多传感信息融合

——第八讲：粗糙集理论

闫　　涛

西安交通大学电信学院
自动化系

Email: yantao@mail.xjtu.edu.cn

2016/10/20

粗糙集理论

1.谓词逻辑

2.概率论

3.粗糙集理论

1. 谓词逻辑

连接词：

非：¬；析取：∨；合取：∧；蕴含：→；

等价：⇄，↔ ；

谓词逻辑真值表

P　　Q	¬P	P∨Q	P∧Q	P→Q	P⇄Q
T　　T	F	T	T	T	T
T　　F	F	T	F	F	F
F　　T	T	T	F	T	F
F　　F	T	F	F	T	T

1.1 一些重要的等价式

交换律：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

结合律:$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

分配律：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

德. 摩根律：$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

双重否定律：$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

吸收律：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \qquad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

补余律：$P \vee \neg P \Leftrightarrow T, P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

连接词化归律：$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q,$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

1.2 一些重要的永真蕴含式

化简式：$P \wedge Q \Rightarrow P, P \wedge Q \Rightarrow Q$

附加式：$P \Rightarrow P \vee Q, Q \Rightarrow P \vee Q$

析取三段论：$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

假言推理：$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

拒取式：$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

假言三段论：$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

二难推论：$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$

全称固化:$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$

存在固化:$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(y)$

2.1 概率论

2.3.1 随机现象

2.3.2 样本空间与随机事件

- 样本空间：

  一个可能的实验结果为一个样本点，样本点的全体构成的集合称为样本空间。

- 随机事件：

  要考察的由一些样本点构成的集合称为随机事件。

  - 事件发生了：出现了样本点集合中的一个元素。
  - 必然事件：样本点全体构成的集合(即样本空间)所表示的事件。
  - 不可能事件：$\varnothing$
  - 基本事件：单点集合

- 事件的关系

  包含$A\subset B, A\subseteq B$、并$A\bigcup B$、交 $A\bigcap B$、差 $A-B$、逆 $\overline{A}$

2.1 概率论

1. 古典概型

定义2.1 设E为古典概型，样本空间共有n个基本事件，事件A中含有m个基本事件，则称

$$P(A) = m/n$$

为事件A的概率。

例如：D＝{1,2,3,4,5,6,7}，A={取数字3的倍数}，B={取偶数}。

解：基本事件有7个，n＝7。

对于事件A，m=2，所以$P(A) = m/n = 2/7$

对于事件B，m=3，所以$P(B) = m/n = 3/7$

2.2 事件的概率（2）

2. 统计概率

当试验次数足够多时，一个事件A发生的次数m与试验的总次数n之比：

$$f_n(A)=m/n$$

在一个常数$p(0\le p\le 1)$附近摆动，并稳定于p。

- 定义2.2 在同一组条件下所作的大量重复试验中，事件A出现的频率$f_n(A)$总是在[0,1]上的一个确定常数p附近摆动，并且稳定于p，则称p为事件A的概率。即

$$P(A)=p$$

2.2 事件的概率（3）

3. 概率的性质

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(D) = 1, P(\varnothing) = 0$
- 设事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k \ (k \le n)$ 是两两互不相容的事件，即有 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \ne j)$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$$

- $P(\neg A) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 如果 $A \supset B$ ，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$

2.3 条件概率

- 如果在事件B发生的条件下考虑事件A发生的概率，就称它为事件A的条件概率，记为$P(A|B)$。
- 定义2.3 设A，B是两个事件，$P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

为在事件B已发生的条件下事件A的条件概率。

- 条件概率中的条件缩小了样本空间，即条件概率是在条件所确定的新空间中求$A\cap B$的概率。

2.4 全概率公式与Bayes公式（1）

1. 全概率公式

定理2. 1 设事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$，满足：

(1) 两两互不相容，即当$i \neq j$ 时，有$A_i \cap A_j = \varnothing$；

(2) $P(A_i) > 0 \left(1 \leq i \leq n\right)$

(3) $D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

划分！

则对任何事件B有下式成立：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B \mid A_i)$$

2.4 全概率公式与Bayes公式（2）

2. Bayes公式

定理2.2 条件同定理2.1。则对任何事件B有下式成立：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \times P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P(B \mid A_j)}, \, i = 1, 2, \ldots, n$$

划分！

$$= \frac{P(A_i) \times P(B \mid A_i)}{P(B)}, \, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Leftrightarrow P(A_i \mid B) \times P(B) = P(A_i) \times P(B \mid A_i), \, i = 1, 2, \ldots, n$$

3. 模糊集理论

集合论1872年由德国哈雷大学的康托(Cantor)提出。

模糊集理论1965年由美国加利福尼亚大学的扎德(Zadeh)等人提出。

3.1 模糊性

随机性：事物本身含义明确，但条件不明而不可预知。

模糊性：事物本身是模糊的。例如：青年、老年；高低；

3.2 集合与特征函数

- 定义3.1 设A是论域U上的一个集合，对于任意$u \in U$，令

$$C_A(u) = \begin{cases} 1, & 当 u \in \mathrm{A} \\ 0, & 当 u \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

  则称$C_A(u)$为集合A的特征函数。特征函数$C_A(u)$在$u=u_0$处的取值$C_A(u_0)$称为u_0对A的隶属度。
- 集合A与其特征函数可以认为是等价的。

$$A=\{u|C_A(u)=1\}$$

3.1 模糊集与隶属函数（1）

确定性概念可用普通集合表示。例如“奇数”在论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 上。那么如何表示模糊性概念？

例如“大”，“小”；“冷”，“热”？

模糊集的思路：把特征函数的取值范围从 $\{0,1\}$ 推广到 $[0,1]$ 上。

定义3.2 设 U 是论域，μ_A 是把任意 $u\in U$ 映射为 $[0,1]$ 上某个值的函数，即

$$\mu_A : U\to[0,1] \text{ 或者 } u\to\mu_A(u)$$

则称 μ_A 为定义在 U 上的一个隶属函数，由 $\mu_A(u)(u\in U)$ 所构成的集合 A 称为 U 上的一个模糊集，$\mu_A(u)$ 称为 μ 对 A 的隶属度。

3.1 模糊集与隶属函数（2）

模糊集的例子。

例3.1 论域U={1,2,3,4,5}，用模糊集表示“大”和“小”。

解：设A、B分别表示“大”与“小”的模糊集，μ_A，μ_B分别为相应的隶属函数。

$$A=\{0,0,0.1,0.6,1\}$$

$$B=\{1,0.5,0.01,0,0\}$$

其中：$\mu_A(1)=0$, $\mu_A(2)=0$, $\mu_A(3)=0.1$, $\mu_A(4)=0.6$, $\mu_A(5)=1$
$\mu_B(1)=1$, $\mu_B(2)=0.5$, $\mu_B(3)=0.01$, $\mu_B(4)=0$, $\mu_B(5)=0$

3.1 模糊集与隶属函数（3）

例3.2 论域U={高山，刘水，秦声}，用模糊集A表示“学习好”这个概念。

解：先给出三人的平均成绩：

高山：98分，刘水：90分，秦声：86分

上述成绩除以100后，就分别得到了各自对“学习好”的隶属度：

$$\mu_A(\text{高山})=0.98,\ \mu_A(\text{刘水})=0.90,\ \mu_A(\text{秦声})=0.86$$

则模糊集A为：

$$A=\{0.98, 0.90, 0.86\}$$

3.2 模糊集的表示方法（1）

若论域离散且有限，则模糊集A可表示为：

$$A=\{\mu_A(u_1),\mu_A(u_2),\ldots,\mu_A(u_n)\}$$

也可写为：

$$A=\mu_A(u_1)/u_1+\mu_A(u_2)/u_2+\ldots+\mu_A(u_n)/u_n$$

$$A=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i\text{，或者}A=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i$$

或者：

$$A=\{\mu_A(u_1)/u_1,\mu_A(u_2)/u_2,\ldots,\mu_A(u_n)/u_n\}$$

$$A=\{(\mu_A(u_1),u_1),(\mu_A(u_2),u_2),\ldots,(\mu_A(u_n),u_n)\}$$

隶属度为0的元素可以不写。

例如：

$$A=1/u_1+0.7/u_2+0/u_3+0.4/u_4$$

$$=1/u_1+0.7/u_2+0.4/u_4$$

3.2 模糊集的表示方法（2）

若论域是连续的，则模糊集可用实函数表示。

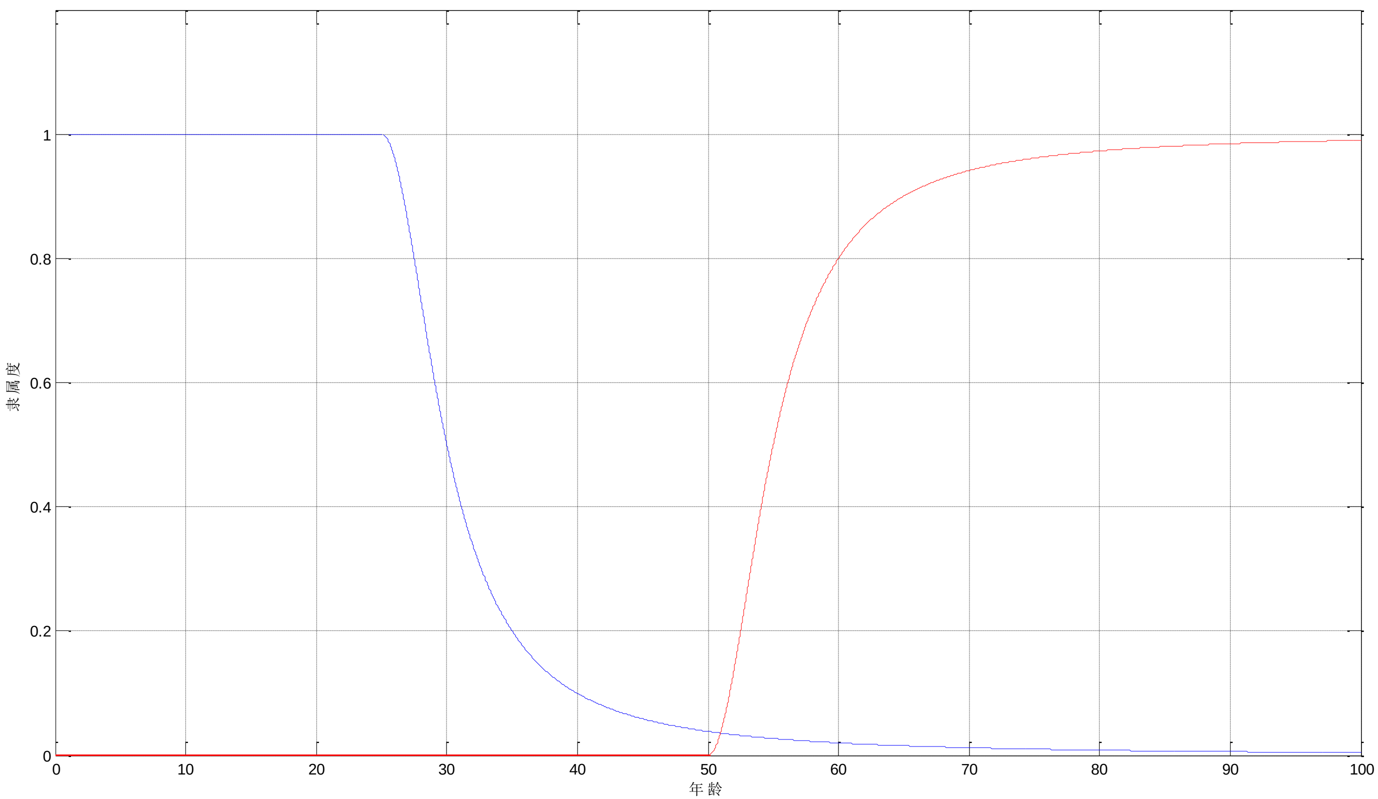
例如：

以年龄为论域U=[0,100]，“年轻”和“年老”这两个概念可表示为：

$$\mu_{年轻}(u)=\begin{cases}1 & 当 0\le u\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & 当 25<u\le 100\end{cases}$$

$$\mu_{年老}(u)=\begin{cases}0 & 当 0\le u\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{5}{u-50}\right)^2\right]^{-1} & 当 50<u\le 100\end{cases}$$

3.2 模糊集的表示方法（3）



3.2 模糊集的表示方法（4）

- 无论论域U有限还是无限，离散还是连续，扎德用如下记号作为模糊集A的一般表示形式:

$$A = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u$$

- U上的全体模糊集，记为：

$$F(U)=\{A|\mu_A:U\rightarrow[0,1]\}$$

3.3 模糊集的运算（1）

模糊集上的运算主要有：包含、交、并、补等等。

1. 包含运算

定义3.3 设A，$B \in F(U)$，若对任意$u \in U$，都有

$$\mu_B(u) \le \mu_A(u)$$

成立，则称A包含B，记为$B \subseteq A$ 。

2. 交、并、补运算

定义3.4 设A，$B \in F(U)$，以下为扎德算子

$$A \bigcup B : \mu_{A \bigcup B}(u) = \max_{u \in U}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \vee \mu_B(u)$$

$$A \bigcap B : \mu_{A \bigcap B}(u) = \min_{u \in U}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)$$

$$\neg A : \mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

3.3 模糊集的运算（2）

例3.3 设$U=\{u_1,u_2,u_3\}$，

$$A=0.3/u_1+0.8/u_2+0.6/u_3$$

$$B=0.6/u_1+0.4/u_2+0.7/u_3$$

则：

$$A\cap B=(0.3\wedge 0.6)/u_1+(0.8\wedge 0.4)/u_2+(0.6\wedge 0.7)/u_3$$

$$=0.3/u_1+0.4/u_2+0.6/u_3$$

$$A\cup B=(0.3\vee 0.6)/u_1+(0.8\vee 0.4)/u_2+(0.6\vee 0.7)/u_3$$

$$=0.6/u_1+0.8/u_2+0.7/u_3$$

$$\neg A=(1-0.3)/u_1+(1-0.8)/u_2+(1-0.6)/u_3$$

$$=0.7/u_1+0.2/u_2+0.4/u_3$$

3.3 模糊集的运算（3）

例3.4 A表示“年老”的模糊集，B表示“年轻”的模糊集。

则：$A \cap B = \int_{u \in U} \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) / u$

$$= \int_{50<u\le u'} [1+(\frac{5}{u-50})^2]^{-1} / u + \int_{u'<u\le 100} [1+(\frac{u-25}{5})^2]^{-1} / u$$

$$A \cup B = \int_{u \in U} \mu_A(u) \vee \mu_B(u) / u$$

$$= \int_{0\le u\le 25} 1/u + \int_{25<u\le u'} [1+(\frac{u-25}{5})^2]^{-1} / u + \int_{u'<u\le 100} [1+(\frac{5}{u-50})^2]^{-1} / u$$

$$\neg A = \int_{0\le u\le 50} 1/u + \int_{50<u\le 100} 1-[1+(\frac{5}{u-50})^2]^{-1} / u$$

$$u' = 50.9629$$

3.3 模糊集的运算（4）

- 有界和算子 $\oplus$ 和有界积算子 $\odot$

$$A \oplus B : \min\{1, \mu_A(u) + \mu_B(u)\}$$

$$A \odot B : \max\{0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1\}$$

- 概率和算子 $\hat{+}$ 与实数积算子 $\cdot$

$$A \hat{+} B : \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \times \mu_B(u)$$

$$A \bullet B : \mu_A(u) \times \mu_B(u)$$

- 爱因斯坦和算子 $\overset{+}{\varepsilon}$ 与爱因斯坦积算子 $\overset{\bullet}{\varepsilon}$

$$A \overset{+}{\varepsilon} B : \frac{\mu_A(u) + \mu_B(u)}{1 + \mu_A(u) \times \mu_B(u)}$$

$$A \overset{\bullet}{\varepsilon} B : \frac{\mu_A(u) \times \mu_B(u)}{1 + [1 - \mu_A(u)] \times [1 - \mu_B(u)]}$$

3.4 模糊集的λ水平截集（1）

- λ水平截集是把模糊集合转化成普通集合的一个重要概念。

定义3.5 设$A\in F(U),\lambda\in[0,1]$，则称普通集合

$$A_\lambda=\{u|u\in U,\mu_A(u)\geq\lambda\}$$

为A的一个λ水平截集，λ称为阈值或置信水平。

- λ水平截集有如下性质：

(1)设A，$B\in F(U)$，则：

$$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$$

$$(A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda$$

(2)若$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，且$\lambda_1<\lambda_2$，则： $A_{\lambda_1}\supseteq A_{\lambda_2}$

- 阈值λ越大，其水平截集A_λ越小，当$\lambda=1$时，A_λ最小，称它为模糊集的核。

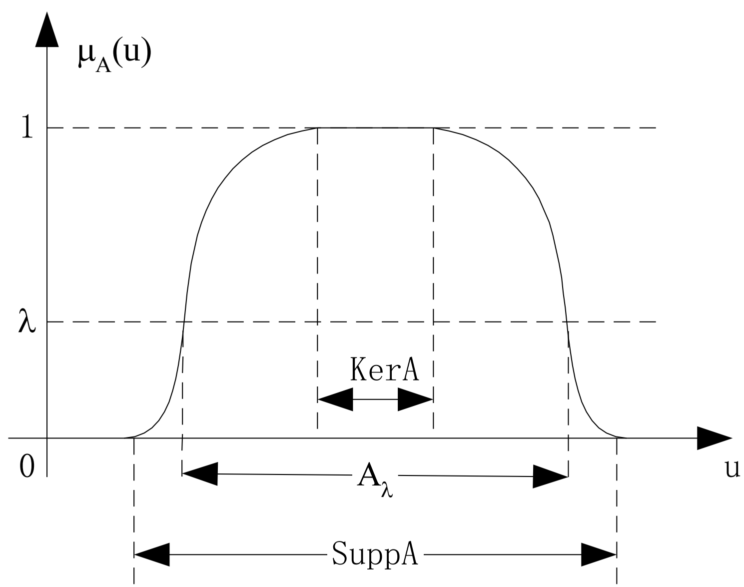
3.4 模糊集的λ水平截集（2）

- 定义3.6 设$A\in F(U)$，则称

$$\mathrm{Ker}\ A=\{u|u\in \mathrm{U},\ \mu_A(u)=1\}$$

$$\mathrm{Supp}\ A=\{u|u\in \mathrm{U},\ \mu_A(u)>0\}$$

分别为模糊集A的核及支集。当$\mathrm{Ker}A\neq\varnothing$时，称$A$为正规模糊集。



3.4 模糊集的λ水平截集（3）

例3.5 设模糊集

$$A=0.3/u_1+0.7/u_2+1/u_3+0.6/u_4+0.5/u_5$$

若λ分别为1,0.6,0.5,0.3，则相应的λ水平截集为：

$$A_1=\{u_3\}$$

$$A_{0.6}=\{u_2,u_3,u_4\}$$

$$A_{0.5}=\{u_2,u_3,u_4,u_5\}$$

$$A_{0.3}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$$

A的核及支集分别是：

$$\mathrm{Ker}A=\{u_3\}$$

$$\mathrm{Supp}A=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$$

3.5 模糊度（1）

1. 模糊度是模糊集的模糊程度的一种度量。

定义3.8 设$A \in F(U)$，d是定义在$F(U)$上的一个实函数，如果它满足以下条件：

(1)对任意$A \in F(U)$，有$d(A) \in [0,1]$;

(2)当且仅当A是一个普通集合时，$d(A)=0$；

(3)若A的隶属函数$\mu_A(u) \equiv 0.5$，则$d(A)=1$;

(4)若$A,B \in F(U)$,且对任意$u \in U$,满足

$$\mu_B(u) \le \mu_A(u) \le 0.5 \text{或者} \mu_B(u) \ge \mu_A(u) \ge 0.5$$

则有$d(B) \le d(A)$

(5)对任意$A \in F(U)$，有$d(A)=d(\neg A)$

则称d为定义在$F(U)$上的一个模糊度，$d(A)$称为A的模糊度。

3.5 模糊度（2）

2. 模糊度的直观含义

- 是[0,1]上一个数；
- 普通集合的模糊度是0，表示所刻画的概念不模糊；
- 越靠近0.5就越模糊，当$\mu_A(u)=0.5$时最模糊；
- 模糊集A与其补集$\neg A$有相同的模糊度。

3.5 模糊度（3）

3. 计算模糊度的方法

- 海明(Haming)模糊度

$$d_1(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|$$

其中，$\mu_{A_{0.5}}(u_i)$ 是A的λ＝0.5截集的隶属函数。由于$A_{0.5}$是一个普通集合，所以$\mu_{A_{0.5}}(u_i)$实际上是特征函数。

- 欧几里德(Euclid)模糊度

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|^2)^{1/2}$$

3.5 模糊度（4）

- 明可夫斯基(Minkowski)模糊度

$$d_p(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|^p\right)^{1/p}$$

- 香农(Shannon)模糊度

$$d(A)=\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}S(\mu_A(u_i))$$

其中$S(x)$是定义在[0,1]上的香农函数，即

$$S(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\ or\ x=0\end{cases}$$

3.5 模糊度（5）

例3.6 设$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$

$$A=0.8/u_1+0.9/u_2+0.1/u_3+0.6/u_4$$

则 $$d_1(A)=\frac{2}{4}(|0.8-1|+|0.9-1|+|0.1-0|+|0.6-1|)$$

$$=\frac{1}{2}(0.2+0.1+0.1+0.4)$$

$$=0.4$$

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{4}}[(0.8-1)^2+(0.9-1)^2+(0.1-0)^2+(0.6-1)^2]^{1/2}$$

$$=0.47$$

3.6 模糊数（1）

模糊的数量，例如：500人左右，大约0.6

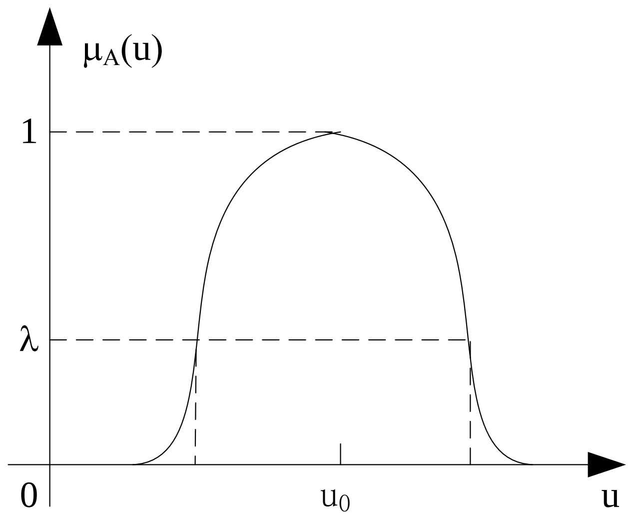
1. 定义3. 9 如果实数域R上的模糊集A的隶属函数$\mu_A(u)$在R上连续且具有如下性质：

(1)A是凸模糊集，即对任意$\lambda \in [0,1]$, A_λ是闭区间；

(2)A是正规模糊集，即存在$u \in R$，使$\mu_A(u)=1$。

则称A为一个模糊数。

直观上模糊数的隶属函数图形是单峰的，且在峰顶使隶属度达到1。



3.6 模糊数（2）

一个模糊数的例子:

“6左右”

$$\mu_6(u)=\begin{cases} e^{-10(u-6)^2}, & 当|u-6|\le 3 \\ 0, & 当|u-6|>3 \end{cases}$$

3.6 模糊数（3）

2. 模糊数的运算

- 定义3.10 设θ是实数域R上的一种二元运算，A和B为任意的模糊数，则模糊数间的运算定义为

$$A\theta B:\mu_{A\theta B}(z)=\bigvee_{z=x\theta y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$$

- 两个模糊数之间的运算，实际上是对应元素的隶属度先取极小，再取极大。

3.6 模糊数（4）

例3.7 设有

3左右=0.5/2+1/3+0.6/4

2左右=0.4/1+1/2+0.7/3

$$
\begin{aligned}
3\text{左右}+2\text{左右} &= \frac{0.5\wedge 0.4}{2+1}+\frac{0.5\wedge 1}{2+2}+\frac{0.5\wedge 0.7}{2+3} \\
&+\frac{1\wedge 0.4}{3+1}+\frac{1\wedge 1}{3+2}+\frac{1\wedge 0.7}{3+3} \\
&+\frac{0.6\wedge 0.4}{4+1}+\frac{0.6\wedge 1}{4+2}+\frac{0.6\wedge 0.7}{4+3} \\
&=0.4/3+0.5/4+1/5+0.7/6+0.6/7
\end{aligned}
$$

3.6 模糊数（5）

续上例

$$
\begin{aligned}
3\text{左右}\times 2\text{左右} &= \frac{0.5\wedge 0.4}{2\times 1}+\frac{0.5\wedge 1}{2\times 2}+\frac{0.5\wedge 0.7}{2\times 3} \\
&+\frac{1\wedge 0.4}{3\times 1}+\frac{1\wedge 1}{3\times 2}+\frac{1\wedge 0.7}{3\times 3} \\
&+\frac{0.6\wedge 0.4}{4\times 1}+\frac{0.6\wedge 1}{4\times 2}+\frac{0.6\wedge 0.7}{4\times 3} \\
&=0.4/2+0.4/3+0.5/4+1/6+0.6/8+0.7/9+0.6/12
\end{aligned}
$$

- 模糊数乘或者除的结果可能不是一个模糊数。

3.7 模糊关系及其合成（1）

模糊关系

定义3.11 A_i是$U_i(i=1,2,\ldots,n)$上的模糊集，则称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\int_{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n}(\mu_{A_1}(u_1)\wedge\mu_{A_2}(u_2)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_n}(u_n))/(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

为$A_1,A_2,\ldots,A_n$的笛卡儿乘积，它是$U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$上的一个模糊集。

定义3.12 在$U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$上一个$n$元模糊关系$R$是指以$U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$为论域的一个模糊集，记为

$$R=\int_{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n}\mu_R(u_1,u_2,\cdots,u_n)/(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

3.7 模糊关系及其合成（2）

例3.8 U={张三，李四，王五}

V={篮球，排球，足球，乒乓球}

$U \times V$上的一个模糊关系R

	篮球	排球	足球	乒乓球
张三	0.7	0.5	0.4	0.1
李四	0	0.6	0	0.5
王五	0.5	0.3	0.8	0

3.7 模糊关系及其合成（3）

- 一般地说，当U和V都是有限论域时，其模糊关系R可用一个模糊矩阵表示。

$$U=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$$

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

则$U\times V$上的模糊关系为

$$R=\begin{bmatrix} \mu_R(u_1,v_1) & \mu_R(u_1,v_2) & \cdots & \mu_R(u_1,v_n) \\ \mu_R(u_2,v_1) & \mu_R(u_2,v_2) & \cdots & \mu_R(u_2,v_n) \\ \cdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(u_m,v_1) & \mu_R(u_m,v_2) & \cdots & \mu_R(u_m,v_n) \end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系及其合成（4）

例3.9 设$U=V=\{u_1,u_2,u_3\}$,R是“信任关系”，可有

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 模糊关系的合成

定义3.13 设R_1与R_2分别是$U\times V$与$V\times W$上的两个模糊关系，则R_1与R_2的合成是指从U到W的一个模糊关系，记为

$$R_1 \circ R_2$$

其隶属函数为

$$\mu_{R_1\circ R_2}(u,w)=\vee\{\mu_{R_1}(u,v)\wedge\mu_{R_2}(v,w)\}$$

3.7 模糊关系及其合成（5）

例3.10 设有两个模糊关系

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

则R_1与R_2的合成是

$$R = R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- 合成法则类似于矩阵乘法。

3.8 模糊变换（1）

- 定义3.14 设$A=\{\mu_A(u_1),\mu_A(u_2),\ldots,\mu_A(u_n)\}$是论域$U$上的模糊集，$R$是$U\times V$上的模糊关系，则

$$A\circ R=B$$

称为模糊变换。

例3.11 设$A=\{0.2,0.5,0.3\}$

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.7 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}$$

则

$$B=A\circ R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.1\end{bmatrix}$$

3.8 模糊变换（2）

例3.12（满汉全席，食神），$U=\{u_1(色),u_2(香),u_3(味),\}$，
$V=\{v_1(优),v_2(良),v_3(中),v_4(差)\}$

对某道菜可得出其模糊关系矩阵R

$$R=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$$

行表示百分之几的裁判认为其优、良、中、差

评判因素模糊向量$A=\{0.3(色),0.3(香),0.4(味)\}$，

则，最终结果为：

$$B=A\circ R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$$

3.9 几种常用的隶属函数（1）

- 正态分布

$$\mu_A(u) = e^{-k(u-a)^2}, \quad k > 0$$

- 升正态分布

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0, & u \le a \\ 1 - e^{-k(u-a)^2}, & u > a, k > 0 \end{cases}$$

- 降正态分布

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & u \le a \\ e^{-k(u-a)^2}, & u > a, k > 0 \end{cases}$$

3.9 几种常用的隶属函数（2）

- 柯西分布

$$\mu_A(u)=\frac{1}{1+\alpha(u-a)^{\beta}},\quad \alpha>0,\beta=2n,(n=1,2,\ldots)$$

- 升柯西分布

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0, & u\le a\\ \dfrac{\alpha(u-a)^{\beta}}{1+\alpha(u-a)^{\beta}}, & u>\alpha,\alpha>0,\beta>0\end{cases}$$

- 降柯西分布

$$\mu_A(u)=\begin{cases}1, & u\le a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(u-a)^{\beta}}, & u>a,\alpha>0,\beta>0\end{cases}$$

3.10 建立隶属函数的方法（1）

- 模糊统计法
- 对比排序法
- 专家评判法
- 基本概念扩充法

$$\mu_{极大}(u)=\mu_{大}^{4}(u) \qquad \mu_{很大}(u)=\mu_{大}^{2}(u)$$

$$\mu_{相当大}(u)=\mu_{大}^{1.5}(u) \qquad \mu_{比较大}(u)=\mu_{大}^{0.75}(u)$$

$$\mu_{有点大}(u)=\mu_{大}^{0.5}(u) \qquad \mu_{稍许有点大}(u)=\mu_{大}^{0.25}(u)$$

- 神经网络自适应寻找
- 聚类法

……

3.10 建立隶属函数的方法（2）

例2.20 设$U=\{1,2,\ldots,10\}$，已知：

大=0.2/4+0.4/5+0.6/6+0.8/7+1/8+1/9+1/10

小=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5

则，

不大也不小=不大∩不小

=0.2/2+0.4/3+0.6/4+0.6/5+0.4/6+0.2/7

很大=$\mu_{大}{}^{2}(u)$

= $0.2^2/4+0.4^2/5+0.6^2/6+0.8^2/7+1^2/8+1^2/9+1^2/10$

=0.04/4+0.16/5+0.36/6+0.64/7+1/8+1/9+1/10

有点大=$\mu_{大}{}^{0.5}(u)$

= $0.2^{0.5}/4+0.4^{0.5}/5+0.6^{0.5}/6+0.8^{0.5}/7+1^{0.5}/8+1^{0.5}/9+1^{0.5}/10$

= 0.45/4+0.63/5+0.77/6+0.89/7+1/8+1/9+1/10

3.11 模糊命题

- 含有模糊概念、模糊数据或带有确信程度的语句称为模糊命题。它的一般表示形式为：

$$x \quad \text{is} \quad A$$

或者

$$x \quad \text{is} \quad A \quad (CF)$$

其中，x是论域上的变量，用以代表所论述对象的属性；A是模糊概念或者模糊数，用相应的模糊集及隶属函数刻画；CF是该模糊命题的确信度或相应事件发生的可能性程度，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或者模糊语言值。

3.11 模糊推理的基本模式(1)

模糊推理的三种基本模式：假言推理、拒取式推理和三段论推理

1. 模糊假言推理

设$A \in F(U)$, $B \in F(V)$，且它们具有如下关系：

知识：IF x is A THEN y is B

证据： x is A'

结论： y is B'

对于复合条件有：

知识：IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN y is B

证据： x_1 is A'_1 x_2 is A'_2 … x_n is A'_n

结论： y is B'

3.11 模糊推理的基本模式(2)

2. 模糊拒取式推理

知识：IF x is A THEN y is B

证据： y is B'

结论： x is A'

3. 模糊三段论推理

IF x is A THEN y is B

IF y is B THEN z is C

IF x is A THEN z is C

3.11 模糊推理的基本模式(3)

知识中只含有简单条件且不带可信度因子的模糊推理称为简单模糊推理。

按照扎德等人提出的合成推理规则，对于知识：

$$\text{IF} \quad x \quad \text{is} \quad A \quad \text{THEN} \quad y \quad \text{is} \quad B$$

首先构造出A与B之间的模糊关系R，然后通过R与证据的合成求出结论。

如果已知证据是 x is A'且A与A'可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取B'：

$$B' = A' \circ R$$

如果已知证据是 y is B'且B与B'可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取A'：

$$A' = R \circ B'$$

3.12 简单模糊推理(1)

1. 扎德(Zadeh)方法

扎德提出了两种方法：一种称为条件命题的极大极小规则；另一种称为条件命题的算术规则，由它们获得的模糊关系分别记为R_m和R_a。

设$A\in$F(U),$B\in$F(V)，其表示分别为

$$A=\int_U \mu_A(u)/u \quad ,B=\int_V \mu_B(v)/v$$

且用×，∪，∩，¬，⊕ 分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及有界和运算，则扎德把R_m和R_a分别定义为

$$R_m=(A\times B)\bigcup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

3.12 简单模糊推理(2)

例5.8 设$U=V=\{1,2,3,4,5\}$, $A=1/1+0.5/2$, $B=0.4/3+0.6/4+1/5$

并设模糊知识及模糊证据分别为：

知识： IF x is A THEN y is B

证据： x is A'

y is B'

其中，A'和B'的模糊集为：

$$A'=1/1+0.4/2+0.2/3$$

$$B'=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5$$

则由模糊知识可分别得到R_m与R_a：

$$R_m(i,j)=(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(v_j))\vee(1-\mu_A(u_i))$$

$$R_a(i,j)=1\wedge(1-\mu_A(u_i)+\mu_B(v_j))$$

3.12 简单模糊推理(3)

$A=1/1+0.5/2$

$B=0.4/3+0.6/4+1/5$

$R_m(i,j)=(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(v_j))\vee(1-\mu_A(u_i))$

$R_a(i,j)=1\wedge(1-\mu_A(u_i)+\mu_B(v_j))$

$$R_m=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_a=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.12 简单模糊推理(4)

$$B'_m = A' \circ R_m = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'_a = A' \circ R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

该例子是偶然，一般来说B'_m与B'_a不相同!

3.12 简单模糊推理(5)

$$A'_m = R_m \circ B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A'_a = R_a \circ B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

3.12 简单模糊推理(6)

2. 麦姆德尼(Mamdani)方法

麦姆德尼提出一种称为条件命题的最小运算规则来构造模糊关系，记为R_c。

设$A \in F(U), B \in F(V)$，其表示分别为

$$A = \int_U \mu_A(u)/u \quad , B = \int_V \mu_B(v)/v$$

且用$\times$，$\cup$，$\cap$，$\neg$，$\oplus$ 分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及有界和运算，则麦姆德尼把R_c定义为

$$R_c = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)/(u,v)$$

3.12 简单模糊推理(7)

3. 水本(Mizumoto)方法

米祖莫托等人根据多值逻辑中计算T(A →B)的定义，提出了一组构造模糊关系的方法，分别记R_s, R_g, R_{sg} , R_{gs} , R_{gg} , R_{ss} , R_b , $R_\triangle$, $R_\blacktriangle$, R_*, $R_\#$, $R_\square$。其定义分别为：

$$R_s = A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)]/(u,v)$$

$$R_{sg} = (A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B)\bigcap(\neg A\times V \underset{g}{\Rightarrow} U\times\neg B)$$

$$= \int_{U\times V}\{[\mu_A(u)\underset{s}{\rightarrow}\mu_B(v)]\wedge[(1-\mu_A(u))\underset{g}{\rightarrow}(1-\mu_B(v))]\}/(u,v)$$

$$R_\square = A\times V \underset{\square}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u)\underset{\square}{\rightarrow}\mu_B(v)]/(u,v)$$

其中：

$$\mu_A(u)\underset{\square}{\rightarrow}\mu_B(v)=\begin{cases}1 & \mu_A(u)<1\text{或}\mu_B(v)=1\\ 0 & \mu_A(u)=1\text{且}\mu_B(v)<1\end{cases}$$

……

3.12 简单模糊推理(8)

原则	A’	B’	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_{sg}	R_{gs}	R_{gg}	R_{ss}	R_b	$R_\triangle$	$R_\blacktriangle$	R_*	$R_\#$	$R_\square$
1	A	B	×	×	v	v	v	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
2	Very A	Very B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
3	Very A	B	×	×	v	×	v	×	v	v	×	×	×	×	×	×	×
4	more or less A	More or less B	×	×	×	v	v	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
5	More or less A	B	×	×	v	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
6	Not A	Unknown	v	v	×	v	v	×	×	×	×	v	v	v	v	v	v
7	Not A	Not B	×	×	×	×	×	v	v	v	v	×	×	×	×	×	×
8	Not A	Not B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
9	Not very A	Not very B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
10	Not more or less A	Not more or less B	×	×	×	v	×	v	×	×	v	×	×	×	×	×	×
11	Unknown	B	×	v	×	v	v	×	×	×	×	v	v	v	v	v	v
12	A	B	×	×	v	×	×	×	×	v	v	×	×	×	×	×	×

3.12 简单模糊推理(9)

不同模糊关系的模糊三段论验证结果：

模糊关系	R_m	R_a	R_c	R_s	R_g	R_{sg}	R_{gs}	R_{gg}	R_{ss}	R_b	$R_{\triangle}$	$R_{\blacktriangle}$	R_*	$R_\#$	$R_{\square}$
模糊三段论	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	✓

表中，“✓”表示满足，“×”表示不满足。

谢谢!