ЛЕКЦИЯ 2. Сужение множества Парето

Множество Парето

Предположим необходимо выбрать место работы из девяти вариантов. В качестве критериев взяты: зарплата (З в рублях, стремление положительное $+$), длительность отпуска (Д в днях, стремление положительное $+$) и время поездки (В в минутах, стремление $-$). Из смысла задачи следует, что критерии З и Д следует максимизировать, а критерий В – минимизировать

№	Альтернативы	Критерий		
		Зарплата, (руб.) $+$	Длительность отпуска, (дни) $+$	Время поездки, (мин) $-$
1	A1	900	20	60
2	A2	700	30	20
3	A3	700	36	40
4	A4	800	40	50
5	A5	400	60	15
6	A6	600	30	10
7	A7	900	35	60
8	A8	600	24	10
9	A9	650	35	40

1 и 2 – несравнимы (н);

1 и 3 – н;

1 и 4 – н;

1 и 5 – н;

1 и 6 – н;

1 и 7 – **7 доминирует**;

1 и 8 – н;

1 и 9 – н;

Таким образом, предположим выделяются Парето-оптимальные варианты $p = \{3,4,5,6,7\}$ и доминируемые по Парето варианты $q = \{1,2,8,9\}$

Рассмотрим методы которые приводят к сужению множества Парето.

Сужение множества Парето

Мы нашли множество Парето оптимальных решений.

№	Альтернативы	Критерий		
		Зарплата,	Длительность	Время

		(руб.)	отпуска, (дни)	поездки, (мин)
3	А3	700	36	40
4	А4	800	40	50
5	А5	400	60	15
6	А6	600	30	10
7	А7	900	35	60

Было определено, что оптимизация по Парето использует отношение Парето-доминирования, которое отдаёт предпочтение одному объекту перед другим только» том случае, когда первый объект по всем критериям не хуже второго и хотя бы но одному из них лучше. При истинности этого условия первый объект считается *доминирующим, а второй* - *доминируемым.* Два объекта, для которых предпочтение хотя бы, по одному критерию расходится, считаются *несравнимыми.*

Очевидно, что выделение множества Парето часто не является удовлетворительным решением. Это связано с тем, что при достаточно большом исходном множестве вариантов множество Парето оказывается недопустимо большим для того, чтобы ЛПР было бы в состоянии осуществить выбор самостоятельно. Таким образом, выделение множества Парето можно рассматривать лишь как предварительный этап оптимизации, и налицо проблема дальнейшего сокращения этого множества.

Для выбора одной оптимальной стратегии из множества эффективных решений в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию.

Общая методика исследования задач принятия решения на основе математического моделирования для задач МКО должна быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

Первый подход. Для заданной многокритериальной задачи оптимизации находится множество её Парето-оптимальных решений, а выбор конкретного оптимального варианта из множества Парето-оптимальных предоставляется ЛПР.

Второй подход. Производится сужение множества Парето-оптимальных исходов (в идеале – до одного элемента) с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный исход для ЛПР.

Рассмотрим некоторые простейшие способы сужения Парето-оптимального множества, акцентируя при этом внимание на необходимость дополнительной информации.

Указание верхних/нижних границ критериев. Дополнительная информация об оптимальном исходе $Xopt \in D$ в этом случае имеет вид

$$F_i(X_{opt}) \le C_i, i = \overline{1,m}.$$

Число Ci рассматривается здесь как верхняя граница по i – му критерию. Соответственно для установления нижних границ используется знак «больше или равно».

Наложим, например, следующие ограничения на оптимальное решение:

- зарплата — не менее 500 рублей;

  Отбрасывается 5 вариант
- длительность отпуска — не менее 30 дней;

  Остаются все варианты
- время поездки — не более 40 минут.

  Отбрасывается 4 и 7 варианты

Варианты, удовлетворяющие этим дополнительным ограничения: из них оптимальными по Парето являются варианты 3 и 6. Остаётся сделать окончательный выбор между вариантами 3 и 6.

Основной недостаток метода состоит в том, что оптимальное решение становится здесь субъективным, так как зависит, во - первых, от величин назначаемых верхних/нижних границ критериев и, во-вторых, от окончательного выбора, совершаемого принимающим решение.

Субоптимизация. производят следующим образом: выделяют один из критериев, а по всем остальным критериям назначают нижние границы. Оптимальным при этом считается исход, максимизирующий выделенный критерий на множестве исходов, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных.

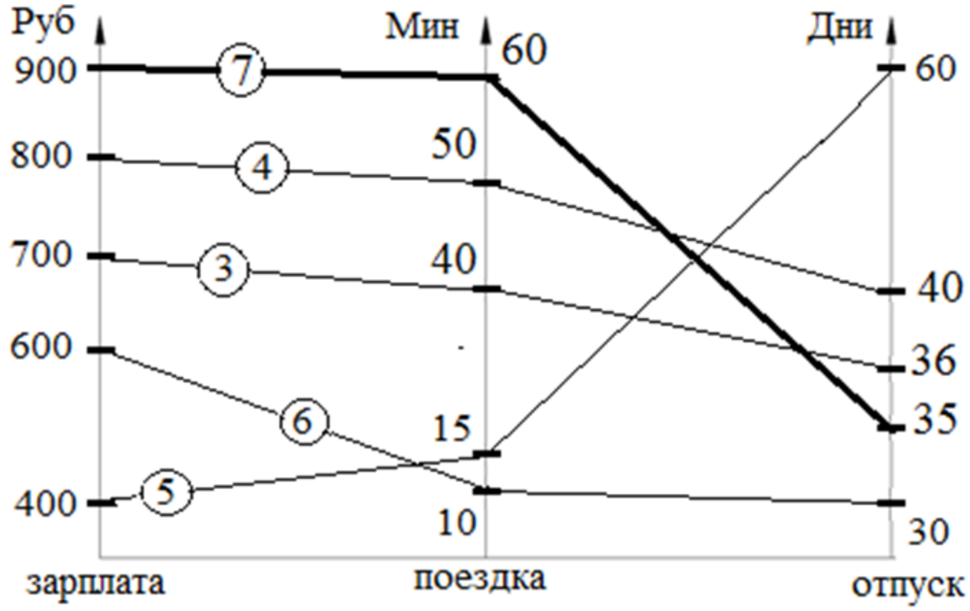
Пусть в качестве главного критерия выступает критерий зарплата; Ограничения

- длительность отпуска — не менее 30 дней;
- время поездки — не более 40 минут.

Отбросим варианты, которые не удовлетворяют данным ограничениям: {4, 7}. Из них максимальную зарплату имеет вариант 3. *Этот вариант и будет оптимальным.*

Лексикографическая оптимизация Основана на упорядочении критериев по их относительной важности. Процедуру нахождения оптимального решения проводят следующим образом: На первом шаге отбирают исходы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такой исход единственный, то его и считают оптимальным. Если же таких исходов несколько, то среди них отбирают те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию. В результате такой процедуры всегда остается как правило один исход.

Упорядочим критерии по относительной важности. *Например*, следующим образом: $З \succ В \succ Д$ (т.е. важнейший критерий — *зарплата*, следующий за ним по важности *время поездки*, наименее важный критерий *длительность отпуска*).



Максимальное значение по критерию Зарплата имеют вариант 7. Далее сравниваем эти варианты по второму по важности критерию Время поездки. Потом переходим к третьему критерию Длительность отпуска. *Лучшим является вариант 7*, который и является здесь оптимальным.

При упорядочении $В \succ Д \succ З$ оптимальным является вариант 6, а при упорядочении $Д \succ З \succ В$ – оптимальным становится вариант 5.

Проблемы решения задач методом Парето

1. Несравнимость решений.

Несравнимость решений является формой неопределённости, которая, в отличие от неопределённости, вызванной воздействием среды, связана со стремлением лица принимающего решение "достичь противоречивых целей" и может быть названа ценностной неопределённостью. Выбор между несравнимыми решениями является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

2. Нормализация критериев.

Так как частные критерии имеют различный физический смысл, т.е.

измеряются в различных единицах; масштабы их не соизмеримы, поэтому невозможно сравнение качества полученных результатов по каждому критерию.

Операция приведения масштабов локальных критериев к единому, обычно безразмерному, носит название нормализации критериев.

После нормализации частных критериев векторные критерии приобретают некоторые полезные свойства.

3. Выбор принципа оптимальности.

Требуется определить правило, которое позволило бы сказать какое решение лучше. Выбор принципа оптимальности – основная проблема векторной оптимизации. Формально описать принцип оптимальности (критерии "правильности решения") – оказывается затруднительным.

Оценивая в целом метод Парето оптимизации, можно заметить, что все они, так или иначе, сводятся к сужению множества Парето с последующим выбором одного решения лицом, принимающим решение (ЛПР).

1. ЭЛЕКТРА

Основу методологии решающих правил основанных на порогах чувствительности составляют методы класса ЭЛЕКТРА, которые были разработана коллективом французских ученых, возглавляемым профессором Б. Руа. В настоящее время разработан ряд методов семейства ЭЛЕКТРА.

ЭЛЕКТРА I позволяет из множества вариантов исключить неэффективные варианты. В основе данного метода лежит попарное сравнение отдельных вариантов.

ЭЛЕКТРА II служит для упорядочения индифферентных классов вариантов.

ЭЛЕКТРА III отличается от метода ЭЛЕКТРА 2 способом задания порогов чувствительности.

В данных подходах принято различать 2 этапа:

1) этап разработки, на котором строятся один или несколько индексов попарного сравнения альтернатив;

2) этап исследования, на котором построенные индексы используются для ранжирования (или классификации) заданного множества альтернатив.

На ***первом этапе*** определяется множество решений и для каждого из N критериев определяется вес – число, характеризующее важность соответствующего критерия. Вес критерия можно установить множеством способов (ранжированием, экспертных оценок и т.д.), предлагается взять за пример следующий пример табл. 2.1.

Таблица 2.1

Критерий	Вес	Шкала	Код	Стремление
Цена	5	Высокая Средняя Низкая	15 10 5	min
Площадь квартиры	5	Большая Средняя Маленькая	15 10 5	max
Удаленность от метро	4	Близко Не далеко Очень далеко	12 8 4	max
Рейтинг района нахождения квартиры	4	Хороший Средний Низкий	10 8 4	max
Качество состояния квартиры	4	Отличное Среднее Плохое	12 8 4	max
Санузел (совмещенный/раздельный)	2	Раздельный Совмещенный	4 2	max

Далее эксперт (на основании табл. 2.1) составляет таблицу оценок вариантов решений (табл. 2.2).

Таблица 2.2

		Цена	Площадь квартиры	Удаленность от метро	Рейтинг района	Качество состояния квартиры	Санузел
1	Ясенево	10	5	12	10	8	4
2	Медведково	5	15	4	10	8	4
3	Солнцево	15	5	4	8	4	2
4	Северное Бутово	5	5	12	10	4	4
5	Марьино	15	10	12	10	12	4
6	Восточное Бирюлево	10	15	4	8	12	2
7	Гольяново	15	5	8	8	4	2
8	Новокосино	10	10	12	4	4	2
9	Митино	5	15	12	10	8	4

	Вес	5	5	4	4	4	2
	Стремление	min	max	max	max	max	max

Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы *Ai* над альтернативой *Aj*. Множество *I*, состоящее из *N* критериев, разбивается на 3 подмножества:

I^+ – подмножество критериев, по которым *Ai* предпочтительнее *Aj*.

I^- – подмножество критериев, по которым *Aj* предпочтительнее *Ai*.

$I^=$ – подмножество критериев, по которым *Ai* равноценна *Aj*.

Далее определяется относительная важность P^+_{xy}, $P^=_{xy}$, P^-_{xy}, каждого из этих подмножеств

$$P^*_{xy} = \sum_{t \in I^*(x,y)} p_t \quad ,* \in \{+,-,=\}$$

Устанавливается также некоторый порог *c* считается, что вариант *x* превосходит вариант *y* только в том случае, когда некоторая функция, называемая индексом согласия, удовлетворяет условию

$$f(P^+_{xy}, P^=_{xy}, P^-_{xy}) \geq c$$

Вид функции *f* определяется по своему для каждой модификации метода ЭЛЕКТРА. В качестве условия в методе ЭЛЕКТРА I предлагается рассматривать выражение вида:

$$x \succ y \Leftrightarrow \frac{P^+_{xy} + P^=_{xy}}{\sum_{i=1} P_i} > c_1, \cdot (\frac{1}{2} \leq c_1 \leq 1).$$

в методе ЭЛЕКТРА II – выражение вида:

$$x \succ y \Leftrightarrow \frac{P^+_{xy}}{P^-_{xy}} > c_2, (c_2 \geq 1)$$

Следует отметить, что условие можно применять лишь тогда, когда сравнение альтернатив происходит в строгих шкалах (тогда множество $P^=_{xy}$ пусто) или когда число совпадающих оценок у различных вариантов достаточно мало по сравнению с *N*. В противном случае отношение предпочтения, может оказаться симметричным: *x* лучше *y* ($x \succ y$) и *y* лучше *x* ($y \succ x$) одновременно.

Условие «согласия» является необходимым, но не достаточным условием превосходства *x* над *y* (очень маленький выигрыш по одному критерию может компенсировать очень большой проигрыш по другому). Для того чтобы эту погрешность исключить, в методе «ЭЛЕКТРА» пытаются *не сравнивать очень сильно различающиеся альтернативы*. Они просто объявляются несравнимыми.

Вводится так называемый «индекс несогласия»:

x и y несравнимы, если $dxy \le d$,

где dxy – расстояние между x и y определяется как max_i/x_i - $y_i/$, а d – т.н. порог индекса несогласия. Теперь введённые нами раньше соотношения модифицируются так:

в ЭЛЕКТРА I

$$x \succ y \Leftrightarrow \frac{P_{xy}^{+} + P_{xy}^{=}}{\sum_{i=1}^{n} P_i} > c_1 \wedge d_{xy} < d$$

в ЭЛЕКТРА II

$$x \succ y \Leftrightarrow \frac{P_{xy}^{+}}{P_{xy}^{-}} > c_2 \wedge d_{xy} < d$$

Для практической реализации предлагается следующее решающее правило и нотация.

Рассматриваем все пары альтернатив i и j (табл. 2.2). Если по какому-либо критерию i-ый проект лучше, чем j-ый, то соответствующий критерию вес прибавляется к *Pij* (эти баллы символизируют выбор «*За*»), в противном случае — к *Nij* (эти баллы символизируют выбор «*Против*»). То же самое справедливо для j-го проекта: если j-ый проект оказывается лучше, чем i-ый, то соответствующий критерию вес прибавляется к *Pji*, в противном случае — к *Nji* (обратите внимание на порядок следования индексов j и i у P и N). Если повстречалось одинаковое для i-го и для j-го проектов значение критерия, то оно пропускается.

Затем, когда по паре i и j рассмотрены все критерии, находятся отношения $Dij = Pij/Nij$ и $Dji = Pji/Nji$ (ЭЛЕКТРА II). Значения $D \le 1$ отбрасываются. Заметим, что $Dji = 1/Dij$ (и наоборот), таким образом, вычисления можно несколько упростить.

Рассмотрим в примере сравнение альтернативы 1 (Ясенево) с альтернаивой 2 (Медведково) (i = 1, j = 2):

– по критерию 1 «Цена» альтернатива 1 хуже альтернативы 2. Тогда в гипотезе «*За*» устанавливаем «0», а в гипотезе «*Против*» – «5» (вес критерия, стремление к min);

– по критерию «Площадь квартиры» альтернатива 1 хуже альтернативы 2. Тогда в гипотезе «*За*» устанавливаем «0», а в гипотезе «*Против*» – «5» (вес критерия, стремление к max);

– по критерию «Удаленность от метро» альтернатива 1 лучше альтернативы 2. Тогда в гипотезе «*За*» устанавливаем «4» (вес критерия, стремление к max), а в гипотезе «*Против*» – «0»;

– по критериям «Рейтинг района», «Состояние квартиры» и «Санузел» критерии имеют одинаковые значения. Тогда в гипотезе «*За*» устанавливаем «0», и в гипотезе «*Против*» – «0»;

Подсчитываем в гипотезах «*За*» и «*Против*» сумму весов:

P_{12} = 0+0+4+0+0+0=4

N_{12} = 5+5+0+0+0+0=10

Определяем D_{12}:

$D_{12} = P_{12}/N_{12} = 4/10 = 0,4 < 1$ – отбрасываем

Далее сравниваются альтернатива 2 с альтернативой 1

P_{21} = 5+5+0+0+0+0=10

N_{21} = 0+0+4+0+0+0=4

$D_{21} = P_{21}/N_{21} = 10/4 = 2,5 > 1$– принимаем

Сравним альтернативу 5 с альтернативой 6

P_{56} = 0+0+4+4+0+2=10

N_{56} = 5+5+0+0+0+0=10

$D_{56} = P_{56}/N_{56} = 10/10 = 1$ – отбрасываем, согласно правилу $D \leq 1$

Тогда отбрасывается и D_{65}

Сравним альтернативу 1 с альтернативой 3

P_{13} = 5+0+4+4+4+2=19

N_{13} = 0+0+0+0+0+0=0

$D_{13} = P_{13}/N_{13}=19/0 = \infty$ – обозначает что выражение не имеет смысла. Выше было определено, *нельзя сравнивать очень различающееся альтернативы.*

Все остальные пары рассчитываются аналогично.

Составляем матрицу, внося вычисленные (и принятые) значения *D*. Матрица имеет смысл предпочтений проектов между собой. Для нашего примера матрица выглядит следующим образом (табл. 2.3).

Таблица 2.3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	x	-	∞	-	-	**1,11**	∞	**1,6**	-
2	**2,5**	x	∞	**2,25**	**1,25**	**2,75**	**5**	**2,25**	-
3	-	-	x	-	-	-	-	-	-
4	**1,25**	-	∞	x	-	**1,66**	∞	**1,8**	-
5	**1,8**	-	∞	**1,8**	x	-	∞	**1,6**	-

6	-	-	∞	-	-	x	**3,5**	**2,16**	-
7	-	-	∞	-	-	-	x	-	-
8	-	-	**3,5**	-	-	-	**4**	x	-
9	**5**	**2**	∞	**4,5**	**1,66**	**3,25**	∞	**9**	x

Из табл. 2.3 видно, вариант 9 (Митино) доминирует над вариантами {1, 2, 4, 5, 6, 8}. Однако строить какие-либо предположения относительно оптимальности других вариантов проблематично. Это показывает граф предпочтений, в котором направление стрелок показывает худшие варианты относительно выбранной альтернативы.

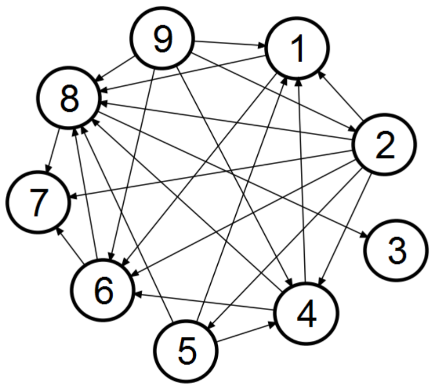


Рис. 2.1

На ***втором этапе*** исследуется матрица и граф предпочтений для ранжирования альтернатив.

Задаемся порогом принятия решения, например С = 1,7, и оставляем в матрице те числа, которые больше или равны значению порога С.

Таблица 2.3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	x	-	∞	-	-	-	∞	-	-
2	**2,5**	x	∞	**2,25**	-	**2,75**	**5**	**2,25**	-
3	-	-	x	-	-	-	-	-	-
4	-	-	∞	x	-	-	∞	**1,8**	-
5	**1,8**	-	∞	**1,8**	x	-	∞	-	-
6	-	-	∞	-	-	x	**3,5**	**2,16**	-
7	-	-	∞	-	-	-	x	-	-
8	-	-	**3,5**	-	-	-	**4**	x	-
9	**5**	**2**	∞	**4,5**	-	**3,25**	∞	**9**	x

По матрице строится граф предпочтений (рис. 2.2). Из графа, построенного по табл. 2.3, видно, что лучшие альтернативы 9 (Митино) и 5 (Марьино). Далее граф формируется следующим образом: альтернатива 2 яруса – 2 (Медведково); альтернативы 3 яруса – 1 (Ясенево), 4 (Северное Бутово) и 6 (Восточное Бирюлево); альтернатива 4 яруса – 8 (Новокосино); альтернативы 5 яруса – 3

(Сонцево) и 4 (Гольяново).

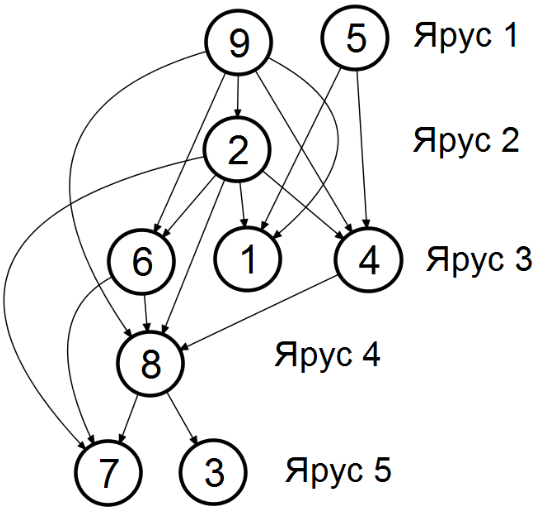


Рис. 2.2

Однако единственный оптимальный вариант не найден. Для его нахождения следует:

– изменить веса критериев и всю процедуру провести снова;

– если разумное изменение весов не помогает, и лучшая альтернатива не найдена, то надо детализировать проблему, добавив критерии.

Как можно видеть, порог С подбирается эмпирически. При малом пороге С, в графе могут быть петли. Пример петли представлен на рис. 2.3.

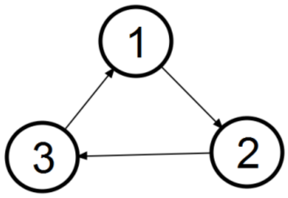


Рис. 2.3

Увеличивая порог С, можно добиться уменьшения количества и устранения малозначащих связей, а также петель. Однако нужно иметь в виду, что при очень высоком значении порога С граф распадется. Например при пороге С=1,9 вариант 5 остается без связей, и поэтому становиться не ясно к какому ярусу его отнести.