Suites et Séries de fonctions et intégrales dépendant d'un paramètre

Kenny SIGGINI
Maître de Conférences
Département de Mathématiques
Université de Lomé
TOGO

Epigraphe

Deux dangers menacent le monde :
l'ordre et le désordre.
Paul Valery

Seul le dernier des imbéciles traite son
contradicteur d'ennemi.
K.S.

Préface

Ce cours de Mathématiques, dispensé par M. SIGGINI –paix à son âme – à l'Université de Lomé, a toujours été sous forme d'un document manuscrit, beau à lire et bien rédigé pour faciliter la compréhension aux lecteurs. Mais dans notre monde actuel où la technologie défie toute l'existence, il y a lieu de chercher à améliorer ce qui existait déjà, à défaut de créer du nouveau. Par ailleurs ce cours est très important dans le Parcours de Licence de Mathématiques, tant pour la préparation des concours d'entrée dans les écoles d'ingénieur que pour la poursuite des études en Mathématiques et ses applications. C'est de là que m'est venue l'idée de le numériser, de le transformer en format PDF (Portable Document Format), lors de mon exercice dans l'apprentissage de LaTeX.

Ce travail dont voici le résultat est le fruit de mes premiers pas avec LaTeX . Une manière de péréniser et diffuser l'œuvre d'un enseignant que j'ai beaucoup adoré.

Comme tout débutant, des erreurs typographiques et de mauvaise maîtrise des syntaxes pourront figurer dans ce document. Je serai heureux de recevoir vos suggestions de tout genre, vos commentaires pouvant aider à améliorer ce manuel. Néanmoins j'espère que ceci pourra non seulement aider les camarades qui s'en serviront, mais aussi inspirer d'autres à m'emboiter le pas en essayant de faire de même pour les cours manuscrits qui restent encore.

Votre camarade,

Koffi SANI
koffisani@gmail.com | koffisani | koffisani

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Rappels

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Se donner une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ équivaut à se donner une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $u(\mathbb{N}) = (u_n)$. Les u_n sont appelés **termes** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $u(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}$. On dit que u_n est une suite réelle (respectivement complexe) si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}$ (respectivement $u_n \in \mathbb{C}$).
Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$).
On dit que (u_n) est bornée s'il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A$.
Si (u_n) est réelle, la condition $|u_n| \leq A$ équivaut à $-A \leq u_n \leq A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Si elle est complexe, $|u_n|$ désigne le module du complexe u_n.
Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0,\ \forall q \geq n_0,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

Soit $u(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}$, on dit que (u_n) est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Le nombre ℓ est alors appelé **limite** de la suite (u_n)

1.1.1 Critère de convergence d'une suite

Théorème 1.1.1 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. Alors (u_n) est convergente si et seulement si (u_n) est une suite de Cauchy.*

Théorème 1.1.2 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$, une suite croissante (respectivement décroissante). Alors (u_n) est convergente si et seulement si elle est majorée (respectivement minorée)*

La limite est alors égale à $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ si (u_n) est croissante, et à $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ si (u_n) est décroissante

Remarque 1.1.1 *Une suite croissante est convergente ou tend vers $+\infty$*
Une suite décroissante est convergente ou tend vers $-\infty$

1.1.2 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Proposition 1.1.1 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. Si (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée. La réciproque est en général fausse.*

Contre-exemple
$(u_n) \subset \mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Limite supérieure et limite inférieure d'une suite réelle

Soit $(u_n) \subset \mathbb{R}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sup\limits_{k \geq n} u_k$. On obtient une suite (v_n). Comme (v_n) est décroissante, elle est donc convergente ou tend vers $-\infty$. Cette limite est notée $\overline{\lim} u_n$ et est appelée **limite supérieure** de (u_n)

$$\overline{\lim} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} u_k)$$

car la limite d'une suite décroissante est la borne inférieure de ses termes.
Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \inf\limits_{k \geq n} u_k$. On définit une suite croissante (w_n). Elle est convergente ou tend vers $+\infty$. Cette limite est notée $\underline{\lim} u_n$ et est appelée **limite inférieure** de (u_n).

$$\underline{\lim} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} u_k)$$

car la limite d'une suite croissante est égale à la borne supérieure de ses termes.

Relation entre les limites inférieure et supérieure

— $\underline{\lim} u_n \leq \overline{\lim} u_n$
— $\overline{\lim}(-u_n) = -\underline{\lim} u_n$ (Utiliser la relation $\sup(-a_i) = -\inf(a_i)$)

Soient (a_n) et (b_n) des suites réelles : si $\forall n\ a_n \leq b_n$ alors $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$ et $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$

Théorème 1.1.3 *Soit $u(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$. Alors (u_n) est convergente si et seulement $\underline{\lim} u_n = \overline{\lim} u_n$.*

Exemples Calculer $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ pour $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.
$\overline{\lim} u_n = +1$ car $\forall n,\ \sup\limits_{k \geq n} u_k = +1$
$\underline{\lim} u_n = -1$ car $\forall n,\ \inf\limits_{k \geq n} u_k = -1$
$\overline{\lim} v_n = +1$ et $\underline{\lim} v_n = -1$

Définition 1.1.1 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. On appelle **suite partielle** ou **suite extraite** ou encore **sous-suite** de la suite (u_n), une suite $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ où $n_0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_p \leq \cdots$ et $u_{n_i} \in \{u_0; u_1; \cdots; u_n; \cdots\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

1.2 Séries

1.2.1 Le corps $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Posons $s_0 = u_0,\ s_1 = u_0 + u_1,\ s_2 = u_0 + u_1 + u_2,\ \cdots, s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. On obtient une nouvelle suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 1.2.1 *Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.*
*On appelle **série** définie par (u_n) ou **série** de terme général u_n, le couple $((u_n),(s_n))$. Elle est notée $\sum u_n$.*
*Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}$, alors $\sum u_n$ est appelée **série réelle**.*
*Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C}$, alors $\sum u_n$ est appelée **série complexe**.*

Définition 1.2.2 *La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite (s_n) est convergente. Si (s_n) n'est pas convergente, on dit que $\sum u_n$ est divergente. Si $\sum u_n$ est convergente alors la limite de la suite (s_n) est appelée **somme** de la série.*

Soit $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{k} u_n \right)$, ℓ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$

Définition 1.2.3 *La suite (s_n) est appelée **suite des sommes partielles** de la série $\sum u_n$.*

Remarque 1.2.1
a) Si (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, alors $\forall n \geq n_0,\ s_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n$.
Si (s_n) est convergente, alors la somme de la série de terme général u_n est $s = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

b) Soit $\sum u_n$ une série convergente (respectivement divergente). Alors la série $\sum v_n$ obtenue à partir de $\sum u_n$ en modifiant ou en supprimant les p premiers termes de (u_n) est aussi convergente (respectivement divergente).
Dans le cas où $\sum u_n$ est convergente, on a $\sum\limits_{n}^{+\infty} u_n \neq \sum\limits_{k}^{+\infty} v_k$.

c) Supposons $\sum u_n$ convergente ; on définit une suite (r_n) où $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Preuve **Justifions b) et c)**

b) Soit
$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_n$$
$$t_n = u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$
$\sum u_n$ est supposée convergente.
On a $v_n = s_n - (u_0 + \cdots + u_p) + (u'_0 + u'_1 + \cdots + u'_p)$.
Il est clair que $\lim\limits_{n} s_n$ existe si et seulement si $\lim\limits_{n} v_n$ existe.

c) On a
$$r_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} = s - s_{n-1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s - s_{n-1}) = s - s = 0$$

□

Proposition 1.2.1 *Soit $\sum u_n$ où $u_n \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si $\sum u_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Preuve $\sum u_n$ convergente $\Leftrightarrow$ (s_n) convergente. Donc ($\sum u_n$ convergente) $\Rightarrow$ $((s_n)$ est de Cauchy), i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p, q, |s_p - s_q| \leq \varepsilon.$$

Posons $q = p - 1$
On a alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p > n_0,\ |u_p| \leq \varepsilon$. Ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

□

Définition 1.2.4 *Si* $(u_n) \nrightarrow 0$, *on dira que la série est grossièrement divergente.*

1.2.2 Exemples de séries

Séries géométriques

On appelle ainsi les séries de la forme $\sum x^n$, où $x \in \mathbb{K}$ et est fixé.
Étude de $\sum x^n$ $(x \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N})$
Pour tout n, $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ où $u_n = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \end{aligned}$$

— Si $x = 1$, $s_n = n + 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. $\sum x^n$ est alors divergente.
— Si $|x| > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \nrightarrow 0$, d'où $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
— Si $x = -1$, $u_n = (-1)^n$ donc $u_n \nrightarrow 0, \sum x^n$ est grossièrement divergente.
— Si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-x}$. Alors $\sum x^n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-x}$$

Séries exponentielles

Ce sont des séries de la forme $\sum \dfrac{x^n}{n!}$, $(x \in \mathbb{K})$.
Étant donné x, on sait que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme est e^x.

Série de la forme $\sum \frac{x^n}{n}$

* Si $|x| > 1$, on a $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \to +\infty$ (d'après les croissances comparées $|x^n| = |x|^n = \exp(n\mathrm{Log}|x|)$) donc $\sum \dfrac{x^n}{n}$ est grossièrement divergente.
* m Si $x = 1$ alors $\sum \dfrac{x^n}{n} = \sum \dfrac{1}{n}$. C'est une série divergente car la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n, \exists p, q > n, |s_p - s_q| > \varepsilon.$$

En effet, en prenant pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $p = 2n$, et $q = n$, on a

$$|s_p - s_q| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

* Soit $-1 < x < 1$. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\mathrm{Log}(1-x)$ donc $\sum \frac{x^n}{n}$ est convergente si $-1 < x < 1$.

* Pour $x = -1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\mathrm{Log}2$. On le prouvera ultérieurement.

Série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n - a_{n+1}$

Une telle suite est convergente si et seulement si la suite (a_n) est convergente. En effet,

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = a_0 - a_n.$$

Il est clair que $\lim s_n$ existe si et seulement si $\lim a_n$ existe.

Exemple Étudier $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $(n \geq 1)$

$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ($= a_n - a_{n+1}$ où $\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n}$) On a

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \to +\infty} s_n = 1$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

1.3 Opérations sur les séries

Définition 1.3.1 1. *Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec $u_n,\ v_n \in \mathbb{K}$. On appelle **somme** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, la série de terme général $u_n + v_n$.*

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **produit** par λ de la série $\sum u_n$, la série de terme général λu_n.*

Proposition 1.3.1 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où $u_n, v_n \in \mathbb{K}$.*

i- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série de terme général $u_n + v_n$ est convergente. De plus, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

ii- a- Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum \lambda u_n$ est convergente. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b- Si $\lambda \neq 0$, alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum \lambda u_n$ est convergente.

Preuve

i- $\forall n$, posons $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, $s'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $\sigma_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_n + v_n)$. On a $\sigma_n = s_n + s'_n$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\lim_{n \to +\infty} s_n$ et $\lim_{n \to +\infty} s'_n$ existent. D'après les propriétés des limites, on $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \lim_{n \to +\infty} s_n + \lim_{n \to +\infty} s'_n$; ceci signifie que $\sum(u_n + v_n)$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v^n.$$

ii- a- La démostration est analogue à la précédente.

b- Supposons $\lambda \neq 0$. Supposons que $\sum u_n$ est convergente. D'après ce qui précède, $\sum \lambda u_n$ est convergente. Supposons $\lambda \neq 0$ et $\sum \lambda u_n$ convergente. Alors d'après la même proposition, la série de terme général $\frac{1}{\lambda}(\lambda u_n) = u_n$ est convergente.

□

Remarque 1.3.1 1. *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.*

2. *La somme de deux séries divergentes peut être convergente.*

Exemple Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = v_n + t_n$, en posant $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
On sait que $\sum v_n$ est convergente et $\sum t_n$ est divergente. Donc $\sum u_n$ est divergente.

Proposition 1.3.2 *Soit une série $\sum u_n$ à termes complexes. Posons $\forall n$, $u_n = a_n + ib_n$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes.*

Preuve Soit $s_n = a_0 + ib_0 + a_1 + ib_1 + \cdots + a_n + ib_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + i(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$. En notant (A_n) (respectivement (B_n)) la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ (respectivement $\sum b_n$), on a $s_n = A_n + iB_n$ Un résultat classique sur la convergence d'une suite à termes complexes permet d'affirmer que (s_n) est convergente si et seulement si (A_n) et (B_n) sont convergentes. □

1.4 Série à termes positifs

On appelle série à termes positifs ou nuls une série $\sum u_n$, avec $u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.4.1 *Soit $\sum u_n$ une série ̀termes positifs ou nuls. Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulemnt si la suite (s_n) des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée.*

Preuve
Supposons $\sum u_n$ convergente. Alors (s_n) est convergente ; toute suite convergente est bornée à favori majorée. Donc (s_n) est majorée.
Inversement, supposons (s_n) majorée. Comme $\sum u_n$ est à termes positifs ou nuls, la suite (s_n) est croissante. Toute suite croissante et majorée est est convergente. D'où (s_n) est convergente i.e. $\sum u_n$ est convergente. □

Théorème 1.4.1 (Théorème de comparaison) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, des séries à termes positifs ou nuls telles que $\forall n$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors*

i- Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

ii- Si $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum v_n$ est divergente.

Preuve $ii-$ est la contaposée de $i-$.Il suffit donc de prouver $i-$.
Posons $s'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Supposons $\sum v_n$ convergente, alors $\exists\ M > 0$ tel que $s'_n \leq M$, $\forall n$ (**Proposition 1.4.1**).
Soit $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, $\forall n$. On a $s_n \leq s'_n$, $\forall n$. Donc (s_n) est majorée i.e. $\sum u_n$ est convergente (**Proposition 1.4.1**). □

Exemple Soit $\sum u_n$ où $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

On a $u_n \geq 0$, $\forall n$. Comme $|\sin x| \leq |x|$ alors $u_n \leq \frac{\pi}{3^n}$. $\sum \frac{\pi}{3^n}$ est une série géométrique convergente car $0 < \frac{\pi}{3^n} < 1$; donc $\sum u_n$ est convergente.

Corollaire 1.4.1 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs. Si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ admet une limite finie non nulle, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont simultanément convergentes ou divergentes. Autrement dit $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente.*

Preuve Supposons que $\lim \frac{u_n}{v_n} = \ell \neq 0$ $(\ell > 0)$. Étant donné $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon < \frac{\ell}{2}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| \leq \varepsilon_0$, i.e. $(\ell - \varepsilon_0)v_n \leq u_n \leq (\ell + \varepsilon_0)v_n$, $\forall n \geq n_0$.
Considérons les séries $\sum u'_n$ et $\sum v'_n$ où u'_n et v_n ne sont définies qu'à partir de n_0 et tels que $u'_n = u_n$ et $v'_n = v_n$, $\forall n \geq n_0$.
Supposons $\sum u_n$ convergente ; alors $\sum u'_n$ est convergente d'après **Remarque** 1.2.1. On a $\sum(\ell - \varepsilon_0)v'_n$ convergente car $(\ell - \varepsilon_0)v'_n \leq u'_n$, $\forall n \geq n_0$ (**Théorème de comparaison**)
On en déduit que $\sum v'_n$ est convergente (**Proposition** 1.3.1). Par conséquent $\sum v_n$ est convergente d'après **Remarque** 1.2.1. On vient de prouver l'implication ($\sum u_n$ convergente) $\Rightarrow$ ($\sum v_n$ convergente).
L'implication inverse s'obtient d'une manière analogue. □

Exemple Nature de $\sum \frac{1}{n^2}$, $(n \geq 1)$

On sait que $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$ est convergente. Posons $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n^2}$; $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque 1.4.1 *Les hypothèses sur la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ sont indispensables.*

Exemple $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n}{n(n+1)}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. $\sum u_n$ est divergente et $\sum v_n$ est convergente.
On n'a pas les conclusions du corollaire. De même $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

Exercice : Soit le réel $r = 1,82727\ldots$ Trouver $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $r = \frac{p}{q}$.

(Réponse : $p = 201$, $q = 110$)

1.5 Convergence absolue

Définition 1.5.1 *Soit la série $\sum u_n$ avec $u_n \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.*

Exemple

Soit $u_n = \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$; $|u_n| \leq \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum \frac{1}{n(n+1)}$, $(n \leq 1)$ est convergente. D'après le Théorème de comparaison, $\sum |u_n|$ est convergente.
Donc $\sum u_n$ est absolument convergente.

Théorème 1.5.1 *Une série absolument convergente est convergente.*

Preuve Soit $\sum u_n$, avec $u_n \in \mathbb{K}$, $\forall n$. On suppose $\sum u_n$ absolument convergente.

1^{er} cas $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n$. Posons $v_n = |u_n| - u_n$, $\forall n$. Alors $0 \leq v_n \leq 2u_n$. $\sum |u_n|$ est convergente par hypothèse ; alors $\sum 2|u_n|$ converge (**Proposition 1.3.1 ii-a**). Donc $\sum u_n$ est convergente (**Théorème 1.4.1**). Alors $\sum u_n$ est la différence de deux séries convergentes, elle est donc convergente (**Proposition 1.3.1 i-**).

2^e cas $u_n \in \mathbb{C}$. Posons $\forall n$, $u_n = a_n + ib_n$ où a_n, $b_n \in \mathbb{R}$.$|a_n| \leq |u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $|b_n| \leq |u_n|$. Comme $\sum |u_n|$ est convergente, alors $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes (**Théorème 1.4.1**). Ceci signifie que les séries à termes réels $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. D'après le 1^{er} cas, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes. D'après la **Proposition 1.3.2**, $\sum u_n$ est convergente.

$\square$

Remarque 1.5.1
1. *$\sum u_n$ convergente $\not\Rightarrow \sum |u_n|$ convergente.*

   Contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *est convergente (de somme* $-\mathrm{Log}2$*) mais n'est pas absolument convergente (*$\sum \frac{1}{n}$ *est divergente).*
2. *Le **Théorème 1.5.1** permet de ramener l'étude d'une série de termes quelconques à celle d'une série de termes positifs ou nuls.*

Proposition 1.5.1 *Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Preuve Soient $\forall n$, $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $\sigma_n = |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|$. $\forall n$, $|s_n| \leq \sigma_n$ (**Inégalité triangulaire**).
$\lim_{n\to+\infty} s_n$ existe (**Théorème 1.5.1**). Par suite $\lim_{n\to+\infty} |s_n|$ aussi existe. Par passage à la limite sur n, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |s_n| \leq \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Comme l'application $|\cdot|$ (valeur absolue) est continue, $\lim_{n\to+\infty} |s_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} s_n\right|$; c'est ce que nous voulions prouver. $\square$

Définition 1.5.2 *Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où u_n, $v_n \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On appelle **série-produit** de $\sum u_n$ par $\sum v_n$, la série de terme général $w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$*

Théorème 1.5.2 *Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où u_n, $v_n \in \mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série-produit $\sum w_n$ est absolument convergente, et on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \tag{1.1}$$

Preuve

1. Plaçons-nous d'abord dans le cas où les suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs.
   Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. Si l'on écrit l'expression de w_n sous forme de $w_n = \sum_{p+q} u_p v_q$, on voit que $W_n = \sum_{p+q \leq n} u_p v_q$.
   D'autre part on a :
   $$U_n V_n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_p v_q.$$
   Tous les termes $u_p v_q$ figurant dans la somme W_n se retrouvent donc dans le produit $U_n V_n$ (car l'inégalité $p+q \leq n$ entraine $p \leq n$ et $q \leq n$). Inversement, tous les termes $u_p v_q$ figurant dans le développement du produit $U_n V_n$ se retrouvent dans la somme w_{2n} (puisque les inégalités $p \leq n$ et $q \leq n$ entrainent $p+q \leq 2n$) : si les nombres u_p, v_q sont tous positifs, on a donc les inégalités :
   $$W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n} \tag{1.2}$$
   Ces inégalités sont rendues intuitives par le schéma ci-joint : où l'on a représenté les ensembles de couples d'indices (p,q) vérifiant respectivement : $(p+q \leq n)$, $(p \leq n$ et $q \leq n)$, $(p+q \leq 2n)$ et les sommes W_n, $U_n V_n$, W_{2n} correspondantes.
   Les inégalités (1.2) montrent que la suite (W_n) est majorée. La série (à termes positifs) $\sum W_n$ est donc convergente, et sa somme $W = \lim_{n \to +\infty} W_n$ est aussi la limite de la suite W_{2n}. Posant :
   $$U = \lim_{n \to +\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et } V = \lim_{n \to +\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$
   on a donc
   $$UV = W, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (1.1).$$

2. Cas général. Posons $w_n = \sum_{p=0}^{n} |u_p||v_{n-p}|$.
   On a évidemment $|w_n| \leq w_n$; et, d'aprés la partie 1 de la démonstration, la série $\sum w_n$ (produit des séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$) est convergente. La série $\sum w_n$ est donc absolument convergente.
   Posons
   $$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \; V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n, \; W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n;$$
   $$A_n = |u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|, \; B_n = |v_0| + |v_1| + \cdots + |v_n|, \; C_n = |w_0| + |w_1| + \cdots + |w_n|,$$
   et désignons par Δ_n, l'ensemble des couples d'entiers p, q vérifiant $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq n$, $p+q > n$. On a :
   $$|U_n V_n - W_n| = \left| \sum_{(p,q) \in \Delta_n} u_p v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_n} |u_p||v_q| = A_n B_n - C_n;$$
   et d'après 1 on sait (moyennant un changement de notations) que les suites $(A_n B_n)$ et (C_n) ont même limite. La suite $(U_n V_n - W_n)$ tend donc vers 0, et on a :
   $$\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} U_n V_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} v_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (1.1)$$

□

Exemple Soient $u_n = a^n,\ v_n = b^n,\ (a, b \in \mathbb{C}, |a| < 1, |b| < 1)$. Les séries géométriques $\sum a^n, \sum b^n$ étant absolument convergentes, on a :

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n, \text{ avec } w_n = \sum_{p+q=n} a^p b^q.$$

Plus généralement, on démontre, par récurrence, la relation :

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1-a_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_p^{\alpha_p} \right)$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_p$ sont des nombres complexes vérifiant $|a_k| < 1,\ (k = 1, 2, \cdots, p)$.
Une application très importante du **Théorème 1.5.2** consistera à prouver que la fonction exponentielle définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, vérifie, $\forall u, v \in \mathbb{C}$, la relation

$$e^{u+v} = e^u e^v$$

(confère **Paragraphe 5.7**)

Chapitre 2

Étude pratique d'une série

Dans ce chapitre, nous donnerons les règles pratiques pour l'étude d'une série.

2.1 Règle de d'Alembert et de Cauchy (Comparaison à une série géométrique)

2.1.1 Règle de d'Alembert

Théorème 2.1.1 (Règle de d'Alembert) *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $r \in]0;1[$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$, alors $\sum u_n$ est convergente.*

Preuve On suppose les hypothèses vérifiée.
On a :

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} < r,$$
$$\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} < r,$$
$$\vdots$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r.$$

Le produit membre à membre donne $\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} < r^{(n+1)-n_0}$ ou encore $u_{n+1} < cr^{n+1}$ où $c = u_{n_0} r^{-n_0}$ et $n \geq n_0$.
La série géométrique $\sum r^n$, $(n \geq 0)$ est convergente donc la série $\sum r^n$, $(n \geq n_0)$ est convergente (**Proposition 1.3.1 ii-**). Le théorème de comparaison montre que $\sum u_n$, $(n \geq n_0)$ est convergente, d'où $\sum u_n$ est convergente. $\square$

Corollaire 2.1.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Alors si*

* *$\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*
* *$\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.*
* *$\ell = 1$, on a aucune conclusion.*

Preuve

* Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$. On déduit qu'il existe $r \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$. La conclusion découle de la règle de d'Alembert.

* Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell>1$
  On en déduit qu'il existe $k\in]1,\ell[$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>k>1$.
  D'où
  $$\begin{aligned}\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}&>1,\\ \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}&>1,\\ &\vdots,\\ \frac{u_{n+1}}{u_n}&>1.\end{aligned}$$
  En faisant le produit membre à membre, on obtient $u_{n+1}>u_{n_0},\ \forall n\geq n_0$. Donc $(u_n)\nrightarrow 0$ alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

* Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$. Soit $\sum u_n$ où $u_n=\frac{1}{n}\ (n\geq 1)$ et $\sum v_n$ où $v_n=\dfrac{1}{n^2}\ (n\geq 1)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=1$.
  $\sum u_n$ est divergente alors que $\sum v_n$ est convergente.

$\square$

Remarque 2.1.1 *Si* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1,\ \forall n\geq n_0$, *alors* $\sum u_n$ *est divergente. La démonstration est semblable à celle du* ***Théorème*** *2.1.1 .*

Exercice : Étudier la série $\sum u_n$ où $\forall n,\ u_n=n^2x^n$ et $x\in\mathbb{K}$
Pour pouvoir appliquer la règle de d'Alembert, nous étudions la convergence absolue de $\sum u_n$.
On a $u_n=0,\ \forall n$, si $x=0$.

* Pour $x=0$, $\sum u_n$ est convergente.
* Pour $x\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|x|$.
  D'après le **Corollaire** 2.1.1, si $|x|<1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc $\sum u_n$ est convergente (**Théorème** 1.5.1).
  Si $|x|>1$, alors $(u_n)\nrightarrow 0$, donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
  Si $|x|=1$, $(u_n)\nrightarrow 0$, donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

2.1.2 Règle de Cauchy

Théorème 2.1.2 (Règle de Cauchy) *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs. S'il existe* $r\in]0,1[$ *et* $n_0\in\mathbb{N}$ *tels que* $\forall n\geq n_0,\ \sqrt[n]{u_n}<r$, *alors* $\sum u_n$ *est convergente.*

Preuve Supposons les hypothèses satisfaites. On a $u_n\leq r^n,\ \forall n\geq n_0$. Alors $\sum u_n$ est convergente (Il suffit de reprendre les arguments développés dans la démonstration du **Théorème** 2.1.1). $\square$

Corollaire 2.1.2 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$. *Alors si :*

* $\ell<1$, *la série* $\sum u_n$ *est convergente.*
* $\ell>1$, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*
* $\ell=1$, *on a aucune conclusion.*

Preuve

* Supposons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell < 1$. On en déduit qu'il existe $r \in]0;1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que $\sqrt[n]{u_n} < r$ pour tout $n \geq n_0$. La cnclusion découle du **Théorème** 2.1.2.
* Supposons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell > 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n > 1$, $(u_n) \nrightarrow 0$. $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
* Supposons $\ell = 1$. Imiter la démonstration faite dans le cas du **Corollaire** 2.1.1.

□

Exemple Étudier $\sum u_n$ où $\forall n,\ u_n = \dfrac{x^n}{n^n}$ $(n \geq 1)$.

- Pour $x = 0,\ u_n = 0$, $\sum u_n$ est convergente.
- Pour $x \neq 0$ et fixé, on a $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{|x|}{|n|}$. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$, donc $\sum u_n$ est absolument convergente ; par conséquent $\sum u_n$ est convergente.

Remarque 2.1.2 *a- On utilise la règle de Cauchy si le terme général de la série $\sum u_n$ comporte des puissances n-ièmes.*

b- Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $]0,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe aussi dans $]0,1[$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

c- La réciproque est fausse en général, i.e. ($\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe)$\nRightarrow$ ($\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe). C'est en ce sens que l'on dit que la règle de Cauchy est plus générale que celle de d'Alembert.

Exemple Soit la série $\sum u_n$ où $u_{2n} = a^n b^n$ et $u_{2n+1} = a^{n+1}b^n$, le premier terme $u_1 = a$, on suppose que $a > 0,\ b > 0$ et $ab < 1$. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe pas, alors que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab};\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = \sqrt{ab}.$$

2.2 Utilisation d'une intégrale

Proposition 2.2.1 *Soit a un réel positif, $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle et décroissante. Posons $\forall n \geq 2,\ u_n = f(n)$ et $v_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente.*

Preuve
Pour tout $x \in [n-1,n]$, on a $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$, d'où

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}x \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)\,\mathrm{d}x$$

i.e.

$$u_n \leq v_n \leq u_{n-1},\ \forall n \geq 2.$$

La conclusion découle du **Théorème de comparaison**. □

Corollaire 2.2.1 *Soit $a > 0$, $(a \in \mathbb{R})$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction positive ou nulle et décroissante. $\forall n \geq 2$, posons $u_n = f(n)$. Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.*

Preuve Soit $\forall n \geq 2,\ v_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ et

$$\begin{aligned} s_n &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ &= \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$\sum v_n$ est convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ existe et est finie, i.e. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.
D'après la **Proposition** 2.2.1, $\sum v_n$ est convergente si et seulement si $\sum u_n$ est convergente.
D'où $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie. □

Exemples

1. Étudier la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$ et $n \geq 1$.
   Soit

$$\begin{aligned} f : [2;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^\alpha} \end{aligned}$$

   $f > 0$ et décroissante. Posons $u_n = f(n)$.

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{Log} n & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{x^\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'après le **Corollaire** 2.2.1, $\sum \frac{1}{n^\alpha},\ n \geq 1$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Étudier $\sum \frac{1}{n(\mathrm{Log} n)^\alpha},\ (n \geq 2)$
   soit

$$\begin{aligned} f : [2,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x(\mathrm{Log} x)^\alpha} \end{aligned}$$

   $f > 0$ et décroissante.
   On a

$$\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{Log}(\mathrm{Log} n) - \mathrm{Log}(\mathrm{Log} 2) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{(\mathrm{Log} n)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\mathrm{Log} 2)^{\alpha-1}}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$ existe si et seulement si $\alpha > 1$. Donc $\sum \frac{1}{n(\mathrm{Log} n)^\alpha},\ (n \geq 2)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Définition 2.2.1 *On appelle **série de Reimann**, une série dont le terme général u_n est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, $(\alpha > 0,\ n \geq 1)$.*

2.3 Règle de Reimann : Comparaison à une série de Reimann

Théorème 2.3.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls et $\alpha > 0$.*

1. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n)$ existe dans $\mathbb{R}$ et est non nulle, alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Si $\alpha > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n) = 0$, alors $\sum u_n$ est convergente.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n) = +\infty$, alors $\sum u_n$ est divergente.*

Preuve

1. Soit $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $(n \geq 1)$, $\dfrac{u_n}{v_n} = n^\alpha u_n$.
   On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n)$ existe, est finie et non nulle. Alors d'après le **Corllaire 1.4.1**, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ou divergent simultanément. D'après l'exemple précédent, $\sum v_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. D'où $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n) = 0$ et $\alpha > 1$. Donc il existe n_0, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   On sait que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente car $\alpha > 1$. D'où $\sum u_n$, $(n \geq n_0)$ est convergente (**Théorème de comparaison**). Par suite $\sum u_n$ est convergente.
3. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n) = +\infty$. Alors il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n > \dfrac{1}{n}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, alors $\sum u_n$ est divergente (**Théorème de comparaison**).

□

Exemple : Étudier les séries $\sum \dfrac{\mathrm{Log} n}{n^2}$ $(n \geq 1)$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\mathrm{Log} n}$

— Soit $u_n = \dfrac{\mathrm{Log} n}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{\frac{3}{2}}u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Log} n}{\sqrt{n}} = 0$. D'après le **Théorème 2.3.1 2-**, $\sum u_n$ est convergente.

— Soit $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\mathrm{Log} n}$; $nv_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{Log} n}$ $(n \geq 2)$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(nv_n) = +\infty$ (croissance comparée des fonctions logarithme et puissance). D'après le **Théorème 2.3.1 3-**, $\sum v_n$ est divergente.

Remarque 2.3.1 *Ni la règle de d'Alembert, ni celle de Cauchy ne permettent de conclure. En effet*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{Log}(n+1)}{(n+1)^2}\frac{n^2}{\mathrm{Log} n} = 1.$$

2.4 Séries de type $\sum a_n b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$

2.4.1 Transformation d'Abel

Lemme 2.4.1 *Soit (a_n), (b_n) des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\forall n$, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Alors*

$$\forall p,q\ (q \geq p) \quad \sum_{n=p}^{q} a_n b_n = s_q b_q - s_{p-1}b_p + \sum_{n=p}^{q-1} s_n(b_n - b_{n+1}).$$

Preuve
$a_n = s_n - s_{n-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} s_n b_n - \sum_{n=p}^{q} s_{n-1} b_n \\ &= s_q b_q - s_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} s_n b_n - \sum_{n=p+1}^{q} s_{n-1} b_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{q} s_{n-1} b_n &= \sum_{n'=p}^{q-1} s_{n'} b_{n'+1} \text{ en posant } n-1 = n' \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} s_n b_{n+1}\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = s_q b_q - s_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} s_n b_{n+1} - \sum_{n=p}^{q-1} s_n b_{n+1}$$

□

Théorème 2.4.1 *Soit la série $\sum a_n b_n$ où $b_n \in \mathbb{R}_+$, $a_n \in \mathbb{K}$, $\forall n$ et telle que :*

i- la suite (b_n) soit décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

ii- la suite (s_n) des sommes partielles de (a_n) soit bornée.

Alors $\sum a_n b_n$ est convergente.

Preuve
Soit $\forall n$, $s'_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
$\sum a_n b_n$ est convergente si (s'_n) admet une limite finie, i.e. si (s'_n) est de Cauchy.
Montrons que (s'_n) est une suite de Cauchy.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq p$.

$$\begin{aligned}|s'_q - s'_p| &= |\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n| \\ &\leq |s_q b_q - s_p b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{q-1} s_n (b_n - b_{n+1}| \\ &\leq |s_q||b_q| + |s_p||b_{p+1}| + \sum_{n=p+1}^{q-1} |s_n||b_n - b_{n+1}|.\end{aligned}$$

Comme (s_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n,\ |s_n| \leq M$. Comme $b_n \geq 0$ et (b_n) est décroissante, $|b_n| = b_n$ et $|b_n - b_{n+1}| = b_n - b_{n+1},\ \forall n$. Donc

$$\begin{aligned}
|s'_q - s'_p| &\leq Mb_q + Mb_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{q-1} M(b_n - b_{n+1}) \\
&= M(b_q - b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1})) \\
&= M(b_q + b_{p+1} + b_{p+1} - b_q) \\
&= 2Mb_{p+1}.
\end{aligned}$$

Comme $(b_n) \to 0$, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p > n_0,\ b_p < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
D'où $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p > n_0,\ \forall q > n_0,\ (q \geq p),\ |s'_q - s'_p| < \varepsilon$. D'où (s'_n) est une suite de Cauchy. □

2.4.2 Application du théotème 2.4.1

Définition 2.4.1 *On appelle **série alternée**, une série dont le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n b_n$ où $b_n \in \mathbb{R}_+$, (b_n) décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$*

Proposition 2.4.1 *i- La série alternée $\sum(-1)^n b_n$ est convergente.*

ii- La suite (s'_n) des sommes partielles de $\sum(-1)^n b_n$ et la somme s de $\sum(-1)^n b_n$ vérifient les relations suivantes :

$$s'_n \geq s \geq s'_{n-1} \ \text{ et } \ |s - s'_n| \geq b_{n+1},\ \forall.$$

Preuve

i- Soit $\sum(-1)^n b_n$. Soit $a - n = (-1)^n$, $\forall n$, et $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. On a $|s_n| < 2$, $\forall n$. (s_n) est bornée, i-) découle du **Théorème** 2.4.1.

ii- Soit $s'_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
On a $s'_{2p+2} - s'_{2p} = -b_{2p+1} + b_{2p+2} \leq 0$ donc (s'_{2p}) est décroissante.
On a $s'_{2p+1} - s'_{2p-1} = b_{2p} - b_{2p+1} \geq 0$. Donc (s'_{2p+1}) est croissante. De plus, $s'_{2p} - s'_{2p-1} = b_{2p} \geq 0$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} (s'_{2p} - s'_{2p-1}) = 0$.
Donc (s'_{2p}) et (s'_{2p+1}) sont des suites adjacentes. D'où elles possèdent une limite commune s qui vérifie

$$s'_{2p+1} \leq s \leq s'_{2p},\ \forall p \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

La relation 2.1 s'écrit aussi :

$$s'_{n+1} \leq s \leq s'_n \text{ si } n \text{ est pair}, \ \ s'_n \leq s \leq s'_{n-1} \text{ si } \ n \text{ est impair}.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ s'_n \leq s \leq s'_{n-1}$.
$(-1)^{n+1} b_{n+1} = s'_{n+1} - s'_n \leq s - s'_n \leq 0$ ou $s'_n - s'_{n-1} \leq s - s'_{n-1} \leq 0$.
Dans tous les cas $|r_n| = |s - s'_n| \leq |s'_{n+1} - s'_n| = b_{n+1}$.

□

Proposition 2.4.2 *Soit la série $\sum u_n$ où $\forall n,\ u_n = e^{in\theta} b_n$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et (b_n) une suite décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.*
Si $\theta \notin \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ alors $\sum u_n$ est convergente (i.e. $\sum \cos n\theta\, b_n$ et $\sum \sin n\theta\, b_n$ sont convergentes).

Preuve
Posons $a_n = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\
&= 1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta} \\
&= \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\
&= \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta} \\
&= \frac{2\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2} - 2i\sin(n+1)\frac{\theta}{2}\cos(n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2} - i\cos(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}}\right] \\
&= \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \text{ (en multipliant par } i \text{ le numérateur et le dénominateur de la fraction entre les crochets)} \\
&= \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{in\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

$\forall n,\ |s_n| \leq \dfrac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. Si $\theta \notin \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ alors (s_n) est bornée. □

Remarque 2.4.1 *Pour la série* $\sum(\sin n\theta\ b_n)$, *la condition* $\theta \notin \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *n'est pas indispensable car si* $\theta = 2k\pi,\ \sin n\theta = 0$, *donc* $\sum(\sin n\theta\ b_n)$ *est convergente.*

Exemple
$\forall \alpha > 0,\ \sum \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ est convergente.

2.5 Utilisation d'un développement limité

Nous allons illustrer ce cas par des exemples

Exemple 1 La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ est-elle convergente ?

Solution On sait que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + x^3 o(1) \quad (x \to 0)$.
Si n est assez grand, on a :

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3}o(1) \quad (\text{où } \lim_{x\to+\infty} o(1) = 0)$$
$$\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}o(1)$$

D'où

$$u_n = \frac{1}{6n^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

$\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}o(1)$ est positif $\forall n$ assez grand et $(n^{\frac{5}{2}}u_n) \to \frac{1}{6} \neq 0$.
Donc $\sum u_n$ est convergente (**Règle de Riemann**)
Exemple 2 Pour quelle valeur du réel a la série de terme général $u_n = (n^2+1)^a - (n^2-1)^a$ est-elle convergente ?
Solution

$$u_n = n^{2a}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^a - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)a\right]$$

On sait que $(1+x)^a = 1 + ax + xo(1) \quad (x \to 0)$
Donc pour n assez grand,

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^a = 1 + \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}o(1)$$

Alors

$$u_n = n^{2a}\left(1 + \frac{a}{n^2} + \frac{o(1)}{n^2} - 1 + \frac{a}{n^2} + \frac{o(1)}{n^2}\right) \quad (n \to +\infty)$$

$$\begin{aligned} u_n &= n^{2a}\left(\frac{2a}{n^2} + \frac{o(1)}{n^2}\right) \\ &= \frac{2a}{n^{2(1-a)}} + \frac{o(1)}{n^{2(1-a)}} \quad (n \to +\infty) \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{2a}{n^{2(1-a)}}$ et $\sum \frac{o(1)}{n^{2(1-a)}}$ sont convergentes si et seulement si $1-a > \frac{1}{2}$, i.e. $a < \frac{1}{2}$.
Donc $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $a < \frac{1}{2}$.
Exemple 3 La série de terme générale $u_n = \text{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est-elle convergente ?
Solution On sait que $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3o(1) \;\; (x \to 0)$.
Donc pour n assez grand, on a :

$$\text{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{3}{2}}}o(1).$$

Posons $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\quad t_n = \frac{1}{2n}$, $\quad b_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{3}{2}}}$, $\quad c_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{3}{2}}}o(1)$.
$\sum v_n$ est convergente car c'est une série alternée.
$\sum t_n$ est divergente, $\sum b_n$ est convergente car c'est une série alternée, $\sum c_n$ est absolument convergente, donc convergente. On a $u_n = (v_n + b_n + c_n) - t_n$.
$\sum u_n$ est alors la somme d'une série convergente à savoir la série $\sum(v_n + b_n + c_n)$ et d'une série divergente à savoir la série $\sum t_n$.
Donc $\sum u_n$ est une série divergente.

2.6 Complément

Réarrangement des termes d'une série convergente

Une des opérations importantes dans l'étude d'une série convergente est le réarrangement des termes de la série. Elle consiste à définir à partir d'une série convergente $\sum u_n$ des séries $\sum u_{\sigma(n)}$ où σ décrit l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$. Il se pose alors deux questions :

1. Les séries $\sum u_{\sigma(n)}$ sont-elles toutes convergentes ?

2. Si oui, a-t-on pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$?

La réponse est non en général aux deux questions.
Voici un contre exemple pour la question 2.
Soit $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1)$.
$\sum u_n$ est convergente car c'est une série alternée.
Posons $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = s$.
$\sum u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \cdots$
Réarrangeons les termes en écrivant :

$$\begin{aligned}
1 &- \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) \\
&= \frac{s}{2}
\end{aligned}$$

D'une manière générale, on sait que :

Théorème 2.6.1 *Étant donnée la série convergente $\sum u_n$, où $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1) \quad \forall \ell \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$*

Le théorème ci-dessus que nous adoptons, donne le cadre où les réponses aux questions 1. et 2. sont positives.

Définition 2.6.1 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. On dit que la suite (u_n) est sommable si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la suite $(s_{\sigma(n)})$ des sommes partielles $s_{\sigma(n)} = u_{\sigma(1)} + u_{\sigma(2)} + \cdots + u_{\sigma(n)}$ est convergente et si de plus $\forall \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Théorème 2.6.2 *Soit $(u_n) \subset \mathbb{K}$. Alors (u_n) est sommable si et seulement si $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Chapitre 3

Intégrales généralisées

3.1 Objectif et Définition

3.1.1 Objectif

On a défini en première année l'intégrale d'une fonction sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Dans ce chapitre, on étudie les conditions dans lesquelles on peut définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque f n'est définie que sur $[a, b[$ ou $]a, b]$
Si f est définie sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty,\ b > a$) on supposera que $\forall x \in [a, b[$, f est intégrable sur $[a, x]$.
Si f est définie sur $]a, b]$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty,\ a < b$), on supposera que $\forall x \in]a, b]$ f est intégrable sur $[x, b]$.
Notation Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie $[a, b[$ et intégrable sur $[a, x]$ $\forall x \in [a, b[$.
Soit

$$\begin{aligned} F : [a, b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si F admet une <u>limite finie</u> quand $x \longmapsto b$, on notera cette limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $g :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et intégrable sur $[x, b]$ $\forall x \in]a, b]$.
Soit

$$\begin{aligned} G :]a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto G(x) = \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Si G admet une <u>limite finie</u> lorsque $x \longmapsto a$ alors on notera cette limite $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
En résumé, si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ <u>existe et est finie</u> alors cette limite sera notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ <u>existe et est finie</u> alors cette limite sera notée $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

3.1.2 Définition

Définition 3.1.1 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. Si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre ou l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Dans le cas contraire on dira qu'elle est diver-*

gente.
On emploie les mêmes expressions si f est définie sur $]a,b]$ et si $\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie $(a \in \mathbb{R}$ *ou* $a = -\infty)$.
Supposons maintenant que f soit définie sur $]a,b[$. Si $\forall c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent simultanément, on dira que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Grâce aux propriétés des limites et de l'intégrale, on a :

Proposition 3.1.1 *Soient f et g des fonctions définies sur le même intervalle $]a,b]$ ou $[a,b[$. Supposons que $\forall x \in [a,b[$, f et g sont intégrables sur $[a,x]$. Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, les intégrales généralisées $\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. De plus*

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2 Étude de la convergence de l'intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Les propriétés de l'intégrale permettent de limiter l'étude aux intervalles de type $[a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.2.1 *Soit f une fonction à valeurs positives définie sur $[a,+\infty[$ et intégrable sur $[a,x]$ $\forall x \in]a,+\infty[$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > a$, $F(n) = \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall x \in]a,+\infty[$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.*
Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la suite $(F(n))$ est convergente.
Si c'est le cas, alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$.

Preuve Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente et notons ℓ sa limite. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A$ $(A > 0)$ tel que $\forall x > A, |F(x) - \ell| < \varepsilon$.
Montrons que $\lim_{n\to+\infty} F(n) = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $n_0 = \mathrm{E}(A) + 1$ $\forall n > n_0$, on a $|F(n) - \ell| < \varepsilon$ car $n \in \mathbb{R}$ et $n > A$.
Inversement supposons que $\lim_{n\to+\infty} F(n)$ existe et soit finie. Désignons par b cette limite. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ $\forall n > n_0$ $|F(n) - b| < \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x > n_0$. Montrons que $|F(x) - b| < \varepsilon$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $m > x$.
Comme l'intégrale d'une fonction positive est croissante, alors $F(n_0) \leq F(x) \leq F(m)$.
Donc $-\varepsilon < F(n_0) - b \leq F(x) - b \leq F(m) - b < \varepsilon$. □

Proposition 3.2.1 *Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur $[a,x]$ $\forall x \in [a,+\infty[$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > a$ $F(n) = \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la suite $(F(n))$ est majorée.*

Preuve La suite $(F(n))$ est croissante car $f \geq 0$. Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. On applique le **Lemme 3.2.1** pour conclure. □

N.B : Dans le **Lemme 3.2.1** et la **Proposition 3.2.1**, si f est définie sur $]-\infty, a]$ alors on posera $F(n) = \int_{-n}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{N})$. Les conclusions restent inchangées.

3.2.1 Théorème de comparaison

Théorème 3.2.1 (Théorème de comparaison) *Soient f et g des fonctions à valeurs positives définies sur $[a, +\infty[$ et intégrables sur $[a, x] \quad \forall x \in]a, +\infty[$. Si $f \leq g$ sur $[b, +\infty[$ où $b \in \mathbb{R},\ b \geq a$, alors :*

1. *($\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente) $\Longrightarrow$ ($\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente).*
2. *($\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente)$\Longrightarrow$ ($\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente).*

Preuve 2- est la contraposée de 1-. Il suffit donc de prouver 1-. On a

$$\begin{aligned} F(n) = \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^n f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^n g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c + G(n) \end{aligned}$$

$c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une constante.
Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors la suite $(G(n))$ est majorée. On en déduit que la suite $(F(n))$ est majorée. La conclusion que l'on voulait découle de la **Propsition 3.2.1**. □

3.2.2 Fonctions tests

1. **Intégrales de Riemann**
   Pour quelle valeur de α $(\alpha > 0)$ l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
   On a : $F(n) = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{Log} n & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right] & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$.
   Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ d'après le **Lemme 3.2.1**
2. **Intégrales de Bertrand**
   Pour quelles valeurs de α, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\mathrm{Log} x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
   $F(n) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\mathrm{Log} x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{Log}(\mathrm{Log} n) - \mathrm{Log}(\mathrm{Log} 2) & \text{si } \alpha = 1. \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(\mathrm{Log} x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\mathrm{Log} 2)^{\alpha-1}}\right] & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$ existe et est finie si et seulement si $\alpha > 1$.
   Donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\mathrm{Log} x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, **Lemme 3.2.1**

3.2.3 Utilisation du développement limité

Théorème 3.2.2 *Soit f, g des fonctions définies sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives ou nulles et intégrables sur $[a, x]$ $\forall x \in]a, +\infty[$. Si $f \sim g$ $(x \to +\infty)$ alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou divergent simultanément.*

Preuve Supposons $g \sim f$ $(x \to +\infty)$. Alors il existe une fonction h définie pour x assez grand à valeurs positives telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ et $f = gh$.
soit $r \in]0, 1[$ fixé, il existe alors $A > 0$ tel que $1 - r \leq h(x) \leq 1 + r$, $\forall x \in [A, +\infty[$. D'où

$$(1-r)g(x) \leq f(x) \leq (1+r)g(x), \ \forall x \in [A, +\infty[.$$

On a la conclusion voulue en se fondant sur le **Théorème de comparaison**. □

Exemple Étudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}\,\mathrm{d}x$.

Solution $\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}o(1)$ $(x \to +\infty)$ où $\lim\limits_{x \to +\infty} o(1) = 0$.
$\operatorname{Log}\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}o(1)\right) \sim -\frac{1}{2x^2}$ $(x \to +\infty)$.
Donc $\displaystyle\frac{\operatorname{Log}\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x} \sim -\frac{1}{2x^2\operatorname{Log} x}$ $(x \to +\infty)$
$\displaystyle\frac{1}{2x^2\operatorname{Log} x} \leq \frac{1}{2x^2}$, $\forall x \in [3, +\infty[$. Comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^2\operatorname{Log} x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, **Théorème de comparaison**.

On en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} -\frac{\operatorname{Log}\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}\,\mathrm{d}x$ est convergente, **Théorème 3.2.2**. Alors $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Corollaire 3.2.1 *Soient f et g des fonctions définies sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives et intégrables sur $[a, x]$, $\forall x \in]a, +\infty[$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ et si $\ell \neq 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ convergent ou divergent simultanément.*

Preuve Les conditions $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ et $\ell \neq 0$ impliquent $f \sim \ell g$. □

3.2.4 Convergence absolue

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.
Posons $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \sup(-f, 0)$ avec $\forall x \in [a, +\infty[$, $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$, $f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$. On a $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$.

Définition 3.2.1 *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [a, +\infty[$, f soit intégrable sur $[a, x]$. On dit que l'intégrale généralisée ou l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.*

Théorème 3.2.3 *Une intégrale généralisée absolument convergente est convergente.*

Preuve Supposons $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ convergente. Alors les relations ($f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$) impliquent ($\int_a^{+\infty} f^-(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty} f^+(x)\,\mathrm{d}x$ convergent), **Théorème de comparaison**
Comme $f = f^+ - f^-$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, **Proposition** 3.1.1. □

Exemple $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Remarque 3.2.1 *L'implication* ($\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *convergente*) $\Longrightarrow$ ($\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *convergente*) *n'est pas toujours vraie.*

Contre-exemple Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left[\int_1^x \frac{\mathrm{d}(-\cos t)}{t}\right] \\
&= \cos 1 - \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Montrons que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ n'est pas convergente.
On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t &\geq \lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin[u+(k-1)\pi]}{k\pi}\,\mathrm{d}u \quad \text{où} \quad u = t-(k-1)\pi \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \times 2\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= +\infty \qquad \text{car } \sum \frac{1}{k} \text{ est divergente.}
\end{aligned}$$

3.3 Convergence de l'intégrale généralisée dans le cas d'un intervalle borné $]a,b[\;\;(a,b \in \mathbb{R})$

Grâce aux propriétés des intégrales et des limites, on étudiera seulement le cas $]a,b]$.

Lemme 3.3.1 *Soit* $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *et intégrable sur* $[x,b]$ $\forall x \in]a,b]$. *Posons* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \displaystyle\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\forall x \in]a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente si et seulement si la suite* $(F(n))$ *est convergente. De plus* $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \lim\limits_{x\to a} F(x)$.

Preuve Supposons $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.
Soit $b = \lim\limits_{x\to a} F(x)$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = b$.
On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ \forall x \in]a,b],\ |x-a| < \eta \Rightarrow |F(x) - b| < \varepsilon$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \eta$. On a $\forall n > n_0$ $|a + \dfrac{1}{n} - a| < \eta$ donc $x = a + \dfrac{1}{n}$ vérifie $|F(x) - b| < \varepsilon$ i.e. $|F(n) - b| < \varepsilon$.
Inversement supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \ell$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0\ \forall n > n_0$ $|F(n) - \ell| < \varepsilon$. Posons $\eta = \dfrac{1}{n_0}$. Soit $x \in]a,b]$ tel que $x - a < \dfrac{1}{n_0}$. Soit $m > n_0$ et tel que $a + \dfrac{1}{m} < x$. On a $a + \dfrac{1}{m} < x < a + \dfrac{1}{n_0}$. Ceci implique $F(n_0) \leq F(x) \leq F(m)$ car F est une fonction croissante. Donc $-\varepsilon \leq F(n_0) - \ell \leq F(x) - \ell \leq F(m) - \ell \leq \varepsilon$. Donc $\forall x \in]a,b]$ et $x - a \leq \eta = \dfrac{1}{n_0}$ on a $|F(x) - \ell| \leq \varepsilon$ □

Théorème 3.3.1 (de comparaison) *Soit* f, g *des fonctions définies sur* $]a,b]$ *à valeurs positives ou nulles et intégrables sur* $[x,b]$ $\forall x \in]a,b]$. *On suppose* $f \leq g$ *sur* $]a,c]$ *où* $c \in]a,b]$. *Alors*

i- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente si* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

ii- $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est divergente si* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est divergente.*

Preuve ii- est la contraposée de i-. Il suffit donc de prouver i-.
Supposons $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergente. On a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
F(n) &= \int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a+\frac{1}{n}}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a+\frac{1}{n}}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + K \\
&\leq \int_{a+\frac{1}{n}}^{c} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= G(n) + K
\end{aligned}$$

La suite $(G(n))$ est convergente, elle est donc majorée. Par suite $(F(n))$ aussi, comme $(F(n))$ est croissante, elle est convergente. □

Fonction test
$\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 3.3.2 *Soient f, g des fonctions définies sur $]a, b]$ à valeurs positives et intégrables sur $[x, b]$ $\forall x \in]a, b]$. Si $f \sim g \quad (x \to a)$, alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou divergent simultanément*

Preuve Elle est analogue à celle du **Thérème 3.2.2**. □

Exemple

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$.

   On a $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$
   $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (t \to 1)$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$.
   $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ est convergente donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

2. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{|1-t^2|}{t}\frac{1}{\mathrm{Log}t}}\,\mathrm{d}t$

   $t \longmapsto f(t) = \sqrt{\dfrac{|1-t^2|}{t}\dfrac{1}{\mathrm{Log}t}}$ n'est pas définie en 0 et 1.
   $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$

   — Étudions la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$. Si $t \longrightarrow 0$, on a $\sqrt{\dfrac{|1-t|}{t}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc sur $]0, \frac{1}{2}]$, $(-f(t)) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{-1}{\mathrm{Log}t}$
   $\dfrac{-1}{\sqrt{t}\ln t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et comme $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{t}\mathrm{Log}t}\,\mathrm{d}t$ est convergente (**Théorème de comparaison**) d'où $\displaystyle\int_0^{-} \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

   — Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   $\ln t \sim t-1 \quad (t \longrightarrow 1)$

   $$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{\sqrt{2}\sqrt{|1-t|}}{\sqrt{t}}\frac{1}{t-1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{|1-t|}}{\sqrt{t}}\frac{1}{-(1-t)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\frac{1}{-(1-t)} \quad (t \longrightarrow 1) \\ &\sim -\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} \\ &\sim -\frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad (t \longrightarrow 1) \end{aligned}$$

   Comme $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, d'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

— Étudions la convergence de $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme précédemment, on montre que $f \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, on conclut que $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Les trois intégrales généralisées étant convergentes, $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

NB : Si f est définie sur $[a,b[$ dans le **Lemme 3.3.1** et le **Théorème 3.3.1** on posera $F(n) = \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{N}$
Les conclusions restent inchangées.

Définition 3.3.1 *Soit f une fontion définie sur $]-\infty,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, f est intégrable sur $[a,b]$. On dira que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si $\forall a \in \mathbb{R}$, les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Alors on pose*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 3.3.2 *Soit f une fonction définie sur $]a,b[$, $(a,b \in \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall c,c' \in]a,b[$, $(c < c')$ f est intégrable sur $[c,c']$. On dira que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si $\forall c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.*

3.4 Fausse intégrale généralisée

Soit $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie alors f peut être prolongée par continuité en posant :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,b] \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

On montre que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$, $\tilde{f}$ étant continue, $\tilde{f}$ est intégrable sur $[a,b]$. Par conséquent l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exemple : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\mathrm{Log}x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \mathrm{d}x$. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\mathrm{Log}x} - \dfrac{1}{x-1}\right] = 1$

La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}x} - \dfrac{1}{x-1}$ peut être prolongée en 0 en posant

$$\tilde{f}(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0,\frac{1}{2}],\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\mathrm{Log}x} - \frac{1}{x-1}.$$

$\tilde{f}$ est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$ donc intégrable sur $[0,\frac{1}{2}]$. Alors $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\mathrm{Log}x} - \dfrac{1}{x-1}\right) \mathrm{d}x$ est convergente.

Nous terminons le chapitre par un des critères très détestés par les étudiants.

Proposition 3.4.1 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $[x, b]$ $\forall x \in]a, b[$. Pour que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente, il faut et il suffit que toute suite (x_n) de points de $[a, b[$ convergeant vers b, la suite de terme général $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ ait une limite et cette limite est alors égale à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Preuve C'est un cas particulier du résultat suivant (cf cours première année)
$\lim\limits_{x\to a} F(x)$ existe si et seulement si por toute suite (x_n) de points appartenant au domaine de définition de F et convergeant vers a, $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n)$ existe. Alors $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n)$. □

Théorème 3.4.1 (Critère de Cauchy) *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $[a, x]$ $\forall x \in [a, b[$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_x$ tel que les inégalités $b > v > u \geq r_x$ entraînent*

$$\Big| \int_u^v f(t) dt \Big| \leq \varepsilon.$$

Preuve Montrons que la condition est nécessaire.

Supposons que l'intégrale généralisée soit convergente et posons $A = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$; par définition $A = \lim\limits_{x\to b} F(x)$ donc $\forall\varepsilon > 0$ $\exists r_\varepsilon$ tel que les inégalités $b > x \geq r_\varepsilon$ entraînent $|F(x) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si u, v vérifient $b > v > u \geq r_\varepsilon$ on a donc $|F(v) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|F(u) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$\Big| \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t \Big| = |F(v) - F(u)| < \varepsilon.$$

Montrons que la condition est suffisante.

Supposons cette condition vérifiée. Soit (x_n) une suite quelconque de points de $[a, b[$ convergeant vers b. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que l'inégalité $n > N_\varepsilon$ entraîne $x_n > r_\varepsilon$. Les inégalités $n > N_\varepsilon$ et $p > N_\varepsilon$ entraînent donc :

$$|F(x_n) - F(x_p)| = \Big| \int_{x_n}^{x_p} f(t)\,\mathrm{d}t \Big| < \varepsilon.$$

La suite $(F(x_n))$ est donc de Cauchy, par suite convergente. La conclusion voulue découle de la **Proposition** 3.4.1. □

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

4.1 Objectifs

Dans ce chapitre, on définit les différentes sortes de convergences d'une suite de fonctions. On étudie particulièrement les conditions dans lesquelles la limite (respectivement la somme) d'une suite (respectivement une série) de fonctions continues, dérivables ou intégrables, est continue, dérivable, ou intégrable. Ces conditions sont celles d'interversions de limites

4.2 Définition

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et D une partie non vide de $\mathbb{K}$. Soient $f_0, f_1, \cdots, f_n$, une suite de fonctions définies dans à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$. On obtient une nouvelle suite (s_n) définie sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in D$, $s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$. Le couple (f_n, s_n) est appelé série de fonctions de terme général f_n. Elle est désignée par $\sum f_n$. La suite (s_n) est appelée suite des sommes partielles de la série$\sum f_n$.

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $A \subset D$ et une fonction $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions (f_n) **converge simplement** (ou ponctuellement) dans A vers g si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $g(x)$. En d'autres termes, $\forall x \in A \;\; \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(x, \varepsilon) \;\; \forall n \geq n_0(x, \varepsilon) \;\; |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Ce type de convergence est appelée **convergence simple**
Exemples

1. Soit

$$\begin{aligned} \forall n, f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{n}{nx+1}. \end{aligned}$$

Étude de la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n), \quad n \in \mathbb{R}$
Pour $x = 0$, $f_n(0) = n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = +\infty$.
Soit $x \in]0,1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$.
En conclusion la suite de fonctions (f_n) converge simplement dans $]0,1]$ vers la fonction

$$\begin{aligned} g :]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

2. Soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx}{2 + nx}$$

Étude de la convergence simple de (f_n)
Pour $x = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
Pour $x \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$.
Donc (f_n) converge simplement dans $[0, +\infty[$ vers la fonction

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Remarque 4.2.1 1. *g n'est pas continue dans $[0, +\infty[$ bien que $\forall n$ f_n le soit.*
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$ *mais* $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$ *(Exemple 2).*

On remarquera que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas toujours continue et que l'on ne doit pas systématiquement intervertir les $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et $\lim\limits_{x \to 0}$ dans $\lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$.
Soit (f_n) une suite de fonctions définies dans D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $A \subset D$. On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement vers s dans A si la suite (s_n) des sommes partielles de la série converge simplement vers s dans A. Dans le cas contraire on dit que la série $\sum f - n$ est divergente. On pose $\forall t \in A \ \ s(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ si $\sum f_n$ converge simplement vers s dans A.
Exemple Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = x^n.$$

Solution

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(s_n) converge si et seulement si $|x| < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Donc $\sum f_n$ converge simplement dans $]-1, 1[$ vers la fonction g où

$$g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{1 - x}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.
$\sum x^n$ est divergente sur $\mathbb{R} \backslash]-1, 1[$.

Pour pallier aux insuffisances de la convergence simple (voir **Remarque 4.2.1**), on va introduire d'autres types de convergence.

Définition 4.2.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies dans D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $A \subset D$ et une fonction $g : A \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que (f_n) converge uniformément sur A vers g si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - g(x)| = 0$.*

En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon)\ \ \forall n \geq n_0(\varepsilon),\ \forall x \in A, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers s sur A si la somme des sommes partielles de la série $\sum f_n$ converge vers uniformément vers s sur A.

Remarque 4.2.2
- *i- La limite simple et la limite uniforme coïncident, c'est-à-dire si (f_n) converge simplement vers f dans A et si (f_n) converge uniformément sur A vers g alors $f = g$.*
- *ii- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in A} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = 0$.*
- *iii- La convergence uniforme implique la convergence simple. On dit que la convergence uniforme est plus forte que la convergence simple.*

Définition 4.2.2 *Soit $D \subset \mathbb{K}$, $A \subset D$ et (f_n) une suite de fonctions définies sur A. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A s'il existe une série $\sum u_n$ à termes positifs ou nuls convergente telle que $\forall n$ et $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq u_n$.*

Exemple

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1} \end{aligned}$$

Pour tout n, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2}$.

$\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ est une série convergente. Donc $\sum f_n$ est normalement convergente.

Proposition 4.2.1 *Toute série normalement convergente est uniformément convergente.*

Preuve

Supposons la série $\sum f_n$ normalement convergente sur A. Alors $\forall x \in A$, x fixé, $\sum |f_n|$ est convergente, (**Théorème 1.4.1**). Alors elle converge simplement dans A vers la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$.

Soit (s_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$. On a

$$\sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| = \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right)$$

. □

4.3 Étude de la convergence uniforme

4.3.1 Critère de Cauchy de la convergence uniforme

Théorème 4.3.1 *Soient $D \subset \mathbb{K}, A \subset D$ et (f_n) une suite de fonctions définies dans D à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors (f_n) converge uniformément sur A vers la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0\ \forall p, q \geq n_0$, $\forall x \in A$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$*

Preuve
Supposons que (f_n) converge uniformément sur A. Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\ \forall m \geq n_0\ \forall x \in A,\ |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall x \in A,\ \forall p, q \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|f_p(x) - f_q(x)| &= |f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)| \\ &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Montrons que la condition est suffisante

Supposons que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p, q \geq n_0,\ \forall x \in A,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. Soit $x \in A$, fixé ; la suite (f_n) est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$, elle est donc convergente. Posons $\forall x \in A,\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. On définit ainsi une application $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Montrons que f est la limite uniforme de (f_n) sur A. On a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) + f(x)|$.
Fixons $p \geq n_0$ et faisons tendre q vers $+\infty$. $\forall x \in A,\ |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p, q \geq n_0\ \forall x \in A,\ |f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$. □

4.3.2 Théorème fondamental d'interversion des limites

Théorème 4.3.2 *Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque du plan complexe. Soit x un point de D ou limite d'une suite d'éléments de D. Soit (f_n) une suite de fonctions définie dans D à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *(f_n) converge uniformément sur D vers f.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}\ \lim_{t \to x} f_n(t)$ existe dans $\mathbb{K}$.*

Soit ℓ_n cette limite.
Alors la suite (ℓ_n) est convergente (i.e. $\lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to x} f_n(t)$ existe) et

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to x} f_n(t) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to +\infty} f_n(t).$$

Preuve 1. $\Longrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall p, q \geq n_0\ \ \forall t \in D,\ |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)$.
En passant à la limite $t \to x$, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\ \ \forall p, q \geq n_0\ \ |\ell_p - \ell_q| < \varepsilon$
Donc (ℓ_n) est suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$; elle est donc convergente. Soit ℓ sa limite. Il reste à prouver que $\lim_{t \to x} f(t) = \ell$ i.e. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall t \in D,\ |x - t| < \eta \Rightarrow |f(t) - \ell| \leq \varepsilon$.
On a

$$\begin{aligned}|f(t) - \ell| =& |f(t) - f_{n_0}(t) + f_{n_0}(t) - \ell_{n_0} + \ell_{n_0} - \ell| \\ \leq& |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - \ell_{n_0}| + |\ell_{n_0} - \ell|\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; choisissons n_0 tels que $|\ell_{n_0} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\forall t \in D$, $|f_{n_0}(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
D'après 2. il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in D$, $|x - t| < \eta$ implique $|f_{n_0}(t) - \ell_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \eta > 0\ \ \forall t \in D,\ \ |x - t| < \eta$ implique $|f(t) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. □

4.4 Applications

Théorème 4.4.1 *Soit D, un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque du plan complexe. Soit x un point de D ou limite d'une suite de points de D. Soit (f_n) une suite de fonctions définies à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui vèrifie les conditions suivantes :*

i- $\sum f_n$ converge uniformément sur D vers la fonction g. ($g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$).

ii- $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{t \to x} f_n(t)$ existe. Soit ℓ_n cette limite.

Alors la série $\sum_n \ell_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \to x} f_n(t) \right) = \lim_{t \to x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

Preuve

Soit (s_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$.
i- implique (s_n) converge uniformément vers g sur D.
ii- implique $\forall n$, $\lim_{t \to x} s_n(t)$ existe. Soit b_n cette limite. On a $b_n = \ell_0 + \ell_1 + \cdots + \ell_n$. (b_n) est convergente.
Dire que (b_n) est convergente signifie que la série $\sum \ell_n$ est convergente. La suite (s_n) vérifie les conditions du **Théorème 4.3.2**
Donc

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to +\infty} s_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to x} s_n(t)$$

i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \to x} f_n(t) \right) = \lim_{t \to x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right).$$

□

Théorème 4.4.2 *Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou un disque du plan complexe. Soit x_0 un point de D ou limite d'une suite d'éléments de D. Soit (f_n) une suite de fonctions définies dans D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

1. *Supposons que $\forall n$, f_n soit continue en x_0. Alors :*
   i- Si (f_n) converge uniformément sur D vers f alors f est continue en x_0
   ii- Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D alors sa somme est continue en x_0.
2. *Supposons que $\forall n$, f_n soit continue sur D. Alors :*
   i- Si (f_n) converge uniformément sur D vers f alors f est continue sur D.
   ii- Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur D alors la somme $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur D.

Preuve

La continuité étant une propriété locale, il suffit de prouver l'assertion i- de 1-. L'assertion ii- est une conséquence de i-.
Montrons que f est continue en x_0 i.e. $\lim_{t \to x_0} f_n(t) = f(x_0)$.
Les hyppthèses du **Théorème 4.3.2** sont vérifiées.

1. $\forall n$, $\lim_{t \to x_0} f_n(t) = f_n(x_0)$ (existe car f_n est continue en x_0).
2. (f_n) converge uniformément vers f sur D.

Donc $\lim_{t\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to x_0} f_n(t)$ ou encore $\lim_{t\to x_0} f(t) = f(x_0)$. □

Exemple 1 : Soit $\forall n$,

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = x + \frac{x}{1+x} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

Étudier la convergence de (f_n).
Solution On a

$$f_n(x) = \begin{cases} (1+x)\left[1 - \dfrac{1}{(1+x)^{n+1}}\right] & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Convergence simple
$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1+x$ si $x \neq 0$
(f_n) converge simplement dans vers la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1+x & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Convergence uniforme
g n'est pas continue dans $\mathbb{R}_+$, d'après l'assertion 2-i-, (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.
Vérifions ceci :
Si (f_n) convergeait uniformément vers g, on aurait $\lim_{n\to+\infty} \sup |f_n(x) - g(x)| = 0$.
On a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - g(x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\frac{1}{(1+x)^n}\right| \\ &\geq \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - g(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}$$

Alors $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - g(x)|$ ne tend pas uniformément vers 0 quand $n \to +\infty$
Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers g sur $\mathbb{R}_+$. Par contre (f_n) converge uniformément vers g sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$ car $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{(1+a)^n}$.
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - g(x)| \right) = 0.$$

Exemple 2 : Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) où $\forall n$

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{x}{e^{nx}} \end{aligned}$$

Convergence simple
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ (f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle g dans $\mathbb{R}_+$
Convergence uniforme

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left(\frac{x}{e^{nx}} \right) \right)$$

Étudions $f_n(x) = \dfrac{x}{e^{nx}}$

$$f_n'(x) = \frac{1-nx}{e^{nx}} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - g(x)| = \frac{1}{ne};$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - g(x)| \right) = 0.$$

Donc (f_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 4.4.3 *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}, \ (f_n)$ *une suite de fonctions définies et dérivables sur* $[a,b]$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que la suite* $(f_n(x_0))$ *soit convergente pour un* $x_0 \in [a,b]$ *et telle que* (f_n') *soit uniformément convergente sur* $[a,b]$. *Alors*

1. (f_n) *converge uniformément vers une fonction* f *sur* $[a,b]$.
2. f *est dérivable et* $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$, choisissons N tel que $\forall n, m > N$, on ait $|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\forall x \in [a,b], \quad |f_m'(x) - f_n'(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Appliquons à la fonction $f_m - f_n$, le théorème des accroissements finis sur $[x, x']$ où $x, x' \in [a,b]$. On a

$$|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x') - f_n(x'))| \leq |x - x'| \sup_{t\in[a,b]} |f_m'(t) - f_n'(t)| \qquad (*)$$

En prenant $x' = x_0$ et en tenant compte de l'inégalité $|x - x'| < (b-a)$, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \quad \forall n, m > N, \forall x \in [a,b] \ \ |f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))\,| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut que (f_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Alors (f_n) est uniformément convergente. Posons $f = \lim f_n$. Fixons x dans $[a,b]$ et posons

$$g_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

1. $\forall n, \ \lim\limits_{t\to x} g_n(t)$ existe (c'est $f_n'(x)$)

2. Montrons que (g_n) converge uniformément vers g.

Dans (*), en posant $x' = t$, on a :

$$|g_n(t) - g_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ceci prouve que (g_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Elle est donc convergente sur $[a,b] \setminus \{x\}$.

D'autre part, l'égalité $g_n(t) = \dfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}$ montre que (g_n) converge simplement vers g sur $[a,b] \setminus \{x\}$ car (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$. D'où (g_n) converge uniformément vers g sur $[a,b] \setminus \{x\}$. D'après le **Théorème 4.3.2** appliqué à (g_n) on a : $\lim\limits_{t\to x} g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$ i.e. $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$ □

Remarque 4.4.1 (importante) *L'hypothèse de la convergence uniforme porte sur (f'_n).*

Remarque 4.4.2 *Ce théorème est relatif à l'interversion des limites, puisque*

$$\left(f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)\right) \Leftrightarrow \left[\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to x} \frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}.$$

Corollaire 4.4.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables et définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ soit convergente pour un x_0 de $[a,b]$ et telle que la série $\sum f'_n$ soit uniformément convergente sur $[a,b]$. Alors :*

1. *$\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.*
2. *La somme $t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

Preuve Il suffit d'appliquer le **Théoème 4.4.3** aux suites des sommes partielles des séries $\sum f_n(x_0)$ et $\sum f'_n$. □

Théorème 4.4.4 1. *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur $[a,b]$. Alors la fonction $t \longmapsto g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur $[a,b]$ et si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Preuve 2. découle de 1. Il suffit donc de prouver 1.

Soit $x \in [a,b]$, posons $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f est continue sur $[a,b]$ (**Théorème 4.4.2**).

Toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment donc f est intégrable sur $[a,b]$;
Comme $\forall n,\ f_n$ est continue, g_n est dérivable et $g'_n(x) = f_n(x)$. Aussi a-t-on $g_n(a) = 0$.

Donc (g_n') converge uniformément vers f et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ existe. D'après le **Théorème 4.4.3**, (g_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g avec $g(a)=0$. De plus, $g'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n'(x) = f(x), \ \forall x \in [a$
Donc $g(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ comme $g(a)=0, \ \alpha = a$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Comme ceci est vrai $\forall x \in [a,b]$, c'est vrai en particulier pour $x=b$. □

Théorème 4.4.5 *Soit (g_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \le g_{n+1}(x) \le g_n(x)$.*
Supposons qu'il existe une suite (a_n) telle que $\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ g_n(x) \le a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Alors la série de terme général $\sum(-1)^n g_n$ est uniformément convergente sur I.

Preuve
Soit $x \in I$ fixé. La suite numérique $(g_n(x))$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc la série numérique $\sum(-1)^n g_n(x)$ est une série alternée, par suite convergente. Posons $f(x)$ sa somme et $\forall n, \ (s_n(x))$ la suite des sommes partielles de $\sum(-1)^n g_n(x)$. On a $|f(x) - s_n(x)| \le g_{n+1}(x) \le a_{n+1}$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in I} |f(x) - s_n(x)|\right) \le \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$. Ceci signifie que $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur I vers f. □

Exemple : Soit $\forall n$,

$$\begin{aligned} f_n : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} \end{aligned}$$

Soit $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x} \le \dfrac{1}{n}, \ \ \forall n \ge 1$ et $\forall x \in I$. Les hypothèses du théorème sont vérifiées.
Terminons ce paragraphe par cet exercice
Exercice : $\forall n \ge 1$, soit

$$\begin{aligned} f_n : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[0,+\infty[$.
   Pour tout $x \ge 0$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que f est continue.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
5. Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Solution Soit $g_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)} \ \ (n \ge 1); \ \ x \in [0,+\infty[$.

1. On a $(g_n(x))$ décroissante et $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.
   On a aussi $g_n(x) \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ et $x \geq 0$. Les hypothèses du **Théorème** 4.4.5 sont vérifiées, d'où 1-.
2. f est continue d'après le **Théorème** 4.4.2 **(2)**.
3. f étant continue, on a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\text{Log}2.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \text{ (\textbf{Théorème} 4.4.1)}$$

4. Prouvons que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   $\forall n$, f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_n' = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}$. Soit $a > 0$, $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(na+1)^2} \leq \frac{1}{n^2a^2}$ $(n \geq 1)$. La série $\sum \frac{1}{(1+nx)^2}$ est convergente donc $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ **Proposition** 4.2.1.
   Comme c'est vrai $\forall a > 0$, la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
   La série $\sum f_n$ vérifie les hypothèses du **Corollaire** 4.4.1 sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
   En particulier en tout point de $]0, +\infty[$.
5. On a $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}$. Fixons x dans $]0, +\infty[$. $\sum f_n'(x)$ est une série altrnée donc la somme $f'(x)$ vérifie $|f'(x) - f_1'(x)| \leq |f_2'(x)|$. Donc $\forall x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) \geq f_1'(x) - |f_2'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+2x)^2} > 0$$

   f est continue et $f' > 0$ donc f est strictement croissante.

4.5 Les séries doubles

Soit l'application $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, u une suite ; $u(n,p)$ se note $u_{n,p}$.
La série de terme général $u_{n,p}$ est appelée **série double**.

Proposition 4.5.1 *Soit la série double de terme général $u_{n,p}$. Supposons que $\forall n$, le nombre $a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ existe et supposons que la suite de terme général (a_n) soit convergente*
Alors les nombres $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ existent ; les séries de terme général $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ sont convergentes et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Preuve C'est un cas particulier du **Théorème** 4.4.1. □

Chapitre 5

Séries entières

5.1 Définitions

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle **série entière** de variable complexe (ou réelle) z, la série de terme général $u_n = a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{K}$ et $z \in \mathbb{K}$.
Exemples : Soit $z \in \mathbb{C}$, $\sum \left(\frac{1}{2+i}\right)^n z^n$; soit $z = x \in \mathbb{R}$, $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$.
Soit $\sum a_n z^n \quad (a_n, z \in \mathbb{K})$ une série entière. On appelle domaine de convergence de $\sum a_n z^n$ l'ensemble des $u \in \mathbb{K}$ tels que $\sum a_n u^n$ soit convergente.
Exemple : Soit $\sum \frac{z^n}{n^2} \quad (n \geq 1)$ Le domaine de convergence de cette série est $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$.

5.2 Disque et rayon de convergence

5.2.1 Théorème

Théorème 5.2.1 *Étant donnée une série entière* $\sum a_n z^n \quad (a_n, z \in \mathbb{K})$, $\exists! R \in [0, +\infty]$ *tel que :*

1. $\forall z \in \mathbb{K}$ *et* $|z| < R$, *alors* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*
2. $\forall z \in \mathbb{K}$ *et* $|z| > R$, *alors* $\sum a_n z^n$ *est divergente.*
3. $\forall R' > 0$ *et* $R' < R$, *alors* $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente sur* $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{K}; |z| \leq R'\}$. *Autrement dit,* $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente sur tout disque fermé (respectivement intervalle fermé) contenu dans* $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{K}; |z| \leq R\}$.

Preuve Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; posons $A = \{r \in \mathbb{R}_+$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée$\}$. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. Posons $R = \sup A$, $R \in [0, +\infty]$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ et $|z_0| < R$. Alors $\exists r \in A$ tel que $|z_0| < r < R$. On a $|a_n z^n| = |a_n r^n| \cdot \left|\frac{z_0}{r}\right|^n$. Comme $(a_n r^n)$ est bornée, $\exists M > 0$ tel que $|a_n z^n| \leq M \, \forall n$. Aussi a-t-on $\left|\frac{z_0}{r}\right| < 1$. Donc $|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z_0}{r}\right|^n$. $\sum \left(\frac{z_0}{r}\right)^n$ est une série géométrique convergente, alors $\sum a_n z^n$ est absolument convergente (**Théorème de comparaison**)
2. Soit $z_0 \in \mathbb{K}$ tel que $|z_0| > R$. Alors $|z_0| \notin A$; donc la suite $(a_n |z_0|^n)$ n'est pas bornée, d'où $(a_n z_0^n)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. La série $\sum a_n z_0^n$ est alors grossièrement divergente.
3. Soit $R' > 0$ et $R' < R$. D'après 1- $\sum a_n R'^n$ est absolument convergente. Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| \leq R'$; on a $|a_n z^n| \leq |a_n| R'^n$ d'où $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D}(0, R')$.

$\square$

Définition 5.2.1 *Le nombre R est appelé **rayon de convergence** de la série $a_n z^n$.*
*L'ensemble $D(0,R) = \{z \in \mathbb{K}; |z| < R\}$ est appelé **disque de convergence** de $\sum a_n z^n$.*
*Si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $D(0,R) =]-R,R[$; $]-R,R[$ est appelé **intervalle de convergence**.*

Corollaire 5.2.1 *Soit la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Alors la fonction*

$$f : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur $D(0,R)$.

Preuve Soit $z_0 \in D(0,R)$; il existe alors $R' > 0$ tel que $|z_0| < R' < R$. La série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(0,R)$ (**Théorème 5.2.1 (3)**). D'autre part, $\forall n$ la fonction $f : z \mapsto f_n(z) = a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$. Donc $z \mapsto f(z)$ est continue sur $\overline{D}(0,R')$ (c'est la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente). En particulier $z \mapsto f(z)$ est continue en z_0. Comme z_0 est arbitrairement choisi, on en déduit que f est continue sur $D(0,R)$. □

5.2.2 Formules

Appliquons **le corollaire 2.1.2** à la série $\sum a_n z^n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = L|z|$ où on a posé $L = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
Ce **corollaire 2.1.2** nous donne les résultats suivants :

1. Si $L = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ diverge $\forall z \neq 0$.
2. Si $L = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$.
3. Si $0 < L < +\infty$, la série $a_n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{L}$ et diverge pour $|z| > \frac{1}{L}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est donc $R = \frac{1}{L}$.
Nous pouvons énoncer :
Formule d'Hadamard : Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le nombre R défini par $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. On pose $R = +\infty$ si $L = 0$ et $R = 0$ si $L = +\infty$.

Remarque 5.2.1 *Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.*

La règle suivante se révèle souvent plus pratique.
Règle de d'Alembert
Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tend vers L, $(0 \leq L \leq +\infty)$ quand $n \to +\infty$, le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{L}$. On posera $R = +\infty$ (respectivement $R = 0$) si $L = 0$ (respectivement $L = +\infty$)

Remarque 5.2.2 *La règle de d'Alembert n'admet pas de réciproque :*
Le fait que le rayon de convergence soit R n'implique pas que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ tend vers $\frac{1}{R}$ (en supposant que cette suite soit définie).

- *Si $R = 0$, on dira que $\sum a_n z^n$ est divergente.*

Exemple : Étudier la convergence des séries entières suivantes : $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\sum n! z^n$.
Réponse

· Soit $u_n = \dfrac{1}{n!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = +\infty$.
Donc $\sum u_n z^n$ est absolument convergente $\forall z \in \mathbb{C}$

· Posons $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1$. Le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ est égale à 1.
Soit $z \in \mathbb{C}$; $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$
$\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
Et donc en conclusion
— $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est convergente si $z \in \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\} \setminus \{(0,1)\}$
— $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est absolument convergente sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
— $\sum \dfrac{z^n}{n}$ est divergente ailleurs.

· Soit $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. D'autre part $\forall z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$, $\sum_n \left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \sum_n \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.
En conclusion le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ est 1. $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente sur $\overline{D}(0,1)$. Elle est divergente sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$.

· $\sum n! z^n$. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = 0$. Donc $\sum n! z^n$ est divergente.

5.3 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ des séries entièrs. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La série somme des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$. La série produit des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Le produit de $\sum a_n z^n$ par λ est la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$.

Proposition 5.3.1 *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence R_A et R_B respectivement. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :*

1. *Le rayon de convergence R_{A+B} de $\sum (\mu a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R_{A+B} \geq \inf(R_A, R_B)$.*
2. *Le rayon de convergence R_{AB} de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_{AB} \geq \inf(R_A, R_B)$.*
3. *$\forall z \in \mathbb{K}$, $|z| < \inf(R_A, R_B)$ alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu a_n + \lambda b_n) z^n = \mu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) + \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Preuve

1. Soit $z \in \mathbb{K}$, $|z| < \inf(R_A, R_B)$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. On en déduit que $\sum(\mu a_n z^n + \lambda b_n z^n)$ est absolument convergente. On vient de montrer que $\forall z \in \mathbb{K}$, $|z| < \inf(R_A, R_B)$ implique $|z| < R_{A+B}$ d'où $\inf(R_A, R_B) \leq R_{A+B}$. D'après la **Proposition 3.4.1**, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(\mu a_n z^n + \lambda b_n z^n) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\mu a_n z^n) + \sum(\lambda b_n z^n)\\ &= \mu \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.\end{aligned}$$

Les assertions 2. et 3. découlent de la **Proposition 1.3.1** et le **Théorème 1.5.2**.

□

Remarque 5.3.1 *Si $R_A \neq R_B$, on a l'égalité $R_{A+B} = \inf(R_A, R_B)$.*

5.4 Dérivation et intégration d'une série entière

Définition 5.4.1 *La série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ est la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ $(n \in \mathbb{N})$*

Proposition 5.4.1 *La série entière et sa dérivée ont même rayon de convergence.*

Preuve Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$. On a par déffinition $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ et $R' = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}}$, or

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|a_{n+1}|^n}$$

car

$$\frac{1}{n}\mathrm{Log}|a_{n+1}| \sim \frac{1}{n+1}\mathrm{Log}|a_{n+1}| \quad (n \to +\infty)$$

$$(|a_{n+1}| = e^{\frac{1}{n+1}\mathrm{Log}|a_{n+1}|} \text{ et } |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}|a_{n+1}|}).$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Log}|a_{n+1}|\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\mathrm{Log}|a_{n+1}|\right).$$

D'autre part

$$R' = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}|(n+1)^{\frac{1}{n}}| \cdot \lim\limits_{n\to+\infty}(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(|a_{n+1}|^{\frac{1}{n}})}.$$

D'où $R = R'$. □

Définition 5.4.2 *Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ dans I si f est k-fois dérivable et si la dériée $f^{(k)}$ d'ordre k est continue dans I ; on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans I si $\forall k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans I.*

Théorème 5.4.1 *Soit la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$. $\forall x \in]-R, R[$, posons $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

Alors :

1. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

2. *$\forall x \in]-R, R[$, on a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$.*
3. *La primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction*

$$F :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Preuve Soit $x \in]-R, R[$, posons $f_n(x) = a_n x^n \ \forall n$ et $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
La série entière $\sum f_n'(x)$ a le même rayon de convergence que $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. Donc son rayon de convergence est R. Elle est normalement convergente sur tout segment inclus dans $]-R, R[$ (**Thóréme 5.2.1**). Rappelons que la convergence normale implique la convergence uniforme.
D'autre part $\forall x_0 \in]-R, R[$, $\sum f_n(x_0)$ est convergente. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme. La série $\sum f_n(x)$ est uniformément convergente sur tout segment inclus dans $]-R, R[$. De plus :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

D'où

$$\forall x \in]-R, R[\ \ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

L'assertion 2- est prouvée.
Comme $\sum f_{n+1}(x)$ est uniformément convergente sur tout segment de $]-R, R[$ et comme $\forall n$, $f_{n+1}'(\cdot)$ est continue sur $]-R, R[$, alors sa somme f' est continue en tout point de $]-R, R[$ (**Théorème 4.3.2**).
On vient de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $]-R, R[$.
Démontrons l'assertion suivante :
Pour toute série entière à coefficients réels a_n, de rayon de convergence R', la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ sur $]-R, R[$.
L'assertion est vraie au rang $k = 1$ d'après ce qui précède. Supposons qu'elle soit vraie au rang k.
Soit $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$.
Le rayon de convergence de $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ est R'. On applique à f' l'hypothèse de récurrence, i.e. f' est de classe $\mathcal{C}^k$. Autrement dit f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Il reste à prouver 3-.
$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour série dérivée $\sum a_n z^n$. Donc $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R (**Proposition 5.4.1**) et d'après la première partie, en posant $\forall x \in]-R, R[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, on a $F'(x) = f(x) \ \forall x \in]-R, R[$. Comme $F(0) = 0$, F est la primitive voulue. □

Définition 5.4.3 *Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $I = \mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $r > 0$ ou $r = +\infty$ tel que $]-r, r[\subset I$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ à coefficients réels de rayon de convergence $R \geq r$ telle que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

Proposition 5.4.2 *Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ \ \forall x \in]-r, r[$, on a :*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ \ \forall n \geq 0. \ \ (f^{(0)} = f)$$

Le développement en série entière donc unique.

Preuve Supposons f développable en série entière sur $]-r,r[$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ (**Théorème** 5.4.1). Posons $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r,r[$. On a

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1},\cdots,f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k};$$

d'où

$$f^{(k)}(0)=k!a_k.$$

L'unicité découle de la relation $a_n=\dfrac{f^{(n)}}{n!}$. □

Remarque 5.4.1 *(f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$)$\not\Rightarrow$(f développable en série entière sur $]-r,r[$).*

Contre-exemple Soit

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0\\ e^{\frac{1}{x^2}} & \text{si } x>0\end{cases}\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, on montre que $f^{(k)}(o)=0\ \ \forall k\ge 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Si f était développable en série entière sur $]-r,r[$, on aurait $\forall x\in]-r,r[,\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=0=e^{\frac{1}{x^2}}$.
c'est absurde.

5.5 Développement en série entière de fonctions usuelles

$$\frac{1}{az+b}=\frac{1}{b}\times\frac{1}{\frac{a}{b}z+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-a)^n}{b^{n+1}}z^n \quad \text{si } \left|\frac{az}{b}\right|<1\Leftrightarrow |z|<\left|\frac{b}{a}\right|$$

Cas particuliers :

$$a=-1,\ b=1,\ \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n,\quad \text{si } |z|<1 \tag{5.1}$$

$$a=1,\ b=1,\ \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n \quad \text{si } |z|<1 \tag{5.2}$$

(5.1) permet d'avoir, par dérivation,

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}\quad \text{si } |z|<1$$

(5.2) permet d'avoir, par intégration,

$$\mathrm{Log}(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad \text{si } |x|<1$$

(5.2)$\Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ si $|x|<1$. Alors par intégration on a :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{si } |x|<1.$$

En utilisant la formule $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ on a :

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{où } \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{où } \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ car } \cos x = \cosh(ix)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ car } \sin x = \sinh(ix).$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in]-1,1[.$$

Pour $m = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^n, \quad x \in]-1,1[$$

Pour $m = -\dfrac{1}{2}$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^n, \quad x \in]-1,1[.$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient les développements en série entière des fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

En remplaçant x par x^2 dans $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et en intégrant, on obtient les développement en série entière des fonctions arccos et arcsin, etc....

Exemple : Développer en série entière la fonction : $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Solution : $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{2x-1}$.

On détermine a, b, et c et on trouve $a=1, b=1, c=-1$.

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x-1}$$

$$\forall x \neq 2, \; \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

i.e.

$$\frac{1}{x-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}x^n \qquad \forall x \in]-2,2[.$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{(x-2)^2} &= \left(\frac{1}{x-2}\right)' \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n}{2^{2n+1}}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n \qquad \forall x \in]-2,2[.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n \qquad \forall x \in]-2,2[$$

$-\dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{1}{1-2x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ si $|2x| < 1$, soit $x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = -\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n = \dfrac{n-1}{2^{n+2}},\ n \geq 0$

Comme $R = 2$ et $R' = \dfrac{1}{2}$ $(R \neq R')$, le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est inf $\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} z^{2n+1}$.
2. i- Exprimer au moyen des fonctions usuelles la somme de la série dérivée sur l'intervalle $]-R,R[$.

   ii- Calculer la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \qquad \text{si } |x| < R.$$
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est convergente et calculer le nombre
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}.$$

Solution Posons $u_n = \sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} z^{2n+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z|^2.$$

1. D'après la règle de d'Alembert, si $|z|^2 < 1$, i.e. $|z| < 1$, la série est absolument convergente et si $|z| > 1$, elle est divergente. Donc $R = 1$

2. i- La série dérivée est $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(x^2\right)^n$. Son rayon de convergence est $R' = 1$.

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x^2)^n = \mathrm{Log}(1+x^2) \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$, $x \in]-1,1[$. On sait que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \qquad \textbf{(Théorème 5.4.1)} \\ &= \mathrm{Log}(1+x^2) \end{aligned}$$

ii-

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_\alpha^x \mathrm{Log}(1+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= x\mathrm{Log}(1+x^2) - \int_\alpha^x t\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{(Intégration par parties)} \\ &= x\mathrm{Log}(1+x^2) - 2\int_\alpha^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\mathrm{Log}(1+x^2) - 2(x - \mathrm{Arctan} x) + c \end{aligned}$$

on a $f(0) = 0$ d'où $c = 0$ (et $\alpha = 0$).
Alors

$$f(x) = x\mathrm{Log}(1+x^2) - 2(x - \mathrm{Arctan} x) \;\; \forall x \in]-1,1[$$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est convergente ; c'est une série alternée.

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. Soit $I = [-1,1]$; $\forall x \in I$, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$,
donc $\sum u_n(x)$, $\left(u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}\right)$ est uniformément convergente sur I. D'autre part

$$\lim_{x\to 1} u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}.$$

Alors

$$\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}\right) \quad \textbf{(Théorème 4.3.1)}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 1}\left(x\mathrm{Log}(1+x^2) - 2(x - \mathrm{Arctan} x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1]^{n+1}}{n(2n+1)}.$$

D'où

$$\mathrm{Log}2 - 2 + \frac{2\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}.$$

Voici une application du **Théorème 4.3.2**.

Théorème 5.5.1 (d'Abel) *Soit f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$. Soit (a_n) une suite de nombres réels telle que $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*
Si la série de terme général a_n est convergente alors

$$\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Preuve Soit la suite de fonctions

$$g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g_k(x) = a_k x^k.$$

Par hypothèse la série de fonctions $\sum g_k$ est simplement convergente dans $[0,1]$ vers

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Prouvons que $\sum g_k$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.
Pour cela, on montrera qu'elle vérifie la condition de Cauchy pour la convergence uniforme.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ $(q > p)$. Posons $\forall n \geq p,\ B_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_k x^k &= x^p B_p + x^{p+1}(B_{p+1} - B_p) + \cdots + x^{q-1} = (B_{q-1} - B_{q-2}) + x^q(B_q - B_{q-1}) \\ &= B_p(x^p - x^{p+1}) + B_{p+1}(x^{p+1} - x^{p+2}) + \cdots + B_{q-1}(x^{q-1} - x^q) + B_q x^q.\end{aligned}$$

La suite (x^n) est positive ou nulle et décroit vers 0. Alors $|x^n - x^{n+1}| = x^n - x^{n+1}\ \forall n$; donc

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} a_k x^k\Big| \leq |B_p|(x^p - x^{p+1}) + |B_{p+1}|(x^{p+1} - x^{p+2}) + \cdots + |B_{q-1}|(x^{q-1} - x^q) + B_q x^q.$$

Soit (s_n) la suite des sommes partielles de $\sum a_n$. Comme $\sum a_n$ est convergente, (s_n) est une suite de Cauchy. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N\ \forall p\ \forall n$ tels que $p - 1 > N$ et $n \geq p$, $|s_n - s_{p-1}| \leq \varepsilon$.
Alors $\{|B_p|; |B_{p+1}|; \cdots; |B_q|\}$ est majoré par ε car $\forall n = p,\ s_n - s_{p-1} = B_p; \cdots$ et $n = q,\ s_q - s_{p-1} = B_q$.
Donc $\forall p \geq N,\ n = q > p\ \forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=p}^{q} a_k x^k\Big| &\leq \varepsilon\left((x^p - x^{p+1}) + (x^{p+1} - x^{p+2}) + \cdots + (x^{q-1} - x^q) + x^q\right) \\ &= \varepsilon x^p \\ &\leq \varepsilon \quad \text{car } |x| \leq 1.\end{aligned}$$

La condition de Cauchy est vérifiée.
Alors $\sum g_k$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Comme g_k est continue $\forall k$, g est alors continue (**Théorème** 4.3.2).
D'où

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

□

Exemple :
On sait que

$$\text{Arctan}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{si } x \in]-1,1[.$$

$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente (c'est une série alternée).
Donc

$$\lim_{x \to 1} \text{Arctan}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\text{Arctan}1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

5.6 Applications aux équations différentielles

Les solutions de certaines équations différentielles peuvent s'exprimer au moyen de leur développement en série entière
Exemple : Soit l'équation différentielle $(A) : y'' + xy' + y = 1$.
Trouver toutes les solutions de (A) développables en série entière.
Réponse : Soit f une solution de (A), développable en série entiére. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r, r[\;\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)'' + x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = 1$$

i.e.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left((n+2) a_{n+2} + a_n \right) x^n = 1$$

En posant $b_n = (n+1) \left((n+2) a_{n+2} + a_n \right)$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 1.$$

Donc le développement en série entière de la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R} \;\; (x \mapsto f(x) = 1)$ solution de (A) est $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Le développement en série entière étant unique, on a : $b_0 = 1$ et $b_n = 0 \; \forall n \geq 1$ i.e. $2a_2 = 1 - a_0$; $(n+2) a_{n+2} = -a_n \;\; \forall n \geq 1$. D'où si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{-1}{2n} \right) \times \left(\frac{-1}{2n-2} \right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{4} \right) \times \left(\frac{-1}{2} \right) \times (a_0 - 1) \\ &= \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} (a_0 - 1). \end{aligned}$$

D'autre part si $n \geq 1$, $a_{2n+1} = \dfrac{-a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$; donc

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \left(\frac{-1}{2n+1}\right) \times \left(\frac{-1}{2n-1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{3}\right) a_1 \\ &= \frac{(-1)^n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} a_1. \end{aligned}$$

Considérons les séries de terme général

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}(a_0 - 1),\ n \geq 1$$

et

$$v_n = \frac{(-1)^n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} a_1,\ n \geq 0.$$

$\sum u_n(x)$ et $\sum v_n(x)$ ont pour rayon de convergence $R = +\infty$. Elles sont donc convergentes dans $\mathbb{R}$. Soit u et v leur somme : $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $v(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$. D'où toute solution de (A) développable en série entière est

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + (a_0 - 1)u + a_1 v \\ &= f(0) + (f(0) - 1)\, u + f'(0) v \text{ car } a_0 = f(0) \text{ et } a_1 = f'(0). \end{aligned}$$

La solution unique g qui vérifie les conditions $g(0) = g'(0) = 0$ est alors $g = -u$ où

$$u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= -\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.7 Exponentielle complexe

Soit $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$. La série de terme général $u_n(z)$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. Donc elle est absolument convergente $\forall z \in \mathbb{C}$. On pose :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$$\text{La fonction} \quad \begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

est appelée **exponentielle complexe.**

Proposition 5.7.1

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = (e^z)\left(e^{z'}\right).$$

Preuve Soit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}$.

La série produit de $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ a pour terme général

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k z^k z'^{n-k}}{n!} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Donc la série produit est $\sum \frac{(z+z')^n}{n!}$. Comme $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) \quad \textbf{(Théorème 1.5.2)}$$

$$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$$

□

Proposition 5.7.2 *1.* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{Re(z)}$

3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{it}} = e^{-it}$ *et* $|e^{it}| = 1$.

Preuve

1.

$$\begin{aligned}
\overline{e^z} &= \lim_{n\to+\infty} s_n(z) \text{ où } s_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\overline{s_n(z)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\overline{z}}{1!} + \frac{\overline{z^2}}{2!} + \cdots + \frac{\overline{z^n}}{n!}\right) \\
&= e^{\overline{z}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
|e^z|^2 &= e^z \cdot \overline{e^z} \\
&= e^z \cdot e^{\overline{z}} \\
&= e^{z+\overline{z}} \\
&= \left(e^{Re(z)}\right)^2
\end{aligned}$$

d'où

$$|e^z| = e^{Re(z)}.$$

□

Chapitre 6

Intégrale dépendant d'un paramètre

6.1 Introduction

Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} f : I \times J &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

une fonction.
Supposons que $\forall x \in I$, fixé, la fonction

$$\begin{aligned} f_x : J &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_x(t) = f(x,t) \end{aligned}$$

soit intégrable sur J. Alors l'intégrale $\int_J f_x(t)\,\mathrm{d}t$ dépend du paramètre x. On dit que l'intégrale $\int_J f_x(t)\,\mathrm{d}t$ dépend du paramètre x si $\forall x \in I,\ f_x$ est intégrable sur J. On définira la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_J f_x(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre nous étudions les théorèmes de continuité et de dérivabilité de F, même si F n'est explicitement déterminée.

6.2 Continuité uniforme d'une fonction à deux variables

Définition 6.2.1 *Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$; $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction, et $(x_0, t_0) \in I \times J$. On dit que f est continue en (x_0, t_0) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,t) \in I \times J$, $(|x - x_0| < \eta$ et $|t - t_0| < \eta) \Rightarrow (|f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \varepsilon)$.*

Définition 6.2.2 *Soit I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur $I \times J$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,t) \in I \times J$ et $\forall (x',t') \in I \times J$, $(|x - x'| < \eta$ et $|t - t'| < \eta) \Rightarrow (|f(x,t) - f(x',t')| < \varepsilon)$.*

Définition 6.2.3 *Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$, une fonction. Si f est continue en tout point de $I \times J$, on dira que f est continue dans $I \times J$.*

Exemple de continuité uniforme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) = x + t \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon < 0$. Choisissons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\forall (x',t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |t - t'| < \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow (|f(x,t) - f(x',t')| \leq |x - x'| + |t' - t'| < \varepsilon)$$

Remarque 6.2.1 *a-* $(f$ *uniformément continue sur* $I \times J) \Rightarrow (f$ *continue dans* $I \times J)$
b- $(f$ *continue dans* $I \times J) \not\Rightarrow (f$ *uniformément continue sur* $I \times J)$

Contre-exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Montrons que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ i.e. $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \eta > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ tels que $|x - x'| < \varepsilon$ et $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Soit $\eta > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\eta}$ et $x' = \dfrac{1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2}$. On a $|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| = |\dfrac{1}{\eta^2} - (\dfrac{1}{\eta} + \dfrac{\eta}{2})^2| = |1 + \dfrac{\eta^2}{4}| > 1 = \varepsilon$.
La notation $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0,t_0)} f(x,t) = \ell$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tels que } \forall (x,t) \in I \times J,\ (|x - x_0| < \eta \text{ et } |t - t_0| < \eta) \Rightarrow (|f(x,t) - \ell| < \varepsilon).$$

Donc d'après la définition de la continuité de f on a

Proposition 6.2.1 *Soit* I, J *des intervalles de* $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $(x_0, t_0) \in I \times J$. *Alors* f *est continue en* (x_0, t_0) *si et seulement si* $\lim\limits_{(x,t) \to (x_0,t_0)} f(x,t) = f(x_0, t_0)$

Preuve La preuve est évidente. □

Proposition 6.2.2 *Soit* I, J *des intervalles de* $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $(x_0, t_0) \in I \times J$. *Posons*

$$\begin{aligned} f_{x_0} : J &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_{x_0}(t) = f(x_0, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_{t_0} : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_{t_0}(x) = f(x, t_0) \end{aligned}$$

Si f *est continue en* (x_0, t_0) *alors* f_{t_0} *et* f_{x_0} *sont continues en* x_0 *et* t_0 *respectivement.*

Preuve
Montrons que f_{x_0} est continue en t_0. Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue en (x_0, t_0), il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x,t) \in I \times J$, $(|x - x_0| < \eta$ et $|t - t_0| < \eta) \Rightarrow |f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \varepsilon$ i.e. $|f_x(t) - f_{x_0}(t_0)| < \varepsilon$.
En particulier $|t - t_0| < \eta \Rightarrow |f_{x_0}(t) - f_{x_0}(t_0)| < \varepsilon$.
donc f_{x_0} est continue en t_0. La continuité de f_{t_0} se démontre de façon analogue. □

Remarque 6.2.2 *La réciproque est fausse.*

Contre-exemple

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{xt}{x^2+t^2} & \text{si } (x,t) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,t) = (0,0) \end{cases}$$

Posons $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$.
f_{x_0} et f_{t_0} sont continues en $0 \in \mathbb{R}$ car

$$f_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_{t_0} = f(x,0) = 0$$

et

$$f_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f_{x_0}(t) = f(0,t) = 0$$

f_{x_0} et f_{t_0} sont continues dans $\mathbb{R}$ en particulier en 0. Mais f n'est pas continue en $(0,0)$.
$\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,t_0)} f(x,t) \neq f(x_0,t_0) = 0$.
En effet, en prenant $t = 2x$, on a $f(x,2x) = \dfrac{2}{5}$; $\lim\limits_{(x,2x)\to(0,0)} f(x,2x) = \dfrac{2}{5} \neq f(0,0)$.

Théorème 6.2.1 *Supposons que I et J soient des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ (i.e. $I = [\alpha,\beta]$; $J = [a,b]$). Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue dans $I \times J$, alors f est uniformément continues sur $I \times J$.*

Preuve La démonstration est analogue à celle qui est faite en première année pour les fonctions d'une variable. □

Lemme 6.2.1 *Soit*

$$f : [\alpha,\beta] \times [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto f(x,t)$$

une fonction continue. Soit (x_n) une suit d'éléments de $[\alpha,\beta]$ et $u_0 \in [\alpha,\beta]$. Posons $\forall n$,

$$f_{x_n} : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f_{x_n} = f(x_n,t)$$

et

$$f_{u_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f_{u_0}(t) = f(u_0,t).$$

Si (x_n) converge vers u_0 alors la suite de fonctions (f_{x_n}) converge uniformément vers f_{u_0} sur $[a,b]$.

Preuve f est uniformément continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ (**Théorème 6.2.1**). On en déduit que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, x' \in [\alpha,\beta]$, $\forall t \in [a,b]$, $(|x-x'| < \eta) \Rightarrow (|f(x,t) - f(x',t)| < \varepsilon)$.
Comme (x_n) converge vers u_0, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|x_n - u_0| < \eta$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(x_n,t) - f(u_0,t)| = |f_{x_n}(t) - f_{u_0}(t)| < \varepsilon$. □

6.3 Continuité et dérivabilité de l'intégrale dépendant d'un paramètre

6.3.1 Cas d'une intégrale définie

Soit $f :]\alpha, \beta[\times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\forall x \in]\alpha, \beta[$, fixé, l'application $f_x : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(t \mapsto f_x(t) = f(x, t))$ est continue ; donc l'intégrale $\int_a^b f(x, t)\, dt$ est définie.

Théorème 6.3.1 *Soit $f :]\alpha, \beta[\times [a, b] \times \mathbb{R}$ une fonction continue dans $]\alpha, \beta[\times [a, b]$.*
Alors l'application $F :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ $\left(x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt\right)$ est continue dans $]\alpha, \beta[$.

Preuve Soit $u_0 \in]\alpha, \beta[$. Il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n) \subset]\alpha, \beta[$ qui converge vers u_0, la suite $(F(x_n))$ converge vers $F(u_0)$.
Choisissons $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{u_0\} \subset [\alpha', \beta']$ et $[\alpha', \beta'] \subset]\alpha, \beta[$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : [\alpha', \beta'] \times [a, b] &\to \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \varphi(x, t) = f(x, t) \end{aligned}$$

φ est continue donc uniformément continue (**Théorème 6.2.1**). Soit

$$\begin{aligned} \psi_n : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \psi_n(t) = f(x_n, t). \end{aligned}$$

La suite de fonctions (ψ_n) converge uniformément vers ψ_{u_0} dans $[a, b]$ (**Lemme 6.2.1**). Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} \psi_n(t)\, dt$$

i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x_n, t)\, dt = \int_a^b f(u_0, t)\, dt.$$

□

6.3.2 Dérivée partielle

Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ $((x, t) \mapsto f(x, t))$ une fonction. Soit $(x_0, t_0) \in I \times J$.
Si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, t_0) - f(x_0, t_o)}{h}$$

existe et est finie, elle est appelée dérivée partielle de f relativement à la variable x au point (x_0, t_0). Elle est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0).$$

La dérivéee partielle de f relativement à la variable t au point (x_0, t_0) est le nombre

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, t_0 + h) - f(x_0, t_0)}{h}$$

s'il existe. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0).$$

Exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) = e^{-xt} + 2x^2 \end{aligned}$$

Soit $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0) = -t_0 e^{-x_0 t_0} + 4x_0 \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x_0,t_0) = -x_0 e^{-x_0 t_0}.$$

Si $\forall (x,t) \in I \times J$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe, on définira la fonction dérivée partielle de f relativement à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : I \times J &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t). \end{aligned}$$

Théorème 6.3.2 *Soit $f :]\alpha,\beta[\times[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dans $]\alpha,\beta[\times[a,b]$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue dans $]\alpha,\beta[\times[a,b]$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} F :]\alpha,\beta[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et $\forall x \in]\alpha,\beta[$, $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve Soit $x_0 \in]\alpha,\beta[$. Il faut démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t$ i.e.

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \int_a^b \left(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right) \mathrm{d}t \right| = 0.$$

En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall h \in \mathbb{R},\ |h| < \eta \Rightarrow \frac{1}{|h|} \left| \int_a^b \left(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right) \mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Choisissons $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \in]\alpha',\beta'[$ et $[\alpha',\beta'] \subset]\alpha,\beta[$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in [\alpha',\beta']$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$\begin{aligned} f_t : [x_0, x_0+h] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_t(x) = f(x,t). \end{aligned}$$

Alors $\exists c \in]x_0, x_0+h[$ tel que $f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,t)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : [x_0+h, x_0] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ étant continue, elle est uniformément continue sur $[x_0, x_0+h] \times [a,b]$. On en dédiuit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0+h],\ \forall t \in [a,b],\ |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_2,t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

En prenant $|h| < \eta$, on a $|x_0 - c| < \eta$ car $|x_0 - c| < |h|$, d'où

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(c,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On vient de montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ \forall h \in \mathbb{R},\ |h| < \eta \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|h|}\left|\int_a^b \left(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| &= \frac{1}{|h|}\left|h\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_a^b |h|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{|h|}{|h|}\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Exemple : Soit

$$\begin{aligned}
F :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

F est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-2xte^{-x^2t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ car

$$\begin{aligned}
f :]0,+\infty[\times[a,b] &\to \mathbb{R} \\
(x,t) &\mapsto f(x,t) = \frac{e^{-x^2t}}{1+t^2}
\end{aligned}$$

vérifie les hypothèses du **Théorème** 6.3.1 et **Théorème** 6.3.2.
On a un théorème plus général :

Théorème 6.3.3 *Soit $f :]\alpha,\beta[\times[a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $]\alpha,\beta[\times[a,b]$. Soit u et v des fonctions continues et dérivables sur $]\alpha,\beta[$ à valeurs dans $[a,b]$. Alors la fonction*

$$\begin{aligned}
F :]\alpha,\beta[&\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

est dérivable et $\forall x \in]\alpha,\beta[, F'(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + \big(v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x))\big)$.

Preuve La fonction F s'écrit $F = \displaystyle\int_a^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Il suffit de prouver le théorème dans le cas particulier où $u(x) = 0$. La fonction F est alors la composée des applications

$$\begin{aligned}
]\alpha,\beta[&\to]\alpha,\beta[\times[a,b] \\
x &\mapsto (x,v(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
]\alpha,\beta[\times[a,b] &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont dérivables, et les dérivées sont :

$$\mathrm{d}x \mapsto (1, v'(x))\,\mathrm{d}x \text{ et } (\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y) \mapsto \,\mathrm{d}x \cdot \int_a^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Donc la dérivée de F au point x est la composée de ces deux applications.
D'où $F'(x) = \displaystyle\int_a^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x, v(x))v'(x)$.
Exemple

$$\begin{aligned} u :]\alpha, \beta[&\to [a,b] \\ x &\mapsto u(x) = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v :]\alpha, \beta[&\to [a,b] \\ x &\mapsto v(x) = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f :]\alpha, \beta[\times[a,b] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \sin(x-t) \end{aligned}$$

□

6.4 Cas d'une intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty,\ I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : I \times [a,b[&\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

continue.
$\forall x$ fixé, la fonction $[a,b[\to \mathbb{R}\ \ (t \mapsto f(t,x))$ est continue et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est une intgrale généralisée.

Théorème 6.4.1 (de continuité par convergence dominée) *Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une fonction $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ positive et continue ayant les deux propriétés suivantes :*

1. $|f(x,t)| \le g(t)\ \ \forall x \in I$ *et* $\forall t \in [a,b[$.
2. *L'intgrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Alors $\forall x \in I$, l'intégrale génŕalisée $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est continue dans I.

Preuve Supposons $b \in \mathbb{R}$ $(b \neq +\infty)$
L'intgrale $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente grâce à l'hypothèse $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall x \in I$ et $\forall t \in [a,b[$ (**Théorème de comparaison 3.2.1**)
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F_n(x) = \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

1. F_n est continue dans I, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (**Théorème 6.3.1**)
2. (F_n) converge simplement vers F sur I (**Lemme 3.3.1**)

Montrons que (F_n) converge uniformément vers F sur I.
$\forall n \in \mathbb{N}*$, posons $G_n = \int_a^{b-\frac{1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t$. La suite (G_n) est convergente car l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (**Lemme 3.3.1**). Donc (G_n) est une suite de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q$ $(q > p)$

$$|G_q - G_p| = \int_{b-\frac{1}{p}}^{a-\frac{1}{q}} g(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Comme $|f(x,t)| \leq g(t)$ $\forall x \in I$ et $\forall t \in [a,b[$, on a $\forall p,q \geq N$; $\forall x \in I$ et $t \in [a,b[$

$$|F_q(x) - F_p(x)| = \left|\int_{b-\frac{1}{p}}^{a-\frac{1}{q}} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{b-\frac{1}{p}}^{a-\frac{1}{q}} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leq |G_q - G_p| < \varepsilon.$$

On vient de montrer que la suite de fonctions (F_n) vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Donc elle converge uniformément sur I vers F, alors F est continue sur I (**Théorème 3.2.1**).
Si $b = +\infty$, on posera

$$F_n : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F_n(x) = \int_a^n f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

et $G_n = \int_a^n g(t)\,\mathrm{d}t$. □

Théorème 6.4.2 (de dérivation par convergence dominée) *Supposons l'intervalle I ouvert.*
Soit $f : I \times [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.
Supposons que $\forall (x,t) \in I \times [a,b[$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et soit continue sur $I \times [a,b[$. Supposons de plus qu'il existe une fonction $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue ayant les deux propriétés suivantes :

1. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ $\forall x \in I$, $\forall t \in [a,b[$
2. *L'intégrale généralisée $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

Alors $\forall x \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. La fonction

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in I, \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve On suppose $b \in \mathbb{R}$. On va montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c,d] \subset I$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\begin{aligned} f_n : [c,d] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) &= \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(f_n) converge simplement vers φ dans $[c,d]$ (par hypothèse) i.e. $\forall x \in [c,d],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
$\forall n, f_n$ est dérivable sur $[c,d]$ et $\forall n\ f_n'(x) = \int_a^{b-\frac{1}{n}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ (**Théorème** 6.3.2).
L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (hypothèse 1) donc (f_n') converge simplement dans $[c,d]$ vers la fonction

$$\begin{aligned} h : [c,d] &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \ (\textbf{Lemme } 3.3.1) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $G_n = \int_a^{b-\frac{1}{n}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

La suite (G_n) est convergente (hypothèse 2). Sa limite est $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. C'est donc une suite de Cauchy.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\ \forall p,q\ (p > q)\ \ |G_q - G_p| < \varepsilon$; on a $\forall x \in [c,d],\ \ |f_q'(x) - f_p'(x)| \leq |G_q - G_p|$ (hypothèse 1).
On en déduit que (f_n') vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Donc (f_n') converge uniformément sur $[c,d]$ vers h. D'autre part, pour $x_0 \in [c,d]$, la suite $(f_n(x_0))$ converge vers $\int_a^b f(x_0,t)\,\mathrm{d}t$.
D'après le **Thórème** 4.3.2, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers φ sur $[c,d]$, φ est dérivable sur $[c,d]$ et on a $\varphi'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)\ \forall x \in [c,d]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'$ est continue (**Théorème** 6.3.1), alors sa limite est uniforme φ' est continue sur $[c,d]$. On vient de prouver que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans I, donc φ est dérivable et φ' est continue en tout point de I.
Maintenant si $b = +\infty$, on considérera les suites
$f_n(x) = \int_a^n f(x,t)\,\mathrm{d}t, \quad f_n'(x) = \int_a^n \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ et $G_n = \int_a^n g(t)\,\mathrm{d}t$
et on reprendra mot à mot la démonstration ci-dessus. □

Exemple : Soit

$$\begin{aligned} F :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. Montrer que $F(x)$ existe $\forall x \in]0,+\infty[$.
2. Montrer que F est continue dans $]0,+\infty[$.
3. Montrer que F est dérivable dans $]0,+\infty[$ et calculer F'.

Solution :

1. C'est au voisinage de $t = 0$ et $t = +\infty$ que se pose le problème d'existence de l'intégrale. Lorsque $t \to 0,\ \ e^{-t} \to 1$ donc $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$.
$\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente si $1 - x < 1$ i.e. $0 < x$. C'est bien le cas ici. Donc $\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Lorsque $t \to +\infty$ $\quad 0 < e^{-t}t^{x-1} = e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot t^{x-1} \leq e^{-\frac{t}{2}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$ fixé. Comme $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, l'intgrale $\int_1^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Nous venons de montrer que $\forall x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe, i.e. F existe.

2. Montrons que F est continue dans $x \in]0, +\infty[$.
Il suffit de montrer que F est continue sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.
Posons $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ où $\forall x \in]0, +\infty[$, $F_(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ et $F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
Nous allons montrer que F_1 et F_2 sont continues sur $[a, b]$, et $\forall x \geq a,\ t^{x-1} \leq t^{a-1}$ $\forall t \in]0, 1]$ et $\forall x \in [a, b]$. Donc $e^{-t} \cdot t^{x-1} \leq t^{a-1} \quad \forall t \in]0, 1]$ et $\forall x \in [a, b]$.
Soit $g\ :]0, 1] \to \mathbb{R}\quad (t \mapsto g(t) = t^{a-1})$ l'intégrale $\int_a^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc F_1 est continue (**Théorème 6.3.3**).
F_2 est aussi continue par convergence dominée sur $[a, b]$ car $e^{-t} \cdot t^{x-1} \leq e^{-t} \cdot t^{b-1} = g(t) \quad \forall x \in [a, b]$ et $t \in [1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente car si $t \to +\infty \quad e^{-t} \cdot t^{b-1} \leq e^{-\frac{t}{2}}$.
F_1 et F_2 sont continues sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$. En particulier en tout point de $]0, +\infty[$.
3. Dérivabilité de F_1 et F_2.
Démontrons que F_1 et F_2 sont dérivables sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{Log}t\,\mathrm{d}t.$$

F_2 est dérivable par convergence dominée car $\forall x \in [a, b]$ et $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t) = e^{-t}t^{b-1}\mathrm{Log}t \text{ où } \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^{x-1}\mathrm{Log}t$$

et $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente car si $t \to +\infty\ \ g(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$.
D'autre part F_1 est dérivable par convergence dominée sur $[a, b]$ car $\forall t \in]0, 1]$ et $\forall x \in [a, b]\ \ (x \geq a > 0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t) = t^{a-1}|\mathrm{Log}t| = t^{a-1}\mathrm{Log}t.$$

L'intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente car $a > 0$ ($\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}u}{u^{a+1}}\,\mathrm{d}u$, faire le changement de variable $u = \frac{1}{t}$).

Chapitre 7

Séries de Fourier

Ce chapitre est succinctement rédigé. Ceci est à la base des ses lacunes : il est incomplet et mal présenté. L'étudiant désireux d'en savoir plus peut consulter : [1] et [2] dans la bibliographie.

7.1 Séries trigonométriques

On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions dont le terme général $u_n(x)$ est de la forme $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),\ \ a_n, b_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$.
Par convention on pose $b_0 = 0$.

Remarque 7.1.1 *1. $u_n(x)$ peut s'écrire aussi*

$$u_n(x) = \alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{inx}$$

où $\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n);\ \ \beta_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ou encore

$$u_n(x) = c_n e^{inx},$$

ici $n \in \mathbb{Z},\ \ c_0 = a_0;\ c_n = \alpha_n$ si $n > 0$ et $c_n = \beta_n$ si $n < 0$.

2. *Une série trigonométrique étant une série de fonctions, les théorèmes de convergence des séries de fonctions restent valables pour les séries trigonométriques.*
3. *La somme d'une série trigonométrique (si elle existe) est une fonction périodique de période 2π.*

7.2 Série de Fourier d'une fonction

7.2.1 Problème traité

La somme d'une série trigonométrique est une fonction périodique. Est-ce que toute fonction périodique de période T est-elle la somme d'une série trigonométrique ?
Le théorème de Dirichlet ci-dessous donne une classe de fonctions pour laquelle on a une réponse positive.

7.2.2 Définitions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega},\ \omega \in \mathbb{R}_+^*$.

On appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres a_n et b_n ou c_n définis par

$$\forall n \geq 0, \;\; a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_\Delta f(x) \cos(n\omega x) \, \mathrm{d}x, \;\; n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_\Delta f(x) \sin(n\omega x) \, \mathrm{d}x$$

ou

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \;\; c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_\Delta f(x) e^{-in\omega x} \, \mathrm{d}x$$

où Δ est un segment de longueur $\dfrac{2\pi}{\omega}$.
On appelle **série de Fourier** de f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

ou la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

7.2.3 Notations

On écrira $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ pour dire que $\dfrac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ est la série de Fourier de f. Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrira $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$ si $f(x)$ est la somme de la série $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n \geq 1} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$.

Remarque 7.2.1 *Si $\omega = 1$ alors f est périodique de période 2π.*

Exemple : Déterminer la série de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie par $f(x) = \dfrac{x}{2}$ si $|x| < \pi$.
Solution :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \, \mathrm{d} \left(\frac{\sin nx}{x} \right) \\
&= \frac{1}{2n} [x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

soit $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-pi}^{\pi} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) \\
&= \left[-\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2n}(-1)^n - \frac{\pi}{2n}(-1)^n \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n},
\end{aligned}$$

donc $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$f(x) \approx \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Remarque 7.2.2 *Nous n'étudierons que des fonctions périodiques de période 2π. Les théorèmes qui seront démontrés dans ce cadre restent valables pour des fonctions périodiques de période quelconque.*

7.2.4 Calcul pratique des coefficients de Fourier

Proposition 7.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Alors*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad a_n = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad b_n = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Preuve On a :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{0} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x.$$

En posant $x = 2\pi + t$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{\alpha} f(2\pi + t) \cos n(2\pi + t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_{\alpha}^{0} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \pi a_n.
\end{aligned}$$

Démonstration analogue pour b_n. □

Cas particulier : $\alpha = -\pi$
Alors $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$.

Proposition 7.2.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π.*

1. *Si f est une fonction paire (i.e. $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$) alors $\forall n \geq 1 \quad b_n = 0$ et*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \forall n \geq 1.$$

2. *Si f est une fonction impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$) alors $\forall n \geq 0 \quad a_n = 0$ et*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \forall n \geq 1.$$

Preuve

1.

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

En posant $t = -x$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\pi}^{0} f(-t)\cos(-nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En posant $t = -x$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x &= -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-nt)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{\pi}^{0} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'où

$$\pi b_n = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

2. La démonstration se fait d'une manière analogue.

□

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

Déterminer la série de Fourier de f.

Solution f est une fonction impaire donc $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin nx \,\mathrm{d}x \quad \forall n \geq 1$ et $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[(-1)^{n+1} + 1 \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi} & \text{si } n = 2p+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)x.$$

Lemme 7.2.1 *Soit f une fonction numérique intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*
Alors $\displaystyle\lim_{|n| \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$.

Preuve

a- Supposons que f soit une fonction en escalier : $f : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 1_{]x_{k-1}, x_k[}$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, où $1_{]x_{k-1}, x_k[}$ est la fonction indicatrice (fonction caractéristique) de $]x_{k-1}, x_k[$. On a alors :

$$\int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{ni} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{inx_k} - e^{inx_{k-1}} \right) a_k,$$

d'où la majoration

$$\left| \int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{2}{|n|} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

On en déduit, dans ce cas, le résultat du lemme.

b- Supposons f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$ Alors

$$\left| \int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \, e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| &= \leq \left| \int_a^b f(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{inx} \,\mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

La partie a- de la démonstration permet de conclure que

$$\lim_{|n|\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Conséquences : Les coefficients a_n et b_n de f tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

Lemme 7.2.2 *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$ et intégrable sur tout $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Lemme 7.2.3 $\forall u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, *on a :*

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

Preuve Si $u \notin 2\pi\mathbb{R}$, on a $e^{inu} \neq 1$, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{iku} &= \frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+1)u} - e^{iu}}{e^{iu} - 1}\\ &= \frac{2e^{i(n+1)u - e^{iu} - 1}}{2(e^{iu} - 1)}\\ &= \frac{2e^{i(n+\frac{1}{2})u - 2\cos\frac{u}{2}}}{4i\sin\frac{u}{2}}.\end{aligned}$$

On obtient le lemme en prenant les parties réelles des deux membres. □

Notations Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$; soit $x_0 \in I$. Posons
$f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to x_0\\ t>x_0}} f(x)$ (c'est la limite à droite de f au point x_0.)
$f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{t\to x_0\\ t<x_0}} f(x)$ (c'est la limite à gauche de f au point x_0.)

Remarque 7.2.3 *Si f est continue au point x_0 alors $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.*
$f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \dfrac{f(x_0 + u) - f(x_0^+)}{u}$ *(on suppose que $f(x_0^+)$ existe).*
$f'_g(x_0) = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u<0}} \dfrac{f(x_0 + u) - f(x_0^-)}{u}$ *(on suppose que $f(x_0^-)$ existe).*

Remarque 7.2.4 *Si f est dérivable au point x_0 alors $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$. Par abus de langage, $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) est appelée dérivée à droite (respectivement dérivée à gauche) de f au point x_0.*

Théorème 7.2.1 (de Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 2π et intégrable sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent. Si le rapport*

$$\frac{1}{u}\left[f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]$$

est borné au voisinage de 0, alors la série de Fourier de f converge au point x_0 vers $\dfrac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

Preuve Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la série de Fourier de f. Soit (s_n) la suite des sommes partielles de cette série. Il faut prouver que $(s_n(x_0))$ converge vers $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

$$\begin{aligned}
s_n(x_0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx_0 + \sin kt \sin kx_0)\right] f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x_0 - t)\right] f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x_0-t)}{2\sin\left(\frac{x_0-t}{2}\right)} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} f(u+x_0)\,\mathrm{d}u \quad \text{en posant } u = t - x_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} f(u+x_0)\,\mathrm{d}u \quad (\textbf{Proposition 7.2.1})
\end{aligned}$$

Si $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, alors $a_0 = 2$ et $a_n = b_n = 0$.
Par conséquent $1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
s_n(x_0) - y &= s_n(x_0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{y\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Posons $y = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$. Alors

$$s_n(x_0) - y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\,\mathrm{d}u.$$

On a $\sin\frac{u}{2} \sim \frac{u}{2}$ donc la fonction $u \to \varphi(u) = \frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2y}{\sin\frac{u}{2}}$ est bornée au voisinage de 0 (par hypothèse) et elle est intégrable sur $[\varepsilon, \pi]$ $\forall \varepsilon > 0$.
Donc elle est intégrable sur $[0, \pi]$ (**Lemme 7.2.2**).
D'après le **Lemme 7.2.1**, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})u\,\mathrm{d}u = 0$.
D'où $\lim_{n\to+\infty}(s_n(x_0) - y) = 0$ où $y = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$ □

Remarque 7.2.5 *1. Le rapport* $\frac{1}{u}\left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]$ $(u \in \mathbb{R}^*)$ *reste borné au voisinage de* 0 *signifie :*

$$\exists m \in \mathbb{R}_+\ \exists I \subset \mathbb{R} \text{ ouvert contenant } 0 \text{ tels que } \forall u \in I \setminus \{0\},\ \left|\frac{1}{u}\left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-)\right]\right| \leq m$$

L'expression $f(x_0^+) + f(x_0^-)$ étant symétrique en u, la condition

$$\forall u \in I \setminus \{0\} \quad \left| \frac{1}{u} \left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-) \right] \right| \leq m$$

peut être remplacée par : $\forall u \in I \setminus \{0\}$ *et* $u > 0 \quad \left| \frac{1}{u} \left[f(x_0+u) + f(x_0-u) - f(x_0^+) - f(x_0^-) \right] \right| \leq m.$

2. Cette condition est vérifiée si $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u>0}} \frac{1}{u} \left[f(x_0+u) - f(x_0^+) \right]$ *et* $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u>0}} \frac{1}{u} \left[f(x_0-u) - f(x_0^+) \right]$ *existent et sont finies.*

Définition 7.2.1 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $[t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$ [respectivement $[t_1, t_0]$, $t_1 < t_0$] et f une application de I dans $\mathbb{R}$.*
La dérivée à droite [respectivement à gauche] de f en t_0, notée f'_d [respectivement f'_g] est la limite (si elle existe) du rapport $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ lorsque $t \to t_0$ par valeurs supérieures [respectivement inférieures].

Rappelons les résultats suivants :
L'existence de $f'_d(t_0)$ entraine la relation $f(t_0^+) = f(t_0)$ et celle de $f'_g(t_0)$ entraine : $f(t_0^-) = f(t_0)$.
Mais l'existence d'une seule des limites $f'_d(t_0)$, $f'_g(t_0)$ n'entraine pas la continuité de f au point t_0.
Règle de l'Hospital
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que f soit dérivable sur $]a, b[$ et que l'on ait $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.
On a une version analogue de la dérivée à gauche en b. Nous terminons le chapitre par ce corollaire du **Théorème de Dirichlet**.

Corollaire 7.2.1 *Soit f une fonction à valeurs réelles périodiques de période 2π et intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont finis, alors la série de Fourier de f converge au point x_0 vers $f(x_0)$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$.*

Preuve On a : $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$. D'après la remarque 2. ci-dessus, les hypothèses du théorème de Dirichlet sont vérifiées. □

7.3 Inégalité de Bessel - Théorème de Parseval

Deux fonctions équivalentes ont aussi même série de Fourier. On peut donc parler de série de Fourier des éléments de H.

Définition 7.3.1 *On appelle espace préhilbertien réel (respectivement complexe) un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ [respectivement sur $\mathbb{C}$] sur lequel on a défini un produit scalaire i.e. une forme bilinéaire symétrique [respectivement une forme hermitienne] $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ satisfaisant à :*

1. $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $(\langle x, x \rangle = 0) \Rightarrow (x = 0)$

Lemme 7.3.1 *Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ $(x \mapsto e_n(x) = e^{inx})$. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, forme un système orthogonal total dans H, i.e. :*
$\langle e_n, e_p \rangle = 1$ ou 0 suivant que $n = p$ ou $n \neq p$ et le sous-espace qu'elle engendre est dense dans H (pour la norme sur H).

Pour simplifier l'écriture, nous noterons f au lieu de $\acute{f}$ les éléments de H. Les coefficients de Fourier de type complexe (c_n) de $f \in H$ sont donnés par le produit scalaire

$$\langle f, e_n \rangle = c_n \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \right)$$

Lemme 7.3.2 *Soit f une fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ à valeurs réelles et intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Alors ses coefficients de Fourier de type complexe (respectivement ordinaires) c_n (respectivement a_n et b_n) vérifient la relation :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \quad i.e. \quad \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

*dite **inégalité de Bessel.***

Preuve $\forall n,\ e_n = \langle f, e_n \rangle$ avec $f \in H$ et $e_n = e^{inx}$. Il suffit de prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

On a $\langle c_k e_k, f - c_k e_k \rangle = 0$ donc $\langle c_k e_k, f \rangle = \langle f, c_k e_k \rangle = |c_k|^2$.
D'où

$$0 \leq \ \langle f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \rangle \ = \ \langle f, f \rangle - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Pour obtenir l'inégalité voulue, on fait $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}(|a_n - ib_n|^2 + |a_n + ib_n|^2) = \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$.
□

Remarque 7.3.1 *L'inégalité de Bessel montre que la famille $(|c_n|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.*

Lemme 7.3.3 (Théorème de Parseval) *Soit f une fonction numérique ou complexe périodique de période 2π et intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Alors ses coefficients de Fourier ordinaires (a_n et b_n) et ses coefficients de Fourier de type complexe (c_n) vérifient les relations :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \pi \left[\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \right]$$

Preuve Soit $f \in H$ et $\varepsilon > 0$; comme $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est total dans H (**Lemme** 7.2.1), il existe une combinaison linéaire finie $g = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i$ telle que $\|f - g\| \leq \varepsilon$; donc à fortiori la projection f_1 de f sur l'espace complet engendré par la famille finie $(e_i)_{i \in J}$, vérifie $\|f - f_1\| \leq \varepsilon$. Or le vecteur $f - \sum_{i \in J} c_i e_i$ est orthogonal à chacun des e_i $(i \in J)$. Donc $f_1 = \sum_{i \in J} c_i e_i$. On a donc

$$0 \leq \ \langle f - \sum_{i \in J} c_i e_i, f - \sum_{i \in J} c_i e_i \rangle \ = \ \langle f, f \rangle - \sum_{i \in J} |c_i|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Comme ε est arbitraire on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) \right|^2 dx = \|f\|^2 = \ \langle f, f \rangle \ \leq \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Compte tenu du **Lemme** 7.3.2, l'égalité est justifiée. □

Bibliographie

[1] P. Krée, J.Vauthier : *Cours deuxième année du DEUG. Analyse-Algèbre-Géométrie,* Éditions ESKA

[2] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudies : *Cours de Mathématiques Tome 2 Analyse*, Éditions Dunod Université.