$l = lcm(a,b)$ $\quad d = gcd(a,b)$

Q12.

$a|l$ $\quad b|l$ $\quad d|a$ $\quad d|b$

$\left[\begin{array}{l} l\neq 0 \\ l = aQ_1 \end{array}\right.$ $(Q_1 \in \mathbb{Z})$ $\quad \left[\begin{array}{l} l\neq 0 \\ l = bQ_2 \end{array}\right.$ $(Q_2 \in \mathbb{Z})$ $\quad \left[\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a = dq_1 \end{array}\right.$ $(q_1 \in \mathbb{Z})$ $\quad \left[\begin{array}{l} b\neq 0 \\ b = dq_2 \end{array}\right.$ $(q_2 \in \mathbb{Z})$

(To show that $\Rightarrow l = \frac{ab}{d}$)

i) 식끼리 곱하면

$l^2 = abQ_1Q_2$

$ab = d^2 q_1 q_2$

두 식을 곱하면

$l^2 \cdot d^2 q_1 q_2 = (ab)^2 Q_1 Q_2$

$\left(\frac{ld}{ab}\right)^2 = \frac{Q_1 Q_2}{q_1 q_2}$ ---- (1) 이 식에서

$\frac{Q_1Q_2}{q_1q_2} = 1$ 임을 증명하자.

ii) a, b 가 positive integer 이므로

가능한 경우는 5가지

Case 1) $\boxed{gcd(a,b) = 1}$

$\rightarrow l = ab \quad , \quad d = 1$

$l = aQ_1 = ab \quad , \quad Q_1 = b$

$= bQ_2 = ab, \quad Q_2 = a.$

$a = dq_1 \quad , \quad q_1 = a$

$b = dq_2 \quad , \quad q_2 = b$

$\therefore \frac{Q_1 Q_2}{q_1 q_2} = \frac{ab}{ab} = 1$

(case 2) $\boxed{a \le b \text{ 이고 } \gcd(a,b) = |a|}$

$\rightarrow$ $a \mid b$ 이므로

$b \mid n$ 이면 $a \mid n$은 항상 성립한다.

$\rightarrow$ $l = b$, $d = a$

$l = aQ_1 = b$, $Q_1 = \frac{b}{a}$

$= bQ_2 = b$, $Q_2 = 1$

$a = dq_1 = aq_1$, $q_1 = 1$

$b = dq_2 = aq_2$, $q_2 = \frac{b}{a}$

$\therefore \frac{Q_1 Q_2}{q_1 q_2} = \frac{\frac{b}{a} \cdot 1}{1 \cdot \frac{b}{a}} = 1$

(case 3) $\boxed{a > b \text{ 이고 } \gcd(a,b) = |b|}$

$\rightarrow$ $b \mid a$ 이므로

$a \mid n$ 이면 $b \mid n$은 항상 성립한다.

$\rightarrow$ $l = a$, $d = b$

$l = aQ_1 = a$, $Q_1 = 1$

$= bQ_2 = a$, $Q_2 = \frac{a}{b}$

$a = dq_1 = bq_1$, $q_1 = \frac{a}{b}$

$b = dq_2 = bq_2$, $q_2 = 1$

$\therefore \frac{Q_1 Q_2}{q_1 q_2} = \frac{1 \cdot \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} \cdot 1} = 1$

Case 4) $\boxed{a \le b \text{ 이고 } 1 < \gcd(a,b) \le a}$

$\gcd(q_1, q_2) \neq 1$ 이라 가정하자.

$d_q = \gcd(q_1, q_2) \geq 2$

$d_q \mid q_1 \quad , \quad d_q \mid q_2$

$\begin{cases} q_1 \neq 0 \\ q_1 = d_q q_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 \neq 0 \\ q_2 = d_q \cdot q_{22} \end{cases}$

즉, $a = dq_1 = d d_q q_{11}$ 이므로 이때 $\gcd(a,b) = d d_q$ 이다.

$b = dq_2 = d d_q q_{22}$

이는 처음 가정 $d = \gcd(a,b)$ 에 모순.

$\therefore$ 따라서 $\gcd(q_1, q_2) = 1$ 이다. ---(2)

$gcd(Q_1, Q_2) \neq 1$ 이라 가정하자.

$gcd(Q_1, Q_2) = d_Q \geq 2$

$d_Q | Q_1 \qquad d_Q | Q_2$

$\begin{cases} Q_1 \neq 0 \\ Q_1 = d_Q Q_{11} \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2 \neq 0 \\ Q_2 = d_Q \cdot Q_{22} \end{cases}$

즉, $l = aQ_1 = d_Q \cdot a \cdot Q_{11}$, $\frac{l}{d_Q} = a \cdot Q_{11}$, $a | \frac{l}{d_Q}$

$l = bQ_2 = d_Q \cdot b \cdot Q_{22}$, $\frac{l}{d_Q} = b \cdot Q_{22}$, $b | \frac{l}{d_Q}$

$d_Q | Q_1$, $Q_1 | l$ 이므로 $d_Q | l$,

즉 $\frac{l}{d_Q} \in \mathbb{N}$

$\frac{l}{d_Q} < l$ 이고, $a | \frac{l}{d_Q}$ and $b | \frac{l}{d_Q}$ 이므로

$\frac{l}{d_Q} = lcm(a, b) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a | n \text{ and } b | n\}$ 이다.

이는 처음 가정한 전제조건

$l = lcm(a, b)$ 에 모순이다.

∴ 따라서 $gcd(Q_1, Q_2) = 1$ 이다. ——(3)

$\left.\begin{array}{l} l = aQ_1, \quad a = \frac{l}{Q_1} \\ l = bQ_2, \quad b = \frac{l}{Q_2} \end{array}\right] \frac{a}{b} = \frac{Q_2}{Q_1}$

$\left.\begin{array}{l} a = d q_1, \\ b = d q_2, \end{array}\right] \quad \frac{a}{b} = \frac{q_1}{q_2}$

→ $\frac{a}{b}$의 기약분수를 $\frac{A}{B}$라 할때,

$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{q_1}{q_2}$, $\begin{bmatrix} A = Q_2 = q_1 \\ B = Q_1 = q_2 \end{bmatrix}$ 이다.

$\because \gcd(Q_1, Q_2)=1 \rightarrow Q_1$과 Q_2는 서로소

$(\because (3)) \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1}$는 기약분수

$\gcd(q_1, q_2)=1 \rightarrow q_1$과 q_2는 서로소

$(\because (2)) \rightarrow \frac{q_1}{q_2}$는 기약분수

$\therefore \frac{Q_1Q_2}{q_1q_2} = \frac{\cancel{Q_1}\cancel{Q_2}}{\cancel{Q_2}\cdot\cancel{Q_1}} = 1$ 이다.

Case 5) $\boxed{a>b \text{ 이고 } 1<\gcd(a,b)\le b}$

In a similar way with Case 4,

$\gcd(Q_1, Q_2)=1 \longrightarrow \frac{Q_2}{Q_1}$는 기약분수

$\gcd(q_1, q_2)=1 \longrightarrow \frac{q_1}{q_2}$는 기약분수

$A = Q_2 = q_1$

$B = Q_1 = q_2$ In $\left(\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{q_1}{q_2}\right)$

$\therefore \frac{Q_1Q_2}{q_1q_2} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{Q_2 \cdot Q_1} = 1$.

iii) Case1, Case2, Case3, Case4, Case 5 에 의해

$\frac{Q_1Q_2}{q_1q_2} = 1$.

i)의 (1) 에서 $\left(\frac{ld}{ab}\right)^2 = \frac{Q_1Q_2}{q_1q_2} = 1$,

$\rightarrow (ld)^2 = (ab)^2 \quad \because (a>0,\ b>0\ \ l>0,\ d>0)$

$\rightarrow l\,d = ab$

$l = \frac{ab}{d} \longrightarrow \mathrm{lcm}(a,b) = \frac{ab}{\gcd(a,b)}$ ///

ibis