Q 11. $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$, $n \in \mathbb{N}$

To show $\Rightarrow a^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$ s.t. $\gcd(a,n) = 1$

pf) $\gcd(a,n) = 1$

$\gcd(a,n) = 1$

$\gcd(a^2,n) = 1$

$\gcd(a^3,n) = 1$

⋮

$\gcd(a^n,n) = 1$

by Lemma 48 of

$\gcd(a,b) = 1$ and $\gcd(a,c) = 1$

$\rightarrow \gcd(a,bc) = 1$

by Thm 83,

$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ $(\gcd(a,n)=1)$

$(a^2)^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ $(\gcd(a^2,n)=1)$

$(a^3)^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ $(\gcd(a^3,n)=1)$

⋮

$(a^n)^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ $(\gcd(a^n,n)=1)$

$\rightarrow a^{\phi(n)+2\phi(n)+3\phi(n)\cdots+n\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$a^{\phi(n)\frac{n(n+1)}{2}} \equiv 1 \pmod{n}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \times \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$