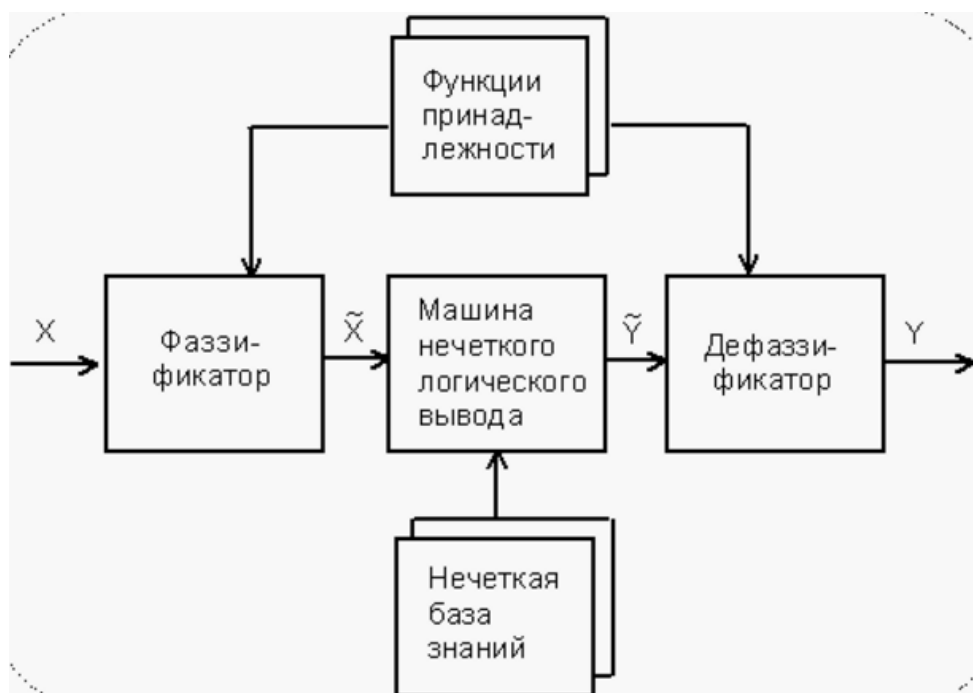


1. Нечеткие системы

Рассмотрим архитектуру классической нечеткой системы.



Обозначения:

X - входной четкий вектор;

\tilde{X} - вектор нечетких множеств, соответствующий входному вектору X ;

\tilde{Y} - результат логического вывода в виде вектора нечетких множеств;

Y - выходной четкий вектор.

Нечеткая база знаний.

Определение 19. Нечеткой базой знаний называется совокупность нечетких правил *"Если - то"*, определяющих взаимосвязь между входами и выходами исследуемого объекта. Обобщенный формат нечетких правил такой:

Если посылка правила, то заключение правила.

Посылка (антецедент) правила представляет собой утверждение типа *" x есть низкий"*, где *"низкий"* - ;это терм (лингвистическое значение), заданный нечетким множеством на универсальном множестве лингвистической переменной x . Квантификаторы "очень", "более-менее", "не", "почти" и т.п. могут использоваться для модификации термов посылки.

Заключение или следствие правила представляет собой утверждение типа *" y есть d "*, в котором значение выходной переменной (d) может задаваться:

- нечетким термом: "*у есть высокий*";
- классом решений: "*у есть бронхит*"
- четкой константой: "*у=5*";
- четкой функцией от входных переменных: "*у=5+4*x*".

Для задания многомерных зависимостей (сложных правил) "входы-выходы" используют нечеткие логические операции И и ИЛИ. Удобно правила формулировать так, чтобы внутри каждого правил переменные объединялись логической операцией И, а правила в базе знаний связывались операцией ИЛИ. В этом случае нечеткую базу знаний, связывающую входы $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с выходом Y , можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 &\text{ЕСЛИ } \{x_1 = a_{1,j1}\} \text{ И } \{x_2 = a_{2,j1}\} \text{ И } \dots \text{ И } \{x_n = a_{n,j1}\} \\
 &\text{ИЛИ } \{x_1 = a_{1,j2}\} \text{ И } \{x_2 = a_{2,j2}\} \text{ И } \dots \text{ И } \{x_n = a_{n,j2}\} \\
 &\dots \\
 &\text{ИЛИ } \{x_1 = a_{1,jk_j}\} \text{ И } \{x_2 = a_{2,jk_j}\} \text{ И } \dots \text{ И } \{x_n = a_{n,jk_j}\}, \\
 &\text{ТО } Y = d_j, \quad j = \overline{1, m},
 \end{aligned}$$

где $a_{i,jp}$ - нечеткий терм, которым оценивается переменная x_i в строчке с номером jp ($p = \overline{1, k_j}$);

k_j - количество строчек-конъюнкций, в которых выход Y оценивается значений d_j ;

m - количество различных значений, используемых для оценки выходной переменной Y .

Для учета различной степени уверенности эксперта в адекватности правил используют весовые коэффициенты.

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left(\bigcap_{i=1}^n x_i = a_{i,jp} \text{ с весом } w_{jp} \right) \rightarrow y = d_j, \quad j = \overline{1, m},$$

где \cup - ; нечеткая логическая операция ИЛИ;

\cap - ; нечеткая логическая операция И;

$w_{jp} \in [0, 1]$ - ; весовой коэффициент правила с номером jp .

Также если значение выходной переменной в правиле задано нечетким множеством, тогда правило может быть представлено нечетким отношением (проходили на предыдущей лекции)

Предполагается, что между правилами нет взаимодействия.

Общепринятые сокращения для значений основных термов лингвистических переменных в системах нечеткого вывода

Символическое обозначение	Англоязычная нотация	Русскоязычная нотация
NB	Negative Big	Отрицательное большое
NM	Negative Middle	Отрицательное среднее
NS	Negative Small	Отрицательное малое
ZN	Zero Negative	Отрицательное близкое к нулю
Z	Zero	Нуль, близкое к нулю
ZP	Zero Positive	Положительное, близкое к нулю
PS	Positive Small	Положительное малое
PM	Positive Middle	Положительное среднее
PB	Positive Big	Положительное большое

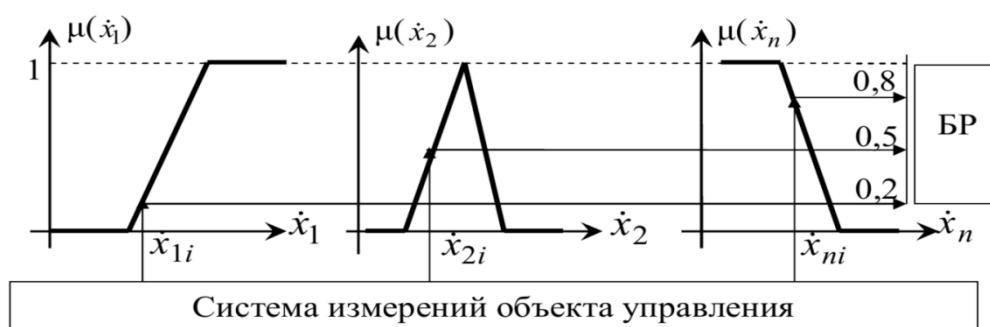
Фаззификатор - блок фаззификации

В блоке *фаззификации* производится трансформация четких сигналов в

нечеткие множества.

На входе блока фаззификации (БФ) сигналы снимаемых значений параметров $\dot{x} = [x_1, K, x_n]^T \in X$ от источников информации о состоянии предметной области на основе функций принадлежности, описывающих соответствующие нечеткие множества, переводятся в форму фаззификации (в нечеткую форму; от англ. *fuzzification*; *fuzzy* — нечеткий). На выходе БФ снимается вектор A' нечетких значений параметров, рассматриваемых как лингвистические переменные с заданными множествами значений — именами нечетких множеств.

Для нечетких систем поддержки принятия решений, для каждого $\dot{x}_1, \dot{x}_2, K, \dot{x}_n$ должны быть априорно известны функции принадлежности $\mu(x)_1, \mu(\dot{x}_2), K, \mu(\dot{x}_n)$. Тогда операция фаззификации выполняется согласно рисунку



Здесь символами $\dot{x}_1, \dot{x}_2, K, \dot{x}_n$ обозначены конкретные численные значения входных сигналов, поступившие от соответствующих систем измерения (например, от человека).

Машина нечеткого логического вывода – блок рассуждений.

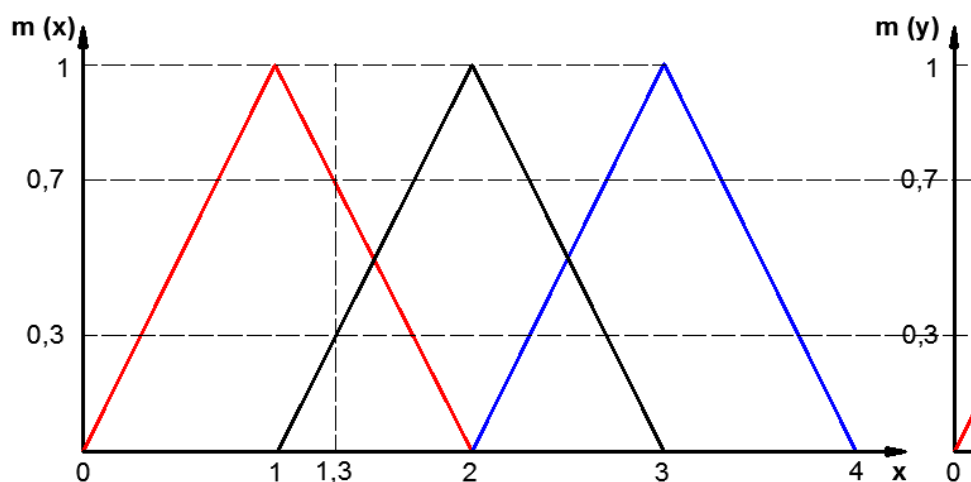
Блок рассуждений (БР). Процесс обработки нечетких правил вывода состоит из следующих этапов.

- **Агрегирование (Aggregation)**– это процедура определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечеткого вывода. При этом используются полученные на этапе фаззификации значения функций

принадлежности термов лингвистических переменных, составляющих вышеупомянутые условия (антецеденты - посылка) нечетких продукционных правил.

Если условие нечеткого продукционного правила является простым нечетким высказыванием, то степень его истинности соответствует значению функции принадлежности соответствующего термина лингвистической переменной.

Абстрактный пример.



Если условие представляет составное высказывание, то степень истинности сложного высказывания определяется на основе известных значений истинности составляющих его элементарных высказываний при помощи введенных ранее нечетких логических операций в одном из оговоренных заранее базисов.

При этом для определения результата нечеткой конъюнкции или связки "И" может быть использована формула

$$\mu_R(u,v) = \min(\mu_U(u), \mu_V(v))$$

Знак конъюнкции \wedge соответствует выделению наименьшего из значений.

Для определения результата нечеткой дизъюнкции или связки "ИЛИ" может быть использована одна из формул

$$\mu_R(u,v) = \max(\mu_U(u), \mu_V(v))$$

Знак дизъюнкции \vee соответствует выделению наибольшего из значений.

Тем самым находятся количественные значения истинности всех условий

правил системы нечеткого вывода. Этап агрегирования считается законченным, когда будут найдены все значения для каждого из правил, входящих в рассматриваемую базу правил системы нечеткого вывода.

Пример. Для иллюстрации выполнения этого этапа рассмотрим пример процесса агрегирования двух нечетких высказываний:

ПРАВИЛО 1 "скорость автомобиля средняя" **И** "температура охлаждающей жидкости"

ПРАВИЛО 2 "скорость автомобиля средняя" **ИЛИ** "температура охлаждающей жидкости"

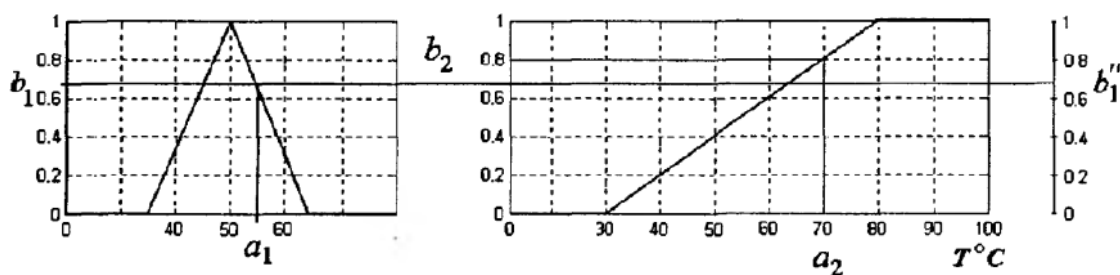
Входные лингвистические переменные

β_1 — скорость движения автомобиля

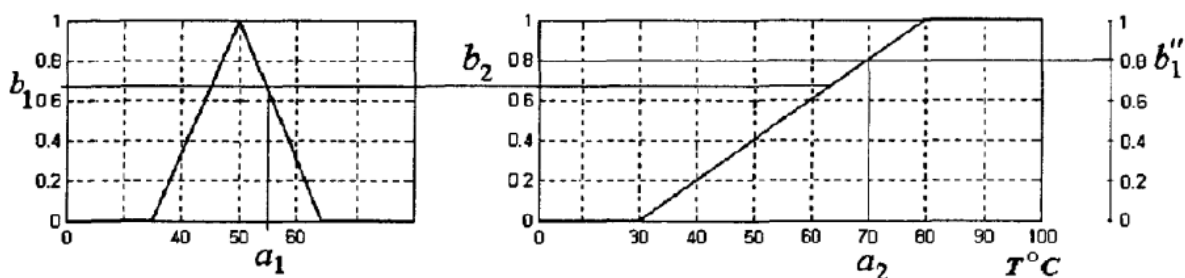
β_2 — температура охлаждающей жидкости.

Предположим, что текущая скорость автомобиля равна 55 км/ч, т. е. $A_1 = 55$ км/ч, а температура кофе равна $A_2 = 70^\circ\text{C}$.

Тогда агрегирование первого нечеткого высказывания с использованием операции нечеткой конъюнкции дает в результате число $b_1'' = 0.67$ (приближенное значение), которое означает его степень истинности и получается как минимальное из значений 0.67 и 0.8.

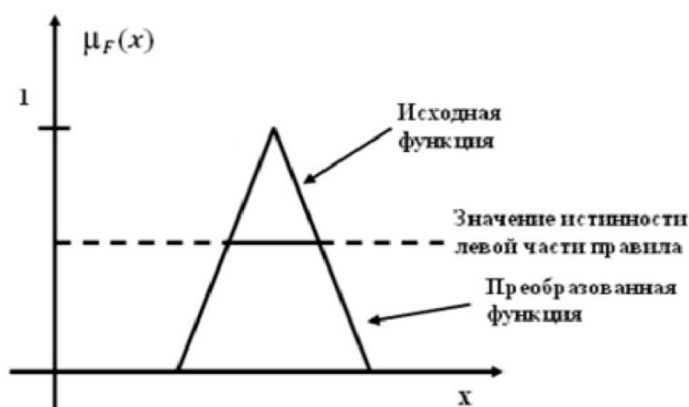


Агрегирование второго нечеткого высказывания с использованием операции нечеткой дизъюнкции дает в результате число $b_2'' = 0.8$, которое означает его степень истинности и получается как максимальное из значений 0.67 и 0.8

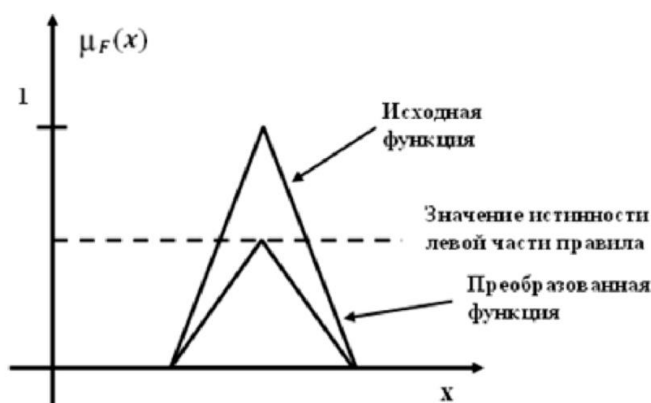


- Активизация (Activation)** в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру или процесс нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечетких продукций. Активизация в общем случае во многом аналогична композиции нечетких отношений, но не тождественна ей. Поскольку в системах нечеткого вывода используются лингвистические переменные, то формулы для нечеткой композиции теряют свое значение. В действительности при формировании базы правил системы нечеткого вывода задаются весовые коэффициенты W_i для каждого правила (по умолчанию предполагается, если весовой коэффициент не задан явно, то его значение равно 1). Тогда активизация нечеткого множества правой части используют один из двух методов: «минимума» и «произведение».

Метод минимума ограничивает функцию принадлежности для множества, указанного в правой части, ее минимальным значением из полученных в левой части.



В методе произведений значение истинности левой части используется как коэффициент, на который умножаются значения функции принадлежности в правой части.



Тогда для максимума сложных правил

$$\mu'(y) = \min \{c_i, \mu(y)\}$$

Для произведения сложных правил

$$\mu'(y) = c_i * \mu(y)$$

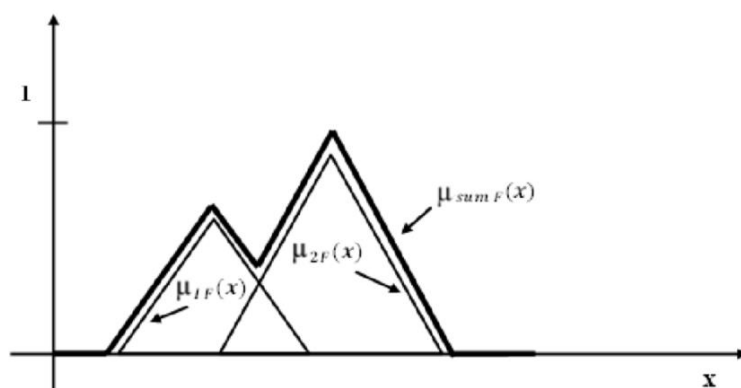
C_i – степень истинности подзаключений (правой части).

- **Аккумуляция (Accumulation)** или аккумуляирование в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру или процесс нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных множества.

Цель аккумуляции заключается в том, чтобы объединить или аккумуляировать все степени истинности заключений (подзаключений) для получения функции принадлежности каждой из выходных переменных. Причина необходимости выполнения этого этапа состоит в том, что подзаключения, относящиеся к одной и той же выходной лингвистической переменной, принадлежат различным правилам системы нечеткого вывода.

Система производит суперпозицию нечетких множеств, связанных с каждой из таких переменных. Эта операция называется нечетким объединением правил вывода (Max Combination). Два нечетких подмножества, получаемые при выполнении этих правил, должны быть объединены в одно.

Суперпозиция функций принадлежности нечетких множеств $\mu_{B'}(y_1), \mu_{B''}(y_2), \dots, \mu_{B^m}(y_m)$ определяется как: $\mu_{B'}(y) = \max_{1 \leq y \leq M} \mu_{B^i}(y)$.



Используется также метод суперпозиции, когда значения всех функций принадлежности суммируются «Sum Combination»

$$\mu_{\text{sum}B'}(y) = \sum_{k=1}^M \mu(y_k), \forall y, k \in [1, m].$$

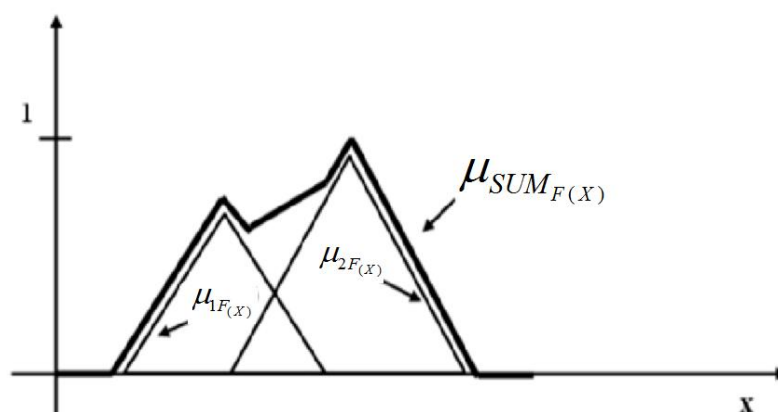


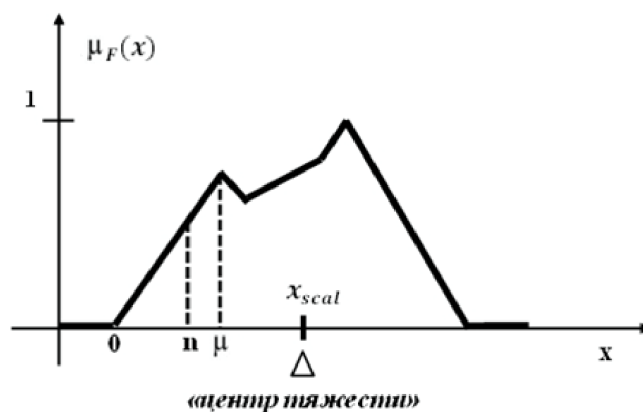
Рис. 6.10. Метод «Sum Combination»

Блок дефазификации. Выходной величиной блока рассуждений будет N нечетких множеств $\overset{1}{B}^k$ (случай 1) с функциями принадлежности $\mu_{\overset{1}{B}_k}(y)$, $k=1, \dots, N$ или одно нечеткое множество B' (случай 2) с функцией принадлежности $\mu_{B'}(y)$. Задача преобразования множеств $\overset{1}{B}^k$ или B' в единственное (четкое) значение $y \in Y$, которое можно передать в объект управления непосредственно на исполнительные механизмы или через ЛПР, называется «дефазификацией» (*defuzzification*), или «скаляризацией».

Практика показала, что большинство практических задач укладывается в случай 2, поэтому ограничимся рассмотрением только соответствующих этому

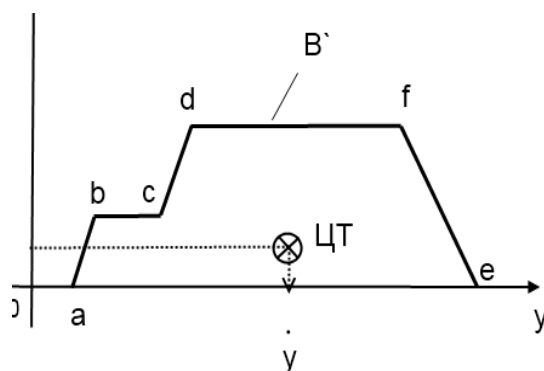
случаю методов дефаззификации. Имеется достаточно большое число общих методов перехода к точным значениям, которые используются тогда, когда нужно преобразовывать нечеткий набор значений выводимых переменных к точным значениям. Рассмотрим методы **полной интерпретации**, или «**центра тяжести**» и **максимума**.

Метод полной интерпретации или «центра тяжести» (англ. — *center of gravity method* или *center of area method*). В этом методе точное значение выводимой переменной вычисляется как значение «центра тяжести» функции принадлежности для нечеткого значения. Этот метод основывается на идеях механики.



Центр тяжести или центроид площади рассчитывается по формуле:

$$x_c = \frac{\int y \mu_{B'}(y) dy}{\int \mu_{B'}(y) dy}$$

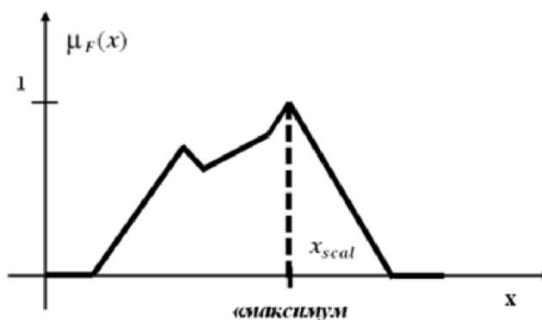


Пусть на плоскости OXY дана система материальных точек $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ с массами m_1, \dots, m_n , соответственно. Произведения $x_i m_i$ и $y_i m_i$ называются

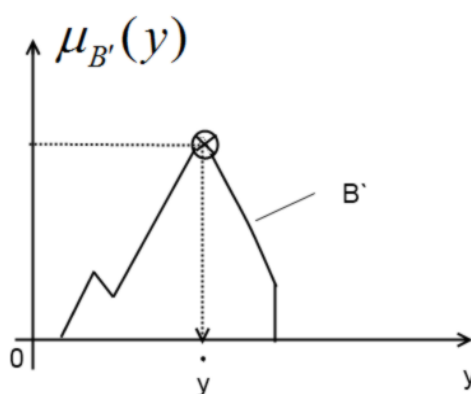
моментами массы m_i относительно осей OX и OY , соответственно. Если обозначить через x_i и y_i координаты центра тяжести некоторой системы, например, фигуры на плоскости, то:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Метод максимума функции принадлежности или суммы (SUM). В этом методе в качестве точного значения выводимой переменной принимается максимальное значение функции принадлежности нечеткого соответствия $\mu_{B'}(y)$:



$$\mu_{B'}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_{B'}(y).$$



Из рассмотренного выше видно, что блок дефаззификации работает с некоторой погрешностью, которая может оказаться достаточно большой в случае неудачного выбора метода. Поэтому в большинстве нечетких систем используется метод «центра тяжести».

Рассмотрим пример. Нечеткая база знаний описывает зависимость между возрастом водителя (x) и возможностью дорожно-транспортного происшествия (y):

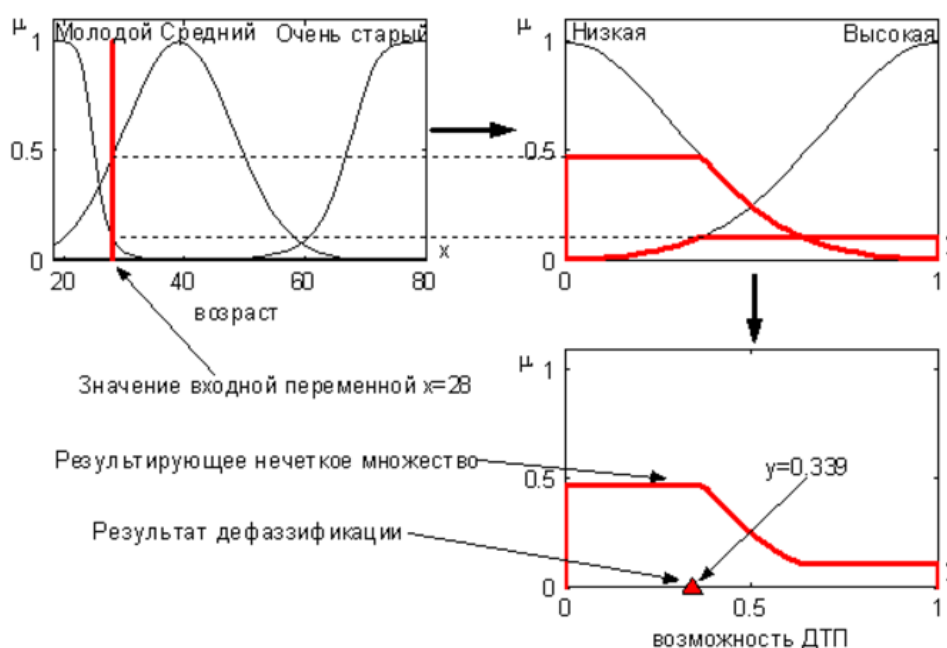
Если x = Молодой, то y = Высокая;

Если x = Средний, то y = Низкая;

Если x = Очень старый, то y = Высокая.

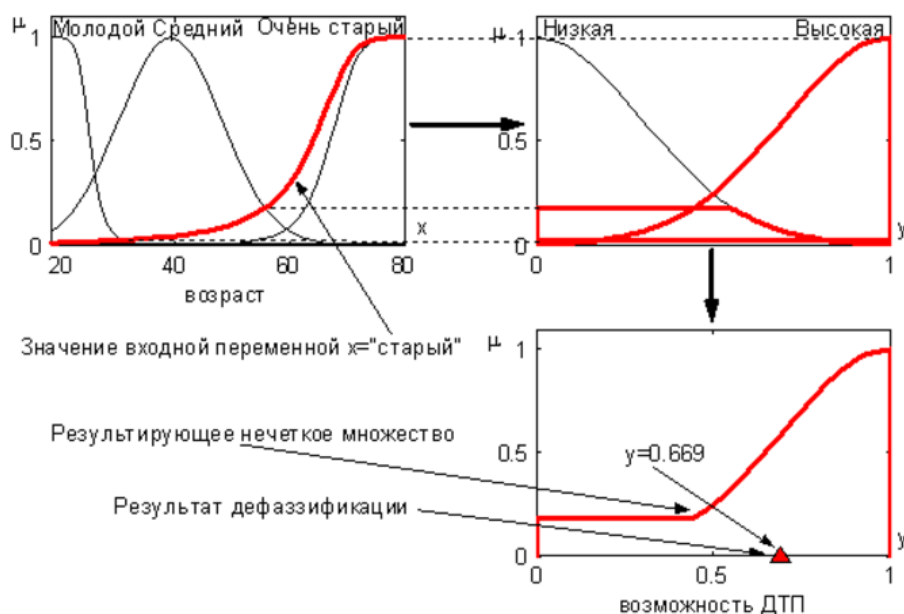
По нечеткой базе знаний выполнить нечеткий логический вывод при значениях входной переменной $x = 28$

Нечеткий логический вывод Мамдани при четком значении входной переменной



По нечеткой базе знаний выполнить нечеткий логический вывод при значениях входной переменной x = "старый"

Нечеткий логический вывод Мамдани при нечетком значении входной переменной



В этих решениях применялись:

Операция агрегирования осуществлялась нахождением максимума.

Дефаззификация проводилась по методу центра тяжести

Рассмотрим пример неточности нечетких систем.

Расчет. $y = 10 \times x$, соответственно

x – вход, y – выход.

Если на x подаем значение «1,3», тогда четкое значение y равно 13.

Введем нечеткие правила:

Если x большой, то y большой

Если x средний, то y средний

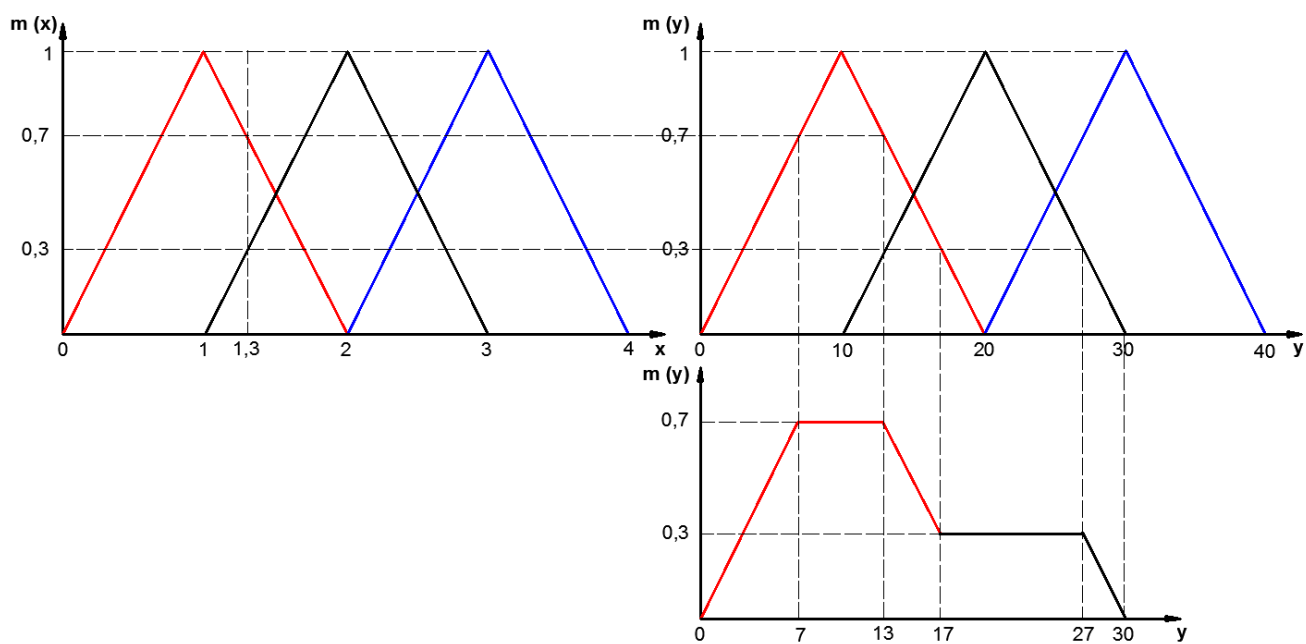
Если x малый, то y малый

Определим

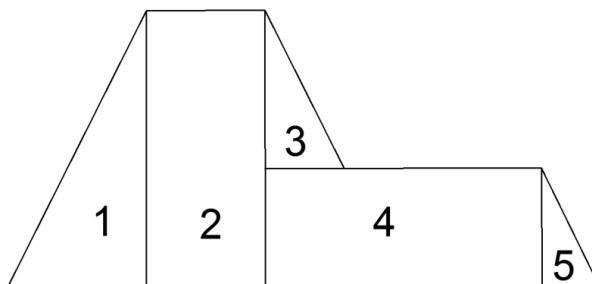
Агрегирование (процедура определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечеткого вывода). Простые правила.

Активизация (процесс нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечетких продукций) – метод минимума

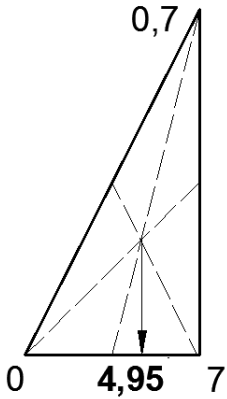
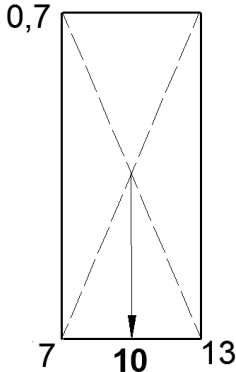
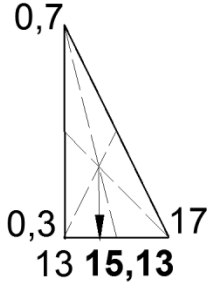
Аккумуляция (процесс нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных множества) – метод максимума

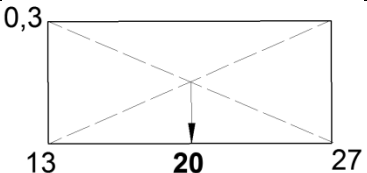
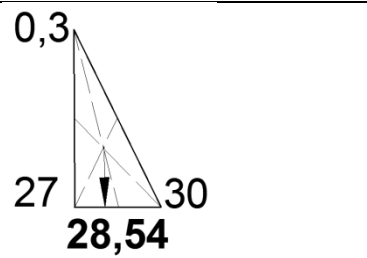


Рассмотрим полученную фигуру и разобьем на простейшие элементы



Тогда расчет будет следующий.

№	Фигура	Расчет
1		<p>Угловой коэффициент</p> $k = \operatorname{tg} \alpha = 0,7/7 = 0,1$ <p>Тогда точка равновесия равна:</p> $\int_0^{y_1} 0,1y \, dy = \int_{y_1}^7 0,1y \, dy$ $0,05y^2 \Big _0^{y_1} = 0,05y^2 \Big _{y_1}^7$ $y_1^2 = 49 - y_1^2$ $y_1 \approx 4,95$ <p>Масса фигуры №1 будет равна:</p> $m_1 = 0,5 \times 0,7 \times 7 = 2,45$ <p>Следует, что момент массы будет равен:</p> $y_1 m_1 = 4,95 \times 2,45 \approx 12,13$
2		<p>Точка равновесия у фигуры 2 будет равна:</p> $y_2 = 10$ <p>Масса фигуры будет равна:</p> $m_2 = 0,7 \times 6 = 4,2$ <p>Следует, что момент массы будет равен:</p> $y_2 m_2 = 10 \times 4,2 = 42$
3		<p>Угловой коэффициент</p> $k = \operatorname{tg} \alpha = 0,4/4 = 0,1$ <p>Тогда точка равновесия равна:</p> $\int_{13}^{y_3} 0,1y \, dy = \int_{y_3}^{17} 0,1y \, dy$ $0,05y^2 \Big _{13}^{y_3} = 0,05y^2 \Big _{y_3}^{17}$ $y_3^2 - 169 = 289 - y_3^2$ $y_3 \approx 15,13$ <p>Масса фигуры №3 будет равна:</p> $m_3 = 0,5 \times 0,4 \times 4 = 0,8$ <p>Следует, что момент массы будет равен:</p> $y_3 m_3 = 15,13 \times 0,8 \approx 12,1$

4		<p>Точка равновесия у фигуры 4 будет равна:</p> $y_4 = 20$ <p>Масса фигуры будет равна:</p> $m_4 = 0,3 \times 14 = 4,2$ <p>Следует, что момент массы будет равен:</p> $y_4 m_4 = 20 \times 4,2 = 84$
5		<p>Угловой коэффициент</p> $k = \operatorname{tg} \alpha = 0,4/4 = 0,1$ <p>Тогда точка равновесия равна:</p> $\int_{27}^{y_5} 0,1y \, dy = \int_{y_5}^{30} 0,1y \, dy$ $0,05y^2 \Big _{27}^{y_5} = 0,05y^2 \Big _{y_5}^{30}$ $y_5^2 - 729 = 900 - y_5^2$ $y_5 \approx 28,54$ <p>Масса фигуры №5 будет равна:</p> $m_5 = 0,5 \times 0,3 \times 3 = 0,45$ <p>Следует, что момент массы будет равен:</p> $y_5 m_5 = 28,54 \times 0,45 \approx 12,84$

Определяем «центр тяжести».

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$Y_{ц.т} = \frac{12,13 + 42 + 12,1 + 84 + 12,84}{2,45 + 4,2 + 0,8 + 4,2 + 0,45} = \frac{163}{12,1} = 13,48$$