~~$2025^{2n}+3 \neq 0$, $2025^{n}+1 \neq 0$~~

$2025^{n}-1,\ 4 \in \mathbb{Z}$

Q4. $2025^{2n}+3 = (2025^{n}+1)\cdot(2025^{n}-1)+4$

$\gcd(2025^{2n}+3,\ 2025^{n}+1) = \gcd(2025^{n}+1,\ 4)$ $(\because$ Lemma $42)$

$\gcd(2025^{n}+1,\ 4)$ 는 4의 약수 중 하나이므로

$\gcd(2025^{n}+1,\ 4) = 1$ or 2 or 4

$2025^{n}+1$ 이 4로 나눠지는지 확인하자.

$2025 \equiv 1 \pmod 4$

$2025^{n} \equiv 1^{n} \pmod 4$, $1=1 \rightarrow 1 \equiv 1 \pmod 4$

$2025^{n}+1 \equiv 2 \pmod 4$ $(\because$ Thm $10)$

즉 $2025^{n}+1$ 을 4로 나눌때, 나머지 2가 있으므로

4로 나눠지지 않는다.

이제 $2025^{n}+1$ 이 2로 나눠지는지 확인하자.

2025는 홀수이고, 2025^{n} 도 홀수이다.

$2025^{n}+1$ 은 홀수+홀수 = 짝수 이므로,

2로 나눠진다.

$\therefore \gcd(2025^{n}+1,\ 4) = 2$

$\therefore \gcd(2025^{n}+3,\ 2025^{n}+1) = \gcd(2025^{n}+1,\ 4) = 2$