

**Лекционный материал по дисциплине**  
*(заполняется по каждому виду учебного материала)*

ДИСЦИПЛИНА Системный анализ данных в СППР  
(полное наименование дисциплины без сокращений)

ИНСТИТУТ ИТ

КАФЕДРА Вычислительной техники  
полное наименование кафедры

ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА Лекция  
(в соответствии с пп.1-11)

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ Сорокин А.Б.  
(фамилия, имя, отчество)

СЕМЕСТР пятый  
(указать семестр обучения, учебный год)

## 10. ЛЕКЦИЯ. МУРАВЬИНЫЙ АЛГОРИТМ

### 10.1 Биологический прототип и простейшие модели

Муравьи появились на земле более 100 миллионов лет назад и в настоящее время их популяция составляет  $10^{16}$  особей, общий вес которой соизмерим с весом проживающих людей. Большинство муравьев являются социальными насекомыми, которые живут колониями от 30 до миллиона особей. При относительно простом поведении каждой отдельной особи муравьиные колонии представляют сложную социальную структуру и способны решать сложные задачи, например, находить оптимальные пути от гнезда до источника пищи. Это привлекло внимание многих исследователей, которые изучали механизмы взаимодействия особей колонии. Среди них, прежде всего, привлекла внимание исследователей непрямая форма связи между особями, которая была названа «стигметрия» ("stigmergy") и представляет собой разнесенное во времени взаимодействие, при котором одна особь изменяет некоторую область окружающей среды, а другие особи используют эту информацию в процессе решения задачи. Эта информация (изменение окружающей среды) носит локальный характер – она может быть изменена (и воспринята) только насекомыми, посетившими данный локус – участок среды. Стигметрия является не прямой и асинхронной формой коммуникации, в которой насекомые изменяют окружающую среду для передачи информации другим насекомым, которые реагируют на это изменение. Слово "stigmergy" образовано из двух греческих слов: "stigma", означающее знак; "ergon" - работа. Особи воспринимают сигналы (в виде знаков), которые порождают некоторый отклик или действие. Определены две формы стигметрии: сематектоническая (sematectonic) и знаковая (sign-based). Сематектоническая относится к коммуникации посредством изменения физических характеристик окружающей среды. Примером сематектонической стигметрии являются действия при постройке гнезда, его очистке и выращивании выводка. Сигнальная стигметрия реализует коммуникацию с помощью сигнального механизма в виде химических соединений, откладываемых муравьями.

Конкретно, во многих муравьиных колониях стигметрия реализуется с помощью специального фермента «феромона», который откладывается муравьем в процессе движения. При этом муравей помечает феромоном посещенный участок среды. Остальные муравьи воспринимают «запах» отложенного феромона и стараются следовать по отмеченному пути. Это порождает асинхронную и не прямую схему коммуникации, где муравьи передают

информацию друг другу с помощью феромона. При этом возникает положительная обратная связь – даже малое количество феромона заставляет муравьев идти по помеченному пути и откладывать на нем все большее количество фермента. Адаптивность поведения муравьев основана на восприятии испарений феромона, которое в природе продолжается несколько суток. Можно провести аналогию между распределением феромона в окружающем колонию пространстве и глобальной памятью муравейника, которая носит динамический характер.

Муравьиные алгоритмы (МА), как и большинство, ранее рассмотренных видов эволюционных алгоритмов, основаны на использовании популяции потенциальных решений и разработаны для решения задач комбинаторной оптимизации, прежде всего, поиска различных путей на графах. Кооперация между особями (искусственными муравьями) здесь реализуется на основе моделирования стигметрии. При этом каждый агент, называемый искусственным муравьем, ищет решение поставленной задачи. Искусственные муравьи последовательно строят решение задачи, передвигаясь по графу, откладывают феромон и при выборе дальнейшего участка пути учитывают концентрацию этого фермента. Чем больше концентрация феромона в последующем участке, тем больше вероятность его выбора.

Реальные муравьи благодаря стигметрии способны находить кратчайший путь от гнезда до источника пищи достаточно быстро и без визуального (прямого контакта). Более того, они способны адаптироваться к изменениям окружающей среды. Были проведены многочисленные эксперименты с реальными муравьями, которые показали следующие результаты.

Рассмотрим эксперименты с препятствиями.



Рис. 10.1. Движение муравьев без препятствия.

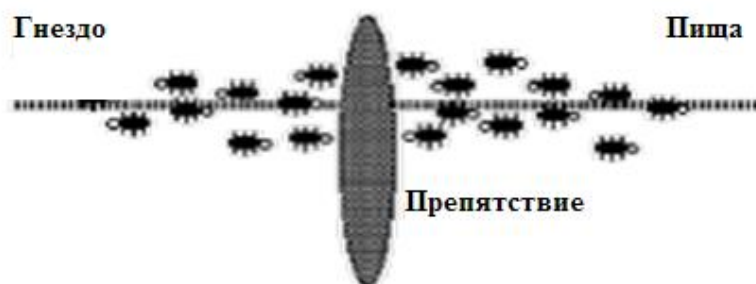


Рис. 10.2. Препятствие на пути между гнездом и пищей.



Рис. 10.3. Начальная фаза движения муравьев с препятствием.

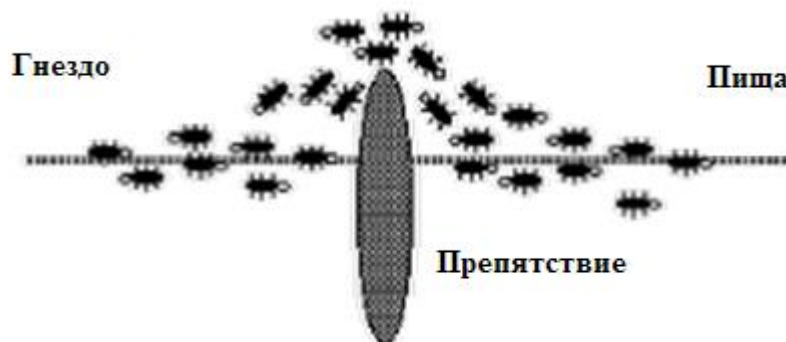


Рис. 10.4. Выбор муравьями кратчайшего пути.

Здесь на первом рисунке показано движение муравьев между гнездом и источником пищи без препятствия. Далее показан характер движения в том случае, когда на пути возникло препятствие.

Из рисунков видно, что при появлении препятствия в начальной фазе движения рис.10.3 муравьи с одинаковой вероятностью выбирают и короткий и длинный путь поскольку концентрация феромона сначала одинакова для обоих вариантов. Но по прошествии некоторого времени за счет того, что по короткому пути муравьи быстрее проходят путь, на нем концентрация феромона становится выше и поэтому муравьи выбирают оптимальный путь.

Не менее известный эксперимент с двумя мостами был проведен с колонией аргентинских муравьев, который представлен на рис.10.5, рис.10.6. Здесь на пути между гнездом и пищей необходимо сделать выбор одного из двух мостов.

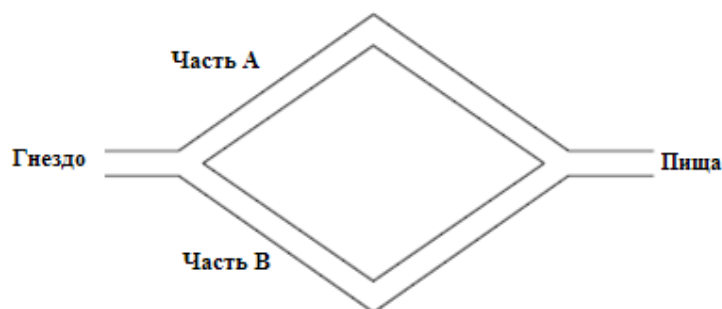


Рис. 10.5. Эксперимент с двумя мостами.

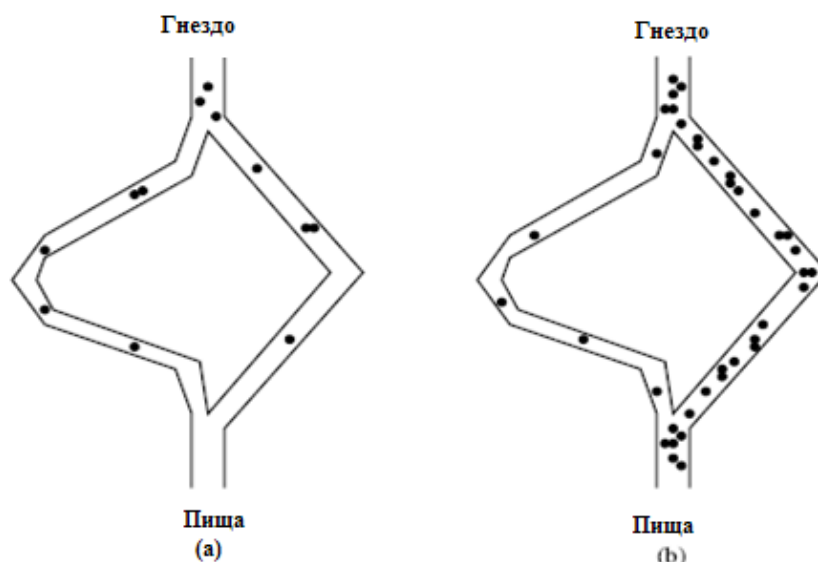


Рис. 10.6. Выбор кратчайшего пути.

Здесь на рис.10.5 показан случай с двумя эквивалентными путями между гнездом и пищей. Эксперименты показали одинаковую концентрацию муравьев на обоих возможных путях. Далее на рис.10.6 представлен случай, когда мосты имеют разную длину. В начальной фазе муравьи с равной вероятностью выбирают мосты. Но далее, при увеличении концентрации феромона на коротком пути они выбирают оптимальный путь.

Пусть  $n_A(t)$  и  $n_B(t)$  обозначают число муравьев на путях  $A$  и  $B$  соответственно в момент времени  $t$ . Эмпирически было найдено, что вероятность выбора моста в момент времени  $t$  происходит в соответствии со следующей формулой:

$$P_A(t+1) = \frac{(c+n_A(t))^\alpha}{(c+n_A(t))^\alpha + (c+n_B(t))^\alpha} = 1 - P_B(t+1) \quad (10.1)$$

где  $c$  характеризует степень «привлекательности» неисследованной ветви, и  $\alpha$  определяет смещение при использовании феромона в процессе выбора варианта решения. На основе вероятностей, определяемых (10.1), правило выбора муравьем моста можно сформулировать следующим образом. Пусть случайным образом генерируется число  $U(0,1)$  в интервале  $(0,1)$ .

Если  $U(0,1) \leq P_A(t+1)$ , то муравей выбирает путь  $A$ , иначе – путь  $B$ .

Отметим, что несмотря на то, что муравьиная колония демонстрирует сложное адаптивное поведение, которое позволяет ей решать трудные задачи, поведение одного муравья подчиняется достаточно простым правилам. Муравья можно рассматривать как агента, подвергающегося воздействию и формирующего на него соответствующую реакцию: муравей воспринимает концентрацию феромона и на этой основе выполняет действие. Поэтому муравей

абстрактно может рассматриваться как простой вычислительный агент. Искусственный муравей алгоритмически моделирует простое поведение реального муравья (точнее его интересующие нас аспекты). Логика поведения искусственного муравья представлена в алгоритме A10.1.

### **Алгоритм A10.1**

Генерация случайного числа  $r \sim U(0,1)$

**for** каждого потенциального пути **do**

    Вычислить  $P_A$  согласно (4.1)

**if**  $r \leq P_A$  **then**

        Выбор пути A;

**break;**

**end**

**end**

## **10.2 Простой муравьиный алгоритм**

Первые муравьиные алгоритмы, разработанные в , относятся по современной классификации к «муравьиным системам» (antsystems), которые будут изложены ниже.

Сначала мы рассмотрим (исключительно в учебных целях) простой муравьиный алгоритм (ПМА) (simple ant colony optimization -SACO), в котором фактически формализованы приведенные выше экспериментальные исследования и представлены основные аспекты муравьиных алгоритмов (МА).

В качестве иллюстрации возьмем задачу поиска кратчайшего пути между двумя узлами графа  $G = (V, E)$ , где  $V$  – множество узлов (вершин), а  $E$  – матрица, которая представляет связи между узлами. Пусть  $n_G = |V|$  - число узлов в графе. Обозначим  $L^k$  - длину пути в графе, пройденного  $k$ -м муравьем, которая равна числу пройденных дуг (ребер) от первой до последней вершины пути. Пример графа с выделенным путем представлен на рис.10.7. С каждой дугой, соединяющей вершины  $(i, j)$ , ассоциируем концентрацию феромона  $\tau_{ij}$ .

Строго говоря, в начальный момент времени концентрация феромона для каждой дуги графа нулевая, но мы для удобства каждой дуге присвоим небольшое случайное число  $\tau_{ij}(0)$ .

Муравей выбирает следующую дугу пути случайным образом в фактически в соответствии с алгоритмом 10.1 следующим образом. Множество муравьев  $k=\{1, \dots, n_k\}$  помещаются в начальную вершину. В каждой итерации ПМА каждый муравей пошагово строит путь до конечной вершины.

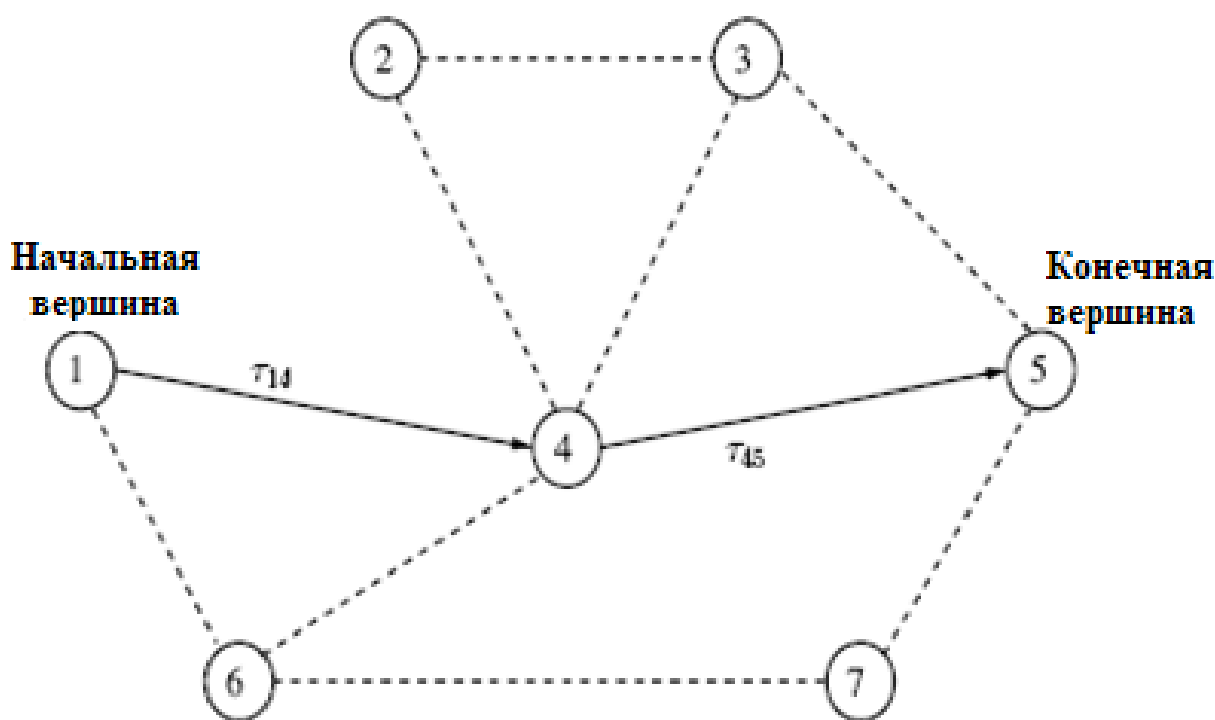


Рис. 10.7. Пример графа.

При этом в каждой вершине каждый муравей должен выбрать следующую дугу пути. Если  $i$ -й муравей находится в  $i$ -ой вершине, то он выбирает следующую вершину  $j \in N_i^k$  на основе вероятностей перехода

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t)}{\sum_{j \in N_i^k} \tau_{ij}^\alpha(t)}, & \text{если } j \in N_i^k \\ 0, & \text{если } j \notin N_i^k \end{cases} \quad (10.2)$$

Здесь  $N_i^k$  представляет множество возможных вершин, связанных с  $i$ -й вершиной, для  $k$ -го муравья. Если для любого  $i$ -го узла и  $k$ -го муравья  $N_i^k = \emptyset$ , тогда предшественник узла  $i$  включается в  $N_i^k$ . В этом случае в пути возможны петли. Эти петли удаляются при достижении конечного города пути. В (4.2)  $\alpha$  - положительная константа, которая определяет влияние концентрации феромона. Очевидно большие значения  $\alpha$  повышают влияние концентрации феромона. Это особенно существенно в начальной стадии для начальных случайных значений концентрации, что может привести к преждевременной сходимости к субоптимальным решениям. Когда все муравьи построили полный путь от начальной до конечной вершины, удаляются петли в путях, и каждый муравей помечает свой построенный путь, откладывая для каждой дуги феромон в соответствии со следующей формулой

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \frac{1}{L^k(t)} \quad (10.3)$$

Здесь  $L^k(t)$  – длина пути, построенного  $k$ -м муравьем в момент времени  $t$ .

Таким образом, для каждой дуги графа концентрация феромона определяется следующим образом:

$$\tau_{ij}(t+1) = \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{n_k} \Delta\tau_{ij}^k(t) \quad (10.4)$$

где  $n_k$  – число муравьев. Из (10.3) следует, что общая концентрация феромона для данной дуги пропорциональна «качеству» путей, в которые входит эта дуга, поскольку откладываемое количество феромона согласно (10.3) отражает «качество» соответствующего пути. В данном случае «качество» обратно пропорционально длине пути (числу дуг, вошедших в путь). Но в общем случае может быть использована и другая мера качества (например, стоимость проезда по данному пути или геометрическое расстояние и т.п.). Пусть  $x^k(t)$  обозначает решение в момент  $t$ , и некоторая функция  $f(x^k(t))$  выражает качество решения. Если  $\Delta\tau^k$  не пропорционально качеству решения и все муравьи откладывают одинаковое количество феромона  $\Delta\tau_{ij}^1 = \Delta\tau_{ij}^2 = \dots = \Delta\tau_{ij}^k$ , то существует только один фактор, который зависит от длины пути и способствует выбору коротких путей. Это ведет к двум основным способам оценки качества решений, которые используются в МА:

- неявная оценка, где муравьи используют отличие в длине путей относительно построенных путей другими муравьями;
- явная оценка, количество феромона пропорционально некоторой мере качества построенного решения.

В нашем случае мы имеем явную оценку качества решения согласно (12.3), которая ведет к тому, что дуги, входящие в длинные пути, становятся менее привлекательными для окончательных решений.

**Алгоритм A10.2.** Простой муравьиный алгоритм

Инициализация  $\tau_{ij}(0)$  малыми случайными значениями;

$T = 0$ ;

поместить  $n_k$  муравьев на начальную вершину;

**repeat**

**for** каждого муравья  $k = 1, \dots, n_k$  **do**

        // построение пути  $x^k(t)$ ;

$x^k(t) = 0$ ;

**repeat**



выбрать следующую вершину согласно вероятности определяемой выражением (10.2)

добавить дугу  $(i, j)$  в путь  $x^k(t)$

**until** конечная вершина не достигнута;

удалить петли из  $x^k(t)$ ;

вычислить длину пути  $f(x^k(t))$ ;

**end**

**for** каждой дуги графа  $(i, j)$  **do**

//испарение феромона

Уменьшить концентрацию феромона согласно выражению (10.5);

**end**

**for** каждого муравья  $k = 1, \dots, n_k$  **do**

**for** каждой дуги графа  $(i, j)$  **do**

$$\Delta\tau^k = \frac{1}{f(x^k(t))};$$

    Коррекция  $\tau_{ij}$  согласно (10.5);

**end**

**end**

$t = t + 1$ ;

**until** не выполняется критерий останова;

Возврат решения – пути с наименьшим значением  $f(x^k(t))$ ;

В алгоритме A4.2 могут быть использованы различные критерии окончания, например,

- окончание при превышении заданного числа итераций;
- окончание по найденному приемлемому решению  $f(x^k(t)) \leq \varepsilon$ ;
- окончание, когда все муравьи следуют одним и тем же путем.

Компьютерные эксперименты с двумя мостами показали, что муравьи быстро находят решение и мало исследуют альтернативные варианты. Для предотвращения преждевременной сходимости и расширения пространства поиска можно ввести искусственное испарение феромона на каждой итерации алгоритма следующим образом:

$$\tau_{ij}(t) \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij}(t), \quad (10.5)$$

где  $\rho \in [0,1]$ . При этом константа  $\rho$  определяет скорость испарения, которое заставляет муравьи «забывать» предыдущие решения. Очевидно, что при больших значениях  $\rho$  феромон испаряется быстро, в то время как малые значения

$\rho$  способствуют медленному испарению. Отметим, что чем больше испаряется феромон, тем поиск становится более случайным.

Так при  $\rho = 1$  мы имеем случайный поиск.

Следует отметить, построение решения является результатом совместного поведения, которое определяется простым поведением отдельных муравьев: каждый муравей выбирает следующий участок пути на основе информации, предоставляемой другими муравьями в форме отложений феромона. При этом при выборе муравей использует информацию только локального окружения.

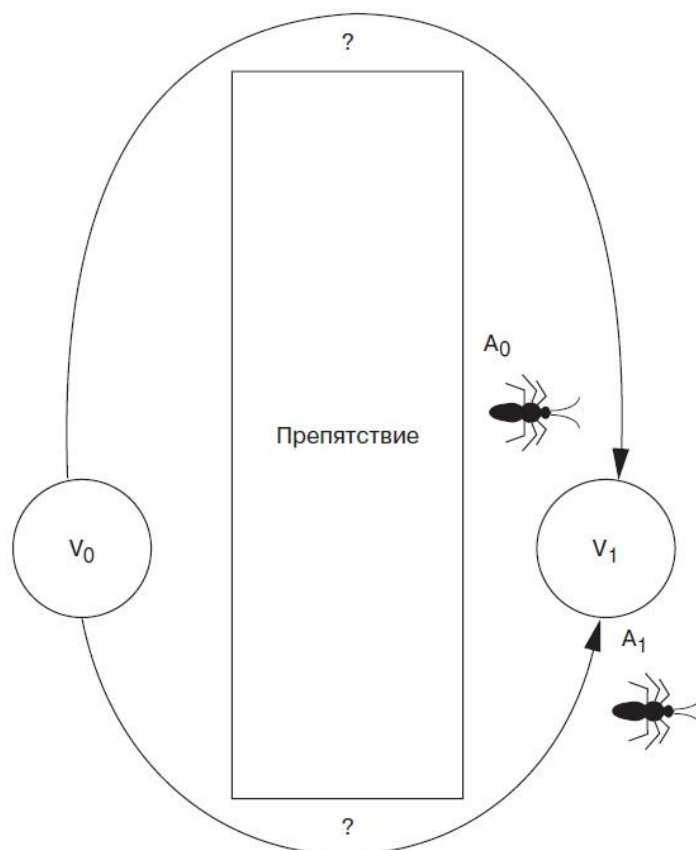
Эксперименты показали, что:

- ПМА работает хорошо для очень маленьких графов и в большинстве случаев находит кратчайший путь;
- для больших графов характеристики ухудшаются, алгоритм становится менее стабильным и более чувствительным к выбору параметров;
- сходимости к кратчайшему пути хорошая при малом числе муравьев, в то время как большое количество муравьев часто ведет к тому, что процесс поиска не сходится;
- эффект испарения более важен для сложных графов. В этом случае при  $\rho = 0$  (нет испарения) алгоритм часто не сходится. С другой стороны, если феромон испаряется слишком быстро (большие значения  $\rho$ ), алгоритм часто сходится к субоптимальным решениям;
- при малых значениях  $\alpha$  алгоритм в основном сходится к кратчайшему пути. Для сложных задач (высокой размерности) большое значение  $\alpha$  ведет к плохой сходимости.

Эти исследования показали (как и для других эволюционных алгоритмов) важность проблемы эксплуатации-расширения пространства поиска. Характеристики ПМА можно значительно улучшить путем включения эвристической информации при выборе следующей дуги, запоминания локальной информации для предотвращения преждевременных циклов, использования различных значений коэффициентов на различных стадиях поиска.

### **Пример**

В примере представлено функционирование алгоритма на простом примере, чтобы увидеть, как работают уравнения. Из рис. 10.8 видно, что это простой сценарий с двумя муравьями, которые выбирают два разных пути для достижения одной цели. На рис. показан этот пример с двумя гранями между двумя узлами ( $V_0$  и  $V_1$ ). Каждая грань инициализируется и имеет одинаковые шансы на то, чтобы быть выбранной.



Рисуно 10.8 – Завершение пути муравья.

$$\rho = 0,6$$

$$\alpha = 3,0$$

$$\beta = 1,0$$

	A0	A1
Пройденное расстояние	20	10
Уровень фермента $Q$	0,5	1,0
$\frac{\text{Уровень фермента } Q}{\text{Пройденное расстояние}}$		

И так результат уравнения является средством измерения пути, – короткий путь характеризуется высокой концентрацией фермента, а более длинный путь – более низкой. Далее по уравнению  $\tau_{ij}(t) = \Delta\tau_{ij}(t) + (\tau_{ij}^k(t) \times \rho)$  рассчитывается количество фермента, которое будет применено.

Для муравья  $A_0$  результат составляет:

$$= 0,1 + (1,0 \times 0,3) = 0,4.$$

Для муравья  $A_1$  результат составляет:

$$= 0,1 + (1,0 \times 0,6) = 0,7.$$

Далее с помощью уравнения  $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}(t) \times (1 - \rho)$  определяется, какая часть фермента испарится и, соответственно, сколько останется. Результат (для каждого пути) составляют:

$$= 0,4 \times (1,0 - 0,6) = 0,16$$

$$= 0,7 \times (1,0 - 0,6) = 0,28.$$

Эти значения представляют новое количество фермента для каждого пути (верхнего и нижнего, соответственно). После перемещения муравьев обратно в узел  $V_0$  воспользуемся вероятностным уравнением выбора пути 1, чтобы определить, какой путь должны выбрать муравьи.

Вероятность того, что муравей выберет верхний путь (представленный количеством фермента 0,16), составляет:

$$\frac{(0,16)^{3,0} \times (0,5)^{1,0}}{((0,16)^{3,0} \times (0,5)^{1,0}) + ((0,28)^{3,0} \times (1,0)^{1,0})} = \frac{0,002048}{0,024} = P(0,085)$$

Вероятность того, что муравей выберет нижний путь (представленный количеством фермента 0,28), составляет:

$$\frac{(0,28)^{3,0} \times (1,0)^{1,0}}{((0,16)^{3,0} \times (0,5)^{1,0}) + ((0,28)^{3,0} \times (1,0)^{1,0})} = \frac{0,021952}{0,024} = P(0,915)$$

При сопоставлении двух вероятностей оба муравья выберут нижний путь, который является наиболее оптимальным.

### 10.3. Муравьиная система

Первый муравьиный алгоритм был разработан М.Дориго. По современной классификации он относится к (**antsystem**) муравьиной системе (МС). По сравнению с простым муравьиным алгоритмом в МС улучшены характеристики за счет изменения метода вычисления вероятности выбора следующей вершины путем учета эвристической информации и ввода списка запрещенных вершин (tabulist). Конкретно, в МС вероятность перехода из  $i$ -ой вершины в  $j$ -ю вершину определяется следующим образом

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{u \in N_i^k} \tau_{iu}^\alpha(t) \eta_{iu}^\beta(t)}, & \text{если } j \in N_i^k \\ 0, & \text{если } j \notin N_i^k \end{cases} \quad (10.6)$$

где:

- 1)  $\tau_{ij}$  представляет апостериорную эффективность перехода из вершины  $i$  в  $j$  которая определяется интенсивностью феромона для соответствующей дуги;
- 2)  $\eta_{ij}$  представляет априорную эффективность перехода из  $i$  в  $j$  на основе некоторой эвристики.

Вероятность перехода в МС, определяемая (10.6), отличается от аналога в ПМА, заданной (10.2), двумя аспектами:

1. При вычислении вероятности перехода в МС предпринята попытка сбалансировать влияние интенсивности феромона  $\tau_{ij}$  (отражающее предысторию успешных действий) и эвристической информации  $\eta_{ij}$  (выражающее предпочтительность некоторого выбора). Этот баланс управляет процессом эксплуатации-расширения в пространстве поиска решения. Баланс регулируется значениями коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . При  $\alpha = 0$  информация о концентрации феромона не используется и предыдущий опыт игнорируется. Если  $\beta = 0$ , то не учитывается эвристическая информация и мы имеем простой МА. Эвристическая информация о предпочтительности выбора следующей вершины может представляться в различной форме и зависит от задачи. Например, для выбора кратчайшего пути можно использовать  $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ , где  $d_{ij}$  - расстояние между вершинами  $i$  и  $j$ . Очевидно, что в этом случае предпочтительней короткая дуга, исходящая из вершины  $i$ .

2. Множество  $N_i^k$  определяет множество допустимых вершин для  $i$ -го муравья. Это множество может включать соседние к  $i$  вершины, которые не посещались  $k$ -м муравьем. Для этого для каждого муравья создается и отслеживается табу-список. Вершины из этого списка удаляются из  $N_i^k$  множества допустимых вершин, поскольку каждая вершина может посещаться только один раз.

Некоторые авторы вместо (10.6) в МС используют другую форму выражения для вероятности:

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{\alpha\tau_{ij}(t) + (1-\alpha)\eta_{ij}(t)}{\sum_{u \in N_i^k} (\alpha\tau_{iu}(t) + (1-\alpha)\eta_{iu}(t))}, & \text{если } j \in N_i^k \\ 0, & \text{если } j \notin N_i^k \end{cases} \quad (10.7)$$

Здесь параметр  $\alpha$  определяет относительную важность концентрации феромона  $\tau_{ij}(t)$  по сравнению с эвристикой  $\eta_{ij}$ . Данный вариант МС по сравнению с предыдущим не требует задания параметра  $\beta$ .

Испарение феромона реализуется согласно (10.5) – после построения пути каждым муравьем, концентрация *феромона* на каждой дуге корректируется следующим образом:

$$\tau_{ij}(t+1) = \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) \quad (10.8)$$

где

$$\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n_k} \Delta\tau_{ij}^k(t) \quad (10.9)$$

$\Delta\tau_{ij}^k(t)$  – количество феромона, откладываемое муравьем  $k$  на дуге  $(ij)$  в момент времени  $t$ .

М.Дориго разработал три модификации МС, которые отличаются методом вычисления  $\Delta\tau_{ij}^k$  количеств феромона (в предположении, что решается задача минимизации):

1. Ant-cycle AS (Муравьиный цикл), где

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{Q}{f(x^k(t))}, & \text{если дуга}(i, j) \text{ есть в пути } x^k(t) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.10)$$

где  $Q$  – положительная константа. Здесь количество феромона откладывается обратно пропорционально качеству  $f(x^k(t))$  на дугах полного пути, построенного муравьем. При этом для изменения концентрации феромона используется глобальная информация.

При решении задач максимизации в этом случае

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} Qf(x^k(t)), & \text{если дуга}(i, j) \text{ есть в пути } x^k(t) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.11)$$

2. Ant-density AS (плотность муравьев), где

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} Q, & \text{если дуга}(i, j) \text{ есть в пути } x^k(t) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.12)$$

В этой модификации каждый муравей откладывает одинаковое количество феромона на любой дуге построенного пути. Этот подход учитывает только количество муравьев, прошедших по данной дуге  $(i, j)$ . Чем выше плотность трафика на дуге, тем более она привлекательна для окончательного решения.

3. Ant-quantity AS (Муравьиное количество), для которой

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{Q}{d_{ij}}, & \text{если дуга}(i, j) \text{ есть в пути } x^k(t) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.13)$$

В этом случае при коррекции концентрации феромона используется только локальная информация – расстояние  $d_{ij}$  и МС предпочитает выбирать короткие дуги.

В целом МС-алгоритм представлен ниже псевдокодом А10.3. Здесь на этапе инициализации размещение муравьев определяется решаемой задачей. Если целью является поиск кратчайшего пути между заданными вершинами графа, то все  $n_k$  муравьев размещаются на начальной вершине. С другой стороны, если целью является построение кратчайшего гамильтонова цикла (соединяющего все вершины), то  $n_k$  муравьев случайно размещаются на всем графе. Это расширяет

*пространство* поиска. Инициализация феромона выполняется с помощью либо малой константы  $\tau_0$ , либо небольших значений из диапазона  $[0, \tau_0]$ .

### Алгоритм А 10.3. Муравьиная система

$t = 0$ ;

инициализация всех параметров  $\alpha, \beta, \rho, Q, n_k, \tau_0$ ;

поместить  $n_k$  муравьев на соответствующие вершины;

**for** каждой дуги  $(i, j)$  **do**

$$\tau_{ij}(t) \sim U(0, \tau_0)$$

**end**

**repeat**

**for** каждого муравья  $k = 1, \dots, n_k$  **do**

$$x^k(t) = \emptyset$$

**repeat**

в текущей вершине  $i$  выбрать следующую вершину  $j$  вероятности, определяемой (10.6);

добавить дугу  $(i, j)$  в путь  $x^k(t) = x^k(t) \cup (i, j)$ ;

**until** полный путь не построен;

вычислить  $f(x^k(t))$ ;

**end**

**for** каждой дуги графа  $(i, j)$  **do**

// испарение феромона

уменьшить концентрацию феромона согласно (10.5);

вычислить  $\tau_{ij}(t)$  в соответствии с (10.9);

изменить концентрацию феромона согласно (10.4);

**end**

**for** каждой дуги  $(i, j)$  **do**

$$\tau_{ij}(t + 1) = \tau_{ij}(t);$$

**end**

$t = t + 1$ ;

**until** не выполнен критерий останова;

возврат  $x^k(t): f(x^k(t)) = \min_{k=1, \dots, n_k} \{f(x^k(t))\}$ .

Автор [MC] исследовал характеристики всех трех приведенных модификаций, прежде всего, при решении задачи коммивояжера. Версия Ant-cycle AS (муравьиный цикл) работала быстрее, в силу использования глобальной информации. Кроме этого Дориго ввел стратегию элитизма, где в дополнение коррекции феромона согласно (10.4) дополнительно добавляется количество

феромона, пропорциональное длине лучшего пути для всех его дуг следующим образом:

$$\tau_{ij}(t+1) = \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) + n_e \Delta\tau_{ij}^e(t) \quad (10.14)$$

где

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{Q}{f(\tilde{x}(t))}, & \text{if } (i, j) \in \tilde{x}(t) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (10.10)$$

Здесь  $e$  – число элитных муравьев,  $\tilde{x}(t)$  – лучшее корректное решение с  $f(x^k(t)) = \min_{k=1, \dots, n_k} \{f(x^k(t))\}$ .