1. Представление нечетких знаний

Понятие нечеткого множества – эта попытка математической формализации нечеткой информации для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа «такой-то элемент принадлежит данному множеству» теряют смысл, поскольку необходимо указать «насколько сильно» или с какой степенью конкретный элемент удовлетворяет свойствам данного множества.

Популярность подхода, основанного на формализации нечеткостей, свидетельствует о многочисленных областях его практического применения, что способствовало формированию специального направления в области искусственного интеллекта — исследованию нечетких систем. Математическая теория нечетких множеств, предложенная Лотфи Заде, позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы.

1.1. Нечеткие множества

Начнем с примера. Пусть у нас имеется множество $\boldsymbol{X}$ пищевых продуктов. Из этого, довольно обширного, множества выберем только те элементы, которые содержат молочный жир (молоко, сметана, сыр и т.п.). Таким образом, мы образуем некоторое подмножество ($\subset$) $\boldsymbol{C}$ множества $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{X}$. Совершенно очевидно, что степень принадлежности каждого из элементов $\boldsymbol{x}$ к самому этому множеству $\boldsymbol{C}$ будет разная: молоко, например, содержит 4% жира, а сыр – 35%. Множество С, как видим, обладает весьма заметной неопределенностью или, как говорят, нечеткостью. Степень принадлежности каждого из $\boldsymbol{x}$, входящего в $\boldsymbol{C}$, лучше всего обозначать в долях. Тогда мы получаем следующее выражение $\boldsymbol{C}$:

C = {0.04/молоко, 0.15/творог, 0.25/сливки, 0.35/сыр, 0.40/сметана, 0.78/масло, 0.98/топленое масло}.

Нечеткое множество $\boldsymbol{C}$, следовательно, можно представить как множество пар типа степень принадлежности / название элемента (***x***) *(некоторые авторы предпочитают «обратное» написание типа название элемента (x) / степень принадлежности).*

Степень принадлежности характеризует каждый из $\boldsymbol{x \in C}$ и в общем случае является его функцией: $\boldsymbol{\mu_C(x)}$. Если элемент $\boldsymbol{x_i}$ «стопроцентно» относится к ***C***, то $\boldsymbol{\mu_C(x)=1}$; если не содержится вообще, то $\boldsymbol{\mu_C(x)=0}$.

Определение 1. Нечетким множеством *C* в *X* называется совокупность пар вида $\boldsymbol{(x, \mu_C(x))}$, где $\boldsymbol{x \in C}$, а $\boldsymbol{\mu_C(x)}$ – *функция принадлежности*, определенная на интервале [0, 1]:

Функция принадлежности $\boldsymbol{\mu_C(x)}$ полностью характеризует ***x*** (она еще называется *характеристической функцией*). Поэтому справедливо утверждение: *нечеткое множество вполне описывается своей функцией принадлежности.*

Обычные (четкие) множества составляют собой подкласс нечетких множеств. Действительно, функцией принадлежности обычного множества $\boldsymbol{B \subset X}$ является его характеристическая функция

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in B \\ 0, \text{ если } x \notin B \end{cases},$$

так что его также можно определить как совокупность пар $\boldsymbol{(x, \mu_C(x))}$. Таким образом, нечеткое множество представляет собой более широкое понятие, чем обычное множество, а функция принадлежности нечеткого множества может быть произвольной.

Каждому нечеткому множеству соответствует свое множество функций принадлежности $\boldsymbol{\mu_C(x)}$.

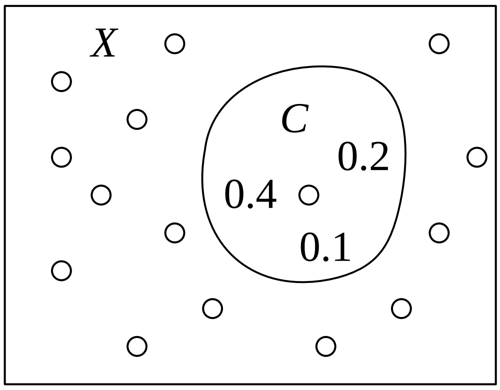
Предположим теперь, что функция принадлежности для элементов подмножества ***C*** может принимать не только значения 0 или 1, но и любое значение $\boldsymbol{C \in [0, 1]}$, т.е. $\boldsymbol{\mu_C(x)=C \in [0, 1]}$. В соответствии с этим условием элемент $\mathbf{x_i \in X}$ может не принадлежать ***C*** ($\boldsymbol{\mu_C=0}$), может быть элементом ***C*** в небольшой степени ***(μ*_C_ *близко к 0)***, может более или менее принадлежать **C** ($\mathbf{\mu_C \approx 0.5}$), может в значительной степени быть элементом **C** (**μ**$_\mathbf{C}$ **близко к 1**) или, наконец, может быть элементом ***C*** ***(μ_C=1)***.

<u>Определение 2.</u> Функцией принадлежности называется функция, которая позволяет вычислить степень принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству.

Принадлежность элементов нечеткому подмножеству иначе можно записать в виде:

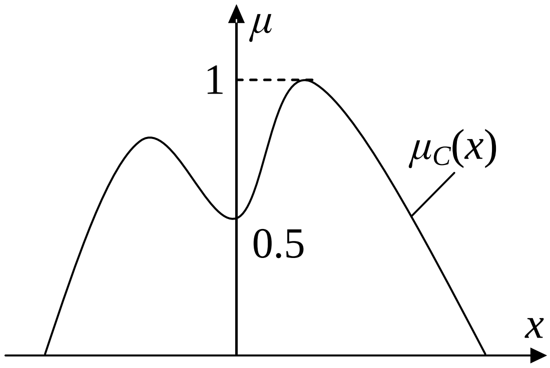
$$\underset{0.2}{x_1 \in C}; \qquad \underset{0.4}{x_2 \in C}; \qquad \underset{0.1}{x_3 \in C}.$$

На рис. представлена граница нечеткого подмножества, внутри которой указаны значения характеристической функции для элементов этого подмножества.



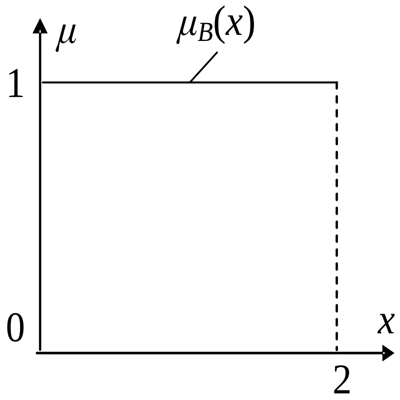
В принципе функция $\boldsymbol{\mu_C(x)}$ на интервале [0, 1] может иметь сколь угодно много значений, а в пределе она представляет собой кривую с амплитудой 1.

На рис. представлено нечеткое подмножество ***C*** с помощью функции принадлежности $\boldsymbol{\mu}$.

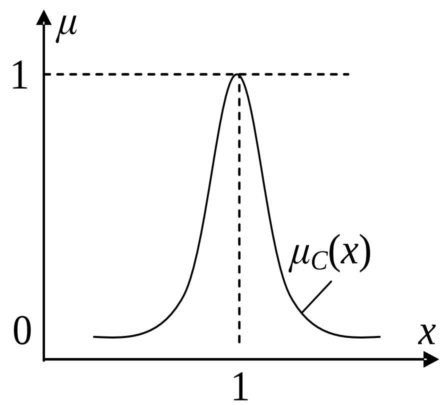


<u>Пример.</u> Рассмотрим обычное множество чисел $\boldsymbol{B = \{0 \le x \le 2\}}$ и нечеткое

множество **C = {«значение x близко к 1/x»}**. В первом случае множеству B принадлежат все числа от 0 до 2 и, следовательно, здесь $\boldsymbol{\mu_B(x)}$**=const=1**. Во втором – симметричная кривая. Функции принадлежности этих множеств приведены на рис. Вид функции принадлежности μ_C нечеткого множества C зависит от смысла вкладываемого в понятие «близко».



Функция принадлежности для множества B ($\mu_B(x)$=1)

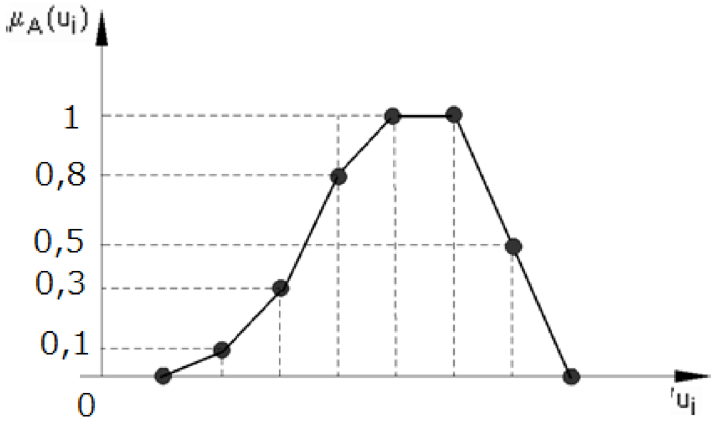


Функция принадлежности для C

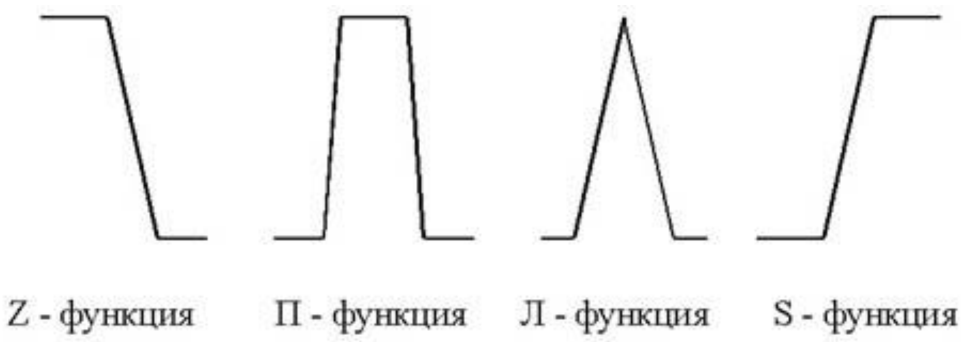
<u>Пример</u>. Представить в виде нечеткого множества понятие “мужчина среднего роста”.

Решение: $\boldsymbol{\mu_B(u_i)/u_i}$ = 0/155+0.1/160 + 0.3/165 + 0.8/170 +1/175 +1/180 + 0.5/185 +0/190. где знак + означает не суммирование, а просто принадлежность к множеству.

Представим



Соответственно, вид функции принадлежности может быть абсолютно произвольным. Но для простоты расчетов используют:



Для функции принадлежности может применяться кривая Гаусса

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ – нечеткие множества в $\boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ и $\boldsymbol{\mu_B(x)}$ – их четкие функции принадлежности соответственно. Справедливо утверждение, что $\boldsymbol{A}$ включает в себя $\boldsymbol{B}$ (т.е. $\boldsymbol{B \subseteq A}$ *нестрогое подмножество*), если для любого $\boldsymbol{x \in X}$ выполнено неравенство:

$$\boldsymbol{\mu_B(x) \le \mu_A(x)}.$$

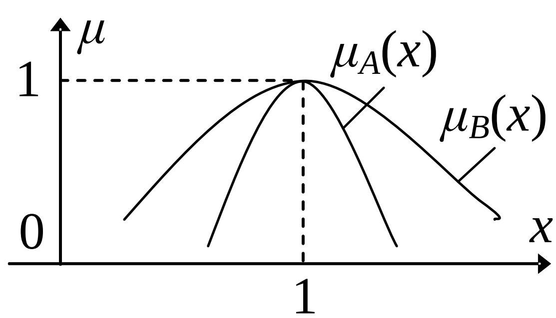
Множество $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают (эквивалентны), если $\boldsymbol{\mu_B(x) = \mu_A(x)}$ при любом $\boldsymbol{x \in X}$. Если нечеткие множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ таковы, что $\boldsymbol{B \subseteq A}$, то и $\mathbf{sup}\ \boldsymbol{B} \subseteq \mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$ (*supremum* – верхняя грань).

Пример. Рассмотрим нечеткие множества:

A = {«*величина x близка к 1*»/*x*},

B = {«*величина x очень близка к 1*»/*x*}.

Видно, что $\boldsymbol{B \subseteq A}$, т.е. функции принадлежности этих множеств μ_A и μ_B должны удовлетворять неравенству $\boldsymbol{\mu_B(x) \le \mu_A(x)}$ при $\forall \boldsymbol{x \in X}$. Графически эти функции показаны на рис.



<u>Определение 3.</u> *Лингвистической переменной* (*linguistic variable*) называется переменная, значениями которой могут быть слова или словосочетания некоторого естественного или искусственного языка.

<u>Определение 4.</u> *Терм–множеством (term set)* называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.

<u>Определение 5.</u> *Термом (term)* называется любой элемент терм–множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

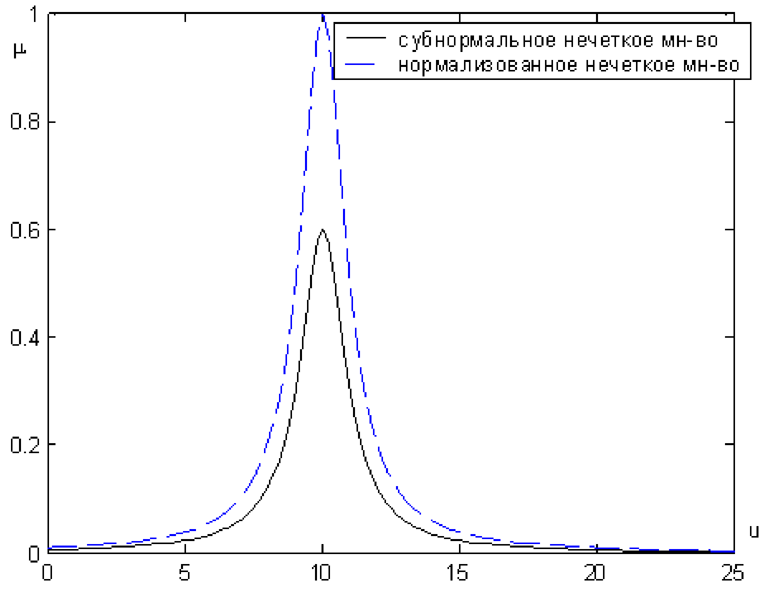
<u>Пример.</u> Рассмотрим переменную *“скорость автомобиля”*, которая оценивается по шкале “*низкая*", "*средняя*", "*высокая*” и “*очень высокая*".

В этом примере лингвистической переменной является “*скорость автомобиля*”, термами - лингвистические оценки “*низкая*", "*средняя*", "*высокая*” и “*очень высокая*”, которые и составляют терм–множество.

1.2. Свойства нечетких множеств

<u>Определение 6.</u> Высотой нечеткого множества *A* называется верхняя граница его функции принадлежности: $\boldsymbol{hgt\ (A) = \sup\mu_A(x)}$ *(супремум – верхняя граница, hgt сокращенное height – верх)*. Для дискретного универсального множества супремум становится максимумом, а значит высотой нечеткого множества будет максимум степеней принадлежности его элементов.

<u>Определение 7.</u> Нечеткое множество *A* называется *нормальным*, если выполнено равенство $\boldsymbol{\sup\mu_A(x)=1;\ x \in X}$. В противном случае нечеткое множество называется *субнормальным.*

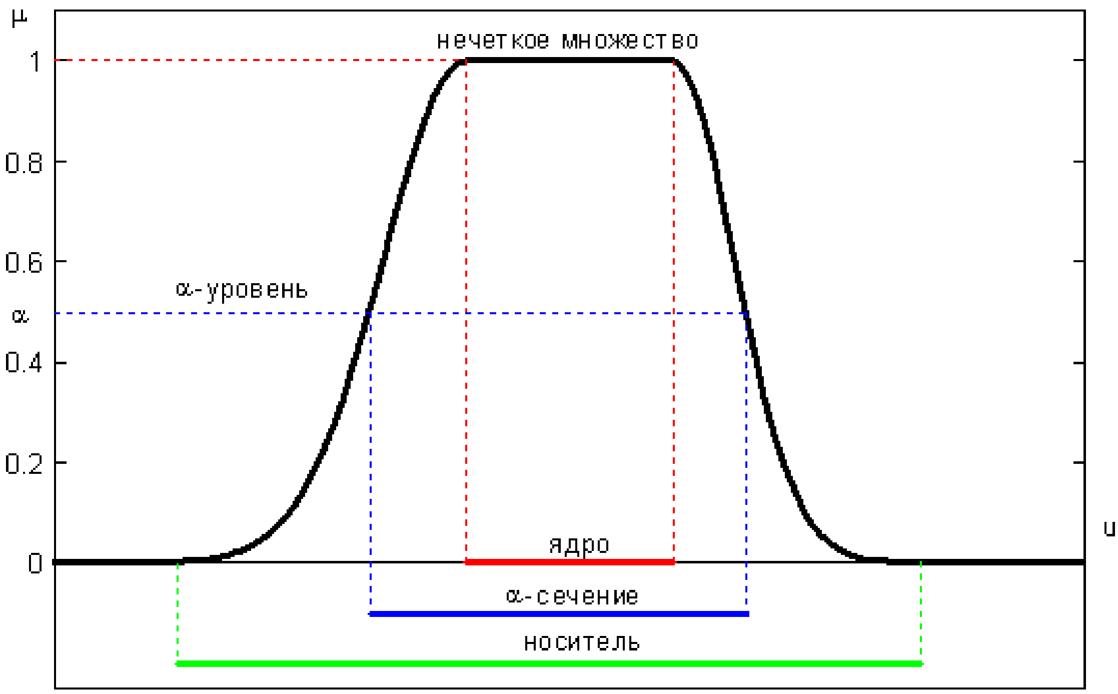


<u>Определение 8.</u> ***Носителем*** нечеткого множества *A* называется четкое подмножество универсального множества ***X***, элементы которого имеют ненулевые степени принадлежности $\mathbf{sup}\ A = \{x\ /\ x \in X,\ \mu_A(x) > 0\}$. Другими словами, **sup** ***A*** определяет верхнюю границу ***A*** при положительных значениях μ.

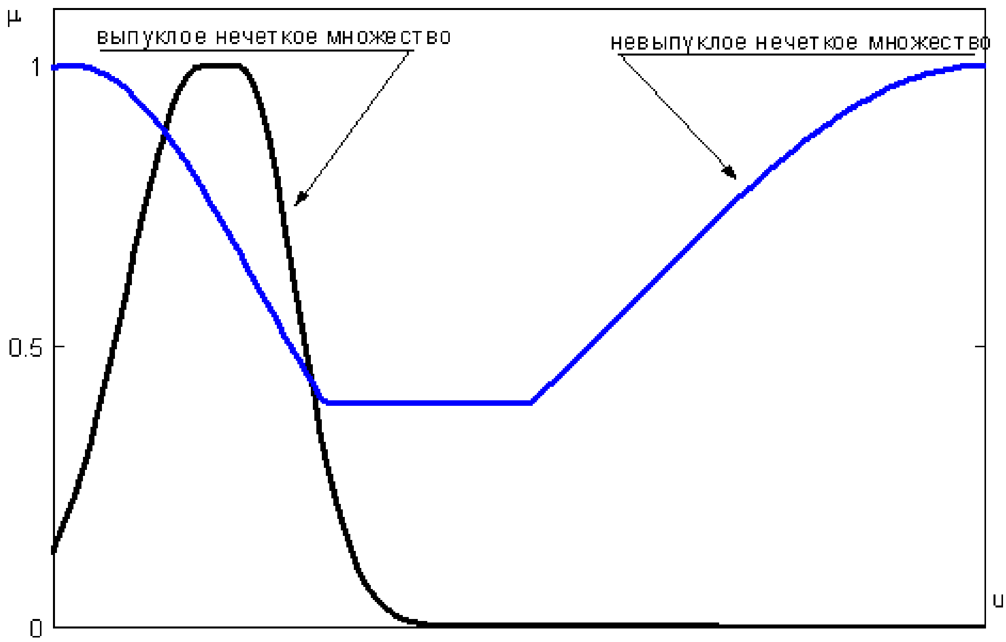
<u>Определение 9.</u> Нечеткое множество называется пустым, если его носитель является пустым множеством.

<u>Определение 10.</u> Ядром нечеткого множества ***A*** называется четкое подмножество универсального множества ***X***, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице: $core(A) = \{x\ /\ x \in X,\ \mu_A(x) = 1\}$. ***Ядро субнормального нечеткого множества пустое.***

<u>Определение 11</u>. **α**-сечением (или множеством **α**-уровня) нечеткого множества ***A*** называется четкое подмножество универсального множества ***X***, элементы которого имеют степени принадлежности большие или равные **α**: $A\alpha = \{x\ /\ x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha\epsilon[0,1]$. Значение **α** называют **α** -уровнем. Носитель (ядро) можно рассматривать как сечение нечеткого множества на нулевом (единичном) **α** -уровне.



<u>Определение 12.</u> Нечеткое множество будет выпуклым, если все его **α**-сечения - выпуклые множества.



1.3. Операции над нечеткими множествами

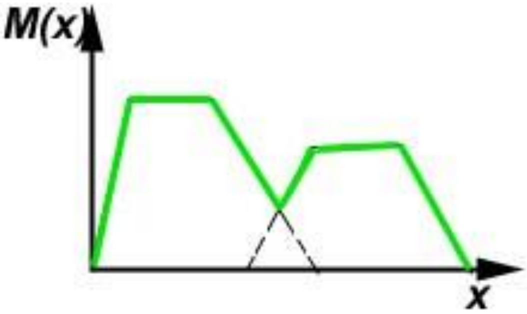
Операции над нечеткими множествами можно определить различными способами. Выбор конкретного из них (объединение, пересечение и пр.) зависит от смысла решаемой задачи. Следует отметить, что класс нечетких множеств охватывает и множества в обычном смысле. Поэтому вводимые определения должны соответствовать обычным операциям, принятым в теории множеств.

Определение 13. Объединением нечетких множеств ***A*** и ***B*** в ***X*** называется нечеткое множество ***A*** ∪ ***B*** с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},\ x \in X.$$

Определение 13а. Объединением нечетких множеств ***A*** и ***B*** в ***X*** можно определить и через алгебраическую сумму их функций принадлежности:

$$\mu_{A\cup B}=1 \text{ при } \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1;$$



Пример . Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а нечеткие множества A и B заданы через соответствующие величины функций принадлежности:

$A = \{(0.1/x_1), (0.5/x_2), (1/x_3), (0/x_4), (0.8/x_5)\};$

$B = \{(0.6/x_1), (1/x_2), (0.4/x_3), (0.7/x_4), (0.8/x_5)\}.$

Объединение двух нечетких подмножеств *A* и *B* здесь будет иметь вид:

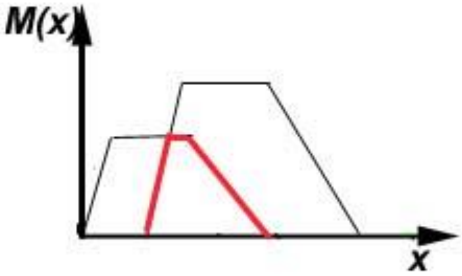
$$A \cup B = \{(0.6/x_1), (1/x_2), (1/x_3), (0.7/x_4), (0.8/x_5)\}.$$

<u>Определение 14.</u> Пересечением нечетких множеств ***A*** и ***B*** в ***X*** называется нечеткое множество $\boldsymbol{A \cap B}$ с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

<u>Определение 14а.</u> Пересечение нечетких множеств ***A*** и ***B*** можно определить с использованием алгебраического произведения их функций принадлежности.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x), x \in X.$$



Пример. Для примера с объединением пересечение множеств *A* и *B* будет иметь вид:

$$A \cap B = \{(0.1/x_1), (0.5/x_2), (0.4/x_3), (0/x_4), (0.8/x_5)\}.$$

Пример. Человеческий рост: может быть определен на интервалах значений *большой* [170–210], *средний* [150–190], *малый* [120–160] и определен через нечеткие множества

$$"большой" = \left\{\frac{0.6}{170} + \frac{0.7}{180} + \frac{0.8}{190} + \frac{0.9}{200} + \frac{1}{210}\right\}$$

$$"средний" = \left\{\frac{0.8}{150} + \frac{0.9}{160} + \frac{1}{170} + \frac{0.9}{180} + \frac{0.8}{190}\right\}$$

$$"малый" = \left\{\frac{1}{120} + \frac{0.9}{130} + \frac{0.8}{140} + \frac{0.7}{150} + \frac{0.6}{160}\right\}$$

$$"средний" \cap "большой" = \left\{\frac{0.6}{170} + \frac{0.7}{180} + \frac{0.8}{190}\right\}$$

$$"средний" \cup "большой" = \left\{\frac{0.8}{150} + \frac{0.9}{160} + \frac{1}{170} + \frac{0.9}{180} + \frac{0.8}{190} + \frac{0.9}{200} + \frac{1}{210}\right\}$$

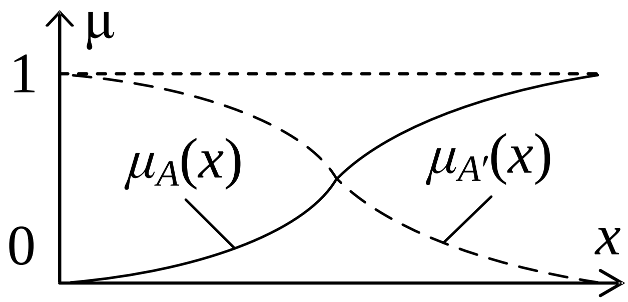
<u>Определение 15.</u> Два нечетких множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в $\boldsymbol{X}$ равны ($\boldsymbol{A=B}$) тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\boldsymbol{\mu_A(x) = \mu_B(x);\ \forall x \in X}.$$

Если найдется, по крайней мере, один такой элемент $\boldsymbol{x_i}$ из $\boldsymbol{X}$, что равенство $\boldsymbol{\mu_A(x_i) \neq \mu_B(x_i)}$ не удовлетворяется, то будем говорить, что A и B не равны и обозначать $A \neq B$.

Определение 16. Дополнением нечеткого множества $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{X}$ называется нечеткое множество $\boldsymbol{A'}$ с функцией принадлежности вида

$$\boldsymbol{\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x),\ x \in X.}$$



Пример. Пусть задано некоторое множество X и множество M функций принадлежности:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};\ M = [0, 1].$$

Построим нечеткое множество A:

$$A = \{(0.15/x_1), (0.45/x_2), (0/x_3), (0.75/x_4), (1/x_5)\}.$$

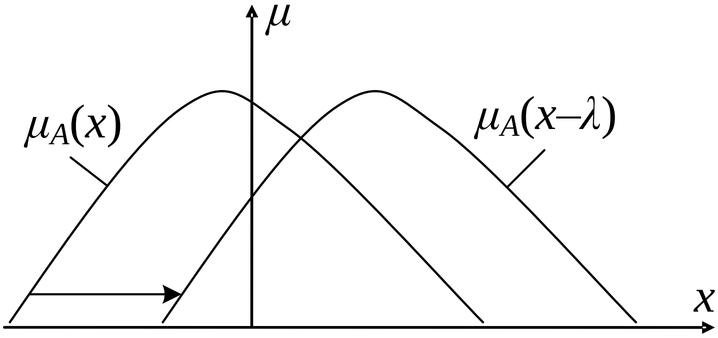
Дополнение A' в этом случае будет иметь вид:

$$A' = \{(0.85/x_1), (0.55/x_2), (1/x_3), (0.25/x_4), (0/x_5)\}$$

(**для всех $\boldsymbol{\mu_{A'}(x)}$ выполняется условие $\boldsymbol{\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)}$**).

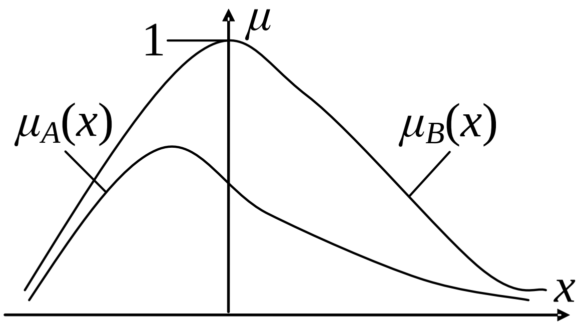
<u>Определение 17</u>. Операция *перемещения* изменяет положение функции принадлежности на величину $\boldsymbol{\lambda}$. При $\boldsymbol{\lambda>0}$ происходит перемещение вправо, а при $\boldsymbol{\lambda<0}$ влево. Выражение для функции принадлежности:

$$\boldsymbol{\mu_B(x) = \mu_A(x-\lambda),\ \lambda \in R,\ \forall x \in X.}$$



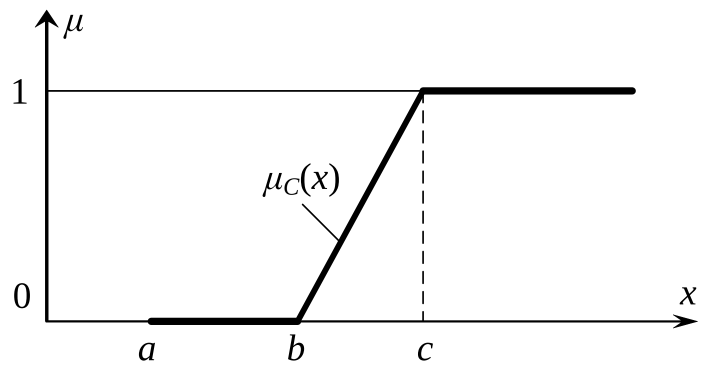
<u>Определение 18.</u> Операция *нормализации* осуществляется в соответствии со следующей формулой:

$$\mu_B(x) = \frac{\mu_A(x)}{\max\ \mu_A(x)},\ \forall x \in X.\text{(}\forall\text{ - \textit{квантор всеобщности})}$$



Пример. Нечеткое множество может быть представлено: либо как $C = \mu_C(x_1)/x_1 + \mu_C(x_2)/x_2 + \ldots + \mu_C(x_n)/x_n$; либо графически, как в примерах выше; либо аналитически. На рис. приведен пример соответствия аналитического задания функции принадлежности графическому.

$$\mu_C(x) = f(x,a,b,c) = \begin{cases} 0 & \text{,если} \quad a \le x \le b \\ \dfrac{x-b}{c-b} & \text{,если} \quad b \le x \le c \\ 1 & \text{,если} \quad x \ge c \end{cases}$$



1.4. Отношения и операции над ними

Очевидно, что все отношения между объектами некоторого множества можно, в конечном счете, свести к отношению пар этих объектов при том, что каждый из них может одновременно иметь разные отношения с некоторыми другими.

Если элемент $\boldsymbol{u}$ под номером $\boldsymbol{i}$ некоторого множества находится в отношении $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ с элементом $\boldsymbol{v}$ под номером $\boldsymbol{j}$ того же множества, то, упрощая, пишут $\boldsymbol{r_{ij}(u_i,v_j)}$. Отношение $\boldsymbol{R}$ можно оговорить заранее, и тогда достаточно будет указать лишь пары $\boldsymbol{(u_i,v_j)}$. Если $i,j=1,2,3,\ldots,n$, то подмножество отношений между ними удобно задавать в виде таблицы:

$v_j \rightarrow$

$u_i \downarrow$

	1	2	3	4
1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}
2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}
3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	r_{34}
4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44}

где $\boldsymbol{r_{11}}$ отображает отношение для пары $\boldsymbol{(u_1,v_1)}$, $\boldsymbol{r_{12}}$ соответственно для $\boldsymbol{(u_1,v_2)}$ и т.д.

Таблицу можно расписать иначе, в виде «суммы», где знак + будет означать лишь факт принадлежности элемента к подмножеству $\{r_{ij}\}$.

$$\boldsymbol{\{r_{ij}\} = (u_1,v_1)+(u_1,v_2)+(u_1,v_3)+(u_1,v_4)+} \qquad \text{(первая строка)}$$

$$\boldsymbol{+(u_2,v_1)+(u_2,v_2)+(u_2,v_3)+(u_2,v_4)+}\ldots\text{(вторая строка) и т.д.}$$

Строки можно переписать и так:

$$\boldsymbol{u_1(v_1+v_2+v_3+v_4)+u_2(v_1+v_2+v_3+v_4)+\ldots} = \textbf{(или короче)} =$$

$$= u_1 \sum_{j=1}^{4} v_j + u_2 \sum_{j=1}^{4} v_j + u_3 \sum_{j=1}^{4} v_j + u_4 \sum_{j=1}^{4} v_j .$$

Окончательно имеем:

$$\{r_{ij}\} = \sum_{i=1}^{4} u_i \sum_{j=1}^{4} v_j = (\text{или, переходя к парам}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} (u_i, v_j).$$

Вывод. Если имеется некоторое полное множество $\boldsymbol{U}$ и другое полное множество ***V***, то отношением ***R*** между ними является подмножество, образованное произведением ***U***×***V*** и определяемое следующим образом:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (u_i, v_j)$$

или иначе – в виде матрицы $\boldsymbol{r_{ij}}$ типа вышеприведенной таблицы, где

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (u_i, v_j) \in R \text{ (выполняется } u_i R v_j) \\ 0, \text{ если } (u_i, v_j) \notin R \end{cases}.$$

Пусть на одном и том же множестве ***X*** заданы два отношения ***A*** и ***B***. Множество ***C* = *A*** ∪ ***B*** называется объединением отношений ***A*** и ***B***:

***C*(*x*,*y*) = *A*(*x*,*y*)** ∨ ***B*(*x*,*y*).** *(Дизъюнкция – логическое ИЛИ)*

Множество ***D* = *A*** ∩ ***B*** называется пересечением ***A*** и ***B***:

***D*(*x*,*y*) = *A*(*x*,*y*)** ∧ ***B*(*x*,*y*).** *(Конъюнкция – логическое И)*

1.5. Нечеткие отношения

Все рассмотренные выше отношения мы трактовали как четкие. Характерная черта четких отношений – их определенность: либо есть отношение, либо его нет. Среди множества всяких отношений есть такие, которые не могут быть нечеткими. Отношение, *старше,* например: *Иван старше Петра*. Его ведь можно понимать как *немного старше, старше, значительно старше* и т.п. Мера определенности здесь задается степенью принадлежности (функцией принадлежности) $\boldsymbol{\mu}$. Это значит, что прежнее отношение между ***x*** и ***y*** типа ***r* = (*x*,*y*)** заменяется на отношение $\boldsymbol{r = \mu_R(x,y)/(x,y)}$, где **(x,y)** – данное отношение, $\boldsymbol{\mu_R}$ – функция принадлежности этого отношения. Выражение

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (u_i, v_j)$$

для отношений заменяется выражением для нечетких отношений:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_R(u_i, v_j)/(u_i, v_j)$$

а матрица отношений вообще может быть построена из одних функций принадлежности, стоящих на соответствующих местах.

Функция $\boldsymbol{\mu_R(u,v)}$, конечно, может быть задана. Но вот вопрос: а как ее определить, если сами величины $\boldsymbol{u \in U}$ и $\boldsymbol{v \in V}$ заданы нечетко, через свои функции принадлежности? Большинство авторов в этом случае принимает такое соотношение:

$$\boldsymbol{\mu_R(u,v) = \mu_U(u) \wedge \mu_V(v)}.$$

В булевой логике знак конъюнкции $\wedge$ соответствует выделению наименьшего из входных значений. В этом смысле он здесь и употребляется. Поэтому можно записать:

$$\boldsymbol{\mu_R(u,v) = \min(\mu_U(u), \mu_V(v))},$$

то есть функция принадлежности отношения равна минимальной из функций принадлежности элементов отношения.

Подставляя в, получаем:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\mu_U(u_i) \wedge \mu_V(v_j)) / (u_i, v_j),$$

Пример. Рассмотрим $x=\{3,4,5\}$, $y=\{4,5,6\}$, R = «x около y», $R=X \times Y$ и функцию принадлежности:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & ,если \quad x = y \\ 0.8 & ,если \quad |x-y| = 1 \\ 0.6 & ,если \quad |x-y| = 2 \\ 0.4 & ,если \quad |x-y| = 3 \end{cases}.$$

Тогда:

$$R = \frac{0.8}{(3,4)} + \frac{1}{(4,4)} + \frac{0.8}{(5,4)} + \frac{1}{(5,5)} + \frac{0.8}{(5,6)} + \frac{0.4}{3,6} + \frac{0.6}{(3,5)} + \frac{0.6}{(4,6)} + \frac{0.8}{(6,5)}.$$

В матричной форме это отношение выглядит так:

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.8 & 0{,}6 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}.$$

***В логике нечетких отношений произведение нечетких множеств моделирует знание-правило «если U, то V»*, то есть моделирует отношение-продукцию $U \to V$.**

Пусть имеется множество U – *маложирные молочные продукты:* 1 – сыворотка, 2 – молоко, 3 – творог, 4 – сливки и множество V – *жирные молочные продукты*: 1 – сыр, 2 – сметана, 3 – масло, 4 – топленое масло. Промоделируем продукцию: *если u – маложирные, то v – очень жирные*. (Будем считать, что оценки степеней принадлежности нам определили домашние хозяйки).

Для множества U имеем: U = 1/1 + 0.8/2 + 0.6/3 + 0.2/4.

Для множества V имеем: V = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4.

$R = U \times V$ - это будет матрица с элементами $\mu_R(u_i,v_j)$. Строки образуются следующим образом: 1 – берется μ_U («числитель») первого элемента из U и поочередно сравнивается с каждым μ_V («числителем») из множества V, *меньшее* значение заносится в строку; 2 – берется μ_U второго элемента из U и сравнивается с каждым μ_V из V и т.д. Так мы моделируем выражение, которое состоит из минимумов. Матрица будет иметь вид:

$v_j \to$

$u_i \downarrow$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0.1	0.5	0.8	1
2	0.1	0.5	0.8	0.8
3	0.1	0.5	0.6	0.6
4	0.1	0.2	0.2	0.2

Итак, отношение $\boldsymbol{R = U \times V}$ выполняет операцию $\boldsymbol{U \to V}$, т.е. отображает нечеткое отношение из $\boldsymbol{U}$ в $\boldsymbol{V}$. Пусть теперь имеется некое нечеткое отношение $\boldsymbol{S = V \times W}$ из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$. Нас интересует, как определить нечеткое отношение из $\boldsymbol{U}$ в $\boldsymbol{W}$? Другими словами, требуется промоделировать операцию $\boldsymbol{U \times V \to V \times W}$. В левой части этого выражения стоит матрица $\boldsymbol{R}$ с элементами $\boldsymbol{r_{ij} = \mu_R(u_i,v_j)}$, в правой части – матрица $\boldsymbol{S}$ с элементами $\boldsymbol{s_{ij} = \mu_S(v_i,w_j)}$. Операция $\boldsymbol{R \to S}$ над матрицами нечетких отношений носит название ***свертки*** или ***композиции*** и обозначается $\boldsymbol{R \circ S}$.

Результатом свертки будет матрица $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$ с элементами $\boldsymbol{p_{ij}} = \boldsymbol{\mu_P(\mu_{Ri},\mu_{Sj})}$. Алгоритм получения матрицы $\boldsymbol{P}$ – классический алгоритм произведения матриц (строку на столбец). Выражение для $\boldsymbol{p_{ij}}$ для ясности распишем «поштучно»:

$$\boldsymbol{p_{11} = \max\{\min(r_{11}, s_{11}), \min(r_{12}, s_{21}), \min(r_{13}, s_{31}), \min(r_{14}, s_{41})\}\ldots}$$

$$\boldsymbol{p_{32} = \max\{\min(r_{31}, s_{12}), \min(r_{32}, s_{22}), \min(r_{33}, s_{32}), \min(r_{34}, s_{42})\}\ldots}$$

(Из каждой пары выбирается меньшая величина, а затем из этих меньших берется большая).

Если вспомнить, что дизъюнкция есть выделение максимальной величины, а конъюнкция – минимальной, то с учетом можно написать выражение для композиции:

$$P = R \circ S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \bigvee_{v_j} (\mu_R(u_i, v_j) \wedge \mu_S(v_j, w_k)) / (u_i, w_k).$$

(Эта формула еще называется ***максиминной***).

Разберем обобщающий пример.

Пусть U – *множество жителей разных регионов*: индус (1), русский (2), ненец (3), туземец – центральная Африка (4), а V – *множество различных типов климата:* умеренный (1), прохладный (2), субтропики (3), тропики (4).

Определим на них несколько нечетких подмножеств.

F = *южане* = 0.9/1 + 0.6/2 + 0.3 + 1/4,

G = *жаркий* = 0.5/1 + 0.3/2 + 0.9/3 + 1/4.

Пусть требуется воспроизвести такое правило: «*если человек – южанин, то он живет в жарком климате*».

Это правило моделируется произведением

$$R = F \times G = \begin{array}{c|cccc} f_i \downarrow \; / \; g_j \rightarrow & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & 0.5 & 0.3 & 0.9 & 0.9 \\ \mathbf{2} & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 0.5 & 0.3 & 0.9 & 1 \end{array}$$

1-я строка: (0.9,0.5)→0,5;(0.9,0.3)→0,3;(0.9,0.9)→0,9;(0.9,1)→0.9;

2-я строка: (0.6,0.5)→0,5 и т.д. Из каждой пары берется меньшее.

Как расшифровать полученный результат? f_i – это жители разных регионов, g_j – тип климата. Возьмем первую строку. Это про индуса: 0.5 – его склонность пожить в умеренном климате, 0.3 – в прохладном, 0.9 – в субтропиках, 0.9 – в тропиках. А вот ненец (3) не хочет жить нигде, кроме своего севера.

Определим теперь подмножество *северяне*, а климат *умеренный. Северяне* – это *не-южане*, т.е. $\overline{F}$. Нечеткое множество $\overline{F}$ есть дополнение нечеткого множества F, так что для его функции принадлежности справедливо:

$$\mu_{\overline{F}} = 1 - \mu_F \text{ .(определение 16)}$$

$$\overline{F} = \textit{северяне} = 0.1/1 + 0.4/2 + 1/3 + 0/4,$$

$$H = \textit{умеренный} = 1/1 + 0.6/2 + 0.2/3 + 0/4.$$

Допустим, что нам надо определить отношение *все северяне любят умеренный климат.* Очевидно, оно отобразится произведением

$$S = \overline{F} \times H = \begin{array}{c|cccc} & & h_j\rightarrow & & \\ f_i\downarrow & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ \mathbf{2} & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ \mathbf{3} & 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Произведем свертку отношений R и S, т.е. определим, как ***относятся южане к умеренному климату***.

$$R \circ S = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.9 & 0.9 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 & 1 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.6 & 0.2 & 0 \end{vmatrix}$$

Расчет

Сравниваем 1 строку с 1 столбцом. При этом ∧ *(логическая И)* - min, ∨ *(логическое ИЛИ)*- max.

$(0{,}5 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}9 \wedge 1) \vee (0{,}9 \wedge 0) = (0{,}1) \vee (0{,}3) \vee (0{,}9) \vee (0) = 0.9$

Сравниваем 1 строку с 2 столбцом.

$(0{,}5 \wedge 0{,}1) \vee (0{,}3 \wedge 0{,}4) \vee (0{,}9 \wedge 0{,}6) \vee (0{,}9 \wedge 0) = (0{,}1) \vee (0{,}3) \vee (0{,}6) \vee (0) = 0.6$

и т.д.

1.6. Нечеткий вывод

Нечеткие выводы чаще всего основаны на ***правиле заключения*** **(*modus ponens*)**. Это правило касается импликации и говорит о том, что если вся импликация истинна и посылка истинна, то и заключение истинно: **(*p*, *p*→*q*)α*q*** *(отображение)*. Иногда это правило записывают в виде дроби

$$\frac{p, p \to q}{q},$$

где в числителе – высказывания, истинность которых уже доказана, а в знаменателе – высказывания, истинность которых логически следует из верхних высказываний.

Приведенная схема вывода пригодна и для случая операций с отношениями. Пусть имеются четкие и нечеткие множества: ***A*** и ***A'***, ***B*** и ***B'***. В общем случае они необязательно совпадают, но в той мере, в которой они совпадают, их можно сопоставить и получить нечеткий результат. Если однозначно выполняется правило,

$$\frac{A, A \to B}{B},$$

то при нечетком выводе могут возникать различные варианты. Пусть вместо A мы имеем нечеткое множество A'. Заключение в этом случае уже будет нечетким:

$$\frac{A', A \to B}{B'}.$$

Возможен случай, когда нечетко задано заключение:

$$\frac{A, A \to B'}{B''}.$$

Нечеткости B' и B'' могут быть разными. В общем случае выражение приобретает вид:

$$\frac{A', A \to B'}{B''}.$$

Порядок действий здесь следующий. Вначале определяем нечеткое отношение $A \to B$. Для этого у нас есть формула (10.20). Получается матрица $R = A \times B$. Далее следует свертка $S = A' \circ R$ по максиминной формуле.

Рассмотрим задачу сортировки – установления потребительской стоимости на яблоки, в зависимости от веса.

ВЕС может быть задан лингвистической переменной Z, термами которой будут: *МАЛЫЙ, СРЕДНИЙ, БОЛЬШОЙ*. Универсум U можно задать множеством целых положительных чисел [10, 15, 20, …, 250, 350] по шкале веса в граммах.

Область задания термов лингвистической переменной (ЛП) определим следующим образом:

МАЛЫЙ соответствует интервал [10–100],

СРЕДНИЙ – [101–200],

БОЛЬШОЙ – [201–350].

Тогда отображение F можно задать, например, в виде правил:

1. Если **вес** *МАЛЫЙ*, то *ЯБЛОКО* имеет *НИЗКУЮ* **потребительскую стоимость** (*НПС*).

2. Если **вес** *СРЕДНИЙ*, то *ЯБЛОКО* имеет *ВЫСОКУЮ* **потребительскую стоимость** (*ВПС*).

3. Если **вес** *БОЛЬШОЙ*, то *ЯБЛОКО* имеет *СРЕДНЮЮ* **потребительскую стоимость** (*СПС*).

Для использования этих правил, например, в системе автоматической сортировки необходимо определить сами нечеткие множества – *МАЛЫЙ, СРЕДНИЙ, БОЛЬШОЙ* – (M_i), а также *НПС, ВПС, СПС* – (N_i). Для сокращения числа значений рассмотрим множество весов U = {50, 150, 250, 350}. Универсум потребительских стоимостей определим в рублях: V = {10, 20, 30, 40}.

$$M_1 = \text{МАЛЫЙ} = 1/50 + 0.5/150 + 0/250 + 0/350,$$

$$M_2 = \text{СРЕДНИЙ} = 0/50 + 1/150 + 0.5/250 + 0/350,$$

$$M_3 = \textit{БОЛЬШОЙ} = 0/50 + 0/150 + 0.5/250 + 1/350.$$

$$N_1 = \textit{НПС} = 1/10 + 0.8/20 + 0.1/30 + 0/40,$$

$$N_2 = \textit{СПС} = 0.1/10 + 1/20 + 0.5/30 + 0/40,$$

$$N_3 = \textit{ВПС} = 0/10 + 0.4/20 + 0.7/30 + 1/40.$$

Отношение «*если* M_i, *то* N_j» дает нам 9 различных комбинаций. Для примера рассмотрим такое правило: «*Если вес МАЛЫЙ, то его потребительская стоимость НИЗКАЯ*».

Нам известно, что правило типа «*если X, то У*» моделируется произведением нечетких множеств. Это значит, что надо определить отношение $R_1 = M_1 \times N_1$:

$M_1 = \textit{МАЛЫЙ} = 1/50 + 0.5/150 + 0/250 + 0/350,$

$N_1 = \textit{НПС} = 1/10 + 0.8/20 + 0.1/30 + 0/40$

1-я строка: (1, 1)→1; (1, 0.8)→0,8; (1, 0.1)→0,1; (1, 0)→0.9;

2-я строка: (0.5, 1)→0.5; (0.5, 0.8)→0,5; (0.5, 0.1)→0,1; (0.5, 0)→0; и т.д.

$$R_1 = M_1 \times N_1 = \begin{array}{c|cccc} & N\rightarrow & & & \\ M & 1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ \downarrow & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Рассмотрим такое правило: «*Если яблоки НЕ-МАЛЫЕ, то потребительская стоимость ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ»*. Отношение *НЕ-МАЛЫЕ* есть дополнение к множеству *МАЛЫЕ*, так что применима формула $\boldsymbol{\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X}$.

$$M_1 = 0/50 + 0.5/150 + 1/250 + 1/350.$$

Отношение *ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ* (*ОВПС*) определим через множество N_4:

$$N_4 = \textit{ОВПС} = 0/10 + 0.2/20 + 0.5/30 + 1/40.$$

Свертка множеств $M_1 \times N_4$ покажет, как соотносится «малый» вес яблок с ОВПС, и заданное правило отобразится матрицей:

1-я строка: (0, 0)→0; (0, 0.2)→0; (0, 0.5)→0; (0, 1)→0;

2-я строка: (0.5, 0)→0; (0.5, 0.2)→0,2; (0.5, 0.1)→0,1; (0.5, 0)→0; и т.д.

$$S_1 = M_1 \times N_4 = \begin{array}{cc} & N\rightarrow \\ M & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \downarrow & \begin{matrix} 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

Произведем свертку отношений $R_1 \circ S_1$, т.е. определим, как соотносится вес яблок *МАЛЫЙ* с *ОВПС*.

$$\mathbf{p_{11} = \max\{\min(r_{11}, s_{11}), \min(r_{12}, s_{21}), \min(r_{13}, s_{31}), \min(r_{14}, s_{41})\}}$$

Таким образом, сравниваем $\boldsymbol{r_1}$ строку с $\boldsymbol{s_1}$ столбцом. При этом ∧ *(логическая И)* - min, ∨ *(логическое ИЛИ)*- max.

$(1 \wedge 0) \vee (0{,}8 \wedge 0) \vee (0{,}1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = (0) \vee (0) \vee (0) \vee (0) = 0$

Сравниваем $\boldsymbol{r_1}$ строку с $\boldsymbol{s_2}$ столбцом.

$(1 \wedge 0) \vee (0{,}8 \wedge 0.2) \vee (0{,}1 \wedge 0.2) \vee (0 \wedge 0.2) = (0) \vee (0.2) \vee (0.1) \vee (0) = 0.2$

$$T = R_1 \circ S_1 = \begin{array}{ccc} & S\rightarrow & \\ R & \begin{matrix} 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \end{matrix} & 50г. \\ \downarrow & \begin{matrix} 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \end{matrix} & 150г. \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 250г. \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 350г. \end{array}$$

Таким образом, яблоки весом ниже 250 граммов никак не соотносятся с очень высокой потребительской стоимостью, что соответствует практике.

У нас имеются следующие условия:

R_1: «*Если вес яблок МАЛЫЙ* (A)*, то их потребительская стоимость НИЗКАЯ* (*НПС*)» (B).

M_1': «*Не совсем маленькие*» (A'). *Что есть НПС* (B')*?*

Этим условиям соответствует формула

$$\frac{A', A \rightarrow B}{B'}, \text{ где } A \rightarrow B = R_1.$$

Отношение R_1 мы уже имеем. Это матрица.

$N\rightarrow$

$$R_1 = M_1 \times N_1 = \begin{array}{ccccc} M & 1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ \downarrow & 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Зададим нечеткое множество M_1' – *Не совсем маленькие*:

$$M_1' = \textit{Не совсем маленькие} = 0.9/50 + 0.6/150 + 0.3/250 + 0/350.$$

Окончательный вывод – свертка $A' \circ R1$, определяющая B'.

Сравниваем ***r*** строку с $\boldsymbol{s_1}$ столбцом. При этом $\wedge$ *(логическая И)* - min, $\vee$ *(логическое ИЛИ)*- max.

$(0.9 \wedge 1) \vee (0,6 \wedge 0.5) \vee (0,3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = (0.9) \vee (0.5) \vee (0) \vee (0) = 0.9$

Сравниваем ***r*** строку с $\boldsymbol{s_2}$ столбцом.

$(0.9 \wedge 0.8) \vee (0,6 \wedge 0.5) \vee (0,3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = (0.8) \vee (0.5) \vee (0) \vee (0) = 0.8$ и т.д.

Универсум потребительских стоимостей определим в рублях: V = {10, 20, 30, 40}

$$\boldsymbol{B' = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.3 & 0 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.1 & 0 \end{vmatrix}}$$

Если расшифровать полученный результат, то получим:

$$B' = \textit{НПС} = 0.9/10 + 0.8/20 + 0.1/30 + 0/40.$$

Мы получили, что низкая потребительская стоимость – эта цена за яблоки в пределах 10–20 руб.