ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Преподаватель: Железняк Лилия Михайловна

zheleznyak@mirea.ru

laboratory.work.2017@gmail.com

Симплексный метод

Для изготовления четырех видов продукции A, B, C и D используются три вида ресурсов I, II, III.

Ресурсы	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.				Запасы ресурсов, ед.
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.	7,5	3	6	12	

Требуется определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной. Пусть x1, x2, x3 и x4 – количество выпущенных единиц продукций типа A, B, C, и D, соответственно. Прибыль от реализации продукции составит 7,5x1 + 3x2 + 6x3 + 12x4, прибыть требуется максимизировать.

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} 2x1 + x2 + 0{,}5x3 + 4x4 \le 3400 \\ x1 + 5x2 + 3x3 \le 1200 \\ 3x1 + 6x3 + x4 \le 3000 \end{cases}$$

Таким образом, переходим к задаче линейного программирования:

$$f(x) = 7{,}5x1 + 3x2 + 6x3 + 12x4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x1 + x2 + 0{,}5x3 + 4x4 \le 3400 \\ x1 + 5x2 + 3x3 \le 1200 \\ 3x1 + 6x3 + x4 \le 3000 \\ xi \ge 0, \quad 1 \le i \le 4 \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные: x5 ≥ 0, x6 ≥ 0, x7 ≥ 0. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} 2x1 + x2 + 0{,}5x3 + 4x4 + x5 = 3400 \\ x1 + 5x2 + 3x3 + x6 = 1200 \\ 3x1 + 6x3 + x4 + x7 = 3000 \\ xi \ \geq \ 0, \qquad 1 \ \leq \ i \ \leq 7 \end{cases}$$

$$f(x) = 7{,}5x1 + 3x2 + 6x3 \ + \ 12x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7$$

Построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему в векторной форме:

$$\overline{\mathrm{A1}}\mathrm{x1} + \overline{\mathrm{A2}}\mathrm{x2} + \overline{\mathrm{A3}}\mathrm{x3} + \overline{\mathrm{A4}}\mathrm{x4} + \overline{\mathrm{A5}}\mathrm{x5} + \overline{\mathrm{A6}}\mathrm{x6} + \overline{A7}x7 = \overline{\mathrm{A0}},$$

$$\overline{\mathrm{A1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A3}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A4}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A5}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A6}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{\mathrm{A7}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathrm{A0}} = \begin{pmatrix} 3400 \\ 1200 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Векторы $A5$, $A6$, $A7$ являются линейно независимыми единичными векторами 3х-мерного пространства и образуют базис этого пространства.

Поэтому за базисные переменные выбираем переменные $x5$, $x6$, $x7$. Небазисными переменными являются $x1$, $x2$, $x3$, $x4$. Разложение позволяет найти первое базисное допустимое решение.

Для этого свободные переменные $x1$, $x2$, $x3$, $x4$ приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$\overline{\mathrm{A5}}\mathrm{x5} + \overline{\mathrm{A6}}\mathrm{x6} + \overline{\mathrm{A7}}\mathrm{x7} = \overline{\mathrm{A0}}.$$

Которому соответствует первоначальный опорный план

$$\mathrm{x}^{(0)} = (\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}, \mathrm{x6}, x7) = (0{,}0{,}0{,}0{,}3400{,}1200{,}3000),$$

$$f\left(x^{(0)}\right) = 0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$\overline{C_B} = (c5, c6, c7)^T = (0{,}0{,}0)^T.$$

В левый столбец Таблицы 1 запишем переменные $x5$, $x6$, $x7$ образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные $x1$, $x2$, $x3$, $x4$. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие небазисным переменным c1 = 15/2, c2 = 3, c3 = 6, c4 = 12. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной $x1$, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбцы, определяемые переменными $x2$, $x3$, $x4$, состоят из коэффициентов векторов $\overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$, соответственно. Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Таблица 1 – Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходе

	c_j	15/2	3	6	12	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X4	$\overline{A_0}$
0	X5	2	1	1/2	4	3400
0	X6	1	5	3	0	1200
0	X7	3	0	6	1	3000
	f					

Заполним f-строку. Найдем относительные оценки Δ1, Δ2, Δ3, Δ4 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1 = (\overline{C_B} * \overline{A_1}) - c_1 = 0*2 + 0*1 + 0*3 - 15/2 = -15/2;$$

$$\Delta_2 = (\overline{C_B} * \overline{A_2}) - c_2 == -3;$$

$$\Delta_3 = (\overline{C_B} * \overline{A_3}) - c_3 == -6;$$

$$\Delta_4 = (\overline{C_B} * \overline{A_4}) - c_4 == -12;$$

$$Q = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 0*3400 + 0*1200 + 0*3000 = 0.$$

Таблица 2 – Заполнение f-строки

	c_j	15/2	3	6	12		
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X4	$\overline{A_0}$	
0	X5	2	1	1/2	4	3400	3400/4 = 850 *min*
0	X6	1	5	3	0	1200	не имеет смысла
0	X7	3	0	6	1	3000	3000/1 = 3000
	f	-15/2	-3	-6	-12	0	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q	

Таблица 3 – Симплекс преобразования

	c_j	15/2	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X5	$\overline{A_0}$
12	X4	1/2	1/4	1/8	1/4	850
0	X6				0	
0	X7				-1/4	
	f				3	
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

Остальные элементы рассчитываются по «правилу прямоугольника».

Aij =AijArs – AisArj /Ars

$$a_{21} = \frac{(1*4)-(2*0)}{4} = 1;\ a_{22} = \frac{(5*4)-(1*0)}{4} = 5;$$

$$a_{23} = \frac{(3*4)-(1/2*0)}{4} = 3;\ a_{25} = \frac{(1200*4)-(3400*0)}{4} = 1200;$$

$$a_{31} = \frac{(3*4)-(2*1)}{4} = 5/2;\ a_{32} = \frac{(0*4)-(1*1)}{4} = -1/4;$$

$$a_{33} = \frac{(6*4)-(1/2*1)}{4} = 47/8;\ a_{35} = \frac{(3000*4)-(3400*1)}{4} = 2150;$$

$$\Delta_1 = \frac{(-15/2*4)-(2*-12)}{4} = -3/2;\ \Delta_2 = \frac{(-3*4)-(1*-12)}{4} = 0;$$

$$\Delta_3 = \frac{(-6*4)-(1/2*-12)}{4} = -9/2;$$

Таблица 4 – Итерация 1

	c_j	15/2	3	6	0	
$\overline{C_B}$		X1	X2	X3	X5	$\overline{A_0}$
12	X4	1/2	1/4	1/8	1/4	850
0	X6	1	5	3	0	1200
0	X7	5/2	-1/4	47/8	-1/4	2150
	f	-3/2	0	-9/2	3	10200
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Q

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$\overline{x^{(1)}} = (x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7) = (0, 0, 0, 850, 0, 1200, 2150),$$

$$f\left(\overline{x^{(1)}}\right) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 12*850 + 0*1200 + 0*2150 = 10200.$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные оценки Δ1, Δ3.