3. ЛЕКЦИЯ. Методы на основе Марковских моделей

Основные понятия Марковских процессов

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А. Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать «динамикой вероятностей». В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и, соответственно, в рекомендательных системах.

Для математического описания многих операций, развивающихся в форме случайного процесса, может быть с успехом применен математический аппарат, разработанный в теории вероятностей для Марковских случайных процессов.

Функция $X(t)$ называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется случайным процессом.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место марковских процессов среди других классов случайных процессов обусловлено следующими обстоятельствами: для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи; с помощью марковских процессов можно описать (точно или приближенно) поведение достаточно сложных систем.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется марковским (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любою момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние. То есть в марковском случайном процессе будущее развитие процесса не зависит от его предыстории.

Классификация марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды марковских случайных процессов:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские

последовательности);

- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Если множество состояний, в которых может находиться процесс счётное, то есть все возможные состояния могут быть пронумерованы, то соответствующий процесс называется случайным процессом с дискретными состояниями или просто дискретным случайным процессом. (рис. 3.1.а).

Если множество состояний не может быть пронумеровано, то имеем случайный процесс с непрерывными состояниями или просто непрерывный случайный процесс, для которого характерен плавный переход из состояния в состояние и который задаётся в виде непрерывной функции времени: $E(t)$ (рис. 3.1.б).

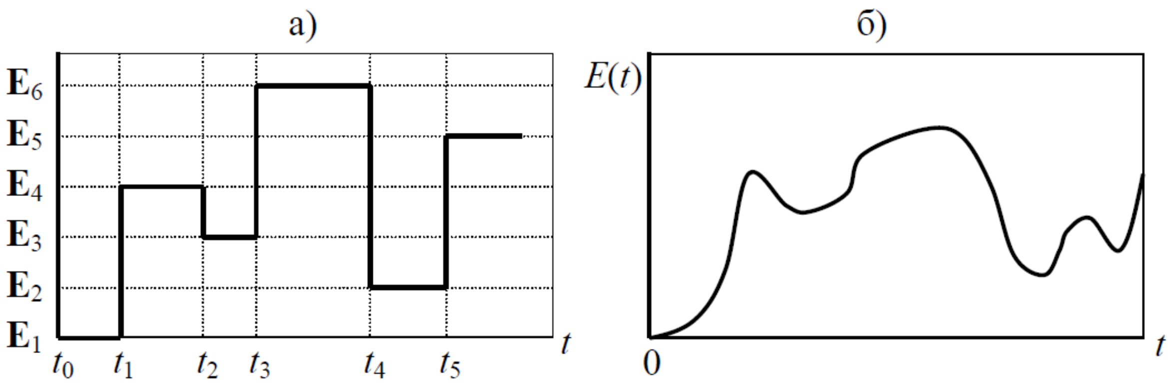

Рис. 3.1. Процессы с дискретными (а) и непрерывными (б) состояниями

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний (рис. 3.2), где кружками обозначены состояния $S_1, S_2, \ldots$ системы S, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние.

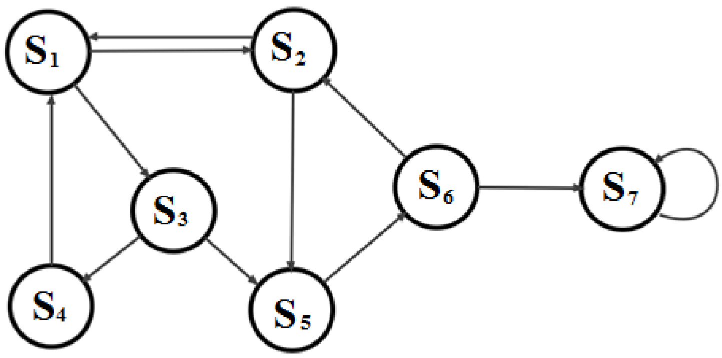

Рис. 3.2. Граф состояний системы S

На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть, как конечным, так и бесконечным (но счетным).

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют марковской цепью. Для такого процесса моменты $t_1, t_2, \ldots$, когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время t, а номер шага $1, 2, \ldots, k, \ldots$ Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0), S(1), S(2), \ldots, S(k), \ldots$, где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ – состояние системы после первого шага; $S(k)$ – состояние системы после k-го шага.

Событие $\{S(k) = S_i\}$, состоящее в том, что сразу после k-го шага система находится в состоянии $S_i (i = 1, 2,)$, является случайным событием. Последовательность состояний $S(0), S(1), S(k)$, можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i. Начальное состояние $S(0)$ может быть заданным заранее или случайным.

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после k-го шага (и до $(k+1)$-го) система S будет находиться в состоянии S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1 \qquad (1)$$

Начальным распределением вероятностей Марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0), P_2(0), \ldots, P_i(0), \ldots, P_n(0) \qquad (2)$$

В частном случае, если начальное состояние системы S в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $P_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k-м шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим (после $k-1$ шага) она находилась в состоянии S_i.

Поскольку система может пребывать в одном из n состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2 вероятностей перехода P_{ij}, которые удобно представить в виде следующей матрицы:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \vdots & P_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

где P_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j;

P_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i.

Матрица (3) называется переходной или матрицей переходных вероятностей.

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется однородной.

Переходные вероятности однородной Марковской цепи P_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n. Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i-го) состояния, в том числе и переход в самое себя.

2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное (j -е) состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец – в состояние).

3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \quad (4)$$

4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности P_{ii} того, что система не выйдет из состояния S_i, а останется в нем.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей (2) и матрица переходных вероятностей $\|P_{ij}\|$ (3), то вероятности состояний системы $P_i(k)$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$ определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1)P_{ji} \quad (5)$$

Пример. Рассмотрим процесс функционирования системы – автомобиль. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном (S_1) и неисправном (S_2). Граф состояний системы представлен на рис. 3.3.

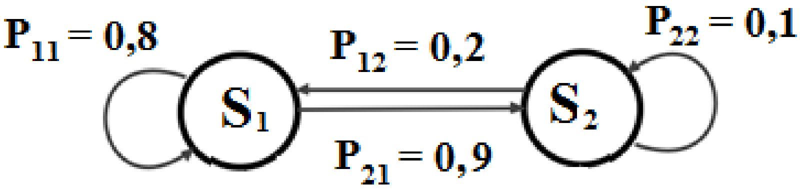

Рис. 3.3. Граф состояний автомобиля

В результате проведения массовых наблюдений за работой автомобиля составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0.1 \end{pmatrix} \text{ где} \qquad (6)$$

$P_{11} = 0,8$ – вероятность того, что автомобиль останется в исправном состоянии;

$P_{12} = 0,2$ – вероятность перехода автомобиля из состояния «исправен» в состояние «неисправен»;

$P_{21} = 0,9$ – вероятность перехода автомобиля из состояния «неисправен» в состояние «исправен»;

$P_{22} = 0,1$ – вероятность того, что автомобиль останется в состоянии «неисправен».

Вектор начальных вероятностей состояний автомобиля задан

$$P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{т. е } P_1(0) = 0 \text{ и } P_2(0) = 1.$$

Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток.

Используя матрицу переходных вероятностей и формулу (5), определим вероятности состояний $P_i(k)$ после первого шага (после первых суток):

$$P_1(1) = P_1(0) \times P_{11} + P_2(0) \times P_{21} = 0 \times 0,8 + 1 \times 0,9 = 0,9;$$

$$P_2(1) = P_1(0) \times P_{12} + P_2(0) \times P_{22} = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,1 = 0,1.$$

Вероятности состояний после второго шага (после вторых суток) таковы:

$$P_1(2) = P_1(1) \times P_{11} + P_2(1) \times P_{21} = 0,9 \times 0,8 + 0,1 \times 0,9 = 0,81;$$

$$P_2(2) = P_1(1) \times P_{12} + P_2(1) \times P_{22} = 0,9 \times 0,2 + 0,1 \times 0,1 = 0,19.$$

Вероятности состояний после третьего шага (после третьих суток) равны:

$$P_1(3) = P_1(2) \times P_{11} + P_2(2) \times P_{21} = 0,81 \times 0,8 + 0,19 \times 0,9 = 0,819;$$

$$P_2(3) = P_1(2) \times P_{12} + P_2(2) \times P_{22} = 0,81 \times 0,2 + 0,19 \times 0,1 = 0,181.$$

Таким образом, после третьих суток автомобиль будет находиться в исправном состоянии с вероятностью 0,819 и в состоянии «неисправен» с вероятностью 0,181. На этом основании возможно создать рекомендательную систему использования или покупки автомобиля.

Все многообразие Марковских цепей подразделяется на эргодические и разложимые.

Разложимые Марковские цепи (рис.3.4) содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

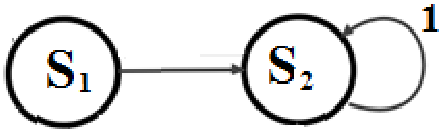

Рис. 3.4. Разложимые Марковские цепи

Эргодические Марковские цепи описываются сильно связанным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния S_i в любое состояние S_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ за конечное число шагов.

Для эргодических цепей при достаточно большом времени функционирования (t стремится к бесконечности) наступает стационарный режим, при котором вероятности Pi состояний системы не зависят от времени и не зависят от распределения вероятностей в начальный момент времени, т.е. Pi=const.

Каждая компонента P_i вектора таких стационарных вероятностей характеризует среднюю долю времени, в течение которого система находится в рассматриваемом состоянии S_i за время наблюдения, измеряемое k шагами.

Для определения стационарных вероятностей P_i нахождения системы в состоянии S_i $(i = 1, \ldots, n)$ нужно составить систему n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j \, P_{ji}, (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

Причем, искомые вероятности должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{8}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (7) удобно составлять непосредственно по размеченному графу состояний. При этом в левой части уравнения записывается вероятность состояния, соответствующего рассматриваемой вершине графа, а в правой части – сумма произведений. Число слагаемых соответствует числу дуг графа, входящих в рассматриваемое состояние. Каждое слагаемое представляет произведение вероятности того состояния, из которого выходит дуга графа, на переходную вероятность, которой помечена соответствующая дуга графа.

Пример. Центральный процессор мультипрограммной системы в любой момент времени выполняет либо программы пользователя, либо программы операционной системы, либо находится в состоянии ожидания. Продолжительность нахождения системы в каждом состоянии кратна длительности шага. Определить коэффициент использования процессора, если задана матрица вероятностей переходов из одного состояния в другое

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Решение.

S_1 – состояние, в котором реализуются задачи пользователя;

S_2 – состояние, в котором реализуются программы операционной системы;

S_3 – состояние простоя.

Граф функционирования системы имеет вид (рис. 3.5):

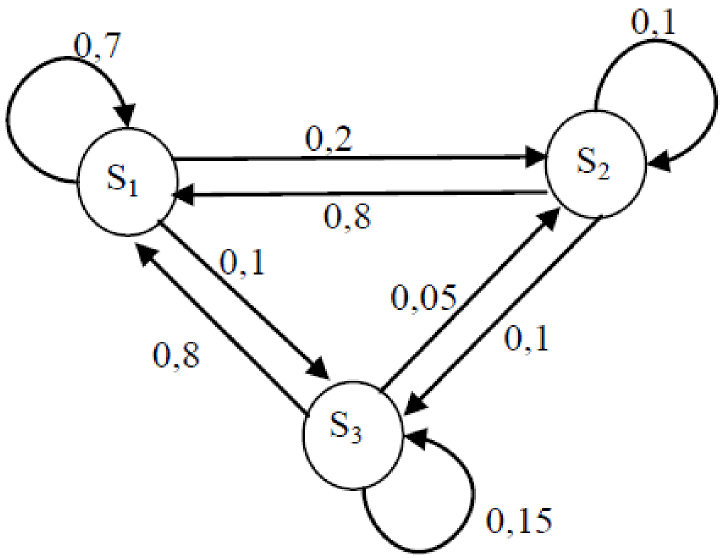

Рис. 3.5. Граф состояний системы

Составим для установившегося режима систему линейных алгебраических уравнений.

$$P_1 = 0{,}7P_1 + 0{,}8P_2 + 0{,}8P_3;$$
$$P_2 = 0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}05P_3;$$
$$P_3 = 0{,}1P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}15P_3;$$
$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

На основании 4-го уравнения

$$P_1 = 1 - P_2 - P_3$$
$$P_2 = 1 - P_1 - P_3$$
$$P_3 = 1 - P_1 - P_2$$

Уравняем левые и правые части уравнений.

$$1 - P_2 - P_3 = 0{,}7P_1 + 0{,}8P_2 + 0{,}8P_3;$$
$$1 - P_1 - P_3 = 0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}05P_3;$$
$$1 - P_1 - P_3 = 0{,}1P_1 + 0{,}1P_2 + 0{,}15P_3;$$

Тогда получаем

$$0{,}7P_1 + 1{,}8P_2 + 1{,}8P_3 = 1$$
$$1{,}2P_1 + 0{,}1P_2 + 1{,}05P_3 = 1$$
$$1{,}1P_1 + 1{,}1P_2 + 0{,}15P_3 = 1$$

Решая систему методом Крамера, находим определители:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 1{,}8 & 1{,}8 \\ 1{,}2 & 0{,}1 & 1{,}05 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix} = 0{,}7 \times 0{,}1 \times 0{,}15 + 1{,}8 \times 0{,}15 \times 1{,}1 + 1{,}8 \times 1{,}2 \times 1{,}1 -$$
$$1{,}8 \times 0{,}1 \times 1{,}1 - 0{,}7 \times 1{,}05 \times 1{,}1 - 1{,}8 \times 0{,}15 \times 1{,}2 = 3{,}135$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}8 & 1{,}8 \\ 1 & 0{,}1 & 1{,}05 \\ 1 & 1{,}1 & 0{,}15 \end{pmatrix} = 1 \times 0{,}1 \times 0{,}15 + 1{,}8 \times 0{,}15 \times 1 + 1{,}8 \times 1 \times 1{,}1 -$$
$$1{,}8 \times 0{,}1 \times 1 - 1 \times 1{,}05 \times 1{,}1 - 1{,}8 \times 1 \times 1{,}2 = 2{,}28$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 1 & 1{,}8 \\ 1{,}2 & 1 & 1{,}05 \\ 1{,}1 & 1 & 0{,}15 \end{pmatrix} = 0{,}7 \times 1 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}15 \times 1{,}1 + 1{,}8 \times 1{,}2 \times 1 -$$
$$1{,}8 \times 1 \times 1{,}1 - 0{,}7 \times 1{,}05 \times 1 - 1 \times 0{,}15 \times 1{,}2 = 0{,}525$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 1{,}8 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}1 & 1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 1 \end{pmatrix} = 0{,}7 \times 0{,}1 \times 1 + 1{,}8 \times 1 \times 1{,}1 + 1 \times 1{,}2 \times 1{,}1 -$$
$$1 \times 0{,}1 \times 1{,}1 - 0{,}7 \times 1 \times 1{,}1 - 1{,}8 \times 1 \times 1{,}2 = 0{,}33$$

В результате решения получаем значение вероятностей состояния в установленном режиме:

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2{,}28}{3{,}135} \approx 0{,}727$$
$$P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0{,}525}{3{,}135} \approx 0{,}168$$
$$P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0{,}33}{3{,}135} \approx 0{,}105$$

Коэффициент простоя процессора $K_п = P_3 = 0{,}105$. Коэффициент использования $K_и = 1 - K_п = 0{,}895$, при этом на обработку программ пользователя затрачивается 81,2% времени, а на обслуживание операционной системы – 18,8%.

Непрерывные цепи Маркова

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется непрерывной цепью Маркова при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

В экономике часто встречаются ситуации, которые указать заранее невозможно. Например, любая деталь или агрегат могут выходить из строя в любой, непредсказуемый заранее момент времени. Для описания таких систем и отдельных случаев можно использовать математический аппарат непрерывной цепи Маркова.

Пусть система характеризуется n состояниями $S_1, S_2, \ldots, S_n$, а переход из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Требуется определить для любого t вероятности состояний $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$. Очевидно, что имеет место нормировочное условие:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Для процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотности вероятностей перехода λ_{ij}, представляющие собой предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t}$$

где $P_{ij}(t; \Delta t)$ – вероятность того, что система, пребывавшая в момент t в состоянии S_i, за время Δt перейдет из него в состояние S_j.

Из определения плотностей вероятности перехода λ_{ij} видно, что они в общем случае зависят от времени t, неотрицательны и в отличие от вероятностей могут быть больше 1.

Если при любых $i \neq j$ плотности вероятностей переходов не зависят от времени t, и тогда вместо $\lambda_{ij}(t)$ будем писать просто λ_{ij}, то Марковский процесс с непрерывным временем называется однородным. Если же хотя бы при одной паре значений $i \neq j$ плотность вероятности перехода λ_{ij} изменяется с течением времени t, процесс называется неоднородным. Таким образом, если $\lambda_{ij} = \mathrm{const}$, то процесс называется однородным, если плотность вероятности зависит от времени $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$, то процесс – неоднородный.

Вероятности состояний $P_i(t); i = 1, \ldots, n$ (неизвестные вероятностные функции) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -P_i(t) \times \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \times \lambda_{ji}$$

Система представляет собой систему n обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эта система называется системой дифференциальных уравнений Колмогорова. Величина $P_{ij}(t) \times \lambda_{ij}$ называется потоком вероятности перехода из состояния S_i в S_j, причем интенсивность потоков λ_{ij} может зависеть от времени или быть постоянной.

Составить систему Колмогорова удобно по одному из следующих правил:

1) правило составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова по размеченному графу состояний.

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение Колмогорова для функции $P_i(t), i = 1, \ldots, n$, надо в левой части этого уравнения записать производную $dP_i(t)/dt$,функции $P_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение – $P_i(t) \times \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ суммы $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ плотностей вероятностей переходов λ_{ij} у стрелок, выходящих из состояния S_i, на вероятность $P_i(t)$ этого состояния со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n} P_j(t) \times \lambda_{ji}$ произведений $P_j(t) \times \lambda_{ji}$ плотностей вероятностей переходов λ_{ji} , соответствующих стрелкам, входящим в состояние S_i , на вероятности состояний $P_j(t)$, из которых эти стрелки выходят. При этом плотности вероятностей переходов λ_{ij} , соответствующие отсутствующим стрелкам на графе, равны 0.

Другими словами, в левой части уравнения стоит производная от вероятности рассматриваемого состояния по времени, а в правой части — столько слагаемых, сколько дуг графа связано с рассматриваемым состоянием. Каждое слагаемое равно произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной дуге графа, на вероятность того состояния, из которого исходит дуга графа. Если стрелка направлена из рассматриваемого состояния, соответствующее произведение имеет знак минус. Если стрелка направлена в состояние, то произведение имеет знак плюс.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, составленная по графу состояний на рис. 3.6,

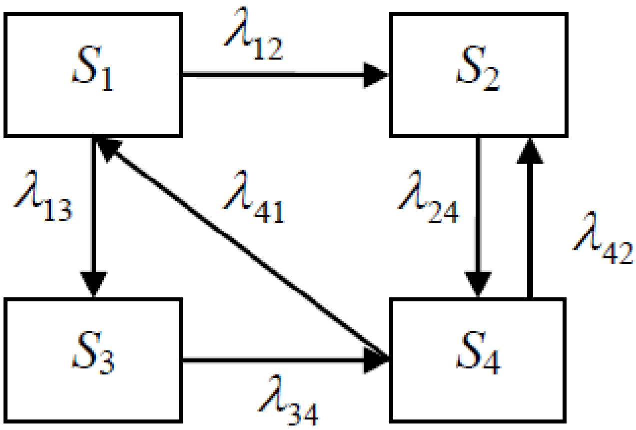

Рис. 3.6. Граф состояний системы

имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1(t) + \lambda_{41}P_4(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t) + \lambda_{42}P_4(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{34}P_3(t) + \lambda_{13}P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{41} + \lambda_{42})P_4(t) + \lambda_{24}P_2(t) + \lambda_{34}P_3(t) \end{cases}$$

2) правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова по матрице плотностей вероятностей переходов.

Для составления дифференциального уравнения Колмогорова для функции $P_i(t), i = 1, \dots, n$ надо в левой части уравнения записать производную $dP_i(t)/dt$ функции $P_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение $-P_i(t) \times \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ суммы $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ элементов λ_{ij} i-ой строки матрицы Λ плотностей вероятностей на вероятность $P_i(t)$ состояния S_i (номер которой совпадает с номером взятой строки) со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n} P_j(t) \times \lambda_{ji}$ произведений $P_j(t) \times \lambda_{ji}$ элементов i-го столбца на соответствующие им вероятности $P_j(t)$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова составленная, например, по матрице плотностей вероятностей переходов

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -5P_1(t) + 6P_2(t) + 1{,}5P_3(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = -6P_2(t) + 2P_1(t) + 4P_3(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -5{,}5P_3(t) + 3P_1(t) \end{cases}$$

Итак, составлять систему дифференциальных уравнений Колмогорова можно либо по размеченному графу состояний, либо по матрице плотностей вероятностей переходов. Для решения этой системы применяют численные методы.

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t \to \infty$. В некоторых случаях существуют финальные (предельные) вероятности состояний

$$P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$$

не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент. Говорят, что в системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности уже не меняются. Система, для которой существуют финальные вероятности называется эргодической, а соответствующий случайный процесс – эргодическим.

Финальные вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_1(t), \dots, P_n(t)$ в правых частях уравнений заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности $P_1, \dots, P_n$. Для нахождения точного значения $P_1, \dots, P_n$ к уравнениям добавляют нормировочное условие $P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1$.

Пример. Граф состояний системы имеет вид (рис. 3.7):

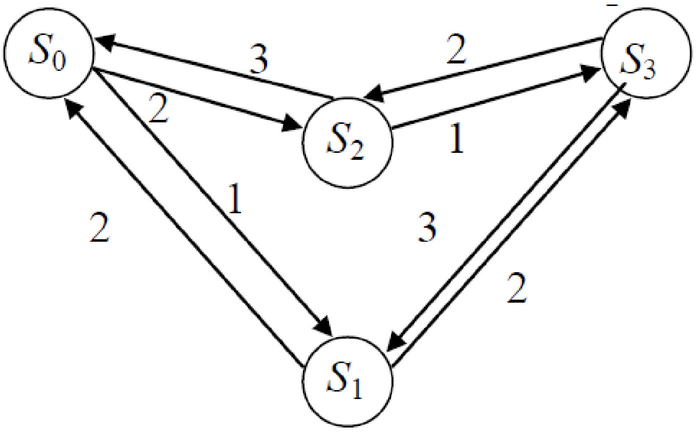

Рис. 3.7. Граф состояний

Решение. Составим систему уравнений Колмогорова для данного графа состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \lambda_{10}P_1(t) + \lambda_{20}P_2(t) - (\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{31}P_3(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{13})P_1(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{02}P_0(t) + \lambda_{32}P_3(t) - (\lambda_{20} + \lambda_{23})P_2(t) \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - (\lambda_{31} + \lambda_{32})P_3(t) \end{cases}$$

Подставим значения

$\lambda_{01} = 1; \lambda_{10} = 2; \lambda_{02} = 2; \lambda_{20} = 3; \lambda_{13} = 2; \lambda_{31} = 2; \lambda_{23} = 1; \lambda_{32} = 2.$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_0(t)}{dt} = 2P_1(t) + 3P_2(t) - 3P_0(t) \\
\dfrac{dP_1(t)}{dt} = P_0(t) + 3P_3(t) - 4P_1(t) \\
\dfrac{dP_2(t)}{dt} = 2P_0(t) + 2P_3(t) - 4P_2(t) \\
\dfrac{dP_3(t)}{dt} = 2P_1(t) + P_2(t) - 5P_3(t)
\end{cases}
$$

Тогда финальные вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений в которой исключено одно из уравнений:

$$
\begin{cases}
-3P_0 + 2P_1 + 3P_2 = 0 \\
P_0 - 4P_1 + 3P_3 = 0 \\
2P_0 - 4P_2 + 2P_3 = 0 \\
P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1
\end{cases}
$$

Решить эту систему линейных уравнений можно, например, методом Крамера. Для этого найдем:

$$
\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 120; \ \Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 48;
$$

$$
\Delta_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 24; \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 32;
$$

$$
\Delta_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 16.
$$

Решение системы имеет вид:

$$
P_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{48}{120} = 0{,}4\,; P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{120} = 0{,}2; \ P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{32}{120} = 0{,}27;
$$

$$
P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{120} = 0{,}13.
$$