

## 1. Метод Анализа Иерархий

Метод Анализа Иерархий (Analytic Hierarchy Process) разработан американским математиком Томасом Саати в 70-х годах прошлого века. **Метод анализа иерархий (МАИ)** является замкнутой логической конструкцией, которая обеспечивает с помощью простых и хорошо обоснованных правил, решение задач МКО, **включающих как качественные, так и количественные факторы, причем количественные факторы могут иметь разную размерность.**

Метод основан на декомпозиции задачи и представлении ее в виде иерархической структуры, что позволяет включить в иерархию все имеющиеся у лица, принимающего решение знания по решаемой проблеме и последующей обработке суждений. В результате может быть выявлена относительная степень взаимодействия элементов в иерархии, которые затем выражаются численно. **МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.**

Весь процесс решения подвергается проверке и переосмыслению на каждом этапе, что позволяет проводить оценку качества полученного решения. Решение многокритериального выбора основано на трех основных этапах:

**Первый этап – представление системы критериев (целей) в виде иерархической структуры.**

**Второй этап – оценки приоритетов (весов) критериев с учётом их места в иерархии относительной важности.**

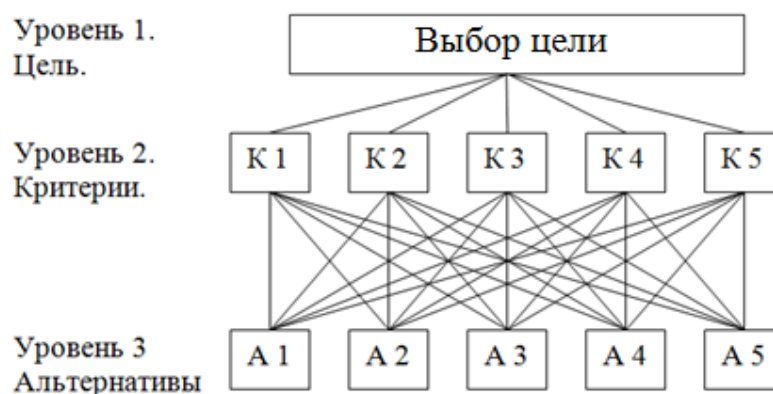
**Третий этап – определение лучшей альтернативы по значениям её характеристик и важности критериев.**

**Первый этап** – предусматривает представление проблемы в виде иерархии. Иерархия – некоторая абстракция структуры системы, предназначенная для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействий на систему в целом.

Преимущества использования иерархий в качестве описания задачи принятия решений:

- иерархическое представление задачи позволяет описывать влияние элементов иерархии одного уровня на элементы другого уровня;
- построение иерархии исходит из способа мышления человека (определение объектов и установление связей между ними);
- иерархия устойчива и гибка в том смысле, что малые ее изменения (удаление и добавление элементов) не разрушают ее характеристик.

В вершине иерархии, используемой в МАИ для представления задачи принятия решений, располагается основная цель, далее, на уровень ниже – подцели (критерии), и наконец, на самом нижнем уровне – альтернативы. Иерархия считается полной, если каждый элемент заданного уровня является критерием для всех элементов нижнего уровня.



Первый этап обусловлен **психологическим фактором**, который требует обсуждения, чтобы быть уверенными, что критерии (факторы) отражают весь диапазон предпочтений и восприятия участников решения проблемы. Необязательно, чтобы все участники в процессе планирования пришли к согласию по всем компонентам проблемы. **Например, не все критерии могут быть включены в иерархию.** Участники решения задачи могут выразить свои предпочтения относительно критериев и альтернатив. Другими словами, при начальном иерархическом описании задачи **нет необходимости чувствовать ограничения.** Самое важное, чтобы знания и суждения отдельного лица или группы лиц имели возможность быть адекватно и точно выражены. **Первостепенное значение здесь приобретает дипломатичность и умение прислушаться к чужому мнению.**

Например:

**Выбор смесителя в проект «Умный дом»**

Критерии:

К 1 - **интегрирование в систему «умный дом»;**

К 2 - **экономия воды (время необходимое на регулирование температуры и напора воды);**

К 3 - **бесконтактность (не прикасаться к смесителю грязными руками, для регулирования температуры и напора воды);**

К 4 – **вандалоустойчивость;**

К 5 – **стоимость смесителя.**

Альтернативы:

А 1 - **смеситель с отдельными кранами;**

А 2 - **смеситель однорычажный;**

А 3 - **смеситель со встроенным термостатом (с механической регулировкой температуры и напора);**

А 4 - **бесконтактный (электронный) смеситель и термостат (с постоянной температурой и напором);**

А 5 - **электронный сенсорный смеситель;**

**Второй этап** заключается в установлении приоритетов критериев и оценке каждой из альтернатив по критериям, определив наиболее важную из них.

В МАИ элементы сравниваются попарно по отношению к их влиянию на общую для них характеристику. Парные сравнения приводят к записи характеристик сравнений в виде квадратной таблицы чисел (матрицы). Сравнивая

набор критериев друг с другом, получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Эта матрица обратно симметричная, т.е. имеет место свойство  $a_{ij}=1/a_{ji}$ , где индексы  $i$  и  $j$  - номер строки и номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

При сравнении элемента с самим собой имеем равную значимость, так что на пересечение строки и столбца с одинаковыми номерами заносим единицу. Поэтому **главная диагональ должна состоять из единиц**. Таким образом, матрица парных суждений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \Lambda & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & a_{23} & \Lambda & a_{2n} \\ \frac{1}{a_{13}} & \frac{1}{a_{23}} & 1 & \Lambda & a_{3n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \frac{1}{a_{3n}} & \Lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы попарных сравнений должны быть построены для элементов **уровней цели и критериев**, если число уровней в иерархии равно 3. Таким образом, при любом количестве уровней последний уровень не рассматривается. Элементы уровня рассматриваются по отношению к вышележащим уровням.

**Для проведения субъективных парных сравнений** в МАИ разработана шкала, представленная в табл. 1.

Таблица 1

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснение
<b>1</b>	Равная важность	Равный вклад двух критериев в цель.
<b>3</b>	Незначительное превосходство	Дают легкое превосходство одной альтернативы над другой.
<b>5</b>	Значительное превосходство	Опыт и суждения дают умеренное превосходство.
<b>7</b>	Явное превосходство	Одному из критериев дается настолько сильное предпочтение.
<b>9</b>	Абсолютное превосходство	Очевидность превосходства одного критерия над другим

2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяется в компромиссных случаях
---------	--	-------------------------------------

**Примечание:** Шкала содержит соответствующие обратные значения

**Напомним, что клетки матрицы заполняются в соответствии с субъективными суждениями ЛПР или группы ЛПР.**

Когда в решении задачи принятия решений участвуют несколько человек, по многим суждениям могут происходить споры. В таких случаях обсуждение обычно сосредотачивается на допущениях, из которых следуют суждения, а не на количественные величины самих суждений. Иногда **группа принимает геометрическое среднее разных оценок в качестве общей оценки суждений**

$$\tilde{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \Lambda \cdot x_n}.$$

Геометрическая средняя величина дает наиболее правильный по содержанию результат, если задача состоит в нахождении такого значения признака, который качественно был бы равноудален как от максимального, так и от минимального значения признака.

Таким образом, **МАИ одинаково пригоден как при сравнении факторов, по которым возможно проведение определенных измерений, т.е. возможно их количественное сравнение, так и при сравнении факторов, по которым возможны только суждения.**

Составим обратно симметричную матрицу для парного сравнения критериев в цели **Выбор смесителя в проект «Умный дом»**

Цель	К 1	К 2	К 3	К 4	К 5
К 1	1	3	3	5	5
К 2	1/3	1	3	3	3
К 3	1/3	1/3	1	3	5
К 4	1/5	1/3	1/3	1	7
К 5	1/5	1/3	1/5	1/7	1

**Рассмотрим пример транзитивной несогласованности. Пусть объект А предпочтительнее объекта В (обозначим как  $A > B$ ), а объект В предпочтительнее объекта С ( $B > C$ ), таким образом, объект А предпочтительнее объекта С ( $A > C$ ). Нарушение последнего неравенства называется транзитивной несогласованностью.**

Для устранения транзитивной несогласованности необходимо пересмотреть все суждения относительно элементов, где транзитивность нарушается.

**Устранение комплексной несогласованности** основано на знании методики расчета:

**СЗ – максимальное Собственное Значение**

**ИС – Индекс Согласованности**

**ОС - Отношение Согласованности.**

Рассмотрим расчет приблизительных показателей СЗ, ИС и ОС предложенный Т. Саати.

Первый шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по данной матрице. В математических терминах это – вычисление главного собственного вектора, который после нормализации становится вектором приоритетов.

Для этого необходимо найти геометрическое среднее каждой строки рассматриваемой матрицы. С этой целью перемножаются  $n$  элементы каждой строки, и из полученного результата извлекается корень  $n$ -й степени.

$$V_i = \sqrt[n]{a_{i1} \times a_{i2} \times \dots \times a_{in}}$$

С этой целью перемножить 5-ть элементов каждой строки и из полученного результата извлечь корни 5-й степени (размерность матрицы  $n=5$ ).

*Строка № 1*

$$V_1 = (1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5)^{1/5} = 2,954;$$

*Строка № 2*

$$V_2 = (1/3 \times 1 \times 3 \times 3 \times 3)^{1/5} = 1,55;$$

*Строка № 3*

$$V_3 = (1/3 \times 1/3 \times 1 \times 3 \times 5)^{1/5} = 1,1;$$

*Строка № 4*

$$V_4 = (1/5 \times 1/3 \times 1/3 \times 1 \times 7)^{1/5} = 0,69;$$

*Строка № 5*

$$V_5 = (1/5 \times 1/3 \times 1/5 \times 1/7 \times 1)^{1/5} = 0,29.$$

Далее проводится нормализация полученных чисел. Определяется **нормирующий коэффициент**  $\sum V_i$ .

$$\sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 2,954 + 1,55 + 1,1 + 0,69 + 0,29 = 6,584.$$

Каждое геометрическое среднее строки  $V_i$  делится на нормирующий коэффициент  $\sum V_i$ .

$$W_{ki} = V_i / \sum V_i, \text{ где}$$

$k$  – индекс обозначающий принадлежность вектора приоритетов.

Найдем важность приоритетов.

*Строка № 1*

$$W_{\pi 1} = 2,954 / 6,584 = 0,45;$$

*Строка № 2*

$$W_{\pi 2} = 1,55 / 6,584 = 0,235;$$

*Строка № 3*

$$W_{\pi 3} = 1,1 / 6,584 = 0,17;$$

*Строка № 4*

$$W_{\pi 4} = 0,69 / 6,584 = 0,1;$$

*Строка № 5*

$$W_{\pi 5} = 0,29 / 6,584 = 0,04.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{\pi i} = (0,45; 0,235; 0,17; 0,1; 0,04),$$

где индекс « $\pi$ » означает, что вектор приоритетов относится к первому уровню иерархии.

Тогда ИС (Индекс Согласованности) в каждой матрице и для всей иерархии может быть выражен следующим способом:

Определяется сумма каждого  $j$ -го столбца матрицы суждений. Так как матрица обратная симметричная и неотрицательная, то по сути определяется сумма  $i$ -ых строк обратной матрицы от исходной. Напомним, что:

*Обратная матрица – такая матрица  $A^{-1}$ , при умножении на которую исходная матрица  $A$  даёт в результате единичную матрицу  $E$ .*

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

Тогда нахождение суммы выглядит следующим образом:

$$S_j = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \dots + a_{nj}, \text{ где}$$

$j$  – столбец ( $j=1, 2, 3, \dots, n$ )

или

$$S_i = 1/a_{1i} + 1/a_{2i} + 1/a_{3i} + \dots + 1/a_{ni}, \text{ где}$$

$i$  – строка ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ )

При этом  $S_j = 1/S_i$

Рассчитаем сумму оценок для рассматриваемого примера

*Столбец № 1*

$$S_1 = 1 + 1/3 + 1/3 + 1/5 + 1/5 = 31/15;$$

*Столбец № 2*

$$S_2 = 3 + 1 + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 5;$$

*Столбец № 3*

$$S_3 = 3 + 3 + 1 + 1/3 + 1/5 = 113/5;$$

*Столбец № 4*

$$S_4 = 5 + 3 + 3 + 1 + 1/7 = 85/7;$$

*Столбец № 5*

$$S_5 = 5 + 3 + 5 + 7 + 1 = 21.$$

Затем полученный результат умножается на  $j$ -ю компоненту нормализованного вектора приоритетов  $W_{ki}$ , т.е. сумму суждений первого столбца на первую компоненту, сумму суждений второго столбца - на вторую и т.д. Соответственно данное действие верно и для  $i$ -ых столбцов обратной матрицы.

$$P_j = S_j * W_{ki} \text{ или } P_i = (1/S_i) * W_{ki}$$

Для рассматриваемого примера имеем:

$$P_1 = S_1 \times W_{u1} = 31/15 \times 0,45 = 0,93;$$

$$P_2 = S_2 \times W_{u2} = 5 \times 0,235 = 1,17;$$

$$P_3 = S_3 \times W_{u3} = 113/5 \times 0,17 = 1,28;$$

$$P_4 = S_4 \times W_{u4} = 85/7 \times 0,1 = 1,21;$$

$$P_5 = S_5 \times W_{u5} = 21 \times 0,04 = 0,84.$$

Сумма чисел  $P_j$  ( $\lambda_{max}$ ) отражает пропорциональность предпочтений, чем ближе эта величина к  $n$  (числу объектов в матрице парных сравнений), тем более согласованны суждения.

$$\lambda_{max} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n, \text{ где}$$

$\lambda_{max}$  – максимальное СЗ (среднее значение).

Тогда максимальное СЗ для рассматриваемого примера будет равно:

$$\lambda_{\max} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0,93 + 1,17 + 1,28 + 1,21 + 0,84 = 5,43.$$

Отклонение от согласованности выражается ИС (Индекс Согласованности).

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

$$ИС = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1) = (5,43 - 5)/(5 - 1) = 0,1075.$$

Для определения того, насколько точно **ИС отражает согласованность суждений его необходимо сравнить со случайным индексом (СИ) согласованности**, который соответствует матрице со случайными суждениями, выбранными из шкалы (табл.2) при условии равной вероятности выбора любого из приведённых чисел.

В табл. 2 приведены средние значения СИ для случайных матриц суждений разного порядка.

Размер матрицы	Среднее значение индекса случайной согласованности (СИ)
1	0.00
2	0.00
3	0.58
4	0.90
<b>5</b>	<b>1.12</b>
6	1.24
7	1.32
8	1.41
9	1.45
10	1.49
11	1.51
12	1.48
13	1.56
14	1.57
15	1.59

Отношение индекса согласованности ИС к среднему значению случайного индекса согласованности СИ называется отношением согласованности ОС.

$$ОС = \frac{ИС}{СИ}$$

**Значение ОС меньше или равное 0,10 считается приемлемым.**

Рассчитаем ОС для рассматриваемого примера.

$$ОС = ИС/СИ = 0,1075/1,12 = 0,096.$$

Таким образом, **для улучшения кардинальной согласованности, рекомендуется:**

- пересмотреть свои суждения относительно любых элементов, для которых наблюдаются наибольшие отклонения суждений эксперта  $a_{ij}$  от суждений, полученных исходя из вектора приоритетов  $W_i$ ;
- пересмотреть свои суждения относительно всех элементов одной

строки, сумма отклонений для которой – максимальна.

Далее рассматриваем критерии:

**К 1 - интегрирование в систему «умный дом»;**

K1	A1	A2	A3	A4	A5	$V_{K1Y}$	$W_{3K1Y}$
A1	1	1/2	1/3	1/9	1/9	0,29	0,034
A2	2	1	1/3	1/9	1/9	0,38	0,045
A3	3	3	1	1/7	1/7	0,7	0,082
A4	9	9	7	1	1	3,55	0,42
A5	9	9	7	1	1	3,55	0,42
$\sum V_{K1Y}$						8,47	

Определим относительную ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K11} = (1 \times 1/2 \times 1/3 \times 1/9 \times 1/9)^{1/5} = 0,29;$$

Строка № 2

$$V_{K12} = (2 \times 1 \times 1/3 \times 1/9 \times 1/9)^{1/5} = 0,38;$$

Строка № 3

$$V_{K13} = (3 \times 3 \times 1 \times 1/7 \times 1/7)^{1/5} = 0,7;$$

Строка № 4

$$V_{K14} = (9 \times 9 \times 7 \times 1 \times 1)^{1/5} = 3,55;$$

Строка № 5

$$V_{K15} = (9 \times 9 \times 7 \times 1 \times 1)^{1/5} = 3,55.$$

Проводим нормализацию полученных чисел

Для этого определяем нормирующий коэффициент  $\sum V_{K1Y}$

$$\sum V_{K1Y} = V_{K11} + V_{K12} + V_{K13} + V_{K14} + V_{K15} = 0,29 + 0,38 + 0,7 + 3,55 + 3,55 = 8,47.$$

И каждое из чисел  $V_{K1Y}$  делим на  $\sum V_{K1Y}$ , в результате найдем важность приоритетов.

Строка № 1

$$W_{3K11} = 0,29/8,47 = 0,034$$

Строка № 2

$$W_{3K12} = 0,38/8,47 = 0,045$$

Строка № 3

$$W_{3K13} = 0,7/8,47 = 0,082$$

Строка № 4

$$W_{3K14} = 3,55/8,47 = 0,42$$

Строка № 5

$$W_{3K15} = 3,55/8,47 = 0,42$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K1Y} = (0,034; 0,045; 0,082; 0,42; 0,42),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K1.

Напоминаем в нашей задаче размерность матрицы  $n=5$ , тогда среднее значение индекса случайной согласованности  $СИ = 1,12$ .

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K1} = 1 + 2 + 3 + 9 + 9 = 24;$$



$$S_{2K1} = 1/2 + 1 + 3 + 9 + 9 = 22,5;$$

$$S_{3K1} = 1/3 + 1/3 + 1 + 7 + 7 = 47/3;$$

$$S_{4K1} = 1/9 + 1/9 + 1/7 + 1 + 1 = 2,37;$$

$$S_{5K1} = 1/9 + 1/9 + 1/7 + 1 + 1 = 2,37.$$

Затем полученный результат умножается на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K1} = S_1 \times W_{3K11} = 24 \times 0,034 = 0,816;$$

$$P_{2K1} = S_2 \times W_{3K12} = 22,5 \times 0,045 = 1,01;$$

$$P_{3K1} = S_3 \times W_{3K13} = 47/3 \times 0,082 = 1,28;$$

$$P_{4K1} = S_1 \times W_{3K14} = 2,37 \times 0,42 = 0,99;$$

$$P_{5K1} = S_1 \times W_{3K15} = 2,37 \times 0,42 = 0,99.$$

Находим пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\max K1} = P_{1K1} + P_{2K1} + P_{3K1} + P_{4K1} + P_{5K1} = 0,816 + 1,01 + 1,28 + 0,99 + 0,99 = 5,086.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$IS_{K1} = (\lambda_{\max K1} - n)/(n - 1) = (5,086 - 5)/(5 - 1) = 0,0215.$$

Найдем отношением согласованности ОС.

$$OS_{K1} = IS/CI = 0,0215/1,12 = 0,02.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица K1 (интегрирование в систему «умный дом») согласована.

## **К 2 - экономия воды (время необходимое на регулирование температуры и напора воды);**

K2	A1	A2	A3	A4	A5	V <sub>K2Y</sub>	W <sub>3K2Y</sub>
A1	1	1/5	1/9	1/9	1/9	0,19	0,024
A2	5	1	1/9	1/9	1/9	0,37	0,047
A3	9	9	1	1/2	1/2	1,8	0,23
A4	9	9	2	1	1	2,78	0,35
A5	9	9	2	1	1	2,78	0,35
$\sum V_{K2Y}$						7,92	

Определим относительную ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K21} = (1 \times 1/5 \times 1/9 \times 1/9 \times 1/9)^{1/5} = 0,19;$$

Строка № 2

$$V_{K22} = (5 \times 1 \times 1/9 \times 1/9 \times 1/9)^{1/5} = 0,37;$$

Строка № 3

$$V_{K23} = (9 \times 9 \times 1 \times 1/2 \times 1/2)^{1/5} = 1,8;$$

Строка № 4

$$V_{K24} = (9 \times 9 \times 2 \times 1 \times 1)^{1/5} = 2,78;$$

Строка № 5

$$V_{K25} = (9 \times 9 \times 2 \times 1 \times 1)^{1/5} = 2,78.$$

Проводим нормализацию полученных чисел

Для этого определяем нормирующий коэффициент  $\sum V_{K2Y}$

$$\sum V_{K2Y} = V_{K21} + V_{K22} + V_{K23} + V_{K24} + V_{K25} = 0,19 + 0,37 + 1,8 + 2,78 + 2,78 = 7,92.$$

И каждое из чисел  $V_{K2Y}$  делим на  $\sum V_{K2Y}$ , в результате найдем важность приоритетов.

Строка № 1

$$W_{3K21} = 0,19/7,92 = 0,024;$$

Строка № 2

$$W_{3K22} = 0,37/7,92 = 0,047;$$

Строка № 3

$$W_{3K23} = 1,8/7,92 = 0,23;$$

Строка № 4

$$W_{3K24} = 2,78/7,92 = 0,35;$$

Строка № 5

$$W_{3K25} = 2,78/7,96 = 0,35.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K2Y} = (0,024; 0,047; 0,23; 0,35; 0,35),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K2.

Определим индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы K 2 (экономия воды).

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K2} = 1 + 5 + 9 + 9 + 9 = 33;$$

$$S_{2K2} = 1/5 + 1 + 9 + 9 + 9 = 28,2;$$

$$S_{3K2} = 1/9 + 1/9 + 1 + 2 + 2 = 5,2;$$

$$S_{4K2} = 1/9 + 1/9 + 1/2 + 1 + 1 = 2,7;$$

$$S_{5K2} = 1/9 + 1/9 + 1/2 + 1 + 1 = 2,7.$$

Затем полученный результат умножается на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K2} = S_1 \times W_{3K21} = 33 \times 0,024 = 0,79;$$

$$P_{2K2} = S_2 \times W_{3K22} = 28,2 \times 0,047 = 1,32;$$

$$P_{3K2} = S_3 \times W_{3K23} = 5,2 \times 0,23 = 1,2;$$

$$P_{4K2} = S_4 \times W_{3K24} = 2,7 \times 0,35 = 0,95;$$

$$P_{5K2} = S_5 \times W_{3K25} = 2,7 \times 0,35 = 0,95.$$

Находим пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\max K2} = P_{1K2} + P_{2K2} + P_{3K2} + P_{4K2} + P_{5K2} = 0,79 + 1,32 + 1,2 + 0,95 + 0,95 = 5,21.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$ИС_{K2} = (\lambda_{\max K2} - n)/(n - 1) = (5,21 - 5)/(5 - 1) = 0,053.$$

Найдем отношением согласованности ОС.

$$ОС_{K2} = ИС/СИ = 0,053/1,12 = 0,05.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица К 2 (экономия воды) согласована.

**К 3 - бесконтактность (не прикасаться к смесителю грязными руками, для регулирования температуры и напора воды);**

K3	A1	A2	A3	A4	A5	$V_{K3Y}$	$W_{3K3Y}$
A1	1	1/5	1/8	1/9	1/8	0,2	0,02
A2	5	1	1/8	1/9	1/8	0,39	0,04
A3	8	8	1	1/2	1/2	1,05	0,12
A4	9	9	9	1	7	5,5	0,61
A5	8	8	2	1/7	1	1,79	0,2
$V_{K35}$						8,93	

Определим относительную ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K31} = (1 \times 1/5 \times 1/8 \times 1/9 \times 1/8)^{1/5} = 0,2;$$

Строка № 2

$$V_{K32} = (5 \times 1 \times 1/8 \times 1/9 \times 1/8)^{1/5} = 0,39;$$

Строка № 3

$$V_{K33} = (8 \times 8 \times 1 \times 1/2 \times 1/2)^{1/5} = 1,05;$$

Строка № 4

$$V_{K34} = (9 \times 9 \times 9 \times 1 \times 7)^{1/5} = 5,5;$$

Строка № 5

$$V_{K35} = (8 \times 8 \times 2 \times 1/7 \times 1)^{1/5} = 1,79.$$

Проводим нормализацию полученных чисел

Для этого определяем нормирующий коэффициент  $\sum V_{K3Y}$

$$\sum V_{K3Y} = V_{K31} + V_{K32} + V_{K33} + V_{K34} + V_{K35} = 0,2 + 0,39 + 1,05 + 5,5 + 1,79 = 8,93.$$

И каждое из чисел  $V_{K1Y}$  делим на  $\sum V_{K1Y}$ , в результате найдем важность приоритетов.

Строка № 1

$$W_{3K31} = 0,2/8,93 = 0,02;$$

Строка № 2

$$W_{3K32} = 0,39/8,93 = 0,04;$$

Строка № 3

$$W_{3K33} = 1,05/8,93 = 0,12;$$

Строка № 4

$$W_{3K34} = 5,5/8,93 = 0,61;$$

Строка № 5

$$W_{3K35} = 1,79/8,93 = 0,2.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K3Y} = (0,02; 0,04; 0,12; 0,61; 0,2),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия К3.

Определим индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 3 (бесконтактность).

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K3} = 1 + 5 + 8 + 9 + 8 = 31;$$

$$S_{2K3} = 1/5 + 1 + 8 + 9 + 8 = 26,2;$$

$$S_{3K3} = 1/8 + 1/8 + 1 + 9 + 2 = 12,25;$$

$$S_{4K3} = 1/9 + 1/9 + 1/2 + 1 + 1/7 = 1,86;$$

$$S_{5K3} = 1/8 + 1/8 + 1/2 + 7 + 1 = 8,75.$$

Затем полученный результат умножается на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K3} = S_1 \times W_{3K31} = 31 \times 0,02 = 0,59;$$

$$P_{2K3} = S_2 \times W_{3K32} = 26,2 \times 0,04 = 1;$$

$$P_{3K3} = S_3 \times W_{3K33} = 12,25 \times 0,12 = 1,2;$$

$$P_{4K3} = S_4 \times W_{3K34} = 1,86 \times 0,61 = 1,1;$$

$$P_{5K3} = S_5 \times W_{3K35} = 8,75 \times 0,2 = 1,55.$$

Находим пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\max K3} = P_{1K3} + P_{2K3} + P_{3K3} + P_{4K3} + P_{5K3} = 0,59 + 1 + 1,2 + 1,1 + 1,55 = 5,44.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$IS_{K3} = (\lambda_{\max K3} - n)/(n - 1) = (5,44 - 5)/(5 - 1) = 0,11.$$

Найдем отношение согласованности ОС.

$$OS_{K3} = IS/CI = 0,11/1,2 = 0,098.$$

Значение ОС меньше или равное 0.10 считается приемлемым, значит матрица К 3 (экономия воды) согласована.

#### К 4 – вандалоустойчивость;

K4	A1	A2	A3	A4	A5	$V_{K4Y}$	$W_{3K4Y}$
A1	1	1/2	1/7	1/9	1/7	0,26	0,03
A2	2	1	1/7	1/9	1/7	0,34	0,04
A3	7	7	1	1/7	1/2	1,3	0,15
A4	9	9	7	1	7	5,25	0,6
A5	7	7	2	1/7	1	1,7	0,19
$\sum V_{K4Y}$						8,85	

Определим относительную ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K41} = (1 \times 1/2 \times 1/7 \times 1/9 \times 1/7)^{1/5} = 0,26;$$

Строка № 2

$$V_{K42} = (2 \times 1 \times 1/7 \times 1/9 \times 1/7)^{1/5} = 0,34;$$

Строка № 3

$$V_{K43} = (7 \times 7 \times 1 \times 1/7 \times 1/2)^{1/5} = 1,3;$$

Строка № 4

$$V_{K44} = (9 \times 9 \times 7 \times 1 \times 7)^{1/5} = 5,25;$$

Строка № 5

$$V_{K45} = (7 \times 7 \times 2 \times 1/7 \times 1)^{1/5} = 1,7.$$

Проводим нормализацию полученных чисел

Для этого определяем нормирующий коэффициент  $\sum V_{K3Y}$

$$\sum V_{K4Y} = V_{K41} + V_{K42} + V_{K43} + V_{K44} + V_{K45} = 0,26 + 0,34 + 1,3 + 5,25 + 1,7 = 8,85$$

И каждое из чисел  $V_{K1Y}$  делим на  $\sum V_{K1Y}$ , в результате найдем важность приоритетов.

Строка № 1

$$W_{3K41} = 0,26/8,85 = 0,03;$$

Строка № 2

$$W_{3K42} = 0,34/8,85 = 0,04;$$

Строка № 3

$$W_{3K43} = 1,3/8,85 = 0,15;$$

Строка № 4

$$W_{3K44} = 5,25/8,85 = 0,6;$$

Строка № 5

$$W_{3K45} = 1,79/8,85 = 0,2.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K4Y} = (0,03; 0,04; 0,15; 0,6; 0,2),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия К4.

Определим индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы К 4 ( вандалоустойчивость)

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K4} = 1 + 2 + 7 + 9 + 7 = 26;$$

$$S_{2K4} = 1/2 + 1 + 7 + 9 + 7 = 24,5;$$

$$S_{3K4} = 1/7 + 1/7 + 1 + 7 + 2 = 10,3;$$

$$S_{4K4} = 1/9 + 1/9 + 1/7 + 1 + 1/7 = 1,3;$$

$$S_{5K4} = 1/7 + 1/7 + 1/2 + 7 + 1 = 8,7.$$

Затем полученный результат умножается на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1K4} = S_1 \times W_{3K41} = 26 \times 0,02 = 0,78;$$

$$P_{2K4} = S_2 \times W_{3K42} = 24,5 \times 0,04 = 0,8;$$

$$P_{3K4} = S_3 \times W_{3K43} = 10,3 \times 0,15 = 1,24;$$

$$P_{4K4} = S_4 \times W_{3K44} = 1,3 \times 0,6 = 0,9;$$

$$P_{5K4} = S_5 \times W_{3K45} = 8,7 \times 0,19 = 1,6.$$

Находим пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\max K4} = P_{1K4} + P_{2K4} + P_{3K4} + P_{4K4} + P_{5K4} = 0,78 + 0,8 + 1,24 + 0,9 + 1,6 = 5,32.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$ИС_{K4} = (\lambda_{\max K4} - n)/(n - 1) = (5,32 - 5)/(5 - 1) = 0,08.$$

Найдем отношением согласованности ОС.

$$ОС_{K4} = ИС/СИ = 0,08/1,12 = 0,07.$$

Значение ОС меньше или равное 0,10 считается приемлемым, значит матрица К 4 (вандалоустойчивость) согласована.

#### К 5 – стоимость смесителя.

K5	A1	A2	A3	A4	A5	$V_{K5Y}$	$W_{3K5Y}$
A1	1	5	7	8	9	4,8	0,54

A2	1/5	1	7	8	9	2,52	0,28
A3	1/7	1/7	1	5	7	0,93	0,1
A4	1/8	1/8	1/5	1	7	0,47	0,05
A5	1/9	1/9	1/7	1/7	1	0,19	0,02
$\sum V_{K5Y}$						8,91	

Определим относительную ценность каждого элемента.

Строка № 1

$$V_{K51} = (1 \times 5 \times 7 \times 8 \times 9)^{1/5} = 4,8;$$

Строка № 2

$$V_{K52} = (1/5 \times 1 \times 7 \times 8 \times 9)^{1/5} = 2,52;$$

Строка № 3

$$V_{K53} = (1/7 \times 1/7 \times 1 \times 5 \times 7)^{1/5} = 0,93;$$

Строка № 4

$$V_{K54} = (1/8 \times 1/8 \times 1/5 \times 1 \times 7)^{1/5} = 0,47;$$

Строка № 5

$$V_{K55} = (1/9 \times 1/9 \times 1/7 \times 1/7 \times 1)^{1/5} = 0,19.$$

Проводим нормализацию полученных чисел

Для этого определяем нормирующий коэффициент  $\sum V_{K5Y}$

$$\sum V_{K5Y} = V_{K51} + V_{K52} + V_{K53} + V_{K54} + V_{K55} = 4,8 + 2,52 + 0,93 + 0,47 + 0,19 = 8,91$$

И каждое из чисел  $V_{K5Y}$  делим на  $\sum V_{K5Y}$ , в результате найдем важность приоритетов.

Строка № 1

$$W_{3K51} = 4,8/8,91 = 0,54;$$

Строка № 2

$$W_{3K52} = 2,52/8,91 = 0,28;$$

Строка № 3

$$W_{3K53} = 0,93/8,91 = 0,1;$$

Строка № 4

$$W_{3K54} = 0,47/8,91 = 0,05;$$

Строка № 5

$$W_{3K55} = 0,19/8,91 = 0,02.$$

В результате получаем вектор приоритетов:

$$W_{3K5Y} = (0,54; 0,28; 0,1; 0,05; 0,02),$$

где индекс 3 означает, что вектор приоритетов относится к третьему уровню иерархии критерия K5.

Определим индекс согласованности и отношение согласованности для матрицы K 5 (стоимость смесителя)

Определяется сумма каждого столбца матрицы суждений.

$$S_{1K5} = 1 + 1/5 + 1/7 + 1/8 + 1/9 = 1,53;$$

$$S_{2K5} = 5 + 1 + 1/7 + 1/8 + 1/9 = 6,2;$$

$$S_{3K5} = 7 + 7 + 1 + 1/5 + 1/7 = 15,3;$$

$$S_{4K5} = 8 + 8 + 5 + 1 + 1/7 = 21,3;$$

$$S_{5K5} = 9 + 9 + 7 + 7 + 1 = 33.$$

Затем полученный результат умножается на компоненту нормализованного вектора приоритетов.

$$P_{1\ K5} = S_1 \times W_{3\ K41} = 1,53 \times 0,54 = 0,76;$$

$$P_{2\ K5} = S_2 \times W_{3\ K42} = 6,2 \times 0,28 = 1,6;$$

$$P_{3\ K5} = S_3 \times W_{3\ K43} = 15,3 \times 0,1 = 1,4;$$

$$P_{4\ K5} = S_4 \times W_{3\ K44} = 21,3 \times 0,05 = 1;$$

$$P_{5\ K5} = S_5 \times W_{3\ K45} = 33 \times 0,02 = 0,66.$$

Находим пропорциональность предпочтений.

$$\lambda_{\max\ K5} = P_{1\ K5} + P_{2\ K5} + P_{3\ K5} + P_{4\ K5} + P_{5\ K5} = 0,76 + 1,6 + 1,4 + 1 + 0,66 = 5,42.$$

Отклонение от согласованности выражается индексом согласованности.

$$ИС_{K5} = (\lambda_{\max\ K5} - n)/(n - 1) = (5,42 - 5)/(5 - 1) = 0,105.$$

Найдем отношением согласованности ОС.

$$ОС_{K5} = ИС/СИ = 0,105/1,12 = 0,094.$$

Значение ОС меньше или равное 0,10 считается приемлемым, значит матрица К 5 (стоимость смесителя) согласована.

### 1.2.3. Синтез альтернатив.

Векторы приоритетов и отношения согласованности определяются для всех матриц суждений, начиная со второго уровня.

Для определения приоритетов альтернатив необходимо локальные приоритеты умножить на приоритет соответствующего критерия на высшем уровне и найти суммы по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент.

Обозначим через:  $q_{3k}$  - вектор приоритетов  $k$ -й матрицы, расположенной на третьем уровне;  $q_{3ki}$  -  $i$ -й элемент вектор приоритетов  $k$ -й матрицы суждений, расположенной на третьем уровне;  $q_{2k}$  -  $k$ -й элемент вектор приоритетов матрицы суждений, расположенной на втором уровне;  $q_j$  - приоритет  $j$ -го элемента третьего уровня.

Тогда приоритет  $j$ -го элемента третьего уровня определяется как

$$q_1 = q_{311} \cdot q_{21} + q_{321} \cdot q_{22} + q_{331} \cdot q_{23} + \dots + q_{3n1} \cdot q_{2n}$$

$$q_2 = q_{312} \cdot q_{21} + q_{322} \cdot q_{22} + q_{332} \cdot q_{23} + \dots + q_{3n2} \cdot q_{2n}$$

.....

$$q_n = q_{31n} \cdot q_{21} + q_{32n} \cdot q_{22} + q_{33n} \cdot q_{23} + \dots + q_{3nn} \cdot q_{2n}$$

Таким образом, приоритеты альтернатив равны: альтернатива А1 - приоритет равен  $q_1$ , альтернатива А2 - приоритет равен  $q_2$  и т.д.

$$W_{2i} = (0,45; 0,235; 0,17; 0,1; 0,04);$$

$$W_{3K1Y} = (0,034; 0,045; 0,082; 0,42; 0,42);$$

$$W_{3K2Y} = (0,024; 0,047; 0,23; 0,35; 0,35);$$

$$W_{3K3Y} = (0,02; 0,04; 0,12; 0,61; 0,2);$$

$$W_{3K4Y} = (0,03; 0,04; 0,15; 0,6; 0,2);$$

$$W_{3K5Y} = (0,54; 0,28; 0,1; 0,05; 0,02)$$

Приоритеты альтернатив получим следующим образом:

$$W_1 = W_{21} \times W_{3K11} + W_{22} \times W_{3K21} + W_{23} \times W_{3K31} + W_{24} \times W_{3K41} + W_{25} \times W_{3K51} = 0,45 \times 0,034 + 0,235 \times 0,024 + 0,17 \times 0,02 + 0,1 \times 0,03 + 0,04 \times 0,54 = 0,049$$

$$W_2 = W_{21} \times W_{3K12} + W_{22} \times W_{3K22} + W_{23} \times W_{3K32} + W_{24} \times W_{3K42} + W_{25} \times W_{3K52} = 0,45 \times 0,045 + 0,235 \times 0,047 + 0,17 \times 0,04 + 0,1 \times 0,04 + 0,04 \times 0,28 = 0,053$$

$$W_3 = W_{21} \times W_{3K13} + W_{22} \times W_{3K23} + W_{23} \times W_{3K33} + W_{24} \times W_{3K43} + W_{25} \times W_{3K53} = 0,45 \times 0,082 + 0,235 \times 0,23 + 0,17 \times 0,12 + 0,1 \times 0,15 + 0,04 \times 0,1 = 0,13$$

$$W_4 = W_{21} \times W_{3K14} + W_{22} \times W_{3K24} + W_{23} \times W_{3K34} + W_{24} \times W_{3K44} + W_{25} \times W_{3K54} = 0,45 \times 0,42 + 0,235 \times 0,35 + 0,17 \times 0,61 + 0,1 \times 0,6 + 0,04 \times 0,05 = 0,437$$

$$W_5 = W_{21} \times W_{3K15} + W_{22} \times W_{3K25} + W_{23} \times W_{3K35} + W_{24} \times W_{3K45} + W_{25} \times W_{3K55} = 0,45 \times 0,42 + 0,235 \times 0,35 + 0,17 \times 0,2 + 0,1 \times 0,2 + 0,04 \times 0,02 = 0,326$$

Таким образом, приоритеты альтернатив равны:

1 место – альтернатива А4 (бесконтактный смеситель и термостат) -  $W_4$  приоритет равен 0,437;

2 место – альтернатива А5 (электронный сенсорный смеситель) -  $W_5$  приоритет равен 0,326.

3 место – альтернатива А3 (смеситель со встроенным термостатом) -  $W_3$  приоритет равен 0,13.

4 место – альтернатива А2 (смеситель однорычажный) -  $W_2$  приоритет равен 0,053;

5 место – альтернатива А1 (смеситель с отдельными кранами) -  $W_1$  приоритет равен 0,049;

Наиболее перспективным с позиции метода анализа иерархий признается выбор смесителя А4 - бесконтактный (электронный) смеситель и термостат (с постоянной температурой и напором). Однако видно, что выбор А5 - электронный сенсорный смеситель, оказывается тоже неплохим.

Диалоговая система "MPRIORITY 1.0" (My Priority) предназначена для поддержки принятия решений в различных сферах человеческой деятельности. Программная система базируется на зарекомендовавшем себя на практике Методе Анализа Иерархий (МАИ). Основное назначение метода — решение слабоструктурированных задач принятия решений.

Ссылка на скачивание:

**<http://www.tomakechoice.com/mpriority.html>**