2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Стандартная форма задачи линейного программирования

Обратим внимание на предыдущую лекцию. В ней два примера задач имели достаточно разный вид: в задаче о максимальном доходе требовалось найти $\boldsymbol{max}$ целевой функции, а в задаче о минимальных затратах – $\boldsymbol{min}$. В задаче о максимальном доходе ограничения имеют вид неравенств со знаком $\le$, а в задаче о минимальных затратах ограничения имеют вид неравенств со знаками $\le$ и $=$.

Такой разнобой неудобен при разработке алгоритмов решения этих ЗЛП. Поэтому имеются некоторые стандартные формы ЗЛП, к которым и приводят конкретные различные задачи.

Стандартная форма ЗЛП – это задача, в которой система функциональных и прямых ограничений состоит из одних неравенств, переменные являются неотрицательными, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму.

Стандартная форма ЗЛП имеет вид [3]:

целевая функция,

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n\,x_n \Rightarrow max \tag{2.1}$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

Для более краткой записи можно использовать векторную или матричную запись.

Тогда вводим в рассмотрение матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и векторы:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \overline{c} = (c_1, \dots, c_n) \qquad (2.5)$$

Комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n x_n$ есть скалярное произведение векторов $\overline{c}$ и $\overline{x}$. Тогда в векторной форме задача (2.1 – 2.3) примет вид:

$$\overline{(c}, \overline{x)} \Rightarrow max$$
$$\overline{A_1}x_1 + \overline{A_2}x_2 + \dots + \overline{A_n}x_n \leq \overline{b} \qquad (2.6)$$
$$\overline{x} \geq 0$$

Заметим, что комбинацию $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n x_n$ можно представить как произведение $\overline{c}^T\overline{x}$. Поэтому задачу (2.1 – 2.3) можно представить не только в векторной форме (2.6), но и в матричной.

$$\overline{c}^T\overline{x} \Rightarrow max$$
$$A\overline{x} \leq \overline{b} \qquad (2.7)$$
$$\overline{x} \geq 0$$

Стандартная форма ЗЛП интересна тем, что большое число прикладных задач естественным образом сводится к этому виду моделей. В стандартной форме ЗЛП удобно решать графическим методом, если число переменных равно двум ($n = 2$).

2.2. Рекомендации по построению модели в стандартной форме

Любую ЗЛП можно привести к стандартной форме используя следующие правила [4:

Правило перехода от задачи максимизации целевой функции к задаче минимизации.

Задача максимизации целевой функции $f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n x_n \Rightarrow max$ легко может быть сведена к задаче минимизации $-f\overline{(x)} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_n x_n \Rightarrow min$ при тех же ограничениях, так как

$$min\, f(\overline{x}) = -max[-f(\overline{x})] \qquad (2.8)$$

При этом обе задачи имеют одно и тоже оптимальное решение, которое будем обозначать $\overline{x^*}$.

Проиллюстрируем этот факт графически на примере функции одной переменной (рис. 2.1).

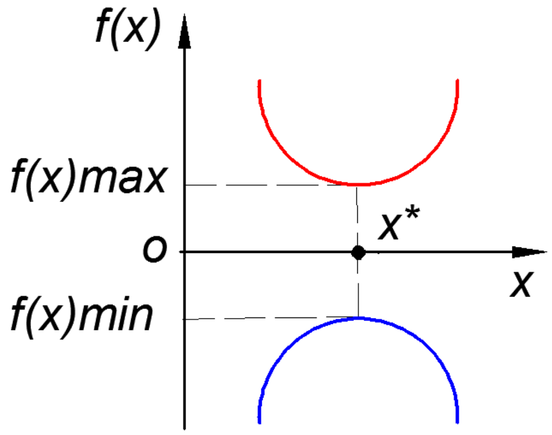


Рис.2.1. Иллюстрация перехода от max к min

Функция $f(x)$представляет собой зеркальное отражение функции относительно оси OX, ее максимум достигается в той же точке, что и минимум функции. Очевидно, имеет место соотношение 2.8. Соответственно, для перехода от задачи минимизации целевой функции к задаче максимизации выполняется аналогичная процедура.

Правило изменения типа ограничения.

Для изменения знака неравенства в одном из ограничений необходимо его умножить на -1.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ \geq b_1 \Longrightarrow - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ ... - a_{1n}\, x_n \ \leq - b_1$$

Правило перехода от ограничений – равенств к неравенствам.

Для изменения типа ограничений с равенства на неравенство, достаточно изменить это ограничение на два противоположных неравенства [4].

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ = b_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}\, x_n \ \leq b_1 \\ - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ ... - a_{1n}\, x_n \ \leq - b_1 \end{cases}$$

При переходе из общей формы к стандартной форме, необходимо к каждой ЗЛП подходить индивидуально. Рассмотрим пример задачи о минимальных затратах, которая приведена в разделе 2.2.

Принимая во внимание условие неотрицательности переменных $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$, математическая модель этой задачи имеет вид [6]:

Целевая функция.

$$f(x) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow min$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \\ x_{12} + x_{22} = 4 \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \leq 9{,}5 \\ x_{21} + \dfrac{x_{22}}{3} \leq 4 \end{cases}$$

Умножим третье ограничение на 4 и четвертое ограничение на 3.

Получим:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 \\ x_{12} + x_{22} = 4 \\ x_{11} + 2x_{12} \leq 38 \\ 3x_{21} + x_{22} \leq 12 \end{cases}$$

Выразим x_{11} и x_{22} из первых двух ограничений:

$$x_{11} = 32 - x_{21}, x_{22} = 4 - x_{12}$$

Подставим выделенные переменные в целевую функцию и в другие ограничения – неравенства. В результате преобразования получим:

Целевая функция.

$$f(x) = 20x_{12} - 10x_{21} + 1488 \rightarrow min$$

Ограничения

$$\begin{cases} x_{21} \leq 32 \\ x_{12} \leq 4 \\ 2x_{12} - x_{21} \leq 6 \\ 3x_{21} - x_{12} \leq 8 \end{cases}$$

2.3. Решение задач с двумя переменными графическим методом

Если в ЗЛП только две переменные, то наиболее простой и наглядный способ ее решения – это графический метод.

Тогда ЗЛП в стандартной форме будет иметь следующий вид:

Целевая функция.

$$f(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow max$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

при условии неотрицательности

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Для решения ЗЛП необходимо ввести понятие «область допустимых решений».

Определение 2.1. Совокупность всех допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР) ЗЛП

При этом ОДР является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек. Тогда согласно основной теореме линейного программирования оптимальное решение ЗЛП достигается в одной из угловых точек ОДР.

Таким образом, графический метод решения ЗЛП условно можно разбить на два этапа:

Первый этап. Построение ОДР ЗЛП.

Второй этап. Нахождение среди всех точек ОДР такой точки (x_1^*, x_2^*) в которой целевая функция $f(\overline{x})$ принимает максимальное значение.

Перейдем к рассмотрению этих этапов.

Первый этап.

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию множества решений линейного неравенства***. Пусть дано неравенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

Тогда уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ будет граничной прямой, которая разбивает плоскость на две полуплоскости. Согласно правилу перехода от ограничений – равенств к неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

Следовательно, геометрической интерпретацией множества решений линейного неравенства является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничащей прямой, включая ее.

Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-либо точку, не принадлежащую граничной прямой, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой эта точка принадлежит, в противном случае – это противоположная полуплоскость.

Рассмотрим пример геометрической интерпретации решений неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (задача о максимальном доходе). Данное неравенство есть полуплоскость, изображенная на рис. 2.2 стрелками.

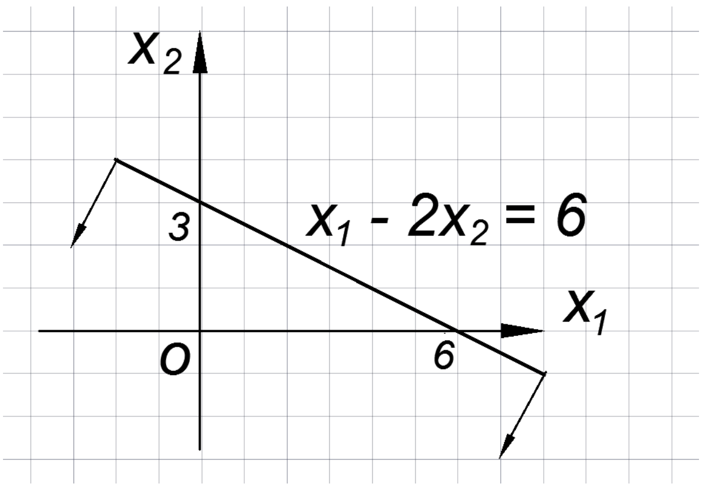


Рис.2.2. Геометрическая интерпретация неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$

При геометрической интерпретации в неравенстве $x_1 + 2x_2 \leq 6$ заменили знак $\leq$ на $=$ и построили прямую $x_1 + 2x_2 = 6$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Точка $O(0,0)$ искомому неравенству, то областью решения данного неравенства является полуплоскость, которой принадлежит эта точка (отмечена стрелками).

Таким образом, ***геометрическая интерпретация множества решений системы линейных*** неравенств заключается в определении пересечения всех полуплоскостей ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

Результат данных пересечений будет представлять ОДР системы линейных неравенств.

Рассмотрим пример геометрической интерпретация системы ограничений задачи о максимальном доходе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Знаки неравенств $\le$ заменим на $=$, построим полученные прямые, найдем соответствующим неравенствам полуплоскости и их пересечения (рис. 2.3).

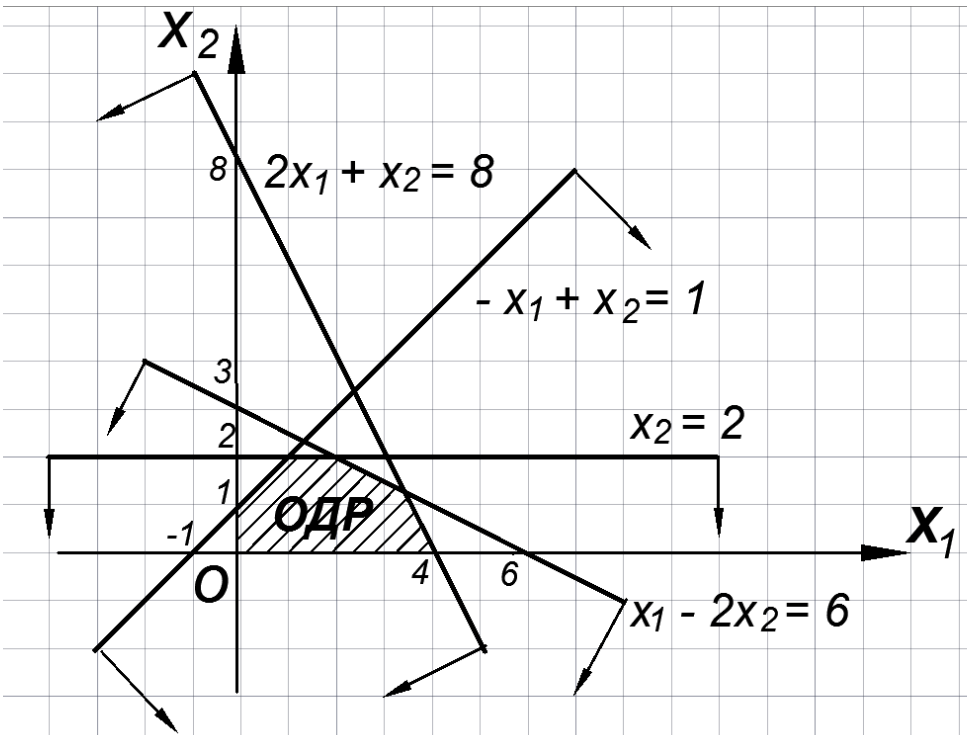


Рис.2.3. Построение области допустимых решений задачи о максимальном доходе

Таким образом, ОДР системы линейных неравенств является выпуклый многоугольник ABCDEF (рис. 2.4).

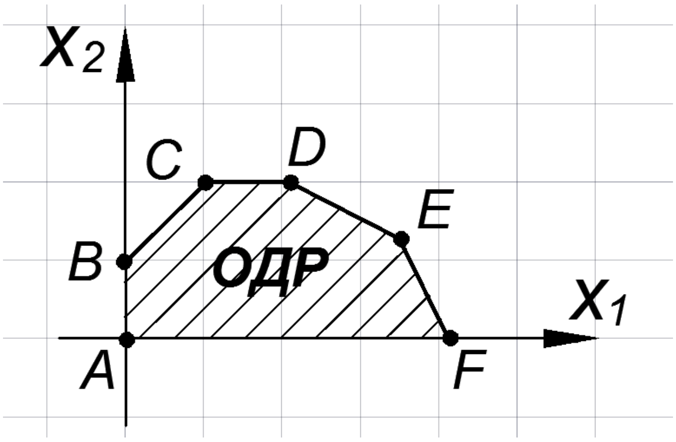
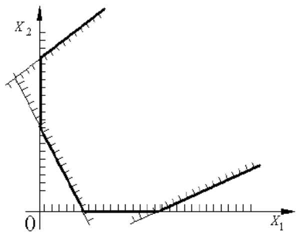
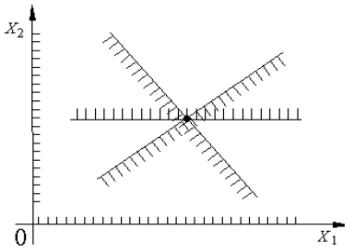
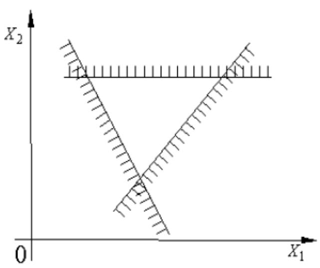
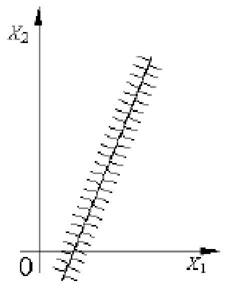
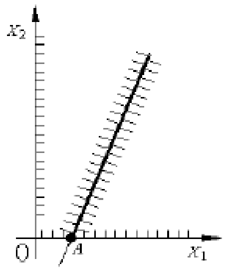
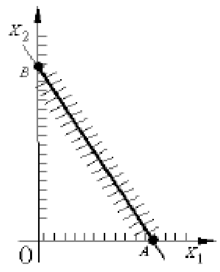


Рис.2.4. Область допустимых решений задачи в виде

Рассмотрим возможные случаи ОДР, сведенные в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Возможные случаи области допустимых решений

№	Возможные ситуации	Вид ОДР
1		Неограниченная выпуклая многоугольная область
2		Единственная точка
3		Пустое множество

4		Прямая линия
5		Луч
		Отрезок

Второй этап.

Теперь необходимо найти среди всех точек ОДР такую точку, в которой функция цели принимает максимальное значение. Для этого рассмотрим целевую функцию решаемой задачи о максимальном доходе

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

При этом если значение $f\overline{(x)}$ фиксировано, то функция определяется как прямая, а при изменении значения $f\overline{(x)}$, как семейство параллельных прямых.

Определение 2.1. Для всех точек, лежащих на одной из прямых функции $f\overline{(x)}$ принимает одно и то же значение, поэтому указанные прямые называют ***линиями уровня*** для функции $f\overline{(x)}$

Определение 2.2. Вектор, координаты которого являются частными производными функции $f\overline{(x)}$ – называется ***градиентом функции*** $\overline{grad\, f(x)}$. Градиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наибольшего возрастания функции $f\overline{(x)}$ [4].

$$\overline{grad\ f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow max, \text{где} \tag{2.9}$$

$c_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, c_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Соответственно, антиградиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наименьшего убывания функции $\overline{f(x)}$.

$$\overline{-grad\ f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow min, \text{где} \tag{2.10}$$

$c_1 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, c_2 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Согласно формуле 2.9., градиент целевой функции решаемой задачи о максимальном доходе будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\ f(x)} = \{2, 3\} \rightarrow max$$

Антиградиент, согласно формуле 2.9., будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\ f(x)} = \{-2, -3\} \rightarrow min$$

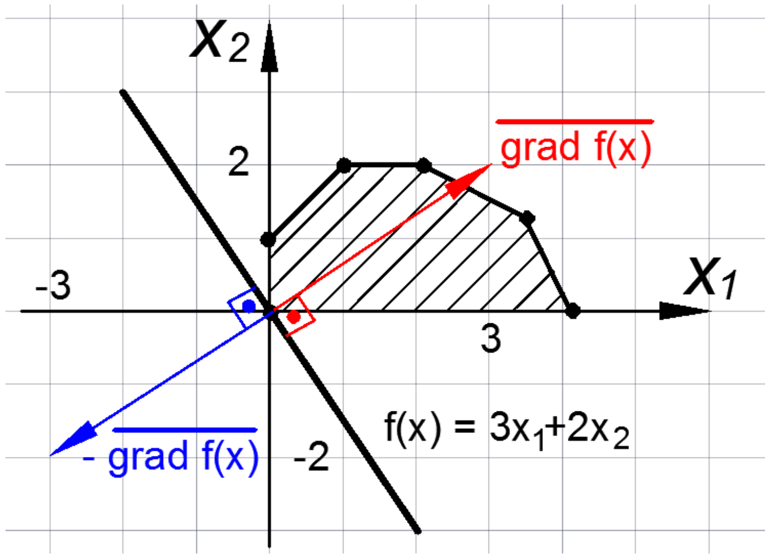


Рис.2.5. Градиент и антиградиент функции $f(x) = 3x_1 + 2x_2$

Рассматриваемая задача решается на максимум, тогда принимаем значения $\{2, 3\}$. Далее будем перемещать линию уровня по ОДР параллельно самой себе в направлении $\overline{grad\ f(x)}$, пока она не пройдет через последнюю (крайнюю) точку ОДР (рис.2.6). Координаты этой точки являются оптимальным решением.

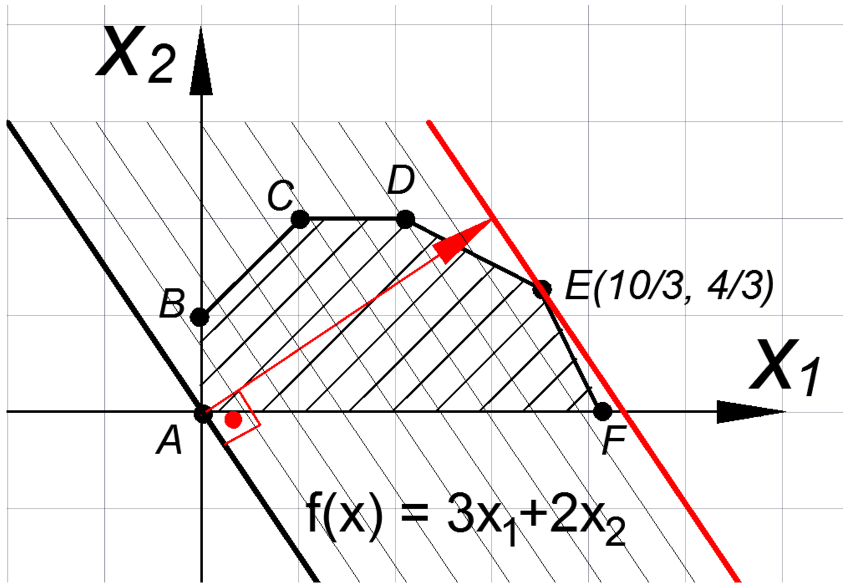


Рис.2.6. Определение оптимального решения

Таким образом, оптимальное решение для задачи о максимальном доходе будут координаты точки $E\,(x_1{}^*, x_2{}^*)$ (см. рис. 2.6). Для их нахождения необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующих прямых, пересекающихся в точке оптимума E.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Решив систему линейных уравнений, получим, что точка максимума соответствует суточному производству $x_1{}^* = \frac{10}{3}$ т. краски 1-го вида и $x_2{}^* = \frac{4}{3}$ т. краски 2-го вида. Подставив координаты $x_1{}^*$ и $x_2{}^*$ в целевую функцию получим общий доход от продажи суточного объема двух видов краски $f(x) = 12\frac{2}{3}\,[тыс.руб./сутки]$.

2.4. Графический анализ чувствительности оптимального решения

Неизбежное колебание значений экономических параметров, таких как цены, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится анализ чувствительности, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение ЗЛП.

Для решения задач анализа на чувствительность введем ряд определений.

Определение 2.3. Ограничения, проходящие через оптимальную точку, называются ***связывающими ограничениями***, а соответствующие им ресурсы – ***дефицитными .***

Определение 2.4. Ограничения, не проходящие через оптимальную точку, называются несвязывающими ограничениями, а соответствующие им ресурсы – ***недефицитными .***

Определение 2.5. Ограничение называют ***избыточным*** в том случае, если его исключение не влияет на ОДР и, следовательно, на оптимальное решение.

Для простоты дальнейшего изложения пронумеруем ограничения задачи о максимальном доходе [5].

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1 & (3) \\ x_2 \le 2 & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Таким образом, понятие «связывающие ограничения» (1) и (2) означает, что при производстве красок в точке Е (10/3; 4/3) запасы ингредиентов А и В расходуются полностью и по этой причине невозможно дальнейшее наращивание производства. В этом заключается экономический смысл понятия дефицитности ресурсов, т.е. если фирма сможет увеличить суточные запасы ингредиентов, то это позволит увеличить выпуск красок. В связи с этим возникает вопрос, до какого уровня целесообразно увеличить запасы ингредиентов и в какой степени при этом увеличится оптимальное производство красок?

Правило 1. Чтобы графически определить максимальное увеличение запаса дефицитного ресурса, вызывающее улучшение оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения целевой функции до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.

При прохождении прямой (1) через точку К (рис. 2.7) многоугольник АВСКF становится ОДР, а ограничение (1) - избыточным. Действительно, если удалить прямую (1), проходящую через точку К, то ОДР АВСКF не изменится.

Точка К становится оптимальной, в этой точке ограничения (2) и (4) становятся связывающими.

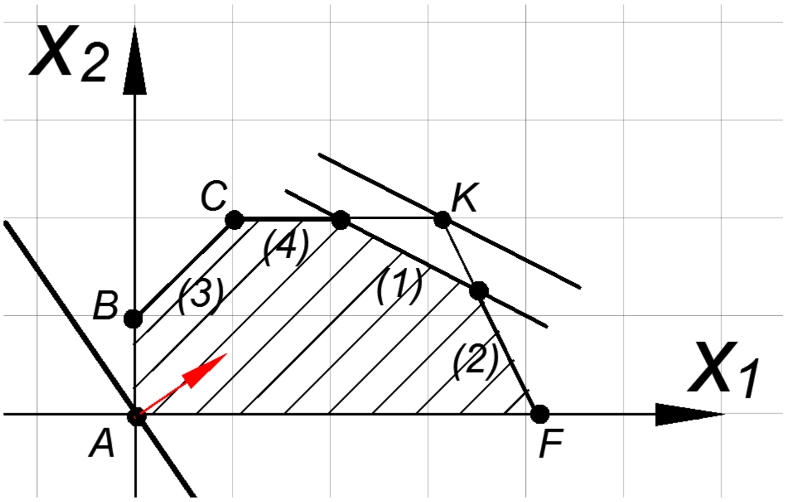


Рис.2.7. Анализ увеличения ресурса А

Правило 2. Чтобы численно определить максимальную величину запаса дефицитного ресурса, вызывающую улучшение оптимального решения, необходимо:

1) определить координаты точки (x_1, x_2) в которой соответствующее ограничение становится избыточным;

2) подставить координаты (x_1, x_2) в левую часть соответствующего ограничения.

Координаты точки К находятся путем решения системы уравнений прямых (2) и (4).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ x_2 = 2 & (4) \end{cases}$$

Таким образом, в этой точке К (3; 2) фирма будет производить 3 т. краски 1-го вида и 2 т. краски 2-го вида. Подставим x_1 и x_2 в левую часть ограничения (1) и получим максимально допустимый запас ингредиента А.

$$x_1 + 2x_2 = 7 \text{ [т. ингр. А/сутки]}$$

Дальнейшее увеличение запаса ингредиента А нецелесообразно, потому что это не изменит ОДР и не приведет к другому оптимальному решению (см. рис. 2.7). Доход от продажи красок в объеме, соответствующем точке К, можно рассчитать, подставив ее координаты в выражение целевой функции.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 = 13 \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Рассмотрим вопрос о целесообразности увеличения запаса ингредиента В. Согласно правилу №1, соответствующее ограничение (2) становится избыточным в точке J, в которой пересекаются прямая (1) и ось переменной x_1 (рис. 2.8). Многоугольник ABCDJ становится ОДР, а точка J(6;0) –оптимальным решением.

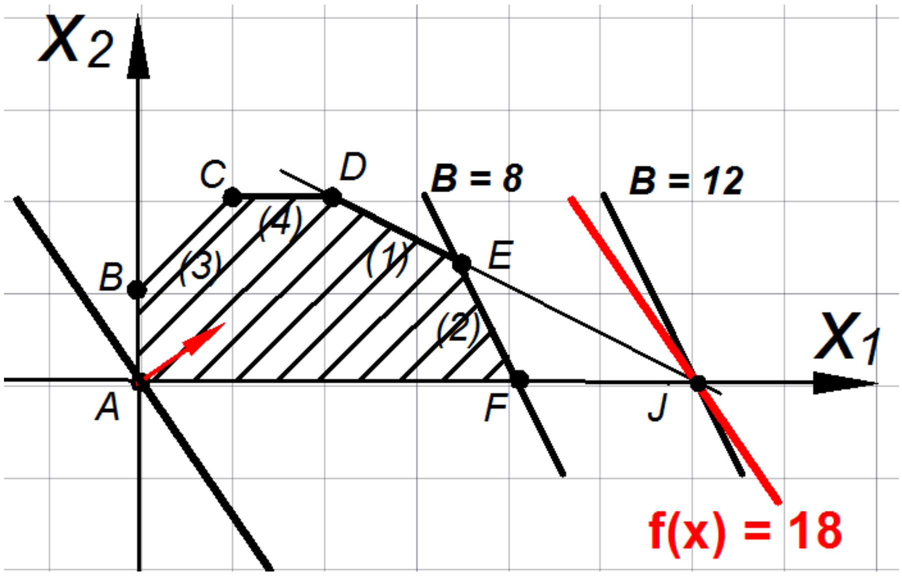


Рис.2.8. Анализ увеличения ресурса В

В точке J выгодно производить только краску 1-го вида (6 т в сутки). Доход от продажи при этом составит

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \times 6 = 18 \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Чтобы обеспечить такой режим работы, согласно правилу № 2, запас ингредиента В надо увеличить до величины

$$2x_1 + x_2 = 2 \times 6 = 12 \text{ [т. ингр. А/сутки]}$$

Ограничения (3) и (4) являются не связывающими, т.к. не проходят через оптимальную точку Е (см. рис. 2.8). Соответствующие им ресурсы (спрос на краски) являются недефицитными. С экономической точки зрения это означает, что в данный момент уровень спроса на краски непосредственно не определяет объемы производства. Поэтому некоторое его колебание может никак не повлиять на оптимальный режим производства в точке Е.

Например, увеличение (уменьшение) спроса на краску 2-го вида будет соответствовать перемещению прямой ограничения $x_2 \leq 2$ (4) вверх (вниз).

Перемещение прямой (4) вверх никак не может изменить точку Е максимума целевой функции. Перемещение же прямой (4) вниз не влияет на существующее оптимальное решение только до пересечения с точкой Е (см. правило № 3). Дальнейшее перемещение (4) приведет к тому, что точка Е будет за пределами новой ОДР. Кроме того, любое оптимальное решение для этой новой ОДР будет хуже точки Е.

Правило 3. Чтобы определить максимальное уменьшение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимальное решение, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой [5].

Правило 4. Чтобы численно определить минимальную величину запаса недефицитного ресурса, не меняющую оптимальное решение, необходимо подставить координаты оптимальной точки в левую часть соответствующего ограничения [5].

Определим, до каких пределов падение спроса на краску 2-го вида не повлияет на производство в точке Е (10/3; 4/3). При этом будем использовать правило № 4.

Подставляем в левую часть ограничения (4) координаты точки Е, получаем $x_2 = 4/3$. Делаем вывод: предельный уровень, до которого может упасть спрос на краску 2-го вида и при котором не изменится оптимальность полученного ранее решения, равен 4/3 т. краски в сутки.

Экономический смысл ограничения (3) $-x_1 + x_2 \leq 1$ $[\text{т. краски/сутки}]$ в том, что объем продаж краски 2-го вида может превысить объем продаж краски 1-го вида максимум на 1 т. Дальнейшее увеличение продаж краски 2-го вида по сравнению с краской 1-го вида графически отобразится перемещением прямой (3) влево и вверх, но никак не повлияет на оптимальность точки Е. Но если разность спросов на краску 2-го и 1-го видов будет уменьшаться, то прямая (3) будет перемещаться ниже и правее. Последним положением прямой (3), при котором точка Е остается оптимальной, является пересечение с точкой Е.

Согласно правилу № 4, подставим координаты точки Е (10/3; 4/3) в левую часть ограничения (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \text{ [т. краски/сутки]}$$

Получаем, что разность спросов на краску 2-го и 1-го вида в точке стала отрицательной. То есть, прохождение прямой (3) через точку E означает, что краску 2-го вида будут покупать в меньшем объеме, чем краску 1-го вида

$$x_1 - x_2 = 2 \text{ [т. краски/сутки]}$$

Делаем вывод: максимальное превышение спроса на краску 1-го вида над спросом на краску 2-го вида, при котором оптимальное решение в точке E не изменится, составляет 2 т краски в сутки.

Результаты решения первой задачи анализа оптимального решения на чувствительность представлены в таблица 2.2.

Таблица 2.2. Результаты анализа ресурсов задачи о максимальном доходе.

№	Тип ресурса	Max изменение ресурса, $max\Delta R_i$ т./сутки	Max изменение дохода, $max\Delta F(X^*)$ тыс. руб./сутки	Ценность дополнительной единицы ресурса $y_i = \frac{max\Delta F(X^*)}{max\Delta R_i}$ тыс. руб./т.
(1)	дефицитный	$7 - 6 = 1$	$13 - 12\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$y_1 = \frac{1}{3}$
(2)	дефицитный	$12 - 8 = 4$	$18 - 12\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$	$y_2 = 1\frac{1}{3}$
(3)	недефицитный	$-2 - 1 = -3$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_3 = 0$
(4)	недефицитный	$\frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$	$y_4 = 0$

Анализ табл. 2.2 показывает, что к улучшению оптимального решения, т.е. к увеличению суточного дохода приводит увеличение дефицитных ресурсов. Для определения выгодности увеличения этих ресурсов используют понятие ценности дополнительной единицы i-го ресурса y_i.

$$y_i = \frac{max\Delta F(X^*)}{max\Delta R_i}$$

где $max\Delta F(X^*)$ – максимальное приращение оптимального значения целевой функции; $max\Delta R_i$–максимально допустимый прирост объема i-го ресурса.

Например, из табл. 2.2 следует, что увеличение суточного запаса ингредиента А [ограничение (1)] на 1т позволит получить дополнительный доход, равный $y_1 = 1/3$ тыс. руб. / сутки, в то время как увеличение запаса В [ограничение (2)] на 1 т принесет $y_2 = 1\frac{1}{3}$ тыс. руб. / сутки. Недефицитные ресурсы имеют нулевые ценности, поскольку изменение этих ресурсов не приводит к увеличению дохода.

Можно сделать следующий вывод: дополнительные вложения в первую очередь необходимо направлять на увеличение ресурса В, а лишь потом на ресурс А. Изменять недефицитные ресурсы нет необходимости.