# Analysis für Informatik

-

Ass.Prof. Clemens Amstler

23. Februar 2019

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen eine Reihe von Axiomen, die in drei Gruppen unterteilt werden können.

I. Algebraische Axiome

II. Anordnungsaxiome

III. Vollständigkeitsaxiome

## 1.1 Algebraische Axiome

Die reellen Zahlen bilden mit der Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a + b$ und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$ einen Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, der folgende Axiome erfüllt:

1) $\mathbb{R}$ ist bzgl. der Addition eine Abelsche Gruppe. $(\mathbb{R}, +)$

2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bzgl der Multiplikation eine Abelsche Gruppe. $(\mathbb{R}, \cdot)$

3) Das Distributivgesetz gilt: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Andere Beispiele von Körpern: $\mathbb{C}$ , $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{Z}_p$ für $p$ prim. Die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \infty\}$ und die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden keinen Körper.

#### 1.1.1. Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot a = 0$.

***Beweis:*** $0+0=0$

$$\begin{aligned} a\cdot(0+0) &= a\cdot 0 && \text{Distributivgesetz} && \Rightarrow \\ a\cdot 0 + a\cdot 0 &= a\cdot 0 && \mathbb{R}\text{ assiozativ} && \Rightarrow \\ a\cdot 0 + (a\cdot 0 - a\cdot 0) &= (a\cdot 0 - a\cdot 0) && \text{additives Inverses} && \Rightarrow \\ a\cdot 0 + 0 &= 0 && 0+0=0 && \Rightarrow \\ a\cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

*q.e.d.*

#### 1.1.2. Potenzschreibweise

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ wird $a^n$ folgendermaßen induktiv definiert: $a^n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ a(a^{n-1}) & n>0 \\ (a^{-1})^n & n<0\ \forall a \neq 0 \end{cases}$

#### 1.1.3. Bemerkung

$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (2) $a^{n^m} = a^{nm}$ (3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

***Beweis:***

(1) $a^n \cdot a^m \overset{\text{n. Def.}}{=} \overbrace{a\ldots a}^{n\text{-mal}} \cdot \overbrace{a\ldots a}^{m\text{-mal}} = \overbrace{a\ldots a}^{n+m\text{-mal}} \overset{\text{n. Def.}}{=} a^{n+m}$

(2) $a^{n^m} = a^{\overbrace{n\ldots n}^{m\text{-mal}}} = a^{m\cdot n} = a^{n\cdot m}$

(3) $a^n \cdot b^n = \overbrace{a\ldots a}^{n\text{-mal}} \cdot \overbrace{b\ldots b}^{n\text{-mal}} = \overbrace{ab\ldots ab}^{n\text{-mal}} = (a\cdot b)^n$

*q.e.d.*

### 1.2 Anordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden in positive Zahlen, negative Zahlen und 0 unterteilt. Dabei ist $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ Und es gelten folgende Axiome:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Bedingungen: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$

(2) $\forall x, b \in \mathbb{R}\ x, b > 0$ gilt: $a + b > 0 \wedge a \cdot b > 0$

Wir schreiben für $a, b \in \mathbb{R}\ a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ und $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

#### 1.2.1. Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

***Beweis:*** Sei $a < b$ und $b < c \Rightarrow a - b < 0$ und $b - c < 0 \Rightarrow a - b + b - c < 0 \Rightarrow a - c < 0 \Rightarrow a < c$ *q.e.d.*

#### 1.2.2. Bemerkung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

b) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

c) $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

d) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ speziell $1 > 0$

e) $0 < a < b$ und $a < b < 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

### 1.2.3. Definition

Für $a \in \mathbb{R}$ und der Betrag $|\,a\,|$ folgendermaßen definiert. $|\,a\,| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

### 1.2.4. Satz

$\forall b \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|\,a \cdot b\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$

(2) $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$ (Dreiecksungleichung)

(3) $|\,a - b\,| \geq |\,|\,a\,| - |\,b\,|\,|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

***Beweis:***

(1) Beweis durch Fallunterscheidung.

(2) Fall 1 $\quad a \leq |\,a\,|$ und $\quad b \leq |\,b\,| \quad \Rightarrow \quad a + \quad b \quad \leq \quad |\,a\,| + |\,b\,|$

Fall 2 $\quad -a \leq |\,a\,|$ und $\; -b \leq |\,b\,| \quad \Rightarrow \; -a + \; -b \quad \leq \quad |\,a\,| + |\,b\,|$

$\Rightarrow a + b \leq |\,a\,| + |\,b\,|$ und $-(a+b) \leq |\,a\,| + |\,b\,| \Rightarrow |\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$

(3) 1. $|\,a\,| = |\,a - b + b\,| \leq |\,a - b\,| + |\,b\,| \Rightarrow |\,a\,| - |\,b\,| \leq |\,a - b\,|$

2. $|\,b\,| = |\,a - b - a\,| \leq |\,a - b\,| + |\,a\,| \Rightarrow |\,b\,| - |\,a\,| \leq |\,a - b\,|$

$\Rightarrow |\,a\,| - |\,b\,| \leq |\,a - b\,|$ und $-(|\,a\,| - |\,b\,|) \leq |\,a - b\,|$

$\Rightarrow |\,|\,a\,| - |\,b\,|\,| \leq |\,a - b\,|$

*q.e.d.*

### 1.2.5. Archimedisches Axiom

Für zwei positive Zahlen, $a, b$ gibt es immer eine natürliche Zahl $n$, sodass folgendes gilt: $n \cdot b > a$ Also:

$$\forall a, b > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad n \cdot b > a$$

Als Folgerung erhalten wir: Setze $b = 1$

$$\forall a > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad n > a$$

### 1.2.6. Bernoullische Ungleichung

Sei $a > -1$ dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \; (1 + a)^n \geq 1 + na$$

***Beweis:*** IA: $n = 0: \; 1 = (1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a = 1$

IV: $(1+a)^n \geq 1 + na$

IS: $n \mapsto n+1:$

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\ &\overset{IV}{\geq} (1+a)(1+na) \\ &= 1 + na + a + \underbrace{na^2}_{>0} \\ &\geq 1 + (n+1)a\end{aligned}$$

*q.e.d.*

**1.2.7. Korollar**

Sei $a > 0$.

(1) Ist $a > 1 \; \forall k > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n > k$.

(2) $0 < a < 1 \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n < \varepsilon$

***Beweis:***

(1) Sei $a = x + 1 > 1 \Rightarrow a^n = (x+1)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx$
$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x > 0$ mit $nx > k - 1 \Rightarrow a^n \geq 1 + nx > 1 + k - 1 = k$

(2) Sei $0 < a < 1$ und $b = \dfrac{1}{a} > 1 \overset{mit(1)}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{R}$ mit $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = b^n > k = \dfrac{1}{\varepsilon}$
$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}\right)^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{a^n} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon.$

*q.e.d.*

## 1.3 Vollständigkeitsaxiom

Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ hat keine Lücken.

**1.3.1. Definition Infimum/Supremum**

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1. $k \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von $M$ wenn gilt, $\forall x \in M$, $x \leq k$. $M$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt. zB $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beskchränkt, nach dem Archimedischem Axiom.

2. $k \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von $M$ wenn gilt, $\forall x \in M$, $x \geq k$. $M$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt.

3. $M$ heißt beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existiert. Äquivalente Definition für Beschränktheit: $\exists k \in \mathbb{R}, \; | \, x \, | \leq k \; \forall x \in M$

4. $a \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von $M$, falls $a$ größte untere Schranke von $M$ ist. Das heißt $a$ ist untere Schranke von $M$ und ist $k$ eine untere schranke von $M$, dann folgt $k \leq a$

   Schreibweise: $a = inf(M)$

5. $b \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von $M$, falls $b$ kleinste obere Schranke von $M$ ist. Das heißt $b$ ist obere Schranke von $M$ und ist $k$ eine obere schranke von $M$, dann folgt $k \geq a$

   Schreibweise: $b = sup(M)$

### 1.3.2. Beispiel

Sei $a < b$ dann ist $inf[a,b] = a = inf(a,b)$ und $sup[a,b] = b = sup(a,b)$.

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \quad \text{heißt abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) &= \{a \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \quad \text{heißt offenes Intervall} \end{aligned}$$

### 1.3.3. zur Erinnerung

Definition der natürlichen Zahlen (Axiom des kleinsten Element (Pianoaxiome))
Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

### 1.3.4. Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum $inf(M) \in \mathbb{R}$.

*ohne Beweis.*

### 1.3.5. Bemerkung

$inf(M)$ muss kein Element von $M$ sein.

### 1.3.6. Proposition

Jede nicht leere nach oben bescrhänkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $sup(M) \in \mathbb{R}$.

***Beweis:*** Seien $M$ nach oben beschränkt und $a$ eine obere Schranke von $M$.
$\Rightarrow \forall x \in M \quad x \leq a \Rightarrow -a \leq -x \quad \forall x \in M \Rightarrow -a$ ist untere Schranke von $-M = \{-x \ : \ x \in M\}$
$\Rightarrow -M$ ist nach unten beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom, existiert ein Infimum.
Sei $b = inf(-M) \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow -b \leq a$ und $b \leq -x \Rightarrow x \leq -b \quad \forall x \in M$.
Also $-b$ ist obere Schranke und kleinste obere Schanke. $\Rightarrow -b = sup(M)$ *q.e.d.*

### 1.3.7. Proposition

$sup(M)$ und $inf(M)$ sind eindeutig bestimmt.

***Beweis:*** Seien $m$ und $m'$ Suprema von $M \Rightarrow m \leq m'$ und $m' \leq m \Rightarrow m = m'$.
analog für Infimum. *q.e.d.*

# 2 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind die Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Wir setzen $1 = (1,0), i = (0,1) \Rightarrow z = (a,b) = a + ib$

zusätzlkich verlangen wir $i^2 = -1$ Also: $\mathbb{C} = \left\{z = a + ib \ : \ a,b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$

### 2.1. Satz

Es gilt: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

***Beweis:*** Sei $x,y,z \in \mathbb{C}$ und $x = a + ib$, $y = c + id$, $z = e + if$

I) $\mathbb{C}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition:

i) $x + y = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C}$

ii) $x + 0 = a + ib + 0 + i0 = a + ib = x$

iii) $\exists - x \in \mathbb{C}$ mit $x + -x = a + ib - a - ib = 0$

iv) $x + y = (a + c) + i(b + d) = (c + a) + i(d + b) = y + x$

II) $\mathbb{C}$ ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation:

i) $xy = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc) \in \mathbb{C}$

ii) $1x = (1 + i0)(a + ib) = a + ib = x$

iii) $\exists x^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $xx^{-1} = (a + ib)\dfrac{a + ib}{a^2 - b^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1$

iv) $xy = (ac - bd) + i(ad - bc) = (ca - bd) + i(da - cb) = yx$

III) Das Distributivgesetz gilt:

$$
\begin{aligned}
z(x + y) &= (e + if)(a + c + ib + id) \\
&= ea + ec - fb - fd + ifa + ifc + ieb + ied \\
&= ea - fb + ifa + ieb + ec - fd + ied + ifc \\
&= xy + xz
\end{aligned}
$$

*q.e.d.*

### 2.2. Definition

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$

- $\overline{z} = a - ib$ heißt die konjungiert komplexe Zahl von $z$.
- $|\, z \,| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt Betrag von $z$.
- $a = Re(z)$ heißt Realteil von $z$.
- $b = Im(z)$ heißt Imaginärteil von $z$.

### 2.3. Satz

Es gilt: $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ und $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

***Beweis:***

*q.e.d.*

### 2.4. Proposition

Es gilt:

(i) $\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}, \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}, \quad |\, \overline{z} \,| = |\, z \,|$

(ii) $|\, z \,| \geq 0, \quad |\, z \,| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(iii) $|\, z_1 z_2 \,| = |\, z_1 \,| \, |\, z_2 \,|$

(iv) $|\, z_1 + z_2 \,| \leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|$

***Beweis:***

(i)
- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$
- $\overline{z_1} + \overline{z_2} = a - ib + c - id = (a+c) - i(b+d) = \overline{z_1 + z_2}$
- $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a-ib)(c-id) = (ac+bd) - i(ac+bc) = \overline{z_1 z_2}$
- $\mid \overline{z} \mid = \sqrt{a^2+b^2} = \mid z \mid$

(ii)
- $\mid z \mid = a^2 + b^2 > 0$
- $\mid z \mid = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \Leftrightarrow a = b = 0$

(iii) $\mid z_1 z_2 \mid^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = \mid z_1 \mid^2 \mid z_2 \mid^2 \Leftrightarrow \mid z_1 z_2 \mid = \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid$

(iv) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ $z \in \mathbb{C}$ $z = a + ib$

$$Re(z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = \mid z \mid^2 \Rightarrow Re(z) \leq \mid Re(z) \mid = \sqrt{Re(z)} \leq \mid z \mid$$

$$\Rightarrow Re(z_1 \overline{z_2}) \leq \mid z_1 \overline{z_2} \mid = \mid z_1 \mid \mid \overline{z_2} \mid = \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid$$

$$\begin{aligned}
\mid z_1 + z_2 \mid^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} && \text{denn } z_2\overline{z_1} = \overline{z_1\overline{z_2}} \\
&= \mid z_1 \mid^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + \mid z_2 \mid^2 && \text{denn } z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2Re\,(z_1 z_2) \\
&= \mid z_1 \mid^2 + 2Re\left(z1\overline{z2}\right) + \mid z_2 \mid^2 && \text{denn } Re\,(z_1 z_2) \leq \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid \\
&\leq \mid z_1 \mid^2 + 2 \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid + \mid z_2 \mid^2 = (\mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid$$

*q.e.d.*

# 3 Folgen

### 3.1. Beispiel

Betrachte

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

***Beweis:*** Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ und p und q nicht beide durch 2 teilbar, sonst kürzen wir.

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{p^2}{q^2} && \Rightarrow \\
2q^2 &= p^2 && \Rightarrow \quad \text{Also } 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow \exists m \text{ mit } p = 2m. \\
2q^2 &= (2m)^2 = 4m^2 && \Rightarrow \\
q^2 &= 2m^2 && \quad\ \ \text{d.h. } 2|q^2 \Rightarrow 2|q \text{ Also p und q sind beide durch 2 teilbar.}
\end{aligned}$$

Widerspruch! p und q sind nicht beide durch 2 teilbar. $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *q.e.d.*

### 3.2. Bemerkung

$\sqrt{2}$ ist die positive Lösung von $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow 2a = a + \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{2}{a}\right)$

Betrachte die rechte Seite dieser Gleichung und berechne diese induktiv

Setze zB

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1,5 \qquad a_3 \approx 1.41 \qquad a_3 \approx 1,4142 \qquad \dots$

Also $a_n$ nähert sich mit wachsendem $n$ immer mehr an $\sqrt{2}$. Dies führt zu dem Begriff **Grenzwert einer Folge**.

### 3.3. Definition

Eine Folge $(a_n)_{k=0}^{\infty}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$ Bezeichnung: Wir schreiben für Folgen

$$(a_n)_{k=0}^{\infty} \qquad (a_n)_{n\geq 0} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n) \qquad (a_n)_{n\geq n_0}$$

### 3.4. Definition

Eine Folge $(a_n)$ heißt

1. (streng) monoton wachsend, wenn $\forall a \in \mathbb{N}\ a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n) \nearrow \quad (a_n < a_{n+1} \quad (a_n) \uparrow)$
2. (streng) monoton fallend, wenn $\forall a \in \mathbb{N}\ a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n) \searrow \quad (a_n > a_{n+1} \quad (a_n) \downarrow)$
3. (streng) monoton, sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

### 3.5. Beispiel

Ein paar Beispiele zu Folgen:

(1) Die konstante Folge $a_n = k$ ist monoton fallend und steigend.

(2) Die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1$ ist streng monoton fallend.

(3) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

(4) Die geometische Folge $a_n = a^n\ \forall n \geq 0$ Sei $a \in \mathbb{R}$ $a^n$ ist $\begin{cases} \text{streng monoton wachsend} & a > 0 \\ \text{streng monoton fallend} & 0 < a < 1 \\ \text{monoton} & a = 1 \\ \text{nicht monoton} & \end{cases}$

(5) Die Fibonacci Folge ist monoton wachsend. $f_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0, n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{sonst} \end{cases}$

### 3.6. Definition der Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq N \ : \ |\, a_n - a \,| < \varepsilon$$

$a$ heißt der Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)$. Die Folge $(a_n)$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert. Schreibweise: $\lim a_n = a$ oder $\lim_{n\to k} a_n = a$. Wobei $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

### 3.7. Bemerkung

Sei $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$ heißt $\varepsilon$-Umgebung von $a$.

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |\, a_n - a \,| < \varepsilon$$

Also: Die Folge $(a_n)$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$ Die Folgenglieder $a_n$ liegen ab einer Schwelle $N$ alle in der $\varepsilon$-Umgebung von $a$. $(a_n)$ konvergiert nicht gegen $a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \,.\, \forall N \in \mathbb{N} \,.\, \exists n \geq N \,:\, |\, a_n - a \,| \geq \varepsilon$.

### 3.8. Beispiel

Beispiele zur Konvergenz:

(1) Die harmonische Folge konvergiert: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

***Beweis:*** Sei $\varepsilon > 0$ und $N > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad |\, a_n - 0 \,| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ *q.e.d.*

(2) Die alternierende Folge $b_n = (-1)^n$ ist divergent

***Beweis:*** Angenommen $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq N \,:\, |\, b_n - b \,| < \frac{1}{2}$. Da $b_{n+1} - b_n = \pm 2$ ist $\forall n \geq N$

$2 = |\, b_{n+1} - b_n \,| = |\, b_{n+1} - b - (b_n - b) \,| \leq |\, b_{b+1} - b \,| + |\, b_n - b \,| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1$

Widerspruch! $\Rightarrow (b_n)$ ist divergent. *q.e.d.*

(3) Ob die geometsiche Folge $(a^n)_{n\geq 1}$ hängt davon ab, welchen Wert $a$ hat.

***Beweis:*** Durch Fallunterscheidung

Fall 1: $|\, a \,| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{Archim.Ax.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \,:\, |\, a \,|^N < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \,:\, |\, a^n - 0 \,| = |\, a \,|^n \leq |\, a \,|^N < \varepsilon$

Fall 2: $a = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$

Fall 3: $a = -1 \Rightarrow$ divergent weil alternierend.

Fall 4: $|\, a \,| > 1 \Rightarrow \forall K > 0 \,.\, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, |\, a \,|^n > K$ , d.h. $(a^n)$ ist unbeschränkt.

*q.e.d.*

### 3.9. Definition

Eine Folge $(a_n)$ heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, a_n \leq A \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \,:\, a_n \geq A$$

$(a_n)$ heißt beschränkt, wenn $(a_n)$ nach oben oder unten beschränkt ist. d.h.

$$\exists K \in \mathbb{R} \,.\, \forall n \in \mathbb{N} \,:\, |\, a_n \,| \leq K \vee |\, a_n \,| \geq K$$

### 3.10. Satz

Jede konvergente Folge $(a_n)$ ist beschränkt.

**Beweis:** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wähle $\varepsilon = 1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq N \;:\; |\, a_n - a \,| < 1$

$$|\, a_n \,| = |\, a + (a_n - a) \,| \leq |\, a \,| + |\, a_n - a \,| < |\, a \,| + 1 \quad \forall n \geq N$$

Sei $K = max\{|\, a_1 \,|, |\, a_2 \,|, \ldots, |\, a_{n-1} \,|, |\, a \,| + 1\}$

$$|\, a_n \,| < K \quad \forall n \geq 1$$

*q.e.d.*

### 3.11. Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. Das heißt eine beschränkte Folge ist nicht konvergent.

*Gegenbeispiel.* die alternierende Folge $(-1)^n$. *q.e.d.*

### 3.12. Monotoniekriterium

Sei $(a_n)$ eine Folge. Dann gilt:

- Ist $(a_n)$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist $(a_n)$ konvergent.
- Ist $(a_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist $(a_n)$ konvergent.

**Beweis:** Es reicht die erste Aussage zu zeigen, denn ist $(a_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt $\Rightarrow (-a_n)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent.
Sei also $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt. Mit dem Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow \exists a = sup\,\{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$.
Und sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von $\{a_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \;:\; a - \varepsilon < a_N \leq a$.
Da $(a_n) \nearrow \;\Rightarrow \forall n \geq N \qquad a_N \leq a_n$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon && \forall n \geq N \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon && \forall n \geq N \\ &\Rightarrow |\, a_n - a \,| < \varepsilon && \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### 3.13. Bemerkung

Das Monotonie-Kriterium ist äquivalent zur Vollständigkeit.

### 3.14. Satz

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ und $a \neq b$.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}\,|\, b - a \,| \Rightarrow \exists N_1 \,.\, \forall n \geq N_1 \;:\; |\, a_n - a \,| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists N_2 \,.\, \forall n \geq N_2 \;:\; |\, a_n - b \,| < \varepsilon$$

Sei $N = max\{N_1, N_2\} \quad \forall n \geq N \;:\; |\, b - a \,| = |\, (b - a_n) + (a_n - a) \,|$

$$\begin{aligned} &\leq |\, b - a_n \,| + |\, a_n - a \,| \\ &= |\, a_n - b \,| + |\, a_n - a \,| \\ &< \frac{1}{2}\,|\, b - a \,| + \frac{1}{2}\,|\, b - a \,| \\ &= |\, b - a \,| \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\, b - a \,| < |\, b - a \,|$ Widerspruch! $\Rightarrow a = b$ *q.e.d.*

### 3.15. Rechenregeln für konvergente Folgen (RRF)

Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1. $(a_n \pm b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. $\lambda(a_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. $(a_n b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim n b_n$.

4. Ist $(b_n) \neq 0\ \forall n \geq n_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

5. $a_n \leq b_n$ dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n\ \forall n \geq n_0$.

***Beweis:*** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim b_n = b$.

1. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2, \in \mathbb{N}\ :\ |\, a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad$ und $\quad |\, b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$
$$\Rightarrow \forall n \geq max\{N_1, N_2\}$$
$$\begin{aligned} |\,(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\,| &= |\,(a_n - a) \pm (b_n - b)\,| \\ &\leq |\,a_n - a\,| + |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
$\Rightarrow (a_n \pm b_n)$ beschränkt und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a + b$.

2. Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad |\, a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \forall n \geq N$
$$|\,\lambda a_n - \lambda a\,| = |\,\lambda(a_n - a)\,| = |\,\lambda\,|\,|\,a_n - a\,| < \lambda\frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

3. Jede konvergente Folge ist beschränkt $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ mit $|\,a_K\,| \leq K$ und $|\,b\,| \leq K$
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}\ :\ |\,a_n - a\,| < \frac{\varepsilon}{2K}$ und $|\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon}{2K} \Rightarrow$
$$\begin{aligned} \forall n \geq max\{N_1, N_2\}\ :\ |\,a_n b_n - ab\,| &= |\,a_n b_n - a_n b + a_n b + ab\,| = |\,a_n(b_n - b) + b(a_n - a)\,| \\ &\leq |\,a_n(b_n - b)\,| + |\,b(a_n - a)\,| \\ &= \underbrace{|\,a_n\,|}_{\leq K}|\,b_n - b\,| + \underbrace{|\,b\,|}_{\leq K}|\,a_n - a\,| < K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \end{aligned}$$

4. Zeige $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \Rightarrow |\,|\,b_n\,| - |\,b\,|\,| \leq |\,b_n - b\,| < \frac{|\,b\,|}{2} \quad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow -\frac{|\,b\,|}{2} < |\,b_n\,| - |\,b\,| < \frac{|\,b\,|}{2} \Rightarrow \frac{|\,b\,|}{2} < |\,b_n\,| \quad \Rightarrow \frac{1}{|\,b_n\,|} < \frac{2}{|\,b\,|} \quad \forall n \geq n_0$
Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \quad \forall n \geq N \quad |\,b_n - b\,| < \frac{\varepsilon\,|\,b\,|^2}{2} \Rightarrow$
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b b_n}\right| = \frac{1}{|\,b_n\,|}\frac{1}{|\,b\,|}|\,b - b_n\,| < \frac{2}{|\,b\,|}\frac{1}{|\,b\,|}|\,b_n - b\,| < \frac{2}{|\,b\,|^2}\frac{\varepsilon\,|\,b\,|^2}{2} = \varepsilon.$$

5. Sei $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0. \quad$ Angenommen $a > b. \quad$ Sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$
$\Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}\ :\ |\,a_n - a\,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \quad$ und $\quad |\,b_n - b\,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$
$$\begin{aligned} b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} &= \frac{2b + a - b}{2} = \frac{b+a}{2} = \frac{2a - a + b}{2} \\ &= a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n \qquad \forall n \geq max\{N_1, N_2\} \end{aligned}$$
$\Rightarrow b_n < a_n \quad \forall n \geq max\{N_1, N_2\} \quad$ Widerspruch! $\Rightarrow a \leq b$

*q.e.d.*

**3.16. Sandwich-Theorem**
Sei $(a_n)$ und $(b_n)$ zwei konvergente Folgen mit der Eigenschaft, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Und sei $(c_n)$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$. Dann ist $(c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

***Beweis:*** Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$
$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$
$$\Rightarrow \forall n \geq max\{N_1, N_2\} \text{ gilt:} \qquad a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow |\, c_n - a\,| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

*q.e.d.*

**3.17. Beispiel**
Zwei Beispiele zum Sandwich-Theorem:

1. Sei $(a_n)$ eine Folge mit $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$ ist divergent, denn
$$a_n = \frac{\left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2n} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{2n} + \sqrt{n}\right)} = \frac{2n - n}{\sqrt{n}\underbrace{\left(\sqrt{2} - 1\right)}_{\leq 3}} \geq \frac{n}{3\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{3} \geq \sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

**3.18. Definition**
Eine Folge $(a_n)$ heißt bestimmt divergent gegen $\pm\infty$ wenn gilt:

$$\forall K \in \mathbb{R}\,.\,\exists N \in \mathbb{N}\,.\,\forall n \geq N \ :\ a_n \gtrless K$$

Für jedes $K$ aus $\mathbb{R}$ gibt es ein $N$ aus $\mathbb{N}$ ab dem $a_n$ größer/kleiner als $K$ wird. Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

**3.19. Beispiel**
Beispiele zu bestimmt divergenten Folgen:

1. Die Fibonacci Folge ist bestimmt divergent gegen $+\infty = \infty$
2. Sei $a_n = n$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
3. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -\infty$
4. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent aber nicht bestimmt divergent.
5. Sei $(a_n)$ bestimmt divergent und $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

   ***Beweis:*** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \forall \varepsilon > 0\,.\,\exists N \in \mathbb{N}\,.\,\forall n \geq N \ :\ a_n > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$

   $$\Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$$
   $$\text{da } a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

   *q.e.d.*

**3.20. Definition**
Sei $(a_n)$ eine Folge reeller Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ .
Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### 3.21. Bemerkung

Ist die Folge $(a_n)$ konvergent, dann ist auch jede Teilfolge von $(a_n)$ konvergent.

***Beweis:*** Sei $(a_n)$ konvergent gegen $a$. Also $\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \;:\; |\, a_n - a \,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Da $(a_{n_k})$ eine Teilfolge von $(a_n)$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ und da $n_k$ monoton steigend ist, ist $k \leq n_k$ und $n_k \geq N \quad \forall k \geq N$ daraus folgt $|\, a_{n_k} - a \,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. *q.e.d.*

### 3.22. Definition

Sei $(a_n)$ eine Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt (Häufungswert) der Folge $(a_n)$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)$ gibt, die gegen $a$ konvergiert.

### 3.23. Bemerkung

Beispiele zu Häufungspunkten:

1. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist $a$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_n)$.
2. Eine bestimmt divergente Folge hat keinen Häufungspunkt.
3. Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ besitzt die zwei Häufungspunkte $\pm 1$ :
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}(-1)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} - 1 = -1$$
4. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber jede beschränkte Folge muss nicht konvergent sein.

### 3.24. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

***Beweis:*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt, d.h. $\exists A \in \mathbb{R}$ mit $-A \leq a_n \leq A \quad \forall n \geq 0$

Sei $A_k = \{a_m \;:\; m \geq k\}$. Beachte: dass jede der Mengen $A_k$ beschränkt ist, durch $A$

Daraus folgt mit dem Vollständigkeitsaxiom $\exists\, inf(A_k) \quad \forall A_k$ Wähle $x_k = inf(A_k)$.

Da $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots \quad \Rightarrow \quad x_k \leq x_{k+1} \quad \forall k \geq 0$.

Betrachte die Folge $(x_n)_{k\geq 0}$. $(x_n)$ ist monoton wachsend und durch $A$ beschränkt.

Mit dem Monotoniekritierium konvergiert $(x_n)$. Sei etwa $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z$

zu zeigen: $z$ ist Häufungspunkt von $(a_n)$

1. Sei $\varepsilon > 0$ , da $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|\, x_k - z \,| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$
2. Da $x_k = inf(A_k) = inf\,\{a_m \;:\; m \geq k\} \Rightarrow \exists a_{k_m}$ mit $|\, x_k - a_{k_m} \,| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   $\Rightarrow |\, a_{k_m} - z \,| = |\, a_{k_m} - x_k + x_k - z \,| \leq |\, a_{k_m} - x_k \,| + |\, x_k - z \,| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

   Also $\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall k \geq N \,.\, \exists a_{k_m} \in (a_n) \;:\; |\, a_{k_m} - z \,| < \varepsilon$

   d.h. die Teilfolge $(a_{k_m})_{m\geq 0}$ ist konvergent gegen $z$

Also $(a_{k_m})$ ist eine konvergente Teilfloge von der beschränkten Folge $(a_n)$.

*q.e.d.*

**3.25. Bemerkung**

Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom. Andere äquivalente Formulierungen zu Bolzano-Weierstraß:

- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.
- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

**3.26. Definition einer Cauchy-Folge**

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt CAUCHY-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n, m \geq N \;:\; |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon$$

**3.27. Satz**

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Die Folge $(a_n)$ ist konvergent
2. Die Folge $(a_n)$ ist eine Cauchy-Folge

***Beweis:*** 1) $\Rightarrow$ 2) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \,.\, \forall m \geq N \;:\; |\, a_n - a \,| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N \;:\; |\, a_n - a_m \,| = |\, a_n - a + a - a_m \,| \leq \underbrace{|\, a_n - a \,|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\, a_m - a \,|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n$ ist eine Cauchy Folge

2) $\Rightarrow$ 1) Jede Cauchy Folge ist beschränkt.

Sei $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n, m \geq N \;:\; |\, a_n - a_m \,| < 1 \quad \Rightarrow |\, a_n - a_N \,| < 1$

$\Rightarrow |\, a_n \,| = |\, a_n - a_N + a_N \,| \leq |\, a_n - a_N \,| + |\, a_N \,| < 1 + |\, a_N \,| \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \;:\; |\, a_n \,| \leq max\{|\, a_0 \,|, \ldots, |\, a_{N-1} \,|, |\, a_N \,| + 1\} \Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge: $(a_{n_k}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a$

zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $m$ so groß, dass $|\, a_m - a_n \,| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$ und

$$|\, a_{n_k} - a \,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_k \geq k \geq N$$

$$\Rightarrow |\, a - a_n \,| = |\, a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n \,| \leq |\, a - a_{n_k} \,| + |\, a_{n_k} - a_n \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

*q.e.d.*

**3.28. Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel**

Seien $a = 0$, $a_0 > 0$ reelle Zahlen. Wir definieren die Folge $(x_n)$ rekursiv.

$$x_0 = x_0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Wir zeigen: $(x_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $x^2 = a$.

***Beweis:*** zu zeigen: nach unten durch 0 beschränkt: $x_n > 0 \quad \forall n \geq 0$

$$\text{IA: } n = 0 : \quad x_0 > 0$$

$$\text{IV: } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$\text{IS: } n \mapsto n+1 :$$

$$\text{Sei } x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0}\left(\underbrace{x_n}_{>0} + \overbrace{\underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0}}^{>0}\right) > 0 \Rightarrow (x_n) \text{ ist n.u. durch 0 beschränkt.}$$

zu zeigen: $x_n^2 \geq a \quad \forall n \geq 1$ denn

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2x_n\frac{a}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2}\right) - a \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{2ax_n}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a\right) = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{2ax_n}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} - \frac{4ax_n}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2x_n\frac{a}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$(x_n)$ ist monoton fallend

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(2x_n - x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n \underbrace{(x_n^2 - a)}_{x_n^2 > a}} \geq 0$$

$\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$

Nach dem Monotonie-Kriterium ist $(x_n)$ konvergent.

$$\begin{aligned} \text{Sei } x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \quad \Rightarrow x = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow x^2 = a$$

*q.e.d.*

Die positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$ heißt die Quadratwurzeln von $a$. Wir schreiben $x = \sqrt{a}$.

# 4 Reihen

### 4.1. Definition

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Sei weiters $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ die $N$-te Partialsumme, dann heißt die Folge $(S_N)_{N\geq 0}$ der Partialsummen eine unendliche Reihe.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Konvergiert die Folge $(S_N)$ mit $\lim_{n\to\infty} S_N = s$, dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ der Wert der Reihe. Man sagt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

### 4.2. Beispiel

1. Die geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ , wenn $|\, a \,| < 1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ ist divergent, wenn $|\, a \,| \geq 1$

***Beweis:*** IA: $N = 0:\quad a^0 = \dfrac{(1-a)}{(1-a)} = 1$ *q.e.d.*

IV: $\sum\limits_{n=0}^{N} a^n = \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a}$

IS: $N \mapsto N+1:$

$$\sum_{n=0}^{N+1} a^n = a^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} a^n \overset{IV}{=} a^{N+1} + \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{a^{N+1} - a^{N+2} + 1 - a^{N+1}}{1-a} = \frac{1-a^{N+2}}{1-a}$$

Sei $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a^n = \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a}$

Sei $|\, a \,| < 1$. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a^N = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

Sei $a \geq 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{N} a^n \geq \sum\limits_{n=0}^{N} 1 = N+1 \longrightarrow \inf$

Sei $a \leq -1 \Rightarrow a = -b$ mit $b \geq 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{N} a^n \geq \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n b^n$ divergent

2. Die harmonische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$

***Beweis:*** $S_{2^N} = \sum\limits_{n=1}^{2^N} \dfrac{1}{n} = 1 + \underbrace{\dfrac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + ... + \underbrace{\dfrac{1}{2^{N-1}+1} + .... + \dfrac{1}{2^N}}_{=\frac{1}{2}}$

$\geq 1 + N\dfrac{1}{2} > \dfrac{N}{2} \longrightarrow +\infty$

Würde $(S_N)$ konvergieren, dann auch die Teilfolge $(S_{2^N})$, da diese divergiert, divergiert auch $(S_N)$

*q.e.d.*

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

***Beweis:*** $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n+1} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=2}^{N+1} \dfrac{1}{n}$

$= 1 + \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} - \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{N+1} = 1 + \dfrac{1}{N+1} \longrightarrow 1$

*q.e.d.*

**4.3. Satz**

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

***Beweis:*** folgt auf Grund der Rechenregeln für konvergente Folgen. *q.e.d.*

### 4.4. Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, genau dann wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq m \geq N \;:\; \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad (\star)$$

$(\star)$ bedeutet die $(S_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_n$ ist konvergent

***Beweis:*** $S_n - S_m = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k.$

*q.e.d.*

### 4.5. Korollar

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$

***Beweis:*** Sei $a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$, da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ folgt mit dem Cauchy-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq N \;:\; |\, a_N \,| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

*q.e.d.*

### 4.6. Bemerkung

Die Umkehrung des Korrolars gilt nicht. z.B. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (harmonische Reihe).

### 4.7. Definition

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |\, a_k \,|$ konvergiert.

### 4.8. Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

***Beweis:*** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} |\, a_k \,| < \infty \stackrel{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq m \geq N \;:\; \left| \sum_{k=m}^{n} |\, a_k \,| \right| < \varepsilon$

mit der Dreiecksungleichung folgt $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} |\, a_k \,| \right| < \varepsilon$ gilt $\forall n \geq m \geq N$

mit dem Cauchy-Kriterium folgt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

*q.e.d.*

### 4.9. Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. zB kann man zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert. Aber die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

**4.10. Majoranten-Kriterium**

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \geq 0$, $\forall k \geq N_0$. Und sei $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge mit $| \, a_k \, | \leq b_k$, $\forall k \geq N_0$.

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

***Beweis:*** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ und $b_k > 0 \overset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists N \in \mathbb{N} \,.\, \forall n \geq m \geq N \;:\; \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \right| < \varepsilon$

da $| \, a_k \, | \leq b_k$ folgt $\left| \sum_{k=m}^{n} | \, a_k \, | \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \right| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq m \geq N$

mit dem Cauchy-Kriterium folgt wiederum $\sum_{k=0}^{\infty} | \, a_k \, |$ ist konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

*q.e.d.*

**4.11. Minoranten-Kriterium**

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent mit $b_k \geq 0$, $\forall k \geq N_0$. Und sei $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge mit $| \, a_k \, | \geq b_k, \forall k \geq N_0$.

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist auch divergent.

***Beweis:*** Angenommen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent, dann ist nach dem Majoranten-Kriterium $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, da $| \, b_k \, | \leq a_k$. Widerspruch zur Annahme. Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent. *q.e.d.*

**4.12. Quotienten-Kriterium**

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. Und gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, sodass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, $\forall n \geq n_0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

***Beweis:*** Sei $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \forall n \geq 0$ (o.B.d.A.) $\Rightarrow | \, a_{n+1} \, | \leq q \, | \, a_n \, |$

durch Induktion $| \, a_n \, | \leq q \, | \, a_{n-1} \, | \leq q^2 \, | \, a_{n-2} \, | \leq ... \leq q^n \, | \, a_0 \, |$ somit ist $| \, a_n \, | \leq q^n \, | \, a_0 \, |$

Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} | \, a_n \, | \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n \, | \, a_0 \, | = | \, a_0 \, | \sum_{n=0}^{\infty} q^n = | \, a_0 \, | \frac{1}{1-q}$, da $0 < q < 1$ (geometrische Reihe)

mit dem Majoranten-Kriterium folgt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

*q.e.d.*

**4.13. einfaches Quotienten-Kriterium**

Sei $a_n \neq 0 \, \forall n > n_0$ und existiert $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right|$ und ist $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| < 1$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

***Beweis:*** Sei $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n+1}{a_n}\right| = \alpha < 1$ und sei $\varepsilon = \dfrac{1-\alpha}{2} > 0$

Dann $\exists N \,.\, \forall n \geq N \;:\; \left|\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \alpha\right| < \varepsilon = \dfrac{1-\alpha}{2}$

Also ist $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \dfrac{1-\alpha}{2} + \alpha = \dfrac{1+\alpha}{2} \overset{\alpha<1}{<} \dfrac{1+1}{2} = 1$

Setze $q = \dfrac{1+\alpha}{2} < 1$ und $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$

mit dem Quotienten-Kriterium folgt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

*q.e.d.*

### 4.14. Beispiel

Einige Beispiele zur Konvergenz von Reihen.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^k} < \infty \qquad \forall k \geq 2$

   [Bemerkung: Die Konvergenz gilt auch $\forall k \in \mathbb{R}, k > 1$ (ohne Beweis)]

   ***Beweis:*** Für alle $k \geq 2$ gilt $\dfrac{1}{n^k} \leq \dfrac{1}{n^2}$

   und $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{2}{n(n+1)}$ , denn $2n^2 \geq n(n+1) \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$

   Damit ist $\dfrac{1}{n^k} \leq \dfrac{2}{n(n+1)} \quad \forall k \geq 2$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+1)} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = 2 \cdot 1 = 2$

   mit dem Majoranten-Kriterium folgt $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^k} < \infty \quad \forall k \geq 2$

   *q.e.d.*

   Frage: Wie sind die Werte der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^k}$ für $k \geq 2$ ?

   Euler: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$ , ... , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2k}} = C_k\pi^{2k}$

   Aber: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^5} = ?$ , ... , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2k+1}} = ?$

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$ ist konvergent.

   *Quotienten-Kriterium:*

   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$ *q.e.d.*

3. Die Exponentialfunktion $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

   *Quotienten-Kriterium:*

   $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \frac{|\,x^{k+1}\,|\,k!}{|\,x^k\,|\,(k+1)!} = \frac{|\,x\,|}{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ ist absolut konvergent.

   *q.e.d.*

**4.15. Bemerkung**

Eine Bemerkung zur Divergenz.

1. Für $k = 1$ ist die harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

2. Das Quotienten-Kriterium ist hier nicht anwendbar, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \not< 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \not< 1$$

**4.16. Definition**

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ heißt Exponentialfunktion.

Die Zahl $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ heißt Euler'sche Zahl.

**4.17. Bemerkung**

Wir werden später zeigen: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828...$

**4.18. Cauchy-Produkt von Reihe**

Seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Cauchy-Produkt folgendermaßen:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

*Beweisidee:*

**4.19. Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**

Sei $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die Exponentialfunktion. Dann gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$
$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

***Beweis:*** Wir bilden das Cauchy-Produkt, der absolut konvergenten Reihen $e^x$ und $e^y$. Dafür verwenden wir den Binomischen Lehrsatz:

$$(a+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \overset{Binom.LS}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n \\
&= e^{x+y}
\end{aligned}
$$

*q.e.d.*

# 5 Stetigkeit

### 5.1. Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ ist eine Vorschrift, die jedes $x \in D$ genau einem Wert $f(x)$ zuordnent.

### 5.2. Beispiel

Einige Funktionen

1. Für $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = c$ heißt die konstante Funktion.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x$ heißt identische Funktion.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = |\, x \,|$ heißt Betragsunktion.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = \lfloor\, x \,\rfloor$
5. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ heißt Wurzelfunktion.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = e^x$ heißt Exponentialfunktion.
7. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) = \sum_{k=0} n a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion.

### 5.3. Definition

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren $(f+g), (fg), (\lambda f) : D \to \mathbb{R}$ mit

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(fg)(x) &= f(x)g(x) \\
(\lambda f)(x) &= \lambda f(x)
\end{aligned}
$$

Sei weiters $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \;:\; \dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ mit

$$
\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}
$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$, mit $f(D) \subset E(f(D)) = \{f(x) \;:\; x \in D\}$ , $(g \circ f) : D \to \mathbb{R}$ mit

$$
(g \circ f)(x) = g(f(x))
$$

### 5.4. Beispiel

Einige Beispiele

1. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$

$$
f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |\, x \,|
$$

2. Sei $p(x) = \sum_{k=0} na_k x^k$ , $q(x) = \sum_{k=0} nb_k x^k$ , $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) \neq 0\}$

$$r = \frac{p}{q} : D \to \mathbb{R} r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ heißt rationale Funktion.}$$

### 5.5. Grenzwert einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl, sodass es mindestens eine Folge $(a_n)$ mit $a_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt. Man definiert $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, wenn gilt:

$$\text{Für jede Folge } (x_n)_{n\geq 0} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

$c$ ist dann der Grenzwert.

### 5.6. Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. $f$ heißt stetig in $a$, wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Das heißt für jede Folge $(x_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
$f$ heißt stetig in $D$, falls $f$ in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

### 5.7. Bemerkung

$f$ ist in $a \in D$ nicht stetig $\Leftrightarrow \exists$ eine Folge $(x_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ , aber die Folge $(f(x_n))$ ist divergent oder $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$

### 5.8. Proposition

Rechenregeln für stetige Funktionen:

1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $(f + g), (fg), (\lambda f) : D \to \mathbb{R}$ stetig.
2. Sei $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow \dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.
3. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(D) \subset E$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.

***Beweis:***

1. $f + g : D \to \mathbb{R}$
   Sei $x_n$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = a$.
   $$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) \overset{\text{RRF}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(a) + g(a) \overset{\text{Def.}}{=} (f+g)(a)$$
2. Analog für mal, $\lambda$ und Division.
3. $g \circ f : D \to \mathbb{R}$
   Sei $x_n$ eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = a \overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$
   Sei $y_n = f(x_n)$ und $b = f(a) \overset{f(D)\subset E}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in E \overset{g \text{ stetig in } b}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(b)$
   $$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

*q.e.d.*

**5.9.** $\varepsilon - \delta$ **Kriterium für Stetigkeit**
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann gilt $f$ ist stetig in $a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, . \, \exists \delta > 0 \, . \, \forall x \; : \; |\, x - a \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$$

***Beweis:***

$\Leftarrow$: Sei $(x_n)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ Sei $\varepsilon > 0$, es gilt:

$$\exists \delta > 0 \; : \; \forall x \; : \; |\, x - a \,| < \delta \Rightarrow |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon \quad (\star)$$

Weil $\lim x_n = a$ gilt: $\exists N(\delta) \, . \, \forall n \geq N(\delta) \; : \; |\, x_n - a \,| < \delta \overset{(\star)}{\Rightarrow} |\, f(x_n) - f(a) \,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$
$\Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

$\Rightarrow$: Sei $f$ in $a$ stetig.
zu zeigen: das $\varepsilon - \delta$ Kriterium Angenommen: $\varepsilon - \delta$ Kriterium gilt nicht:

$$\exists \varepsilon > 0 \, . \, \forall \delta > 0 \, . \, \exists x \in D \; : \; |\, x - a \,| < \delta \; \wedge \; |\, f(x) - f(a) \,| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \, . \, \forall n \in \mathbb{N} \, . \, \exists x_n \in D \; : \; |\, x_n - a \,| < \dfrac{1}{n} = \delta$ und $|\, f(x_n) - f(a) \,| \geq \varepsilon$
Betrachte die Folge $(x_n)$, da $|\, x_n - a \,| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow (x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.Da $f$ stetig in $a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$
Widerspruch! zu $|\, f(x_n) - f(a) \,| \geq \varepsilon \Rightarrow$ das $\varepsilon - \delta$ Kriterium gilt.

*q.e.d.*

**5.10. Beispiel**
Beispiele zu stetigen Funktionen:

1. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = 1$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$
   Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(x_n)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim 1 = 1 = f(a)$
2. Die identische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$
   Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(x_n)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$
3. Jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.
   Dies folgt sofort aus den Rechenregeln.
4. Jede rationale Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.
   Dies folgt auch sofort aus den Rechenregeln.
5. Die Betragsunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = |\, x \,|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$
   Denn $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \quad \text{die identische Funktion ist stetig} \\ -x & x < 0 \quad (-1)x \text{ ist stetig (Rechenregeln)} \\ 0 & x = 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |\, x_n \,| = 0 = |\, 0 \,| \text{ ist stetig} \end{cases}$
6. Die Funktion $|\, f \,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.
   Folgt aus den Rechenregeln.

7. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ ist in $a=0$ nicht stetig.

Sei $(x_n)=\frac{1}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$

Sei $(y_n)=-\frac{1}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}=0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} -1=-1$

$\Rightarrow f$ ist nicht stetig in $a=0$

8. Die Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $\exp(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

***Beweis:*** (a) exp ist in $a=0$ stetig.

i) Sei $|\,x\,|<1\Rightarrow |\,a^x-1\,|\leq 2\,|\,x\,|$

Denn: es gilt $(n+1)!\geq 2^n$ , da $(n+1)!=\underbrace{\underbrace{(n+1)}_{\geq 2}\underbrace{n}_{\geq 2}\cdots\underbrace{2}_{=2}}_{n-mal}1\geq 2^n\forall n\geq 1$

$$\text{Sei } m\geq 1: \left|\sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n!}\right|\leq \sum_{n=1}^{m}\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{m}\frac{|\,x\,|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{m}\frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}=|\,x\,|\sum_{n=0}^{m}\frac{|\,x\,|^n}{(n+1)!}$$
$$\leq |\,x\,|\sum_{n=0}^{m}\frac{|\,x\,|^n}{2^n}=|\,x\,|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{|\,x\,|}{2}\right)^n$$
$$\text{Daraus folgt: } |\,a^x-1\,|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n!}\right|\leq\lim_{n\to\infty}|\,x\,|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{|\,x\,|}{2}\right)^n$$
$$=|\,x\,|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|\,x\,|}{2}\right)^n\overset{\text{geom R}}{=}|\,x\,|\frac{1}{1-\frac{|\,x\,|}{2}}=\frac{2\,|\,x\,|}{2-|\,x\,|}$$
$$\leq 2\,|\,x\,|$$

ii) Sei $(x_n)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|\exp(x_n)-1\,|\overset{i)}{\leq}\lim\limits_{n\to\infty} 2\,|\,x_n\,|=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=1=\exp(0)$

(b) exp ist in $a\in\mathbb{R}$ stetig. Sei $a\in\mathbb{R}$ und $(x_n)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n-a=0$, da exp stetig in 0 folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n-a)=\exp(0)=1$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}\exp(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{(x_n-a)+a}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n-a}e^a$

$$=e^a\underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{x_n-a}}_{=1}=e^a 1=e^a$$

$\Rightarrow$ exp ist in $a\in\mathbb{R}$ stetig.

*q.e.d.*

### 5.11. Wiederholung Stetigkeit

$f:D\to\mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0\in D$ wenn gilt:
Für jede Folge $(x_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ ist die Folge $(f(x_n))$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

### 5.12. Zwischenwertsatz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)<0$ und $f(b)>0$. Dann gibt es ein $x\in(a,b)$ mit $f(x)=0$.

***Beweis:*** Wir konstruieren durch Intervallhalbierung eine Folge, deren Grenzwert eine Nullstelle von $f$ ist. Wir definieren induktiv zwei Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

IA: $n = 0: \quad a_0 = a, \quad b_n = b$

IV: Seien $a_n$ und $b_n$ schon konstruiert

Definiere den Mittelpunkt $M = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Ist $f(M) = 0,$ dann setze $x = M$.

IS: $n \mapsto n+1$ : Fall 1: Ist $f(M) < 0 : a_{n+1} = M\ ,\ b_{n+1} = b_n$.

Fall 2: Ist $f(M) > 0 : a_{n+1} = b_n\ ,\ b_{n+1} = M$.

Nach Definition ist $f(a_{n+1}) < 0$ und $f(b_{n+1}) > 0$.

Es gilt: $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{b_n - a_n}{2}$ , denn

Fall 1: $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{2b_n + a_n - b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$

Fall 2: $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leq \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} \leq \cdots \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

Nach Konstruktion ist die Folge $(a_n)$ monoton wachsend und durch $b$ nach oben beschränkt. Die Folge $(b_n)$ ist monoton fallend und durch $a$ nach unten beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium konvergieren die beiden Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$.
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ und $0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{b-a}{2} \Rightarrow 0 \leq b_0 - a_0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x \in (a,b)$
Da $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ und $f$ stetig ist, folgt $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ *q.e.d.*

### 5.13. Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $f(D) = \{f(x)\ :\ x \in D\}$ beschränkt ist, d.h.

$$\forall x \in D\ .\ \exists M \in \mathbb{R}\ :\ |\, f(x)\,| \leq M$$

### 5.14. Satz vom Maximum und Minimum

Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists p, q \in [a,b] \text{ mit } f(p) = sup(\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\}) = sup_f \text{ und } f(q) = inf(\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\}) = inf_f$$

***Beweis:*** Wir zeigen nur das Maximum, denn das Minimum ist das Maximum von $-f$.
Sei $M = sup(\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\}) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Fall 1: Ist $f$ nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ .\ \exists f(x_n)\ :\ f(x_n) \geq n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty = M$
Fall 2: Ist $f$ beschränkt $\Rightarrow M \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}\ .\ \exists f(x_n)\ :\ M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$

Also gibt es in beiden Fällen eine Folge $(x_n)$ mit $x_n \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Da $x_n \in [a,b]$ ist die Folge $(x_n)$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in [a,b]$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$ und jede Teilfolge eine konvergente Folge den selben Grenzwert hat, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ Da $f$ stetig ist, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p)$. Aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(p) \Rightarrow p$ ist Maximum der Funktion $f$. *q.e.d.*

### 5.15. Bemerkung

$f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

$f$ ist stetig aber nicht nach oben beschränkt.

### 5.16. Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn gilt:

$$\forall a, b \in D \; : \; a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$
$$\forall a, b \in D \; : \; a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \quad \text{(streng)}$$

Entsprechend für (streng) monoton fallend.

### 5.17. Satz von der stetigen Umkehrfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (fallend). Sei $A = f(a)$ und $B = f(b)$. Dann ist $f : [a, b] \to [A, B]$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ ist stetig und streng monoton wachsend (fallend).

***Beweis:*** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. $f(a) = A$ und $f(b) = B$.
Sei $x \in [a, b]$ mit $a < x < b$
$\overset{\nearrow}{\Rightarrow} f(a) < f(x) < f(b)$ also $A < f(x) < B \Rightarrow f(x) \in [A, B] \quad \forall x \in [a, b]$
Injektiv: $x \neq x' \Rightarrow x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow f$ ist injektiv.
Surjektiv: Sei $C \in [A, B]$. Für $C = A$ oder $C = B$ wähle $x = a$ oder $x = b$.
Sei also $C \in (A, B)$. Betrachte $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - C$ Da $f$ stetig ist, ist auch $g$ stetig. $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ und $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$ Aus dem Zwischenwertsatz folgt: $\exists p \in [a, b]$ mit $g(p) = 0$also $f(p) - C = 0 \Rightarrow f(p) = C. \Rightarrow f$ ist surjektiv.
$\Rightarrow f : [a, b] \to [A, B]$ ist bijektiv.
Betrachte die Umkehrfunktion. $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$. 1. $f^{-1}$ ist streng monoton wachsend: Sei $y < y'$.zu zeigen: $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Angenommen $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, da $f$ streng monoton wachsend ist folgt $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) \Rightarrow y \geq y'$Widerspruch! $\Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$
2. Noch zu zeigen: $g = f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ ist stetig. Sei $y \in [A, B]$ und $(y_n)$ eine Folge mit $y_n \in [A, B]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$
Angenommen, das gilt nicht.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\left| f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n$. d.h. es gibt eine Teilfolge $(y_{n_k})$ von $(y_n)$ mit $\left| f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon$. Da $a \leq f^{-1}(y_{n_k}) \leq b$, also beschränkt ist. folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, es gibt eine konvergente Teilfolge $(f^{-1}(y_{n_{k_l}}))_{l\geq 0}$ von $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k\geq 0}$.
Wir können also annehmen. Es gibt eine konvergente Teilfolge $(f^{-1}(y_{n_{k_l}}))_{l\geq 0}$ von $(f^{-1}(y_n))_{n\geq 0}$ mit $(f^{-1}(y_{n_{k_l}}) = c$ und $\left| f^{-1}(y_{n_{k_l}}) - f^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon \Rightarrow \left| c - f^{-1}(x) \right| \geq \varepsilon$.
Nach der Definition der Umkehrabbildung ist $f(f^{-1}(y_{n_k})) = y_{n_k}$. Aus der Stetigkeit von $f$ folgt daher $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(c)$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(c)) = c \Rightarrow \left| f^{-1}(y) - f^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon > 0$ Widerspruch! $\Rightarrow f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ ist stetig. *q.e.d.*

### 5.18. Beispiel

Beispiele zur stetigen Umkehrfunktion.

1. Die Wurzelfunktion $\sqrt[k]{x}$
   Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^k$ und $k \geq 2$. Für $x \in \mathbb{R}_+$ ist $f$ stetig, streng monoton wachsend und $f(x) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ Es gibt eine streng monoton wachsende und stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to$

$\mathbb{R}_+$ mit $= \sqrt[k]{x}$
Für $k$ ungerade sind $f$ und $f^{-1}$ auf $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

2. Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_+$

***Beweis:*** $e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$
Für $x > 0$ folgt: $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} > 1$, also $e^x > 1$
Sei $x < x' \Rightarrow y = x' - x > 0 \Rightarrow e^y > 1 \Rightarrow e^{x'} = e^{x+(x'-x)} = e^{x+y} = e^x \underbrace{e^y}_{>1} > e^x \Rightarrow$ exp ist streng monoton. d.h. exp ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und bijektiv.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \exp(n) & \geq 1 + n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \exp(-n) &= \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also $\lim_{n\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \exp(x) = 0$
Es gibt daher eine stetige Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \ln(x)$ der natürliche Logarithmus. ln ist wieder stetig und streng monoton wachsend. *q.e.d.*

$$\text{Es gilt: } \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

***Beweis:*** Sei $\ln(x) = \xi$ und $\ln(y) = \eta$ d.h. $e^\xi = x$ und $e^\eta = y$

$$\begin{aligned} e^{\xi+\eta} &= e^\xi e^\eta = xy && \text{wende ln an } \Rightarrow \\ \ln(e^{\xi+\eta}) &= \ln(xy) && \text{da ln die Umkehrfunktion von } e \text{ ist } \Rightarrow \\ \xi + \eta &= \ln(xy) && \text{aus Definition } \Rightarrow \\ \ln(x) + \ln(y) &= \ln(xy) \end{aligned}$$

*q.e.d.*

3. Die allgmeine Potenz und der allgemeine Logarithmus.

Sei $a < 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

***Beweis:*** Sei $x = n \in N$ $e^{n \ln(a)} = \underbrace{e^{\ln(a)} \ldots e^{\ln(a)}}_{n-\text{mal}} = a \ldots a = a^n$ *q.e.d.*

Diese Funtkion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist stetig, bijektiv und stereng monoton wachsend.
Es gilt: $\quad a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$

*Beweis: Übung.* Die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \log_a(x)$ heißt der Logarithmus zur Basis $a$. Also $\log_a(a^x) = x$ oder ${}_a\log(x) = x$.

$$\text{Es gilt: } \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

*Beweis: Übung.*

**5.19. Definition**

Sei $(z_n)$ mit $z_n = a_n + ib_n$ eine Folge komplexer Zahlen.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = a + ib \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,.\,\exists N\ \forall n \geq N\ :\ |\, z_n - z\,| < \varepsilon$$

Es gelten alle Sätze auch für komplexe Folgen. Nur das Monotonie-Kriterium gilt nicht, da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet ist.

**5.20. Bemerkung**

Speziell gilt: Sei $z_n = a_n + ib_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = a + ib \ \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = aund \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

***Beweis:*** Sei $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a + ib \Rightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad |\, z_n - (a + ib)\,| < \varepsilon$

$\Rightarrow |\, a_n - a\,| = |\, Re(z_n - z)\,| \leq |\, z_n - z\,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$|\, b_n - b\,| = |\, Im(z_n - z)\,| \leq |\, z_n - z\,| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Sei $|\, z_n - z\,| = |\, a_n + ib_n - (a + ib)\,| = |\, a_n - a + i(b_n - b)\,| \leq |\, a_n - a\,| + |\, i\,|\,|\, b_n - b\,| < \varepsilon$ *q.e.d.*

Weiters gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$

***Beweis:*** $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n + ib_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - ib_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *q.e.d.*

$= \overline{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}$

**5.21. Definition**

Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z \in D$, wenn für jede komplexe Folge $(z_n), z_n \in \mathbb{C}$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_n)$

**5.22. Die komplexe Exponentialfunktion**

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ ist definiert $\forall z \in \mathbb{C}$ und stetig $\forall z \in \mathbb{C}$

***Beweis:*** Analog zu dem Beweis der Exponentialfunktion im Reellen. *q.e.d.*

Achtung: Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus 0$ ist nicht bijektiv $\Rightarrow$ Schwierigkeiten beim Logarithmus im Komplexen.

**5.23. Bemerkung**

Es gilt: $\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

***Beweis:*** $\overline{e^z} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}} = \overline{\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{n=N} \dfrac{z^n}{n!}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$ *q.e.d.*

**5.24. Bemerkung**

Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = Re(e^{ix}) + iIm(e^{ix})$$

**5.25. Definition**

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\cos x = Re(e^{ix})$ der Kosinus von x und $\sin x = Im(e^{ix})$ der Sinus von x.

Es gilt die Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

### 5.26. Bemerkung

Da $\overline{ix} = -ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$ folgt $1 = e^0 = e^{ix-ix} = e^{ix}e^{-ix} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}\overline{e^{ix}} = \mid e^{ix} \mid^2$
$\Rightarrow 1 = \mid e^{ix} \mid$
D.h. $e^{ix}$ liegt auf dem Einheitskreis $\mid z \mid = 1$

### 5.27. Proposition

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt

1. $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
2. $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

***Beweis:*** Von a und b:
$e^{ix} = Re(e^{ix}) + iIm(e^{ix}) = \cos x + i \sin x$
$e^{-ix} = e^{\overline{ix}} = \overline{e^{ix}} = Re(e^{ix}) - iIm(e^{ix}) = \cos x - i \sin x$

$$\text{Also} \quad \left.\begin{array}{r} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{von c:} \quad \cos^2 x + \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix} - e^{2ix} + 2e^{ix-ix} - e^{-2ix}\right) \\ &= \frac{1}{4}(2+2) = 1 \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### 5.28. Bemerkung

Die Funktionen cos und sin von $\mathbb{R}$ nach$\mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ : Folgt aus den Rechenregeln für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

### 5.29. Additionstheoreme

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

***Beweis:*** $\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} + e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

Mit dem Vergleich von Real- und Imaginärteil, folgt die Behauptung. *q.e.d.*

### 5.30. Reihendarstellung

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beide Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$

***Beweis:*** Absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe (oder aus dem Quotientenkriterium.)

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\overset{i^2=-1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Die Formeln folgen durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. *q.e.d.*

**5.31. Satz**

Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Intervall von $[0, 2]$ genau eine Nullstelle $x_0$.

***Beweis:***

1.) Existenz: $\cos$ ist stetig, $\cos 0 = 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$

zu zeigen: $\cos 2 < 0$

a) $\forall x \in [0,2], \forall n \geq 1$ g ilt $-\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$

denn $\forall n \geq 1 \quad (2n+1)(2n+2) > 2 \cdot 2 \geq x^2$

$\Rightarrow 1 > \dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow 0 > (\dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} - 1) \cdot \dfrac{x_n^2}{(2n)!} = \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \sum_{n \geq 3, n \text{ ungr}} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 1 -$

$\Rightarrow \cos 2 < 1 - \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^4}{4!} = 1 - \dfrac{4}{2} + \dfrac{16}{24} = 1 - 2 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3} < 0$

$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0,2]$ mit $\cos x_0 = 0$.

2.) Eindeutigkeit:

a) $\sin x \quad > 0 \ \forall x \in (0,2)$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}}_{>0} + \cdots > x -$$

$$= \frac{1}{6}(6x - x^3) = \frac{x}{6} \underbrace{(6 - x^2)}_{0<x<2} > 0$$

b) $\cos : (0,2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

Seien $0 < x_1 < x_2 < 2$

Setze $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in (0,2)$ und $y = \dfrac{x_2 - x_1}{2} \in (0,2)$

$\Rightarrow x_2 = x + y$ und $x_1 = x - y$

Aus den Additionstheoremen folgt:

$\cos x_2 = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos x_1 = \cos(x-y) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$

$\cos(-x) = \dfrac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = \cos x$

$\sin(-x) = \dfrac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = -\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin x$

$$\Rightarrow \cos(x_2) - \cos(x_1) = -2 \sin x \sin y = -2 \underbrace{\sin(\frac{x_1 + x_2}{2})}_{>0} \underbrace{\sin(\frac{x_2 - x_1}{2})}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow \cos x_2 < \cos x_1 \Rightarrow \cos$ ist auf $(0,2)$ streng monoton fallend, speziell injel

$\Rightarrow \cos$ hat genau eine Nullstelle.

*q.e.d.*

**5.32. Definition**

Sei$x_0 \in (0,2)$ die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos : (0,2) \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Kreiszahl

$$\pi = 2x_0$$

Also $\cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

**5.33. Bemerkung**
$\pi \approx 3,1415\ldots$
$\pi$ und $e$ sind irrational und transzendent, sind also keine Lösung einer algebraischen Gleichung. Wir werden später (Integralrechnung zeigen, dass $\pi$ die Fläche des Einheitskreises ist.

**5.34. Eigenschaften von $\pi$**
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$
Da $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1,$ da $\sin\frac{\pi}{2} > 0$
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\ \Rightarrow -1 = i^2 &= e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{\pi i} \\ \Rightarrow -i = i^2 &= e^{\frac{3\pi i}{2}} \\ \Rightarrow 1 = i^2 &= e^{2\pi i} \\ \Rightarrow e^{i(x+2\pi)} = e^{ix+i2\pi)} &= e^{ix} + e^{i2\pi)} = e^{ix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} = \cos x + i\sin x$
Also cos und sin sind $2\pi$-periodische Funktionen. Nullstellen von sin und cos:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}$$

*ohne Beweis.*

**5.35. Definition**
Der Tangens und Kotangens sind definiert durch:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \text{ mit } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \text{ mit } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Die Umkehrfunktionen von $\sin, \cos, \tan, \cot$ heißen:

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1,1] \to [0,\pi] \\ \arcsin &: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos &: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \arccos &: \mathbb{R} \to (0,\pi) \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind wieder stetig und streng monoton.

# 6 Differentialrechnung

**6.1. Definition**
Eien Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, falls $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

**6.2. Bemerkung** 1. $f$ differenzierbar in $x_0$ bedeutet: Für jede Folge $(h_n)$ mit $h_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ ist die Folge $\left(\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right)$ konverrgent. Ihren Grenzwert nennen wir $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) =$

$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$

2. $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x-x_0\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3. GRAFIK grenzwert mit annäheringen der Tangenten

**6.3. Beispiel** 1. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \mathbb{C}$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \Rightarrow c' = 0$

2. Eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \mathbb{C}$. $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{ax-ax_0}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a \Rightarrow (ax)' = a$

3. Eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-(x_0)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x+h = 2x \Rightarrow (x^2)' = 2x$

4. eine rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x_0}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x_0-x+h}{xx_0+hx_0}\right)$ und dann gleicher nenner und ausrechnen.. $\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. Die Exponentialfunktion. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Wir zeigen $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$
denn Sei $n \geq 0 \Rightarrow (n+2)! \geq 2\cdot 3^n \Rightarrow \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \leq \frac{|h|^n}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{|h|}{3}\right)^n$
Für $|h| < \frac{3}{2}$ folgt $\left| e^h - 1 - h \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 - h \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} \right| \leq |h|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \leq |h|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{|h|}{3}\right)^h = \frac{|h|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{|h|}{3}\right)}_{<1}^h \overset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{|h|^2}{2} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{|h|}{3}}_{<\frac{1}{2}}} \leq |h^2|$
$\Rightarrow \left| \frac{e^h-1}{h} - 1 \right| \leq |h| \xrightarrow{n\to 0} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$
$\Rightarrow (e^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$
$\Rightarrow (e^x)' = e^x$

6. Die Ableitungsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$
$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$

**6.4. Proposition**
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar $\Rightarrow f$ ist in $a$ stetig.

***Beweis:*** Wir definieren $\phi : D \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \phi(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
Also: $\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \Rightarrow \phi(x)(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \phi(x)(x-a) \overset{a\to\Rightarrow}{\longrightarrow} \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ ist in $f$ stetig. *q.e.d.*

**6.5. Rechenregeln**
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}(\lambda \in \mathbb{C})$. Dann gilt

1. $f + g : D \to \mathbb{R}$ ist in $a$ differenzierbar und

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

2. $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ ist in $a$ differenzierbar und

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

3. $fg : D \to \mathbb{R}$ ist in $a$ differenzierbar und

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \text{Produktregel}$$

4. Ist $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$ so ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ ist in $a$ differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(x))^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

***Beweis:*** 1. Folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

2. Folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

3. $\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \frac{1}{h}(f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)) = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$

4. Sei $f(x) = 1 \quad \forall x \in D$ $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}\right) = \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} = -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\frac{1}{g(a+h)g(a)} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} -g'(a)\frac{1}{(g(a))^2}$
Sei $f$ beliebig. Dann folgt aus der Produktregel:
$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g}(a) - \frac{1}{(g(a))^2}f'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(x))^2}$

*q.e.d.*

### 6.6. Kettenregel

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset E$
Ist $f$ in $a \in D$ differenzierbar und $g$ in $f(a) \in E$ differenzierbar, dann ist $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

*Beweisidee.* $\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} = \underbrace{\frac{g(f(a+h)) - g(f(a)}{f(a+h) - f(a)}}_{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(f(a))} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} h = g'(f(a))f'(a)$ *q.e.d.*

### 6.7. Beispiel

Weitere Beispiele

1. Sei $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$

***Beweis:*** Sei $n \geq 0$
IA: $n = 0, n = 1$ : schon gezeigt.
IV: $(x^n)' = nx^{n-1}$
IS: $n \mapsto n+1$ :
$\left(x^{n+1}\right)' = (xx^n)' \overset{\text{Produktregel}}{=} 1x^n + x(nx^{n-1}) = x^n + nx^n = (n+1)x^n$
Sei $n < 0$ . Setze $n = -m$ mit $m > 0$
$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \overset{\text{Quotientenregel}}{\Rightarrow} (x^m)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{0x^m - 1mx^{m-1}}{x^2m} = -\frac{mx^m m-1}{x^{m+m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^m x^m} = -m\frac{1}{x^m}\frac{1}{x} = -m\frac{1}{m}x^{-1} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1}$ *q.e.d.*

Seit $f(x) = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow f'(x) = (e^{ax})' = ae^{ax}$
Sei $g(x) = ax \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} (e^{ax})' = (e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x) = ae^{ax}$

$$(\sin x)' = \cos x (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)' = \frac{(e^{ix})' - (e^{-ix})'}{2i} = \frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$
$$(\cos x)' = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)' = \frac{(e^{ix})' + (e^{-ix})'}{2} = \frac{ie^{ix} - ie^{-ix}}{2} = i\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{-1}{i}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)' = \left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

$$(\sin^2 x)' = \sin(2x)$$

$g(x) = x^2, f(x) = \sin x$
$(\sin^2 x)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$

### 6.8. Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, mit $f([a, b]) = [A, B]$. Sei $f^{-1} : [A, B] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Ist $f$ in $x \in [a, b]$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ dann ist $f^{-1}$ in $y = f(x)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

***Beweis:*** Wir wissen, schon $f^{-1}$ ist stetig. Sei $(y_n)$ eine Folge in $[A, B]$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$
Da $f^{-1}$ stetig in $y$, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$
Sei $x_n = f^{-1}(y_n), x = f^{-1}(y)$
Da $f$ in $x$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{x_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad q.e.d.$$

### 6.9. Beispiel

$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Sei $f(x) = \exp(x)$, dann ist $f^{-1}(x) = \ln(y)$. Wir wissen $f'(x) = (\exp(x))' = \exp(x) = f(x)$
Also folgt $(\ln(x))' = (f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{\exp(\ln(y))} = \dfrac{1}{y}$

### 6.10. Anwendung

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

***Beweis:*** $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ und $(\ln 1)' = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - \frac{\overbrace{\ln 1}^{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 1}{\frac{1}{n}} = (\ln 1)' = 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Da exp stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$

*q.e.d.*

### 6.11. Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar, dann heißt die Ableitung von $f'$ die zweite Ableitung von $f$. Man schreibt $(f')'(x_0) = f''(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$ Allgemeint definiert man induktiv für $n \geq 1$

$$(f^{(n-1)})'(x_0) = f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$$

$f$ heißt stetig differenzierbar, wenn $f$ differenzierbar ist und die Ableitung $f'$ stetig ist.

### 6.12. Der Satz von Rolle

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Weiters sei $f(a) = f(b) = 0$. Dann folgt es gibt ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$

***Beweis:*** Ist $f(x) = 0 \;\forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \;\forall x \in (a,b)$.
Wir können also annehmen: Es gibt ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) > 0$. (Wenn $f(x) < 0$ betrachte die Funktion $-f$). Da $f$ auf $[a,b]$ stetig ist, folgt aus dem Satz vom Maximum, dass $f$ an einer Stelle $x_0 \in (a,b)$ ihr Maximum annimmt.
$\Rightarrow f(x_0) > 0$ und $x_0 \in (a,b)$ und $\forall x \in (a,b): \; f(x) \leq f(x_0)$
$\Rightarrow$ Ist $x > x_0: \; \dfrac{f_x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ und ist $x < x_0: \; \dfrac{f_x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
$\Rightarrow \forall$ Folgen $(x_n)$ mit $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_n} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leq 0$
und $\forall$ Folgen $(x_n)$ mit $x_n < x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_n} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$
$\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$ und $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ *q.e.d.*

### 6.13. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, MWS

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

***Beweis:*** Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert als $g(x) = f(x) - rx - s$, mit $r, s \in \mathbb{R}$. Da $f$ differenzierbar ist ist auch $g$ differenzierbar. Um den Satz von Rolle anwenden zu können, muss $g(a) = g(b) = 0 \Rightarrow f(a) - ra - s = f(b) - rb - s = 0$
D.h. $f(a) = ra - s$ und $f(b) = rb - s \quad \Rightarrow f(a) - f(b) = rb - ra \Rightarrow r = \dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}$
$\Rightarrow s = f(a) - ra = f(a) - \dfrac{f(a) - f(b)}{b - a} a = \dfrac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b - a} = \dfrac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$

Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$
$\Rightarrow f'(\xi) - \dfrac{f(a) - f(b)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}$ *q.e.d.*

### 6.14. Spezialfall

Ist $f(a) = f(b)$, dann ist $f'(\xi) = 0$

### 6.15. Verallgemeinerte Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Sei weiters $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Dann gilt:

$$g(b) \neq g(a) \text{ und es gibt ein } x_0 \in (a,b) \text{ mit } \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

***Beweis:*** Wäre $g(b) = g(a)$, dann gäbe es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$ Widerspruch!
Denn $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(a) \neq g(b)$
Definiere $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$, dann ist $h(a) = f(a)$ und $h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$. Aus dem Mittelwertsatz folgt es gibt ein $x_0 \in (a,b)$, sodass $h'(x_0) = 0$
$\Rightarrow f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b-g(a)}g'(x_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b-g(a)}$ *q.e.d.*

### 6.16. Korollar

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar. Ist $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist $f$ konstant.

***Beweis:*** Angenommen $f$ ist nicht konstant, dann gibt es $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ mit $f(a_1) \neq f(b_1) \overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in (a_1, b_1)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \neq 0$ Widerspruch! $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist konstant. *q.e.d.*

### 6.17. Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar.

Ist $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ streng monoton steigend.
Ist $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ streng monoton fallend.
Ist $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ monoton steigend.
Ist $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in $[a,b]$ monoton fallend.

***Beweis:*** Wir zeigen nur eine streng monoton steigende Funktion an, der Beweis für anderes Monotonieverhalten ist analog durchführbar.
Angenommen $f$ wäre nicht streng monoton wachsend. $\Rightarrow$ es gibt $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ mit $f(a_1) \geq f(b_1) \overset{MWS}{\Rightarrow}$ $\exists x_0 \in (a_1, b_1)$ mit $f'(x) = \dfrac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \leq 0$ Widerspruch! $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend. *q.e.d.*

### 6.18. Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat an einer Stelle $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (Minimum) wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq (\geq) f(x_0)\ \forall x :\ |\, x - a \,| < \varepsilon$ $x_0$ heißt lokales Extremum, wenn $x_0$ lokales Maximum oder Minimum ist.

### 6.19. Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a,b)$ differenzierbar.

1. Hat $f$ in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extemum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2. Ist $f$ in $x_0 \in (a,b)$ zweimal differenzierbar und es gibt ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < (>) 0$ dann ist $x_0$ ein lokales Maximum (Minimum)

***Beweis:*** 1. Haben wir im Beweis von Satz von Rolle gezeigt.

2. Wir zeigen nur für Maximum, fürs Minimum betrachte $-f$
   Sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$. Da $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon < 0 \, \forall x \ |\, x_0 - x \,| < \varepsilon$ für $x_0 \neq x$ mit $\dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

   Fall 1 $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$

   Fall 2 $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

   $\Rightarrow f$ hat in $x_0$ ein lokales Maximum.

*q.e.d.*

### 6.20. Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. zB: $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum. Aber $f'(0) = f''(0) = 0$. Für $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$ aber $x = 0$ ist kein Extremum.

### 6.21. Regel von de l'Hospital

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es existiert $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. Ist $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$

2. Ist $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g'(x) = \pm\infty \Rightarrow g(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$

Ebenso für $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = c$

***Beweis:*** 1. Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt zu jedem $x \in (a,b)$ gibt es ein $t_x \in (a,x)$ mit $\dfrac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
Konvergiert $x \to a \Rightarrow t_x \to a \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t_x \to a^+} \dfrac{f'(t_x)}{g'(t_x)}$
2. analog zu 1.

*q.e.d.*

### 6.22. Beispiel

Beispiele zur Regel von l'Hopital.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$

# 7 Integralrechnung

Folgende Eigenschaften gelten

1. Rechtecksfläche $\displaystyle\int_a^b 1 \, \mathrm{d}x = b - a$

2. Zerschneiden $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad$ für $a \leq c \leq b$

3. Positivität $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

4. Liniarität $\int_a^b \lambda(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

### 7.1. Bemerkung

Aus 3. und 4. folgt: Ist $f(x) \leq 0\ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$. Denn $-f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow$ $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

### 7.2. Definition

Eine Treppenfunktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist folgende Funktion:
Es gibt eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$, mit $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ und Konstanten $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{R}$, sodass $\phi(x) = c_k\ \forall x \in (t_{k-1}, t_k)$ für $k = 1, \ldots, n$. Die Werte $\phi(t_k)$ für $k = 0, \ldots, n$ sind beliebig.

### 7.3. Integral für Treppenfunktion

Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, bzgl der Unterteilung $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und $\phi(x) = c_k$für $x \in (x_{k-1}, x_k)$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

### 7.4. Bemerkung

Man kann sich leicht überlegen dass diese Definition unabhängig von der Zerlegung ist.

### 7.5. Proposition

Das Integral für Treppenfunktion erfüllt die Eigenschaften eines Integrals. (Rechtecksfläche, Zerschneiden, Positivität und Liniarität)

***Beweis:*** Folgt direkt aus der Definition des Integrals für Treppenfunktionen. *q.e.d.*

### 7.6. Ziel

Erweiterung des Integrals auf stetige und stückweise stetige Funktionen.

### 7.7. Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenenes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists \delta > 0 \ : \ \forall x, x' \in [a,b] \text{ mit } |\, x - x' \,| < \delta \text{ folgt } |\, f(x) - f(x') \,| < \varepsilon$$

***Beweis:*** Angenommen $f$ ist nicht gleichmäßig stetig. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \,.\, \forall \delta > 0 \,.\, \exists x, x' \in [a,b]$ mit $|\, x - x' \,| < \delta$ aber $|\, f(x) - f(x') \,| \geq \varepsilon$. Speziell gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass so zu jedem $n \geq 1$ $x_n, x'_n \in [a,b]$ gibt mit $|\, x_n - x'_n \,| < \frac{1}{n}$, aber $|\, f(x_n) - f(x'_n) \,| \geq \varepsilon$.
Betrachte die Folge $(x_n)$.
$(x_n)$ ist durch $a$ und $b$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ von $(x_n)$.
Da $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b]$.

Nach der Voraussetzung gilt: $|\, x_{n_k} - x'_{n_k} \,| < \dfrac{1}{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} - x_{n_k} + \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = 0 + \xi = \xi$
Also $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = \xi$.
Da $f$ stetig ist, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi) - f(\xi) = 0$.
Widerspruch! zu $\left|\, f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \,\right| \geq \varepsilon > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$ *q.e.d.*

### 7.8. Definition

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < \dots < x_n = b$ gibt, sodass $f$ auf jedem offenen Intervall $(x_{k-1}, x_k)$ $\forall k \in 1, \dots, n$ stetig ist und zu einer stetigen Funktion auf $[x_{k-1}, x_k]$ fortgesetzt werden kann. (d.h. der rechts-/linksseitige Grenzwert existiert für $x_{k-1}$ und $x_k$.

### 7.9. Beispiel

Beispiele zu stückweiser Stetigkeit.

1. Jede Treppenfunktion ist stückweise stetig.
2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist nicht stückweise stetig, denn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

### 7.10. wichtige Proposition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

1. $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$
2. $|\, \phi(x) - \psi(x) \,| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$

***Beweis:*** Es genügt die Aussage für stetige Funktionen zu zeigen, sonst die Teilstücke zusammensetzen, wichtig dabei ist, dass $f$ auf $[x_{k-1}, x_k]$ stetig fortgesetzt werden kann.
Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ $f$ ist gleichmäßig stetig , d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; : \; \forall x, x' \in [a,b]$ mit $|\, x - x' \,| < \delta$ folgt $|\, f(x) - f(x') \,| < \varepsilon$
Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ (Archimedisches Axiom)
Definiere $t_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ für $k = 0, \dots n$. Wir erhalten dann eine äquivalente Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_n = b$.
Für $k = 1n \dots, n$ setze $c_k = f(t_k) + \dfrac{\varepsilon}{2} \quad c'_k = f(t_k) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ und definieren die Treppenfunktion $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$
$\phi(a) = \psi(a) = f(a)$
$\phi(x) = c'_k, \quad \psi(x) = c_k$, für $t_{k-1} < x \leq t_k$
Nach Deifinition folgt $\forall x \in (a,b]$
$|\, \psi(x) - \phi(x) \,| = \left|\, f(t_k) + \dfrac{\varepsilon}{2} - (f(t_k) - \dfrac{\varepsilon}{2}) \,\right| > \left|\, \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \,\right| = \varepsilon \Rightarrow$ Eigenschaft 2.
Für 1: $\phi(a) = f(a) = \psi(a)$
Sei $x \in (t_{k-1}, t_k]$ für $k = 1, \dots, n$
$|\, x - t_k \,| \leq |\, t_{k-1} - t_k \,| = \left|\, a + (k-1)\dfrac{b-a}{n} - (a + k\dfrac{b-a}{n}) \,\right| = \left|\, -\dfrac{b-a}{n} \,\right| = \dfrac{b-a}{n} \leq \delta$
Mit gleichmäßiger Stetigkeit folgt $|\, f(x) - f(t_k) \,| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(t_k) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow f(t_k) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(t_k) + \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow c'_k < f(x) < c_k$
$\Rightarrow \phi(x) < f(x) < \psi(x) \quad \forall x \in (t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n$
$\Rightarrow \phi(x) < f(x) < \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow$ Eigenschaft 1. *q.e.d.*

### 7.11. Ober- und Untersumme

Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig gilt:

$$\Sigma_+ (f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \;:\; \psi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist Treppenfunktion mit } f(x) \leq \psi(x) \right\} \text{ heißt Obersumme von } f$$

$$\Sigma_- (f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \;:\; \phi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist Treppenfunktion mit } \phi(x) \leq f(x) \right\} \text{ heißt Untersumme von } f$$

### 7.12. Satz

Es gilt:

1. Für $A_+ \in \Sigma_+ (f)$ und $A_- \in \Sigma_- (f)$ gilt $A_- \leq A_+$.
2. Es existieren $\mathcal{I}_+ (f) = \inf(\Sigma_+ (f))$ (Oberintegral) und $\mathcal{I}_- (f) = \sup(\Sigma_- (f))$ (Unterintegral)
3. Es gilt: $\mathcal{I}_+ (f) = \mathcal{I}_- (f)$

***Beweis:***

1. Seien $\phi, \psi$ Teppenfunktionen mit $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \Rightarrow \phi(x) \leq \psi(x) \Rightarrow 0 \leq \psi(x) - \phi(x) \Rightarrow 0 \leq \int_a^b \psi(x) - \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x$ d.h. $A_- \leq A_+$.
2. Nach Proposition gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi$ mit $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ Also: Es gibt Zahlen $B_+, B_-$ mit $B_- \leq B_+$
   $\Rightarrow \forall A_- \in \Sigma_- (f)$ gilt $A_- \leq B_+$ und $\forall A_+ \in \Sigma_+ (f)$ gilt $A_+ \geq B_-$
   d.h. $\Sigma_- (f)$ ist durch $B_+$ nach oben beschänkt und $\Sigma_- (f)$ ist durch $B_-$ nach unten beschränkt.
   Nach dem Vollständigkeitsaxiom für reelle Zahlen existieren $\mathcal{I}_+ (f) = \inf(\Sigma_+ (f))$ und $\mathcal{I}_- (f) = \sup(\Sigma_- (f))$ und es gilt $\mathcal{I}_- (f) \leq \mathcal{I}_+ (f)$.
3. Nach Proposition gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi$ mit $0 \leq \psi(x) - \phi(x) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$
   $\Rightarrow 0 \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon(b-a)$
   Wähle $\varepsilon = \dfrac{1}{n(b-a)} > 0$
   $\Rightarrow 0 \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$
   $\Rightarrow 0 \leq \mathcal{I}_+ (f) - \mathcal{I}_- (f) \leq \dfrac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \mathcal{I}_+ (f) - \mathcal{I}_- (f) = 0 \Rightarrow \mathcal{I}_+ (f) = \mathcal{I}_- (f)$

*q.e.d.*

### 7.13. Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann heißt

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}_+ (f) = \mathcal{I}_- (f)$$

das bestimmte Integral von $f$.

### 7.14. Bemerkung

Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ist für alle beschränkten Funkktionen mit $\mathcal{I}_+ (f) = \mathcal{I}_- (f)$ definiert.

### 7.15. Rechenregeln

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann gilt:

1. $\int_a^b k \, \mathrm{d}x = k(b-a) \quad k \in \mathbb{R}$

2. $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x = \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \quad a \leq c \leq b$

3. $\int_a^b \lambda(f+g)(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \quad \lambda \in \mathbb{R}$

4. Ist $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$

***Beweis:*** nicht in VO. *q.e.d.*

### 7.16. Bemerkung

In Übereinstimmung mit den Rechenregeln setzen wir:

$$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \int_a^b -f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

### 7.17. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

***Beweis:*** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Nach dem Satz vom Maximum, existieren $m = min\{f(x) \; : \; x \in [a,b]\}$ und $M = max\{f(x) \; : \; x \in [a,b]\}$.

$\Rightarrow m \leq f(x) \leq M \; \forall x \in [a,b]$

$\overset{\text{Rechenregel}}{\Rightarrow} \int_a^b m \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b M \, \mathrm{d}x$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x}_{=c} \leq M$

$\Rightarrow$Sei $x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) = m$ und $x_1 \in [a,b]$ $f(x_1) = M \Rightarrow f(x_0) \leq c \leq f(x_1)$

Definiere (Annahme $x_0 < x_1$ sonst umdrehen): $g : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - c$. $g$ ist wieder stetig.

$g(x_0) = f(x_0) - c \leq 0$ und $g(x_1) = f(x_1) - c \geq 0$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein $\xi \in [x_0, x_1] \subset [a,b]$, mit $g(\xi) = 0$

$\Rightarrow f(\xi) = c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \Rightarrow f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *q.e.d.*

### 7.18. Stammfunktion, unbestimmtes Integral

Sei $f$ eine Funktion. Eine Funktion $F$ heißt Stammfunktion von $f$, falls $F$ differenzierbar ist und $F' = f$. Wir schreiben: $F = \int f(x) \, \mathrm{d}x$, $F$ heißt das unbestimmte Integral von $f$.

### 7.19. Bemerkung

Seien $F, G$ Stammfunktionen von $f$. Dann ist $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Somit ist $F - G = c \Rightarrow F = G + c$. Das heißt die Stammfunktion von $f$ nur bis auf eine additive Konstante $c$ eindeutig bestimmt. Man schreibt oft. $F(x) = \int f(t) \, \mathrm{d}t + c$

### 7.20. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - Teil I

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ folgendermaßen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann ist $F$ eine Stammfunktion von $f$.

***Beweis:*** zu zeigen ist: $F$ ist differenzierbar und $F' = f$.
wir zeigen: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$
Sei $(h_n)$ eine Folge mit $h_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
zz: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = f(x)$
o.B.d.A. Sei $h_n > 0$.
$F(x+h_n) - F(x) = \displaystyle\int_a^{x+h_n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h_n} f(t)\,\mathrm{d}t$
Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung exisitiert ein $x_n \in [x, x+h_n]$ mit $\int_x^{x+h_n} f(t)\,\mathrm{d}t = h_n f(x_n)$.
d.h. $\dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = f(x_n)$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Da $f$ stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
Also ist $F$ differenzierbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$ *q.e.d.*

### 7.21. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - Teil II

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F$ eine Stammfunktion von $f$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Man schreibt: $F|_a^b = F(b) - F(a)$

***Beweis:*** Sei $x \in [a,b]$. Dann folgt aus Teil I $F(x) = \displaystyle\int_a^x f_t\,\mathrm{d}t$ ist Stammfunktion von $f$.
$\Rightarrow F(x) = \displaystyle\int_a^x f_t\,\mathrm{d}t + c$ mit $c$ Konstante
$\Rightarrow F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f_t\,\mathrm{d}t + c - \underbrace{\int_a^a f_t\,\mathrm{d}t}_{=0} - c = \int_a^b f_t\,\mathrm{d}t.$ *q.e.d.*

### 7.22. Beispiel

Beispiele zur Stammfunktion

1. $\displaystyle\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ für $a \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|\,x\,|)$
3. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$
4. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$
5. $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x$

***Beweis:*** Differenzieren der rechten Seite. *q.e.d.*

zB $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x|_0^\pi = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 + 1 = 2$

$\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x|_0^{2\pi} = \cos(0) - \cos(2\pi) = -1 + 1 = 0$

### 7.23. Partielle Integration

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

***Beweis:*** Sei $F(x) = f(x)g(x)$

Aus der Produktregel folgt $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Mit dem Hauptsatz folgt

$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ *q.e.d.*

### 7.24. Substitutionsregel

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi([a, b]) \subset D$. Dann ist

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

***Beweis:*** Sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f$. Nach der kettenregel folgt für $t \in [a, b]$

$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t))f(\phi(t))\phi'(t)$ Mit dem Hauptsatz folgt

$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F \circ \phi)'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \phi)(t)\Big|_a^b = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$ *q.e.d.*

### 7.25. Bemerkung

Man schreibt symbolisch $\mathrm{d}\phi(t) = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

### 7.26. Beispiel

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(0 < a < b)$ mit $f(x) = lnx$

   $\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{f}\underbrace{1}_{g'}\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Partielle Integration}}{=} \ln(x)x\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x = \ln(x)x\Big|_a^b - (b - a) = \ln(b)b - \ln(a)(a) - (b - a) = x(\ln(x) - 1)\Big|_a^b$

   Also $F(x) = xln(x) - x$ ist Stammfunktion von $\ln(x)$.

2. Fläche des Einheitskreises

   $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y == \sqrt{1 - x^2}$ Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   Frage: Was ist $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$?

   Substitution $x = \phi(t) = \sin(t)$, dann ist $\phi'(t) = \cos(t)$. $\phi(0) = \sin(0) = 0$ und $\phi(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

   $\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(0)}^{\phi(\frac{\pi}{2})} f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Substitutionsregel}}{=} \int_0^{\frac{\phi}{2}} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\phi}{2}} \underbrace{\sqrt{1 - \sin(t)^2}}_{\cos(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\phi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$

$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - (1-\cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$

$\Rightarrow \cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$

$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)+1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} +1\,\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}\left.\frac{\sin(2t)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{1}{2}\,x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{0}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ Fläche des Einheitskreises $= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\frac{\pi}{4} = \pi$