Q5. $(a,b) \neq 0$

$\gcd(a,b)=1$ $\left(\longrightarrow \text{To show that } \gcd(a+b, ab)=1\right)$

a와 b는 서로소이므로 (∵ Def 38)

$ax+by=1$ for some $x, y \in \mathbb{Z}$ ---(1)

(∵ Cor 40)

만약 $a+b$, ab도 서로소라면,

$(a+b)x_0 + ab\,y_0 = 1$ for some $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

(∵ Cor 40)

(1)의 양변을 제곱하면

$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = 1$ ---(2)

$(a+b)(\quad) + ab\,(2xy \quad)=1$ 꼴로 만들자.

식에서 a^2x^2, b^2y^2이 등장하고

$(a+b)(ax^2+by^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + abx^2 + aby^2$

따라서 식 (2)를 변형하면

$a^2x^2 + b^2y^2 + abx^2 + aby^2 - abx^2 - aby^2 + 2abxy = 1.$

$(a+b)(ax^2+by^2) + ab(2xy - x^2 - y^2) = 1.$

$x, y \in \mathbb{Z}$ 이므로 $ax^2+by^2 \in \mathbb{Z}$

$2xy - x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$.

$\rightarrow (a+b)X + ab\,Y = 1$, $X, Y \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ $a+b$ 와 ab 는 서로소 (∵ Cor 40)

$\rightarrow \gcd(a+b, ab)=1$ (∵ Def 38)

[Q.E.D.]