Q10. If $p \mid a$, $a^p \equiv a \pmod p$
If $p \nmid a$, $a^p \equiv a \pmod p$ by Remark 85.

$440^p \equiv 77^p \pmod p$

$p \mid 440$, $440^p \equiv 440 \pmod p$
$p \nmid 440$, $440^p \equiv 440 \pmod p$
$p \mid 77$, $77^p \equiv 77 \pmod p$
$p \nmid 77$, $77^p \equiv 77 \pmod p$
} by Remark 85

$440 \equiv 440^p \pmod p$, $440^p \equiv 77^p \pmod p$, $77^p \equiv 77 \pmod p$
$440 \equiv 77 \pmod p$ ($\because$ Thm 67)
$11 \cdot 40 \equiv 11 \cdot 7 \pmod p$
$\leftrightarrow 40 \equiv 7 \left(\mod \frac{p}{\gcd(11,p)}\right)$ ($\because$ Thm 72)

$\frac{p}{\gcd(11,p)} \mid 40-7=33$, $33 = \frac{p}{\gcd(11,p)} \cdot s$ ($s \in \mathbb{Z}$)

즉 $\frac{p}{\gcd(11,p)}$ 는 33의 약수인 1, 3, 11, 33 中 택할수있다.

(Case1) $\frac{p}{\gcd(11,p)} = 1 \rightarrow p = \gcd(11,p)$, $p \geq 2$
p는 {✗ ✗ ✗ ✗ ✗ ✗ ✗ ✗ ✗} 가능한 경우 없다.

(Case2) $\frac{p}{\gcd(11,p)} = 3 \rightarrow p = 3\gcd(11,p)$, $p \geq 2$
{✗ ③ ✗ ✗ ✗ ... ㉝ ... ✗}
but 33은 소수가 아니므로 가능한 p는 ③

(Case3) $\frac{p}{\gcd(11,p)} = 11 \rightarrow p = 11\gcd(11,p)$
{✗ ✗ ... ⑪ ... ✗ ... ⑫① ✗}
but 121은 소수가 아니므로 가능한 p는 ⑪

(Case4) $\frac{p}{\gcd(11,p)} = 33 \rightarrow p = 33\gcd(11,p)$
{✗ ✗ ㉝ ㉝③ ✗}
but 33, 363은 소수가 아니므로 가능한 경우 없다.

ibis

∴ Case 1) Case 2) Case 3) Case 4) 에 의해

가능한 p는 3 or 11 ■