## 1. Понятие математического программирования

Процессы принятия решений лежат в основе любой ***целенаправленной деятельности.*** В экономике они предшествуют созданию производственных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие". В научных исследованиях – позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, предопределяют развитие экспериментальной базы и теоретического аппарата. При создании новой техники – составляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, комплексов, зданий, в разработке технологии их построения и эксплуатации; в социальной сфере – используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими процессами. ***Оптимальные (эффективные) решения позволяют достигать цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсов.***

В классической математике методы поиска оптимальных решений рассматривают в разделах классической математики, ***связанных с изучением экстремумов функций, в математическом программировании.***

***Математическое программирование*** является одним из разделов исследования операций – прикладного направления кибернетики, используемого для решения практических организационных задач. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий).

***Под принятием решений в исследовании операций*** понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы:

***1-й этап.*** Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т. е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются. Обычно этот этап выходит за пределы математики.

***2-й этап***. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т.е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, ***математическая модель – это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления.*** Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных – параметрами управления явлением. ***Этот этап включает также построение целевой функции переменных, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.***

Итак, в результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача. Причем, второй этап уже требует привлечения математических знаний.

***3-й этап.*** Исследование влияния переменных на значение целевой функции. ***Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических, задач, возникающих на втором этапе процесса принятия, решения.***

Широкий класс задач управления составляют такие ***экстремальные задачи***, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования. ***На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач.*** Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений.

Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных электронных вычислительных машин (ЭВМ), а значит, требует либо создания программ для ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

***4-й этап***. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации. Здесь возможны два случая:

***1-й случай***. Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса. При этом уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи (1-й этап), уточняется или строится заново математическая модель (2-й этап), решается соответствующая математическая задача (3-й этап) и, наконец, снова проводится сопоставление (4-й этап).

***2-й случай.*** Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации.

***В математическом программировании можно выделить два направления.***

К первому, уже вполне сложившемуся направлению – собственно математическому программированию – относятся ***детерминированные задачи***, предполагающие, что вся исходная информация является полностью определенной.

Ко второму направлению – так называемому ***стохастическому программированию*** – относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками.

Так, планирование производственной деятельности зачастую производится в условиях неполной информации о реальной ситуации, в которой будет выполняться план. Или, скажем, когда экстремальная задача моделирует работу автоматических устройств, которая сопровождается случайными помехами. Заметим, что одна из главных трудностей стохастического программирования состоит в самой постановке задач, главным образом из-за сложности анализа исходной информации.

Традиционно в математическом программировании выделяют следующие основные разделы.

***Линейное программирование*** – целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается системой линейных равенств и неравенств. В свою очередь в линейном программировании существуют классы задач, структура которых позволяет создать специальные методы их решения, выгодно отличающиеся от методов решения задач общего характера. Так, в линейном программировании появился раздел транспортных задач.

И так:

***Если целевая функция и функции ограничений – линейные функции, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций нелинейна, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей нелинейного программирования.***

***Нелинейное программирование*** – целевая функция и ограничения нелинейны.

***Целью математического программирования*** является создание, где это возможно, аналитических методов определения решения, а при отсутствии таких методов – создание эффективных вычислительных способов получения приближенного решения.

И так:

***Математическое программирование*** – это математическая дисциплина, в которой разрабатываются методы отыскания экстремальных значений целевой функции среди множества ее возможных значений, определяемых ограничениями.

Наличие ограничений делает задачи математического программирования принципиально отличными от классических задач математического анализа по отысканию экстремальных значений функции. ***Методы математического анализа для поиска экстремума функции в задачах математического программирования оказываются непригодными.***

## 2. Понятие линейного программирования.

***Линейное программирование*** (ЛП) – один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого и начала развиваться сама дисциплина ***"математическое программирование"***.

Впервые постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж, дана в работе советского математика А.Н. Толстого (1930 г.). В 1939 г. советский ученый Л.В. Канторович указал общий метод (метод разрешающих множителей) решения задач, связанных с составлением оптимального плана при организации производственных процессов (в связи с решением задачи оптимального распределения работы между станками фанерного треста в Ленинграде). Он же совместно с М.К. Гавуриным в 1949 г. разработал метод потенциалов, используемый при решении транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, А.Л. Лурье, А.Г. Аганбегяна, Д.Б. Юдина, Е.Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем. В 1949 г. американским математиком Дж. Данцигом был опубликован основной метод решения задач линейного программирования − симплекс-метод. Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах Дж. Данцига и Т. Купманса.

Термин ***"программирование"*** в названии дисциплины ничего общего с термином "программирование (т.е. составление программы) для ЭВМ" не имеет, т.к. дисциплина ***"линейное программирование" возникла еще до того времени,***

***когда ЭВМ стали широко применяться*** для решения математических, инженерных, экономических и др. задач.

***Термин "линейное программирование"*** возник в результате неточного перевода английского ***"linear programming"***. Одно из значений слова ***"programming" - составление планов, планирование***. Следовательно, правильным переводом английского "linear programming" было бы не "линейное программирование ", а ***"линейное планирование"***, что более точно отражает содержание дисциплины. Однако, термины линейное программирование, нелинейное программирование, математическое программирование и т.д. в нашей литературе стали общепринятыми и поэтому будут нами сохранены.

Можно сказать, что линейное программирование применимо для решения математических моделей тех процессов и систем, в основу которых может быть положена ***гипотеза линейного представления реального мира.***

Линейное программирование применяется при решении экономических задач, в таких задачах как управление и планирование производства; в задачах определения оптимального размещения оборудования на морских судах, в цехах; в задачах определения оптимального плана перевозок груза (транспортная задача); в задачах оптимального распределения кадров и т.д.

***Задача линейного программирования (ЛП), как уже ясно из сказанного выше, состоит в нахождении минимума (или максимума) линейной функции при линейных ограничениях.***

Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:

- ***задача об оптимальном использовании ресурсов*** при производственном планировании;
- ***задача о смесях*** (планирование состава продукции);
- ***задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах*** (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");

- ***транспортные задачи*** (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

## 3. Общая постановка задачи ЛП

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величина спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

***Сущность линейного программирования*** состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих ***систему ограничений***, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- ***максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);***
- ***систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;***
- ***требование неотрицательности переменных.***

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства.

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти значения переменных $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые:

а) удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n \le (=, \ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n \le (=, \ge) b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}\, x_n \le (=, \ge) b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

b) являются неотрицательными

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{1.2}$$

c) обеспечивают экстремум целевой функции (максимум или минимум)

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_n\, x_n \tag{1.3}$$

Примечательно, что среди ограничений могут одновременно встречаться знаки ≤, = и ≥. Значения $c_j$, $b_i$, и $a_{ij}$ $(i = \overline{1, m},, \quad j = \overline{1, n})$ предполагаются известными.

Более кратко ЗЛП в общей форме можно представить в следующем виде:

целевая функция

$$f\overline{(x)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(min)$$

ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \text{ где}$$

$x_j$ – произвольного знака, $j = \overline{n_1 + 1, n}$.

***Определение 1.1.*** Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяющий условиям задачи (1.1) и (1.2) называется *допустимым решением* или *допустимым планом*.

Термины «решение» или «план» – синонимы, однако первый используется чаще, когда речь идет о формализованной постановке задачи, а второй – о содержательной [3].

***Определение 1.2.*** Допустимое решение, удовлетворяющее экстремум целевой функции, называется *оптимальным решением задачи*.

## 4. Понятие выпуклого множества в линейном программировании

Свойства ЗЛП тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств. Выпуклое множество опирается не только на наглядные геометрические представления, но имеет чисто аналитическую формулировку.

***Определение 1.3.*** Вектор $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m$ называется выпуклой линейной комбинацией векторов $X_1, X_2, \ldots, X_m$, если коэффициенты удовлетворяют условиям [4].

$$\sum_{j=1}^{n} \propto_i = 1, \alpha_i \geq 0 \; (i = \overline{1, m})$$

В частности выпуклой линейной комбинацией двух точек $X_1$ и $X_2$ является вектор (отрезок) соединяющий эти точки.

$$(1-\alpha)X_1 + \alpha X_2, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

***Определение 1.4.*** Множество $D$ векторов точек линейного пространства $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми его двумя точками $X_1$ и $X_2$ ему принадлежит отрезок, соединяющий эти точки.

Аналитически условие выпуклости $D \subset \mathbb{R}^n$ (условие строгого включения) записывается следующим образом: для любых $X_1 \in D$, $X_2 \in D$ и любого $0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется условие:

$$(1-\alpha)X_1 + \alpha X_2 \in D$$

Геометрическое представление изложенных определений представлено на рис.1.1.

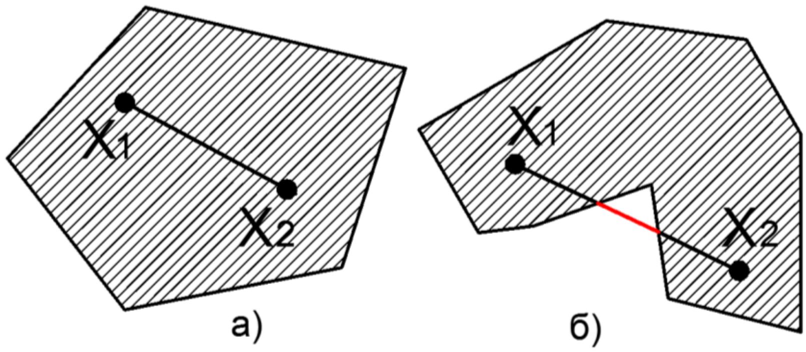



Рис.1.1. Примеры множеств: а) выпуклое множество;

б) множество не является выпуклым.

Приведем примеры выпуклых множеств:

- множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ представляют собой интервалы;
- множество в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ представлено правильными многоугольниками;

- множество в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ представлено правильными многогранниками.

*Примечательно.* Круг в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ является выпуклым множеством, а граница круга во множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ им не является.

Поэтому точки выпуклого множества разделяют на внутренние, граничные и угловые (крайние).

***Определение 1.5.*** Точка $X_1$ выпуклого множества $D$ называется внутренней, если существует сколь угодно малая ее окрестность, содержащая только точки данного множества (рис. 1.2).

***Определение 1.6.*** Точка $X_2$ выпуклого множества $D$ называется граничной, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему (рис. 1.2).

***Определение 1.7.*** Точка $X_3$ выпуклого множества $D$ называется угловой (крайней), если она не может быть представлена выпуклой линейной комбинацией двух других точек этого множества. Другими словами, граничная точка выпуклого множества называется угловой, если через нее можно провести отрезок, все точки которого не принадлежат данному множеству (рис. 1.2).

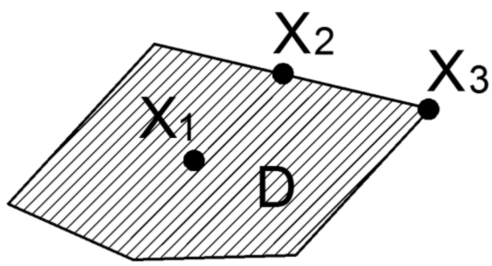



Рис.1.2. Примеры точек выпуклого множества

*Примечательно.* Не всякое выпуклое множество имеет крайние точки. Прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство крайних точек не имеют.

Исходя из свойств выпуклых множеств сформулированы ряд теоретических утверждений.

***Теорема 1.1.*** Множество точек (векторов) $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ удовлетворяющих условиям 1.1 и 1.2 является выпуклым. Другими словами, множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования, является выпуклым [5].

***Теорема 1.2.*** Для того чтобы точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области определения задачи 1.1 – 1.3 была крайней, необходимо и достаточно, чтобы $X$ удовлетворяла не менее, чем $n$ независимым линейным ограничениям системы 1.1 и 1.2, как равенствам. Другими словами, если оптимальный план ЗЛП существует, то, по крайней мере, одна из вершин ограничений является оптимальным планом.

***Теорема 1.3. (Основная теорема линейного программирования).*** Линейная форма 1.3 достигает экстремума в вершинах многогранника условий. Если экстремум достигается не в одной, а в нескольких вершинах, то он достигается и на всем многограннике, порожденном этими вершинами. Другими словами, целевая функция ЗЛП достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. При этом если целевая функция достигает экстремального значения более, чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин [5].

Таким образом, теоремы указывают на принципиальный путь решения ЗЛП. Можно найти все угловые точки, множества $D \subset \mathbb{R}^n$, найти значение целевой функции в каждой угловой точке и выбрать из них экстремальное. На практике такой способ обычно не применяют, так как в реальных задачах угловых точек может быть достаточно большое количество, и объем вычислений будет достаточно громоздким.

## ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

### 2.1. Стандартная форма задачи линейного программирования

Обратим внимание на предыдущую лекцию. В ней два примера задач имели достаточно разный вид: в задаче о максимальном доходе требовалось найти $\boldsymbol{max}$ целевой функции, а в задаче о минимальных затратах – $\boldsymbol{min}$. В задаче о максимальном доходе ограничения имеют вид неравенств со знаком $\leq$, а в задаче о минимальных затратах ограничения имеют вид неравенств со знаками $\leq$ и $=$.

Такой разнобой неудобен при разработке алгоритмов решения этих ЗЛП. Поэтому имеются некоторые стандартные формы ЗЛП, к которым и приводят конкретные различные задачи.

Стандартная форма ЗЛП – это задача, в которой система функциональных и прямых ограничений состоит из одних неравенств, переменные являются неотрицательными, а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму.

Стандартная форма ЗЛП имеет вид [3]:

целевая функция,

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow max \tag{2.1}$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

Для более краткой записи можно использовать векторную или матричную запись.

Тогда вводим в рассмотрение матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

и векторы:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \overline{c} = (c_1, \ldots, c_n) \tag{2.5}$$

Комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ есть скалярное произведение векторов $\overline{c}$ и $\overline{x}$. Тогда в векторной форме задача (2.1 – 2.3) примет вид:

$$\overline{(c}, \overline{x)} \Rightarrow max$$

$$\overline{A_1}x_1 + \overline{A_2}x_2 + \cdots + \overline{A_n}x_n \le \overline{b} \qquad (2.6)$$
$$\overline{x} \ge 0$$

Заметим, что комбинацию $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n$ можно представить как произведение $\overline{c}^T\overline{x}$. Поэтому задачу (2.1 – 2.3) можно представить не только в векторной форме (2.6), но и в матричной.

$$\overline{c}^T\overline{x} \Rightarrow max$$
$$A\overline{x} \le \overline{b} \qquad (2.7)$$
$$\overline{x} \ge 0$$

Стандартная форма ЗЛП интересна тем, что большое число прикладных задач естественным образом сводится к этому виду моделей. В стандартной форме ЗЛП удобно решать графическим методом, если число переменных равно двум (*n = 2*).

## 2.2. Рекомендации по построению модели в стандартной форме

Любую ЗЛП можно привести к стандартной форме используя следующие правила [4:

***Правило перехода от задачи максимизации целевой функции к задаче минимизации.***

Задача максимизации целевой функции $f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow max$ легко может быть сведена к задаче минимизации $-f\overline{(x)} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_n x_n \Rightarrow min$ при тех же ограничениях, так как

$$min\, f(\overline{x}) = -max[-f(\overline{x})] \qquad (2.8)$$

При этом обе задачи имеют одно и тоже оптимальное решение, которое будем обозначать $\overline{x^*}$.

Проиллюстрируем этот факт графически на примере функции одной переменной (рис. 2.1).

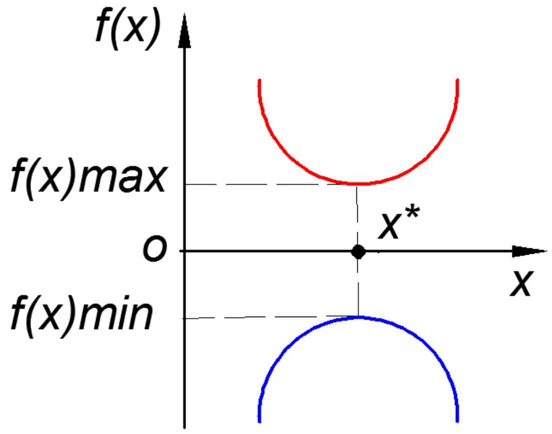



Рис.2.1. Иллюстрация перехода от $max$ к $min$

Функция $f(x)$представляет собой зеркальное отражение функции относительно оси ОХ, ее максимум достигается в той же точке, что и минимум функции. Очевидно, имеет место соотношение 2.8. Соответственно, для перехода от задачи минимизации целевой функции к задаче максимизации выполняется аналогичная процедура.

## 2.3. Решение задач с двумя переменными графическим методом

Если в ЗЛП только две переменные, то наиболее простой и наглядный способ ее решения – это графический метод.

Тогда ЗЛП в стандартной форме будет иметь следующий вид:

Целевая функция.

$$f\overline{(x)} = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow max$$

ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

при условии неотрицательности

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Для решения ЗЛП необходимо ввести понятие «область допустимых решений».

***Определение 2.1***. Совокупность всех допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР) ЗЛП

При этом ОДР является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек. Тогда согласно основной теореме линейного программирования оптимальное решение ЗЛП достигается в одной из угловых точек ОДР.

Таким образом, графический метод решения ЗЛП условно можно разбить на два этапа:

*Первый этап.* Построение ОДР ЗЛП.

*Второй этап.* Нахождение среди всех точек ОДР такой точки $(x_1^*, x_2^*)$ в которой целевая функция $f\overline{(x)}$ принимает максимальное значение.

Перейдем к рассмотрению этих этапов.

***Первый этап.***

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию множества решений линейного неравенства***. Пусть дано неравенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

Тогда уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ будет граничной прямой, которая разбивает плоскость на две полуплоскости. Согласно правилу перехода от ограничений – равенств к неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

Следовательно, геометрической интерпретацией множества решений линейного неравенства является полуплоскость, лежащая по одну сторону от граничащей прямой, включая ее.

Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-либо точку, не принадлежащую граничной прямой, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой эта точка принадлежит, в противном случае – это противоположная полуплоскость.

Рассмотрим пример геометрической интерпретации решений неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (задача о максимальном доходе). Данное неравенство есть полуплоскость, изображенная на рис. 2.2 стрелками.

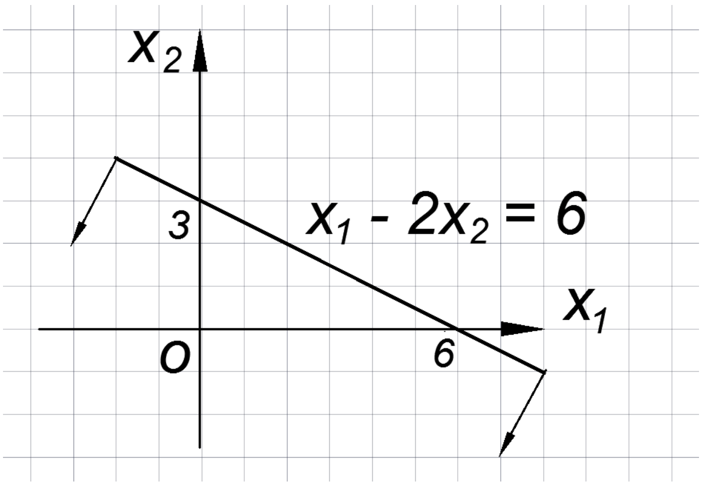



Рис.2.2. Геометрическая интерпретация неравенства $x_1 + 2x_2 \leq 6$

При геометрической интерпретации в неравенстве $x_1 + 2x_2 \leq 6$ заменили знак $\leq$ на $=$ и построили прямую $x_1 + 2x_2 = 6$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. Точка $O(0{,}0)$ искомому неравенству, то областью решения данного неравенства является полуплоскость, которой принадлежит эта точка (отмечена стрелками).

Таким образом, ***геометрическая интерпретация множества решений системы линейных*** неравенств заключается в определении пересечения всех полуплоскостей ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \quad \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \end{cases}$$

Результат данных пересечений будет представлять ОДР системы линейных неравенств.

Рассмотрим пример геометрической интерпретация системы ограничений задачи о максимальном доходе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

при условии неотрицательности переменных $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Знаки неравенств $\leq$ заменим на $=$, построим полученные прямые, найдем соответствующим неравенствам полуплоскости и их пересечения (рис. 2.3).

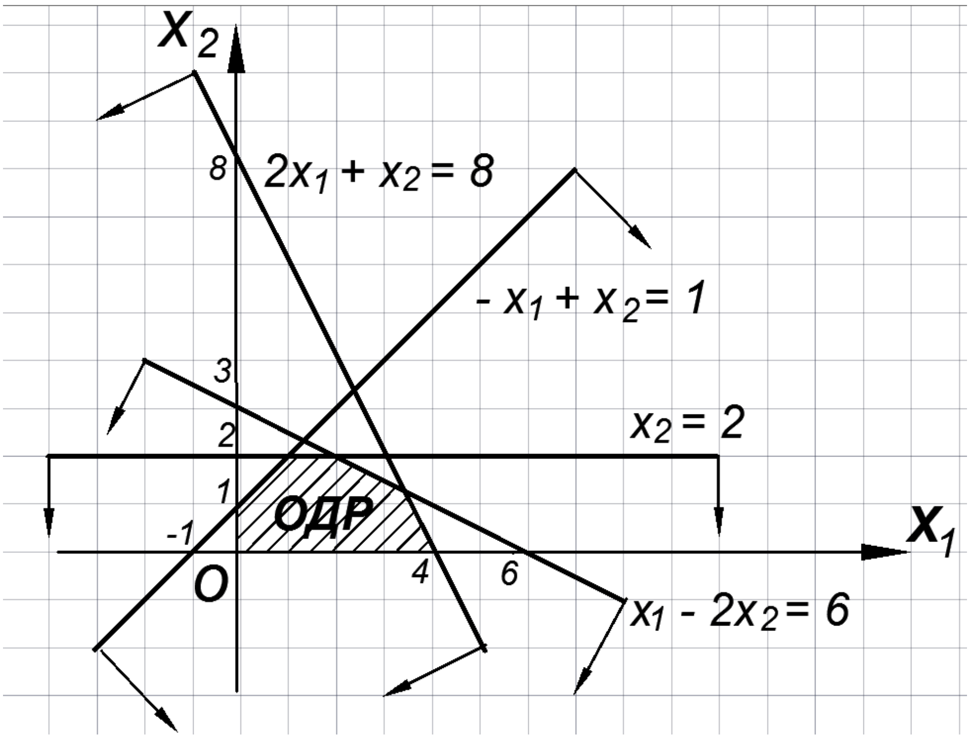



Рис.2.3. Построение области допустимых решений задачи о максимальном доходе

Таким образом, ОДР системы линейных неравенств является выпуклый многоугольник ABCDEF (рис. 2.4).

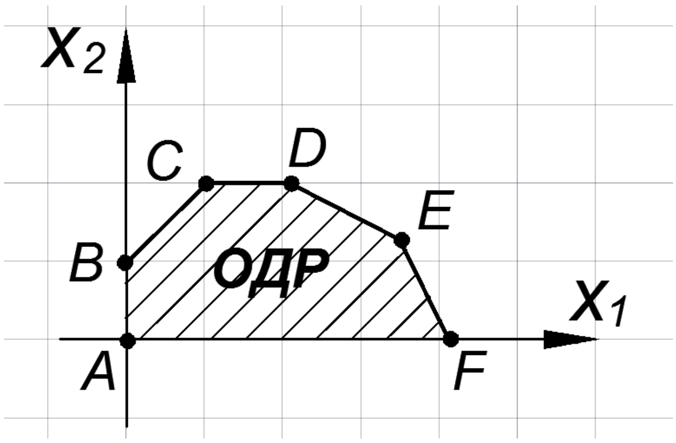
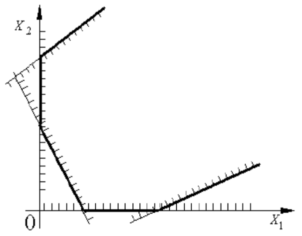
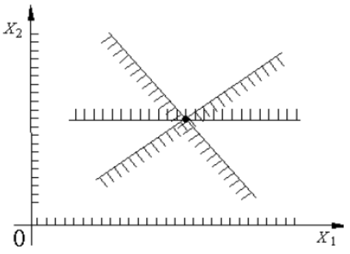
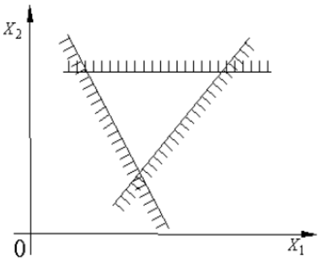
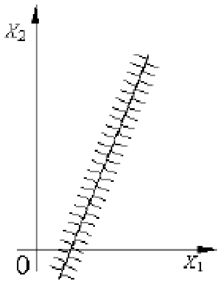
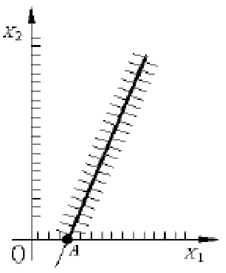
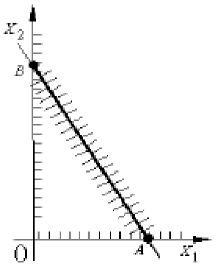



Рис.2.4. Область допустимых решений задачи в виде

Рассмотрим возможные случаи ОДР, сведенные в таблицу 2.1.

*Таблица 2.1.* Возможные случаи области допустимых решений

| № | Возможные ситуации | Вид ОДР |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 |   | Неограниченная выпуклая многоугольная область |
| 2 |   | Единственная точка |
| 3 |   | Пустое множество |
| 4 |   | Прямая линия |
| 5 |   | Луч |
| |   | Отрезок |

***Второй этап.***

Теперь необходимо найти среди всех точек ОДР такую точку, в которой функция цели принимает максимальное значение. Для этого рассмотрим целевую функцию решаемой задачи о максимальном доходе

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

При этом если значение $f\overline{(x)}$ фиксировано, то функция определяется как прямая, а при изменении значения $f\overline{(x)}$, как семейство параллельных прямых.

***Определение 2.1.*** Для всех точек, лежащих на одной из прямых функции $f\overline{(x)}$ принимает одно и то же значение, поэтому указанные прямые называют ***линиями уровня*** для функции $f\overline{(x)}$

***Определение 2.2.*** Вектор, координаты которого являются частными производными функции $f\overline{(x)}$ – называется ***градиентом функции*** $\overline{grad\, f(x)}$. Градиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наибольшего возрастания функции $f\overline{(x)}$ [4].

$$\overline{grad\, f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow max, \text{ где} \quad (2.9)$$

$c_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, c_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Соответственно, антиградиент перпендикулярен линиям уровня и показывает направление наименьшего убывания функции $f\overline{(x)}$.

$$\overline{-grad\, f(x)} = \{c_1, c_2\} \rightarrow min, \text{ где} \quad (2.10)$$

$c_1 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, c_2 = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$

Согласно формуле 2.9., градиент целевой функции решаемой задачи о максимальном доходе будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\, f(x)} = \{2, 3\} \rightarrow max$$

Антиградиент, согласно формуле 2.9., будет равен (рис.2.5):

$$\overline{grad\, f(x)} = \{-2, -3\} \rightarrow min$$

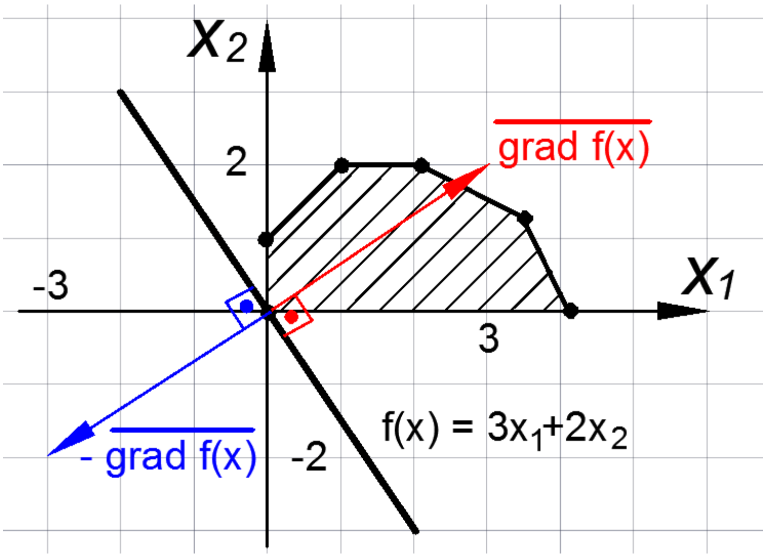



Рис.2.5. Градиент и антиградиент функции $f(x) = 3x_1 + 2x_2$

Рассматриваемая задача решается на максимум, тогда принимаем значения $\{2, 3\}$. Далее будем перемещать линию уровня по ОДР параллельно самой себе в направлении $\overline{grad\ f(x)}$, пока она не пройдет через последнюю (крайнюю) точку ОДР (рис.2.6). Координаты этой точки являются оптимальным решением.

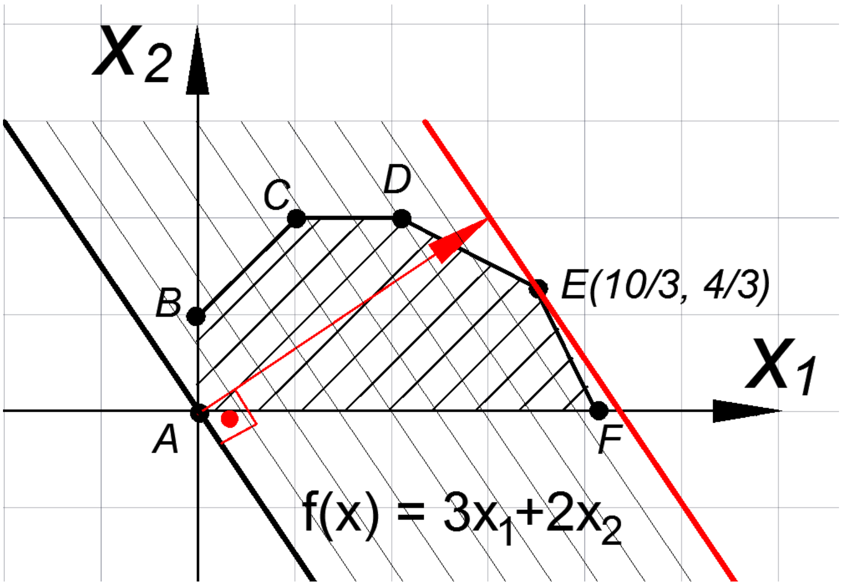



Рис.2.6. Определение оптимального решения

Таким образом, оптимальное решение для задачи о максимальном доходе будут координаты точки $E\,(x_1^*, x_2^*)$ (см. рис. 2.6). Для их нахождения необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующих прямых, пересекающихся в точке оптимума $E$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

Решив систему линейных уравнений, получим, что точка максимума соответствует суточному производству ${x_1}^* = \frac{10}{3}$ т. краски 1-го вида и ${x_2}^* = \frac{4}{3}$ т. краски 2-го вида. Подставив координаты ${x_1}^*$ и ${x_2}^*$ в целевую функцию получим общий доход от продажи суточного объема двух видов краски $f(x) = 12\frac{2}{3}\,[\text{тыс.руб./сутки}]$.