 = Y_{23};$$

Строка № 4

$$W_{24} = 2.759 / \sum Vi = 0.446 = Y_{24};$$

Строка № 5

$$W_{25} = 0.5 / \sum Vi = 0.081 = Y_{25}$$
.

В результате получен вектор приоритетов:

$$W_{2i}$$
 = (Y21=0.245; Y22=0.135; Y23=0.093; Y24=0.446; Y25=0.081), где индекс

2 означает, что вектор приоритетов относится ко второму уровню иерархии.

K 1 – проходной балл (Таблица 1.4.2);

Таблица 1.4.2 – Матрица сравнения по критерию 1.

К1	A1	A2	A3	A4	A5	V_{K1Y}	W_{3K1Y}
A1	1	1/2	8	1/4	2	1.149	0.188
A2	2	1	6	1/2	2	1.644	0.269
A3	1/8	1/6	1	1/5	1/6	0.213	0.035
A4	4	2	5	1	2	2.639	0.432
A5	1/2	1/2	1/6	1/2	1	0.461	0.075
		6.053					

Определена относительная ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K11} = (1*1/2*8*1/4*2)^{1/5} = 1.149;$$

Строка № 2

$$V_{K12}=(2*1*6*1/2*2)^{1/5}=1.644;$$

Строка № 3

$$V_{K13} = (1/8*1/6*1*1/5*1/6)^{1/5} = 0.213;$$

Строка № 4

$$V_{K14} = (4*2*8*1*2)^{1/5} = 2.639;$$

Строка № 5

$$V_{\rm K15} = (1/2*1/2*1/6*1/2*1)^{1/5} = 0.461.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_{K1Y}$.

Найдена важность приоритетов W_{3K1Y} , для этого каждое из чисел V_{K1Y} разделено на $\sum V_{K1Y}$.

Строка № 1

$$W_{3K11}$$
= 1.149 / \sum Vi = 1.149 / 6.106 = 0.188;

Строка № 2

$$W_{3K12}$$
= 1.644 / $\sum Vi = 1.644$ / 6.106 = 0.269;

Строка № 3

$$W_{3K13} = 0.213 / \Sigma Vi = 0.213 / 6.106 = 0.035;$$

Строка № 4

$$W_{3K14}$$
= 2.639 / Σ Vi = 2.639 / 6.106 = 0.432;

Строка № 5

$$W_{3K15}$$
= 0.461 / \sum Vi = 0.461 / 6.106 = 0.075;

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K1Y} = (Y_{311}=0.188; Y_{312}=0.269; Y_{313}=0.035; Y_{314}=0.432; Y_{315}=0.075),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K1.

К 2 – количество бюджетных мест (Таблица 1.4.3):

Таблица 1.4.3 – Матрица сравнения по критерию 2.

К2	A1	A2	A3	A4	A5	V_{K2Y}	W_{3K2Y}
A1	1	5	1/6	1/5	1/5	0.507	0.074
A2	1/5	1	1/8	1/5	1/4	0.263	0.038
A3	6	8	1	2	2	2.862	0.415
A4	5	5	1/2	1	1/2	1.443	0.209
A5	5	4	1/2	2	1	1.821	0.264
		6.896					

Определена относительная ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K21} = (1*5*1/6*1/5*1/5)^{1/5} = 0.507;$$

Строка № 2

$$V_{K22} = (1/5*1*1/8*1/5*1/4)^{1/5} = 0.263;$$

Строка № 3

$$V_{K23}=(6*8*1*2*2)^{1/5}=2.862;$$

Строка № 4

$$V_{\rm K24}\!\!=\!\!(5\!*\!5\!*\!1/2\!*\!1\!*\!1/2)^{1/5}\!\!=\!\!1.443;$$

Строка № 5

$$V_{K25} = (5*4*1/2*2*1)^{1/5} = 1.821.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_{K2Y}$.

Найдена важность приоритетов W_{3K2Y} , для этого каждое из чисел V_{K2Y} разделено на $\sum V_{K2Y}$.

Строка № 1

$$W_{3K21} = 0.507 / \sum Vi = 0.507 / 6.896 = 0.074;$$

Строка № 2

$$W_{3K22}$$
= 0.263 / Σ Vi = 0.263 / 6.896 = 0.038;

Строка № 3

$$W_{3K23}$$
= 2.862 / $\sum Vi$ = 2.862 / 6.896 = 0.415;

Строка № 4

$$W_{3K24}$$
= 1.443 / ΣVi = 1.443 / 6.896 = 0.209;

Строка № 5

$$W_{3K25} = 1.821 / \sum Vi = 1.821 / 6.896 = 0.264.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K2Y} = (Y_{321} = 0.074; Y_{322} = 0.038; Y_{323} = 0.415; Y_{324} = 0.209; Y_{325} = 0.264),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K2.

К 3 – стоимость обучения (Таблица 1.4.4):

Таблица 1.4.4 – Матрица сравнения по критерию 3.

К3	A1	A2	A3	A4	A5	V_{K3Y}	W_{3K3Y}
A1	1	1/8	4	4	1/4	0.871	0.107
A2	8	1	9	8	4	4.704	0.578
A3	1/4	1/9	1	1/2	1/5	0.308	0.038
A4	1/4	1/8	2	1	1/4	0.435	0.053
A5	4	1/4	5	4	1	1.821	0.224
		8.139					

Определена относительная ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K31} = (1*1/8*4*4*1/4)^{1/5} = 0.871;$$

Строка № 2

$$V_{K32}=(8*1*9*8*4)^{1/5}=4.704;$$

Строка № 3

$$V_{K33} = (1/4*1/9*1*1/2*1/5)^{1/5} = 0.308;$$

Строка № 4

$$V_{K34} = (1/4*1/8*2*1*1/4)^{1/5} = 0.435;$$

Строка № 5

$$V_{K35} = (4*1/4*5*4*1)^{1/5} = 1.821.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_{K3Y}$.

Найдена важность приоритетов W_{3K2Y} , для этого каждое из чисел V_{K2Y} разделено на $\sum V_{K2Y}$.

Строка № 1

$$W_{3K31}$$
= 0.871 / ΣVi = 0.871 / 8.139 = 0.107;

Строка № 2

$$W_{3K32}$$
= 4.704/ \sum Vi = 4.704/8.139 = 0.578;

Строка № 3

$$W_{3K33}{=0.308} \ / \ \Sigma Vi = 0.308 \ / \ 8.139 = 0.038;$$

Строка № 4

$$W_{3K34} = 0.435 / \Sigma Vi = 0.435 / 8.139 = 0.053;$$

Строка № 5

$$W_{3K35}$$
= 1.821 / Σ Vi = 1.821 / 8.139 = 0.224.

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K3Y} = (Y_{331} = 0.107; Y_{332} = 0.578; Y_{333} = 0.038; Y_{334} = 0.053; Y_{335} = 0.224),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K3.

К 4 – рейтинг университета (Таблица 1.4.5);

Таблица 1.4.5 – Матрица сравнения по критерию 4.

К4	A1	A2	A3	A4	A5	$V_{\rm K4Y}$	W _{3K4Y}
A1	1	4	8	1/2	1	1.741	0.261
A2	1/4	1	4	1/3	1/3	0.644	0.097
A3	1/8	1/4	1	1/8	1/8	0.218	0.033
A4	2	3	8	1	1	2.169	0.326
A5	1	3	8	1	1	1.888	0.283
	•	6.66					

Определена относительная ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K41} = (1*4*8*1/2*1)^{1/5} = 1.741;$$

Строка № 2

$$V_{K42} = (1/4*1*4*1/3*1/3)^{1/5} = 0.644;$$

Строка № 3

$$V_{K43} = (1/8*1/4*1*1/8*1/8)^{1/5} = 0.218;$$

Строка № 4

$$V_{K44} = (2*3*8*1*1)^{1/5} = 2.169;$$

Строка № 5

$$V_{K45} = (1*3*8*1*1)^{1/5} = 1.888.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_{\text{K4Y}}$.

Найдена важность приоритетов W_{3K4Y} , для этого каждое из чисел V_{K4Y} разделено на $\sum V_{K4Y}$.

Строка № 1

$$W_{3K41} = 1.741 / \sum Vi = 1.741 / 6.66 = 0.261;$$

Строка № 2

$$W_{3K42} = 0.644 / \sum Vi = 0.644 / 6.66 = 0.097;$$

Строка № 3

$$W_{3K43} = 0.218 / \Sigma Vi = 0.218 / 6.66 = 0.033;$$

Строка № 4

$$W_{3K44} = 2.169 / \Sigma Vi = 2.169 / 6.66 = 0.326;$$

Строка № 5

$$W_{3K45}$$
= 1.888/ $\sum Vi$ = 1.888 / 6.66 = 0.283.

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K4Y} = (Y_{341} = 0.261; Y_{342} = 0.097; Y_{343} = 0.033; Y_{344} = 0.326; Y_{345} = 0.283),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K4.

К 5 – Расстояние до общежития (Таблица 1.4.6).

Таблица 1.4.6 – Матрица сравнения по критерию 5.

К5	A1	A2	A3	A4	A5	V_{K5Y}	W_{3K5Y}
A1	1	5	8	9	2	3.728	0.47
A2	1/5	1	4	5	1/3	1.059	0.134
A3	1/8	1/4	1	2	1/8	0.379	0.048
A4	1/9	1/5	1/2	1	1/8	0.268	0.034
A5	1/2	3	8	8	1	2.491	0.314
		7.925					

Определена относительная ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K51}=(1*5*8*9*2)^{1/5}=3.728;$$

Строка № 2

$$V_{K52} = (1/5*1*4*5*1/3)^{1/5} = 1.059;$$

Строка № 3

$$V_{K53} = (1/8*1/4*1*2*1/8)^{1/5} = 0.379;$$

Строка № 4

$$V_{K54} = (1/9*1/5*1/2*1*1/8)^{1/5} = 0.268;$$

Строка № 5

$$V_{K55} = (1/2*3*8*8*1)^{1/5} = 2.491.$$

Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен нормирующий коэффициент $\sum V_{K5Y}$.

Найдена важность приоритетов W_{3K5Y} , для этого каждое из чисел V_{K5Y} разделено на $\sum V_{K5Y}$.

Строка № 1

$$W_{3K51} = 3.728 / \sum Vi = 0.47;$$

Строка № 2

$$W_{3K52} = 1.059 / \sum Vi = 0.134;$$

Строка № 3

$$W_{3K53} = 0.379 / \sum Vi = 0.048;$$

Строка № 4

$$W_{3K54} = 0.268 / \sum Vi = 0.034;$$

Строка № 5

$$W_{3K55} = 2.491 / \sum Vi = 0.314.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K5Y} = (Y_{351} = 0.47; Y_{352} = 0.134; Y_{353} = 0.048; Y_{354} = 0.034; Y_{355} = 0.314),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K5.

1.5 Согласованность локальных приоритетов

Любая матрица суждений в общем случае не согласована, так как суждения отражают субъективные мнения ЛПР, а сравнение элементов, которые имеют количественные эквиваленты, может быть несогласованным из-за присутствия

погрешности при проведении измерений. Совершенной согласованности парных сравнений даже в идеальном случае на практике достичь трудно. Нужен способ оценки степени согласованности при решении конкретной задачи.

Метод анализа иерархий дает возможность провести такую оценку.

Вместе с матрицей парных сравнений есть мера оценки степени отклонения от согласованности. Когда такие отклонения превышают установленные пределы тем, кто проводит решение задачи, необходимо их пересмотреть.

В таблице приведены средние значения индекса случайной согласованности (СИ) для случайных матриц суждений разного порядка.

В нашей задаче размерность матрицы n=5, тогда среднее значение индекса случайной согласованности CU=1,12.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы «Выбор лучшего технического вуза» (Таблица 1.5.1).

Таблица 1.5.1 – Матрица «Выбор лучшего технического вуза».

Цель	К 1	К 2	К3	К 4	К 5	W_{2i}
К 1	1	2	2	1/2	4	0.245
К 2	1/2	1	2	1/5	2	0.135
К3	1/2	1/2	1	1/8	2	0.093
К 4	2	5	8	1	2	0.446
К 5	1/4	1/2	1/2	1/2	1	0.081

Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$\begin{split} S_1 &= 1 + 1/2 + 1/2 + 2 + 1/4 = 4.25; \\ S_2 &= 2 + 1 + 1/2 + 5 + 1/2 = 9; \\ S_3 &= 2 + 2 + 1 + 8 + 1/2 = 13.5; \\ S_4 &= 1/2 + 1/5 + 1/8 + 1 + 1/2 = 2.325; \end{split}$$

Полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов, т.е. сумму суждений первого столбца на первую компоненту, сумму суждений второго столбца - на вторую и т.д.

$$P_1 = S_1 \times W_{21} = 1.041;$$

 $P_2 = S_2 \times W_{22} = 1.215;$

 $S_5 = 4 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11$.

$$P_3 = S_3 \times W_{23} = 1.256;$$

$$P_4 = S_4 \times W_{24} = 1.037;$$

$$P_5 = S_5 \times W_{25} = 0.891.$$

Сумма чисел Рј отражает пропорциональность предпочтений, чем ближе эта величина к n (числу объектов и видов действия в матрице парных сравнений), тем более согласованны суждения.

$$\lambda_{max} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 5.44.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$MC = (\lambda_{max} - n)/(n - 1) = (5.222-5)/(5-1) = 0.11.$$

Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного индекса согласованности СИ называется отношением согласованности ОС.

$$OC = HC/CH = 0.098.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица «Выбор лучшего технического вуза» согласована.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 1 – проходной балл (Таблица 1.5.2).

Таблица 1.5.2 – Матрица сравнения по критерию 1.

К1	A1	A2	A3	A4	A5	$\mathbf{W}_{3\mathrm{K1Y}}$
A1	1	1/2	8	1/4	2	0.188
A2	2	1	6	1/2	2	0.269
A3	1/8	1/6	1	1/5	1/6	0.035
A4	4	2	5	1	2	0.432
A5	1/2	1/2	1/6	1/2	1	0.075

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K1} = 1 + 2 + 1/8 + 4 + 1/2 = 7.625;$$

$$S_{2 \text{ K1}} = 1/2 + 1 + 1/6 + 2 + 1/2 = 4.167;$$

$$S_{3 \text{ K1}} = 8 + 6 + 1 + 5 + 1/6 = 20.167;$$

$$S_{4 \text{ K1}} = 1/4 + 1/2 + 1/5 + 1 + 1/2 = 2.45;$$

$$S_{5 \text{ K1}} = 2 + 2 + 1/6 + 2 + 1 = 7.167.$$

Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1 \text{ K1}} = S_1 x W_{3 \text{K11}} = 1.487;$$

$$P_{2 \text{ K1}} = S_2 x W_{3 \text{K12}} = 1.163;$$

$$P_{3 \text{ K1}} = S_3 \times W_{3 \text{K13}} = 0.807;$$

$$P_{4 K1} = S_1 \times W_{3K14} = 1;$$

$$P_{5 \text{ K1}} = S_1 x W_{3 \text{K15}} = 0.559.$$

Найдена пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\text{max K1}} = P_{1\text{K1}} + P_{2\text{K1}} + P_{3\text{K1}} + P_{4\text{K1}} + P_{5\text{K1}} = 5.016.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$\text{VIC}_{K1} = (\lambda_{\text{max } K1} - n)/(n - 1) = 0.004.$$

Найдено отношение согласованности ОС.

$$OC_{K1} = UC/CU = 0.004.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица К 1 (проходной балл) согласована.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 2 – количество бюджетных мест (Таблица 1.5.3).

Таблица 1.5.3 – Матрица сравнения по критерию 2.

К2	A1	A2	A3	A4	A5	W_{3K2Y}
A1	1	5	1/6	1/5	1/5	0.074
A2	1/5	1	1/8	1/5	1/4	0.038
A3	6	8	1	2	2	0.415
A4	5	5	1/2	1	1/2	0.209
A5	5	4	1/2	2	1	0.264

Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K2} = 1 + 1/5 + 6 + 5 + 5 = 17.2;$$

$$S_{2 K2} = 5 + 1 + 8 + 5 + 4 = 23;$$

$$S_{3 K2} = 1/6 + 1/8 + 1 + 1/2 + 1/2 = 2.292;$$

$$S_{4 K2} = 1/5 + 1/5 + 2 + 1 + 2 = 5.4;$$

$$S_{5 K2} = 1/5 + 1/4 + 2 + 1/2 + 1 = 3.95.$$

Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1 \text{ K2}} = S_1 x W_{3 \text{ K21}} = 1.273;$$

$$P_{2 K2} = S_2 \times W_{3 K22} = 0.874;$$

$$P_{3 K2} = S_3 \times W_{3 K23} = 0.951;$$

$$P_{4 \text{ K2}} = S_4 x W_{3 \text{ K24}} = 1.129;$$

$$P_{5 \text{ K2}} = S_5 x W_{3 \text{ K25}} = 1.043.$$

Найдена пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{max\;K2} = P_{1K2} + P_{2K2} + P_{3K2} + P_{4K2} + P_{5K2} = 5.27.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$MC_{K2} = (\lambda_{max K2} - n)/(n - 1) = (5.27 - 5)/(5 - 1) = 0.067.$$

Найдено отношение согласованности ОС.

$$OC_{K2} = UC/CU = 0.06$$
.

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица К 2 (количество бюджетных мест) согласована.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 3 – стоимость обучения (Таблица 1.5.4).

Таблица 1.5.4 – Матрица сравнения по критерию 3.

К3	A1	A2	A3	A4	A5	W _{3K3Y}
A1	1	1/8	4	4	1/4	0.107
A2	8	1	9	8	4	0.578
A3	1/4	1/9	1	1/2	1/5	0.038
A4	1/4	1/8	2	1	1/4	0.053
A5	4	1/4	5	4	1	0.224

Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K3} = 1 + 8 + 1/4 + 1/4 + 4 = 13.5;$$

$$S_{2 K3} = 1/8 + 1 + 1/9 + 1/8 + 1/4 = 1.611$$
;

$$S_{3 K3} = 4 + 9 + 1 + 2 + 5 = 21$$
;

$$S_{4 \text{ K3}} = 4 + 8 + 1/2 + 1 + 4 = 17.5$$
;

$$S_{5 \text{ K3}} = 1/4 + 4 + 1/5 + 1/4 + 1 = 5.7.$$

Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1 K3} = S_{1} \times W_{3 K31} = 1.444;$$

$$P_{2 \text{ K3}} = S_2 \times W_{3 \text{ K32}} = 0.931;$$

$$P_{3 K3} = S_3 x W_{3 K33} = 0.798;$$

$$P_{4 \text{ K3}} = S_4 \times W_{3 \text{ K34}} = 0.927;$$

$$P_{5 \text{ K3}} = S_5 \times W_{3 \text{ K35}} = 1.277.$$

Найдем пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{max\;K3} = P_{1K3} + P_{2K3} + P_{3K3} + P_{4K3} + P_{5K3} = 5.377.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$\text{IIC}_{K3} = (\lambda_{\text{max K3}} - n)/(n - 1) = 0.094.$$

Найдено отношение согласованности ОС.

$$OC_{K3} = HC/CH = 0.084$$
.

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица К 3 (стоимость обучения) согласована.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 4 – рейтинг университета (Таблица 1.5.5).

Таблица 1.5.5 – Матрица сравнения по критерию 4.

К4	A1	A2	A3	A4	A5	W_{3K4Y}
A1	1	4	8	1/2	1	0.261
A2	1/4	1	4	1/3	1/3	0.097
A3	1/8	1/4	1	1/8	1/8	0.033
A4	2	3	8	1	1	0.326
A5	1	3	8	1	1	0.283

Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K4} = 1 + 1/4 + 1/8 + 2 + 1 = 4.375;$$

$$S_{2K4} = 4 + 1 + 1/4 + 3 + 3 = 11.25$$
;

$$S_{3K4} = 8 + 4 + 1 + 8 + 8 = 29;$$

$$S_{4K4} = 1/2 + 1/3 + 1/8 + 1 + 1 = 2.958;$$

$$S_{5K4} = 1 + 1/3 + 1/8 + 1 + 1 = 3.458.$$

Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K4} = S_1 \times W_{3K41} = 1.142;$$

$$P_{2K4} = S_2 \times W_{3K42} = 1.091;$$

$$P_{3K4} = S_3 \times W_{3K43} = 0.957;$$

$$P_{4K4} = S_4 \times W_{3K44} = 0.964$$
;

$$P_{5K4} = S_5 \times W_{3K45} = 0.979.$$

Найдена пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{max K4} = P_{1K4} + P_{2K4} + P_{3K4} + P_{4K4} + P_{5K4} = 5.133.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$MC_{K4} = (\lambda_{max K4} - n)/(n - 1) = 0.033.$$

Найдено отношение согласованности ОС.

$$OC_{K4} = HC/CH = 0.029.$$

Значение ОС меньше или равное 0,10 считается приемлемым, значит матрица К 4 (рейтинг университета) согласована.

Определены индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 5 – расстояние до общежития (Таблица 3.5.6).

Таблица 3.5.6 – Матрица сравнения по критерию 5.

К5	A1	A2	A3	A4	A5	W _{3K5Y}
A1	1	5	8	9	2	0.47
A2	1/5	1	4	5	1/3	0.134
A3	1/8	1/4	1	2	1/8	0.048
A4	1/9	1/5	1/2	1	1/8	0.034
A5	1/2	3	8	8	1	0.314

Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K5} = 1 + 1/5 + 1/8 + 1/9 + 1/2 = 1.936$$
;

$$S_{2K5} = 5 + 1 + 1/4 + 1/5 + 3 = 9.45;$$

$$S_{3K5} = 8 + 4 + 1 + 1/2 + 8 = 21.5;$$

$$S_{4K5} = 9 + 5 + 2 + 1 + 8 = 25$$
;

$$S_{5K5} = 2 + 1/3 + 1/8 + 1/8 + 1 = 3.583.$$

Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K5} = S_1 \times W_{3 K41} = 0.91;$$

$$P_{2K5} = S_2 \times W_{3 K42} = 1.266;$$

$$P_{3K5} = S_3 \times W_{3K43} = 1.032;$$

$$P_{4K5} = S_1 \times W_{3 K44} = 0.85;$$

$$P_{5K5} = S_1 \times W_{3 K45} = 1.125.$$

Найдена пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\text{max K5}} = P_{1\text{K5}} + P_{2\text{K5}} + P_{3\text{K5}} + P_{4\text{K5}} + P_{5\text{K5}} = 5.183.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$\text{MC}_{\text{K5}} = (\lambda_{\text{max K5}} - n)/(n - 1) = 0.046.$$

Найдено отношение согласованности ОС.

$$OC_{K5} = UC/CU = 0.041$$
.

Значение ОС меньше или равное 0,10 считается приемлемым, значит матрица К 5 (расстояние до общежития) согласована.

1.6 Синтез альтернатив

Векторы приоритетов и отношения согласованности определяются для всех матриц суждений, начиная со второго уровня.

Для определения приоритетов альтернатив локальные приоритеты умножены на приоритет соответствующего критерия на высшем уровне и найдены суммы по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент.

$$W_{2i} = (Y_{21} = 0.245; Y_{22} = 0.135; Y_{23} = 0.093; Y_{24} = 0.446; Y_{25} = 0.081);$$

$$W_{3K1Y} = (Y_{311}=0.195; Y_{312}=0.279; Y_{313}=0.04; Y_{314}=0.408; Y_{315}=0.078);$$

$$W_{3K2Y} = (Y_{321} = 0.074; Y_{322} = 0.038; Y_{323} = 0.415; Y_{324} = 0.209; Y_{325} = 0.264);$$

$$W_{3K3Y} = (Y_{331} = 0.107; \ Y_{332} = 0.578; \ Y_{333} = 0.038; \ Y_{334} = 0.053; \ Y_{335} = 0.224);$$

$$W_{3K4Y} = (Y_{341} = 0.261; Y_{342} = 0.097; Y_{343} = 0.033; Y_{344} = 0.326; Y_{345} = 0.283);$$

$$W_{3K5Y} = (Y_{351} = 0.47; Y_{352} = 0.134; Y_{353} = 0.048; Y_{354} = 0.034; Y_{355} = 0.314).$$

Приоритеты альтернатив получены следующим образом:

$$W_1 = W_{21} x W_{3K11} + W_{22} x W_{3K21} + W_{23} x W_{3K31} + W_{24} x W_{3K41} + W_{25} x W_{3K51} = 0.222.$$

 $W_2 = W_{21} x W_{3K12} + W_{22} x W_{3K22} + W_{23} x W_{3K32} + W_{24} x W_{3K42} + W_{25} x W_{3K52} = 0.181.$

 $W_3 = W_{21} \, x \, W_{3K13} + W_{22} \, x \, W_{3K23} + W_{23} \, x \, W_{3K33} + W_{24} \, x \, W_{3K43} + W_{25} \, x \, W_{3K53} = 0.088.$

 $W_4 = W_{21} \, x \, W_{3K14} + W_{22} \, x \, W_{3K24} + W_{23} \, x \, W_{3K34} + W_{24} \, x \, W_{3K44} + W_{25} \, x \, W_{3K54} = 0.281.$

 $W_5 = W_{21} \, x \, W_{3K15} + W_{22} \, x \, W_{3K25} + W_{23} \, x \, W_{3K35} + W_{24} \, x \, W_{3K45} + W_{25} \, x \, W_{3K55} = 0.227.$

Таким образом, приоритеты альтернатив равны: альтернатива A1 (МГТУ имени Н.Э. Баумана) - W_1 приоритет равен = 0.222;

альтернатива A2 (ВШЭ)- W_2 приоритет равен = 0.181; альтернатива A3 (МАИ) - W_3 приоритет равен = 0.088; альтернатива A4 (НИЯУ МИФИ) – W_4 приоритет равен = 0.281; альтернатива A5 (МФТИ) - W_5 приоритет равен = 0.227.

1.7 Вывод

Самой оптимальной является та альтернатива, приоритет которой максимален. Такой альтернативой является А4.

1.8 Результаты работы программы

	Матрица парного сравнения критериев
0 1 2 3 4	
: : : : :	
0 1 2 2 0.5 4	
1 0.5 1 2 0.2 2	
2 0.5 0.5 1 0.125 2	
3 2 5 8 1 2	
4 0.25 0.5 0.5 0.5 1	

Рисунок 2 – Матрица парного сравнения критериев

	Матрица сравнения по критерию 1 (проходной балл)
: : : : :	
0 1 0.5 8 0.25 2	
1 2 1 6 0.5 2	
2 0.125 0.167 1 0.2 0.167	
3 4 2 5 1 2	
4 0.5 0.5 0.167 0.5 1	

Рисунок 3 – Сгенерированная матрица для первого критерия

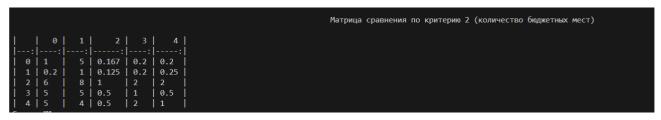


Рисунок 4 – Сгенерированная матрица для второго критерия

	Матрица сравнения по критерию 3 (стоимость обучения)
0 1 2 3 4	
: : : :	
0 1 0.125 4 4 0.25	
1 8 1 9 8 4	
2 0.25 0.111 1 0.5 0.2	
3 0.25 0.125 2 1 0.25	
4 4 0.25 5 4 1	

Рисунок 5 – Сгенерированная матрица для третьего критерия

	Матрица сравнения по критерию 4 (рейтинг университета)
: : : : :	
0 1 4 8 0.5 1	
1 0.25 1 4 0.333 0.333	
2 0.125 0.25 1 0.125 0.125	
3 2 3 8 1 1	
4 1 3 8 1 1	

Рисунок 6 – Сгенерированная матрица для четвёртого критерия

	Матрица сравнения по критерию 5 (расстояние до общежития)
0 1 2 3 4	
: : : : 0 1	
1 0.2 1 4 5 0.333	
2 0.125 0.25 1	
3 0.111 0.2 0.5 1 0.125 4 0.5 3 8 8 1	

Рисунок 7 – Сгенерированная матрица для пятого критерия

```
Приоритеты альтернатив получены следующим образом:

W1 = W21 * W3K11 + W22 * W3K21 + W23 * W3K31 + W24 * W3K41 + W25 * W3K51 = 0.222

W2 = W21 * W3K12 + W22 * W3K22 + W23 * W3K32 + W24 * W3K42 + W25 * W3K52 = 0.181

W3 = W21 * W3K13 + W22 * W3K23 + W23 * W3K33 + W24 * W3K43 + W25 * W3K53 = 0.088

W4 = W21 * W3K14 + W22 * W3K24 + W23 * W3K34 + W24 * W3K44 + W25 * W3K54 = 0.281

W5 = W21 * W3K15 + W22 * W3K25 + W23 * W3K35 + W24 * W3K45 + W25 * W3K55 = 0.227

Таким образом, приоритеты альтернатив равны:
альтернатива А1 - W1 приоритет равен 0.222
альтернатива А2 - W2 приоритет равен 0.181
альтернатива А3 - W3 приоритет равен 0.088
альтернатива А4 - W4 приоритет равен 0.281
альтернатива А5 - W5 приоритет равен 0.227

PS C:\python_projects>
```

Рисунок 8 – Результат работы программы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы мной был изучен метод анализа иерархий, проведён его ручной расчёт для 5 критериев и 5 альтернатив. Преимуществом метода является гарантированное получение единственного оптимального решения, а недостатком является требование соблюдать согласованность матриц приоритетов, из-за чего необходимо проводить повторные расчёты в случае, если матрица не согласована.

СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1. Болотова Л. С. Многокритериальная оптимизация. Болотова Л. С., Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Метод. указания по вып. курсовой работы М.: МИРЭА, 2015.
- 2. Сорокин А. Б. Методы оптимизации: гибридные генетические алгоритмы. Сорокин А. Б. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие М.: МИРЭА, 2016.
- 3. Сорокин А. Б. Линейное программирование: практикум. Сорокин А. Б., Бражникова Е. В., Платонова О. В. [Электронный ресурс] / Учебно-метод. пособие М.: МИРЭА, 2017.

приложения

Приложение A- Код реализации МАИ на языке Python.

Приложение А

Код реализации МАИ на языке Python.

Листинг А.1. Реализация МАИ.

```
import pandas as pd
import functools
NUM CRITERIA = 5 # Количество критериев для сравнения
NUM ALTERNATIVES = 5 # Количество альтернатив
СИ = 1.12 # среднее значение индекса случайной согласованности
def print table(data):
    '''Функция для вывода таблицы'''
    print(pd.DataFrame(data).to markdown())
def relative value(data, MATRIX SIZE=NUM CRITERIA):
    '''Функция для определения относительной ценности элемента (геометрическое
среднее) '''
    return round(functools.reduce(lambda a, b: a * b, data) ** (1 /
MATRIX SIZE), 3)
def compare by criteria(data, index):
    '''Функция для сравнения в пределах матрицы сравнения по критерию N'''
    V = []
    for i in range(NUM ALTERNATIVES):
        val = relative value(data[i])
        print(
            f'CTPORA N{i + 1}nVk{index}{i+1} = ({" * ".join([str(i) for i in
data[i]])}) ^ 1/{NUM ALTERNATIVES} = {val}')
        V.append(val)
    print(
        f'Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен
нормирующий коэффициент \sum VK\{index\}Y.')
    print(
        f'\textstyVK\{index\}Y = VK\{index\}1 + VK\{index\}2 + VK\{index\}3 + VK\{index\}4 +
VK\{index\}5 = {" + ".join([str(i) for i in V])} = {round(sum(V), 3)}.')
        f'Найдена важность приоритетов W3K\{index\}Y, для этого каждое из чисел
VK{index}Y разделено на ∑VK{index}Y.')
    Y = []
    for i in range(NUM ALTERNATIVES):
        Y.append(round(V[i] / sum(V), 3))
        print(
            f'CTPOKA N{i + 1}\NW3K{index}{i + 1} = {V[i]} / \Sigma Vi = {V[i]} /
\{sum(V)\} = \{Y[i]\};')
    print('В результате получаем вектор приоритетов:')
   print(f'W3K\{index\}Y = (\{"; ".join([f"Y3\{index\}\{i + 1\} = \{Y[i]\}" for i in
range(len(Y))])}), '
         + f'где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему
уровню иерархии критерия K{index}.')
   return Y
def check matrix consistency(data, priority vector, index):
```

Продолжение Листинга А.1.

```
print(
        f'Определены индекс согласованности и отношение согласованности для
матрицы K{index}')
    print('Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.')
    counter = 1
    S = []
    for i in zip(*data):
        S.append(sum(i))
        print(
            f'S\{counter\}K\{index\} = \{" + ".join([str(i) for i in list(i)])\} =
{sum(i)}')
        counter += 1
    print('Затем полученный результат умножен на компоненту нормализованного
вектора приоритетов.')
    P = []
    for i in range(len(S)):
        P.append(round(S[i] * priority_vector[i], 3))
        print(f'P\{i + 1\}K\{index\} = S\{i + 1\} * W3K\{index\}\{i + 1\} = \{P[i]\}')
    print('Найдена пропорциональность предпочтений.')
    print(f'\maxK{index} = P1K{index} + P2K{index} + P3K{index} + P4K{index} +
P5K\{index\} = \{round(sum(P), 3)\}')
    print('Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.')
    MC = round((round(sum(P), 3) - 5) / (5 - 1), 3)
    print(
        f'MCk\{index\} = (\lambda maxK\{index\} - n)/(n - 1) = (\{round(sum(P), 3)\}-5)/(5-1)
= {MC}.')
   print('Найдено отношение согласованности ОС.')
    print(f'OCk{index} = MC/CM = {round(MC / CM, 3)}.')
def synthesis of alternatives (Y, full Y):
   print(f'Векторы приоритетов и отношения согласованности определяются для
всех матриц суждений, начиная со второго уровня.\n' +
          f'Для определения приоритетов альтернатив локальные приоритеты
умножены на приоритет соответствующего критерия +
          f'на высшем уровне и найдены суммы по каждому элементу в соответствии
с критериями, на которые воздействует этот элемент.')
        f'W2i = ({"; ".join([f''Y2{i + 1}] = {Y[i]}" for i in range(len(Y))])});')
    for i in range(len(full Y)):
            f'W3K{i + 1}Y = ({"; ".join([f"Y3{i + 1}{j + 1}] = {full Y[i][j]}"}
for j in range(len(full Y[i]))]);')
    print('Приоритеты альтернатив получены следующим образом:')
    winners = []
    counter = 0
    for v in zip(*full Y):
        curr str = str()
        w = \overline{0}
        counter += 1
        curr str += f'W{counter} = '
        for i in range(len(v)):
            curr str += f'W2\{i + 1\} * W3K\{i + 1\}\{counter\} + '
            w += (v[i] * Y[i])
        w = round(w, 3)
        print(curr_str.rstrip(' + ') + ' = ' + str(w))
        winners.append(w)
    print('Таким образом, приоритеты альтернатив равны:')
    for i in range (NUM ALTERNATIVES):
        print(f'альтернатива A\{i+1\} - W\{i+1\} приоритет равен {winners[i]}')
    return winners
```

```
with open('TPR PRACT3.csv', encoding='utf-8') as file:
    title = file.readline().rstrip() # Текущая матрица, которая будет считана
    print(title.center(201))
    criteria paired comparison matrix = [[float(i) for i in
file.readline().rstrip(
    ).split(',')] for in range(NUM CRITERIA)] # Матрица парного сравнения
критериев
    print table(criteria paired comparison matrix)
    print('Для определения относительной ценности каждого элемента необходимо
найти геометрическое' +
         ' среднее и с этой целью перемножить п элементов каждой строки и из
полученного' +
          ' результата извлечь корни n-й степени (размерность матрицы n=5).')
    V = []
    for i in range(NUM CRITERIA):
        val = relative value(criteria paired comparison matrix[i])
        print(
            f'Cтрока N!{i + 1} \setminus nV{i + 1} = ({" * ".join([str(i) for i in
criteria paired comparison matrix[i]]))) ^ 1/{NUM CRITERIA} = {val}')
        V.append(val)
    print('Проведена нормализация полученных чисел. Для этого определен
нормирующий коэффициент ∑Vi.')
        f'_{Vi} = V1 + V2 + V3 + V4 + V5 = {" + ".join([str(i) for i in V])} =
{round(sum(V),3)}')
    print('Найдена важность приоритетов W2i, для этого каждое из чисел Vi
разделено на ∑Vi.')
   Y = [] # Вектор приоритетов W2i
    for i in range(NUM CRITERIA):
        Y.append(round(V[i] / sum(V), 3))
            f'Ctpoka N^{(i + 1)} \times (i + 1) = \{V[i]\} / \sum Vi = \{Y[i]\} = Y\{2\}\{i + 1\}'\}
    print(f'B результате получен вектор приоритетов:\nW2i = ({"; ".join([f"Y2{i}])})
+ 1 = {Y[i]}" for i in range(len(Y))])}), '
          + 'где индекс 2 означает, что вектор приоритетов относится ко второму
уровню иерархии.')
   big data, full Y = [], []
    for i in range (NUM CRITERIA):
        title = file.readline().rstrip()
        print(title.center(201))
        data = [[float(i) for i in file.readline().rstrip().split(',')] for in
range (
            NUM ALTERNATIVES)] # Матрица сравнения по і + 1-ому критерию
        big data.append(data)
        print table(data)
        Yi = compare by criteria(data, i + 1)
        full Y.append(Yi)
    print('Определены индекс согласованности и отношение согласованности для
матрицы «Выбор лучшего технического вуза»')
    print('Определена сумма каждого столбца матрицы суждений.')
    counter = 1
    S = []
    for i in zip(*criteria_paired_comparison_matrix):
        S.append(sum(i))
        print(
            f'S\{counter\} = \{" + ".join([str(i) for i in list(i)])\} = \{sum(i)\}'\}
        counter += 1
    print(f'Полученный результат умножен на компоненту нормализованного вектора
          f'т.е. сумму суждений первого столбца на первую компоненту, сумму
```

Продолжение Листинга А.1.

```
суждений второго столбца - на вторую и т.д.')
    P = []
    for i in range(len(S)):
        P.append(round(S[i] * Y[i], 3))
        print(f'P\{i + 1\} = S\{i + 1\} * W2\{i + 1\} = \{P[i]\}')
    print(f'Сумма чисел Рј отражает пропорциональность предпочтений, ' +
         f'чем ближе эта величина к n (числу объектов и видов действия в
матрице парных сравнений), тем более согласованны суждения.')
   print(f'\lambda max = P1 + P2 + P3 + P4 + P5 = \{round(sum(P), 3)\}')
    print('Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.')
    MC = round((round(sum(P), 3) - 5) / (5 - 1), 3)
    print(f'MC = (\lambda max - n)/(n - 1) = (\{round(sum(P), 3)\}-5)/(5-1) = \{MC\}.')
    print('Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного
индекса согласованности СИ называется отношением согласованности ОС.')
   print(f'OC = MC/CM = \{round(MC / CM, 3)\}.')
    for i in range (NUM CRITERIA):
        print('\n')
        check matrix consistency(big data[i], full Y[i], i + 1)
    synthesis of alternatives (Y, full Y)
```