

# Analysis für Informatik

Ass.Prof. Clemens Amstler

Tanja Kohler

6. Dezember 2018

# 1 Reelle und Komplexe Zahlen

## 1.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  erfüllen eine Reihe von Axiomen, die in drei Gruppen unterteilt werden können.

- I. Algebraische Axiome
- II. Anordnungsaxiome
- III. Vollständigkeitsaxiome

### 1.1.1 Algebraische Axiome

Die reellen Zahlen bilden mit der Addition  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a + b$  und der Multiplikation  $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a * b$  einen Körper  $(\mathbb{R}, +, *)$ , der folgende Axiome erfüllt:

- 1)  $\mathbb{R}$  ist bzgl. der Addition eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, +)$
- 2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist bzgl. der Multiplikation eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, *)$
- 3) Das Distributivgesetz gilt:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ a * (b + c) = a * b + a * c$

Andere Beispiele von Körpern:  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_p$  für  $p$  prim. Die Natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, \dots, \infty\}$  und die Ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bilden keinen Körper.

#### 1.1.1. Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}$  gilt  $0 * x = 0$ .

|                            |   |                                       |
|----------------------------|---|---------------------------------------|
| <b>Beweis:</b> $0 + 0 = 0$ | $a(0 + 0) = a * 0$                          | Distributivgesetz $\Rightarrow$       |
|                            | $a * 0 + a * 0 = a * 0$                     | $\mathbb{R}$ assoziativ $\Rightarrow$ |
|                            | $a * 0 + (a * 0 - a * 0) = (a * 0 - a * 0)$ | additives Inverses $\Rightarrow$      |
|                            | $a * 0 + 0 = 0$                             | $0 + 0 = 0 \Rightarrow$               |
|                            | $a * 0 = 0$                                 |                                       |

*q.e.d.*

#### 1.1.2. Definition Potenzschreibweise

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  wird  $a^n$  folgendermaßen induktiv definiert:  $a^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a(a^{n-1}) & n > 0 \\ (a^{-1})^n & n < 0 \end{cases} \forall a \neq 0$

#### 1.1.3. Bemerkung

$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\forall n, m \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$(1) \ a^n * a^m = a^{n+m} \qquad (2) \ a^{n^m} = a^{n*m} \qquad (3) \ a^n * b^n = (a * b)^n$$

**Beweis:**

$$(1) \ a^n * a^m \stackrel{\text{n. Def.}}{=} \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}} * \underbrace{a \dots a}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a \dots a}_{n+m\text{-mal}} \stackrel{\text{n. Def.}}{=} a^{n+m}$$

$$(2) \ a^{n^m} = a^{\underbrace{n \dots n}_{m\text{-mal}}} = a^{m*n} = a^{n*m}$$

$$(3) \ a^n * b^n = \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}} * \underbrace{b \dots b}_{n\text{-mal}} = \underbrace{a \dots ab \dots b}_{n\text{-mal}} = (a * b)^n$$

*q.e.d.*

### 1.1.2 Anordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden in positive Zahlen, negative Zahlen und 0 unterteilt. Dabei ist  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$   
Und es gelten folgende Axiome:

(1)  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der folgenden Bedingungen:  $x > 0$ ,  $x = 0$ ,  $x < 0$

(2)  $\forall x, b \in \mathbb{R} \ x, b > 0$  gilt:  $a + b > 0 \wedge a * b > 0$

Wir schreiben für  $a, b \in \mathbb{R}$   $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$  und  $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

### 1.1.4. Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$

**Beweis:** Sei  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a - b < 0$  und  $b - c < 0 \Rightarrow a - b + b - c < 0 \Rightarrow a - c < 0 \Rightarrow a < c$  *q.e.d.*

### 1.1.5. Bemerkung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:

a)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

b)  $a < b$  und  $c > 0 \Rightarrow a * c < b * c$

c)  $a < b$  und  $c < 0 \Rightarrow a * c > b * c$

d)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$  speziell  $1 > 0$

e)  $0 < a < b$  und  $a < b < 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

### 1.1.6. Definition

Für  $a \in \mathbb{R}$  und der Betrag  $|a|$  folgendermaßen definiert.  $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

### 1.1.7. Satz

$\forall b \in \mathbb{R}$  gilt:

(1)  $|a * b| = |a| * |b|$

(2)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)

(3)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$  (umgekehrte Dreiecksungleichung)

**Beweis:**

(1) Beweis durch Fallunterscheidung.

(2) •  $a \leq |a|$  und  $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$

•  $-a \leq |a|$  und  $-b \leq |b| \Rightarrow -a + -b \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$  und  $-(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

(3) •  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

•  $|b| = |a - b - a| \leq |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$  und  $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$

$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$

*q.e.d.*

### 1.1.8. Bemerkung Archimedisches Axiom

Für zwei positive Zahlen,  $a, b$  gibt es immer eine natürliche Zahl  $n$ , sodass folgendes gilt:  $n * b > a$  Also:

$$\forall a, b > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad n * b > a$$

Als Folgerung erhalten wir: Setze  $b = 1$

$$\forall a > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad n > a$$

### 1.1.9. Satz Bernoullische Ungleichung

Sei  $a > -1$  dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na$$

**Beweis:** IA  $n = 0 : n = 0 \quad 1 = (1 + a)^0 \geq 1 + 0 * a = 1$

$$\text{IV } (1 + a)^n \geq 1 + na$$

$$\text{IS } n \mapsto n + 1 \quad n \mapsto n + 1$$

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n$$

$$\stackrel{\text{IV}}{\geq} (1 + a)(1 + na)$$

$$= 1 + na + a + \underbrace{na^2}_{>0}$$

$$\geq 1 + (n + 1)a$$

*q.e.d.*

### 1.1.10. Korollar

Sei  $a > 0$ .

(1) Ist  $a > 1 \forall k > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n > k$ .

(2)  $0 < a < 1 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n < \varepsilon$

**Beweis:**

(1) Sei  $a = x + 1 > 1 \Rightarrow a^n = (x + 1)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx$   
 $\forall n \in \mathbb{N} \exists x > 0$  mit  $nx > k - 1 \Rightarrow a^n \geq 1 + nx > 1 + k - 1 = k$

(2) Sei  $0 < a < 1$  und  $b = \frac{1}{a} > 1 \stackrel{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{R}$  mit  $\left(\frac{1}{a}\right)^n = b^n > k = \frac{1}{\varepsilon}$   
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon$ .

*q.e.d.*

### 1.1.3 Vollständigkeitsaxiom

Die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  hat keine Lücken.

#### 1.1.11. Definition

Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge.

1.  $k \in \mathbb{R}$  heißt obere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \leq k$ .  $M$  heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt. zB  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt, nach dem Archimedischem Axiom.
2.  $k \in \mathbb{R}$  heißt untere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \geq k$ .  $M$  heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt.
3.  $M$  heißt beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existiert. Äquivalente Definition für Beschränktheit:  $\exists k \in \mathbb{R}, |x| \leq k \forall x \in M$
4.  $a \in \mathbb{R}$  heißt Infimum von  $M$ , falls  $a$  größte untere Schranke von  $M$  ist. Das heißt  $a$  ist untere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine untere schranke von  $M$ , dann folgt  $k \leq a$

Schreibweise:  $a = \inf(M)$

5.  $b \in \mathbb{R}$  heißt Supremum von  $M$ , falls  $b$  kleinste obere Schranke von  $M$  ist. Das heißt  $b$  ist obere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine obere schranke von  $M$ , dann folgt  $k \geq b$

Schreibweise:  $b = \sup(M)$

#### 1.1.12. Beispiel

Sei  $a < b$  dann ist  $\inf[a, b] = a = \inf(a, b)$  und  $\sup[a, b] = b = \sup(a, b)$ .

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  heißt abgeschlossenes Intervall

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  heißt offenes Intervall

#### 1.1.13. Bemerkung zur Erinnerung

Definition der natürlichen Zahlen (Axiom des kleinsten Element (Peanoaxiome))

Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

### 1.1.14. Satz Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum  $\inf(M) \in \mathbb{R}$ .

ohne Beweis.

### 1.1.15. Bemerkung

$\inf(M)$  muss kein Element von  $M$  sein.

### 1.1.16. Proposition

Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum  $\sup(M) \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Seien  $M$  nach oben beschränkt und  $a$  eine obere Schranke von  $M$ .

$\Rightarrow \forall x \in M \quad x \leq a \Rightarrow -a \leq -x \quad \forall x \in M \Rightarrow -a$  ist untere Schranke von  $-M = \{-x : x \in M\}$

$\Rightarrow -M$  ist nach unten beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom, existiert ein Infimum.

Sei  $b = \inf(-M) \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow -b \leq a$  und  $b \leq -x \Rightarrow x \leq -b \quad \forall x \in M$ .

Also  $-b$  ist obere Schranke und kleinste obere Schranke.  $\Rightarrow -b = \sup(M)$

q.e.d.

### 1.1.17. Proposition

$\sup(M)$  und  $\inf(M)$  sind eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Seien  $m$  und  $m'$  Suprema von  $M \Rightarrow m \leq m'$  und  $m' \leq m \Rightarrow m = m'$ .

analog für Infimum.

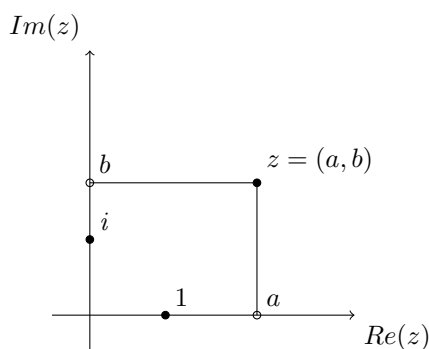
q.e.d.

## 1.2 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind die Punkte der Ebene  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Wir setzen  $1 = (1, 0), i = (0, 1) \Rightarrow z = (a, b) = a + ib$



zusätzlich verlangen wir  $i^2 = -1$  Also:  $\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

### 1.2.1. Satz

Es gilt:  $\mathbb{C}$  ist ein Körper.

**Beweis:** Sei  $x, y, z \in \mathbb{C}$  und  $x = a + ib, y = c + id, z = e + if$

I)  $\mathbb{C}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition:

- i)  $x + y = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C}$
- ii)  $x + 0 = a + ib + 0 + i0 = a + ib = x$
- iii)  $\exists -x \in \mathbb{C}$  mit  $x + -x = a + ib - a - ib = 0$
- iv)  $x + y = (a + c) + i(b + d) = (c + a) + i(d + b) = y + x$

II)  $\mathbb{C}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation:

- i)  $xy = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc) \in \mathbb{C}$
- ii)  $1x = (1 + i0)(a + ib) = a + ib = x$
- iii)  $\exists x^{-1} \in \mathbb{C}$  mit  $xx^{-1} = (a + ib)\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = 1$
- iv)  $xy = (ac - bd) + i(ad - bc) = (ca - bd) + i(da - cb) = yx$

III) Das Distributivgesetz gilt:

$$\begin{aligned} z(x + y) &= (e + if)(a + c + ib + id) \\ &= ea + ec - fb - fd + ifa + ifc + ieb + ied \\ &= ea - fb + ifa + ieb + ec - fd + ied + ifc \\ &= xy + xz \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### 1.2.2. Definition

Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$

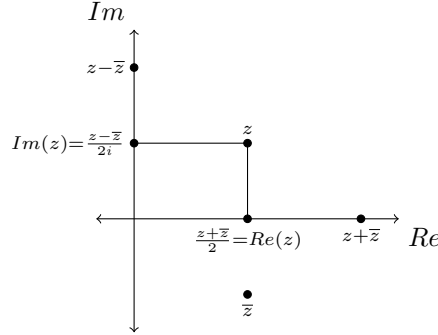
- $\bar{z} = a - ib$  heißt die konjugiert komplexe Zahl von  $z$ .
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  heißt Betrag von  $z$ .
- $a = \operatorname{Re}(z)$  heißt Realteil von  $z$ .
- $b = \operatorname{Im}(z)$  heißt Imaginärteil von  $z$ .

### 1.2.3. Satz

Es gilt:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

**Beweis:**



*q.e.d.*

### 1.2.4. Proposition

Es gilt:

- (i)  $\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 * z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad |\bar{z}| = |z|$
- (ii)  $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (iii)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iv)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**Beweis:**

- (i)
  - $\bar{\bar{z}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = z$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a - ib + c - id} = \overline{(a + c) - i(b + d)} = \overline{z_1 + z_2}$
  - $\overline{z_1 * z_2} = \overline{(a - ib)(c - id)} = \overline{(ac + bd) - i(ac + bc)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
  - $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- (ii)
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \Leftrightarrow a = b = 0$
- (iii)  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iv) Sei  $a, b \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \quad z = a + ib$ 

$$\operatorname{Re}(z)^2 = a^2 \leq a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) \leq |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq |z|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \quad \text{denn } z_2 \bar{z}_1 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$$

$$= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 \quad \text{denn } z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad \text{denn } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1| |z_2|$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

*q.e.d.*

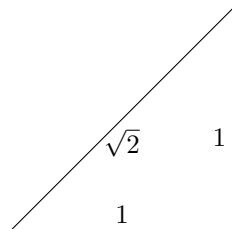


## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Folgen

#### 2.1.1. Beispiel

Betrachte



Annahme:  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ , aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

**Beweis:** Angenommen  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  und p und q nicht beide durch 2 teilbar, sonst kürzen wir.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow \text{Also } 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow \exists m \text{ mit } p = 2m.$$

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow$$

$$q^2 = 2m^2 \quad \text{d.h. } 2|q^2 \Rightarrow 2|q \text{ Also p und q sind beide durch 2 teilbar.}$$

Widerspruch! p und q sind nicht beide durch 2 teilbar.  $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  *q.e.d.*

#### 2.1.2. Bemerkung

$\sqrt{2}$  ist die positive Lösung von  $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right)$

Betrachte die rechte Seite dieser Gleichung und berechne diese induktiv

Setze zB

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1,5$$

$$a_3 \approx 1,41$$

$$a_3 \approx 1,4142$$

...

Also  $a_n$  nähert sich mit wachsendem  $n$  immer mehr an  $\sqrt{2}$ . Dies führt zu dem Begriff **Grenzwert einer Folge**.

#### 2.1.3. Definition

Eine Folge  $(a_n)_{k=0}^{\infty}$  reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$  Bezeichnung: Wir schreiben für Folgen

$$(a_n)_{k=0}^{\infty}$$

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(a_n)$$

$$(a_n)_{n \geq n_0}$$

#### 2.1.4. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

1. (streng) monoton wachsend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N} \ a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n) \nearrow \quad (a_n < a_{n+1} \quad (a_n) \uparrow)$
2. (streng) monoton fallend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N} \ a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n) \searrow \quad (a_n > a_{n+1} \quad (a_n) \downarrow)$
3. (streng) monoton, sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

#### 2.1.5. Beispiel

Ein paar Beispiele zu Folgen:

- (1) Die konstante Folge  $a_n = k$  ist monoton fallend und steigend.
- (2) Die harmonische Folge  $a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \geq 1$  ist streng monoton fallend.
- (3) Die alternierende Folge  $a_n = (-1)^n$  ist nicht monoton.
- (4) Die geometrische Folge  $a_n = a^n \ \forall n \geq 0$  Sei  $a \in \mathbb{R} \ a^n$  ist 
$$\begin{cases} \text{streng monoton wachsend} & a > 1 \\ \text{streng monoton fallend} & 0 < a < 1 \\ \text{monoton} & a = 1 \\ \text{nicht monoton} & a \leq 0 \end{cases}$$
- (5) Die Fibonacci Folge ist monoton wachsend.  $f_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0, n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{sonst} \end{cases}$

#### 2.1.6. Definition der Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$a$  heißt der Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)$ . Die Folge  $(a_n)$  heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $\lim_{n \rightarrow k} a_n = a$ . Wobei  $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

#### 2.1.7. Bemerkung

Sei  $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ .  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$  heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Also: Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Leftrightarrow$  Die Folgenglieder  $a_n$  liegen ab einer Schwelle  $N$  alle in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .  $(a_n)$  konvergiert nicht gegen  $a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \ |a_n - a| \geq \varepsilon$ .

### 2.1.8. Beispiel

Beispiele zur Konvergenz:

- (1) Die harmonische Folge konvergiert:  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N > \frac{1}{\varepsilon}$   $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$  *q.e.d.*

- (2) Die alternierende Folge  $b_n = (-1)^n$  ist divergent

**Beweis:** Angenommen  $\exists a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |b_n - a| < \frac{1}{2}$ . Da  $b_{n+1} - b_n = \pm 2$  ist  $\forall n \geq N$

$$2 = |b_{n+1} - b_n| = |b_{n+1} - a - (b_n - a)| \leq |b_{n+1} - a| + |b_n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1$$

Widerspruch!  $\Rightarrow (b_n)$  ist divergent. *q.e.d.*

- (3) Ob die geometrische Folge  $(a^n)_{n \geq 1}$  hängt davon ab, welchen Wert  $a$  hat.

**Beweis:** Durch Fallunterscheidung

Fall 1  $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

Sei  $\varepsilon > 0$   $\xrightarrow{\text{Archimedisches Axiom}} \exists N \in \mathbb{N} \quad |a|^N < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \quad |a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^N < \varepsilon$

Fall 2  $a = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim a^n = 1$

Fall 3  $a = -1 \Rightarrow$  divergent weil alternierend.

Fall 4  $|a| > 1 \quad \forall K > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad |a|^n > K$  d.h.  $(a^n)$  ist unbeschränkt.

*q.e.d.*

### 2.1.9. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein  $A \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq A \quad (a_n \geq A)$$

$(a_n)$  heißt beschränkt, wenn  $(a_n)$  nach oben oder unten beschränkt ist. d.h.

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad |a_n| \leq K \vee |a_n| \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2.1.10. Satz

Jede konvergente Folge  $(a_n)$  ist beschränkt.

**Beweis:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wähle  $\varepsilon = 1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < 1$ . *q.e.d.*

$$|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1 \quad \forall n \geq N$$

Sei  $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$

$$|a_n| < K \quad \forall n \geq 1$$

### 2.1.11. Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. Das heißt eine beschränkte Folge ist nicht konvergent.

*Gegenbeispiel:* die alternierende Folge  $(-1)^n$ .

### 2.1.12. Satz Monotoniekriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann gilt:

- Ist  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist  $(a_n)$  konvergent.
- Ist  $(a_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist  $(a_n)$  konvergent.

**Beweis:** Es reicht die erste Aussage zu zeigen, denn ist  $(a_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt  $\Rightarrow (-a_n)$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  ist konvergent.

Sei also  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt. Mit dem Vollständigkeitsaxiom  $\Rightarrow \exists a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Und sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad a - \varepsilon < a_N \leq a$ .

Da  $(a_n) \nearrow \Rightarrow \forall n \geq N \quad a_N \leq a_n \quad \quad \quad q.e.d.$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

### 2.1.13. Bemerkung

Das Monotonie-Kriterium ist äquivalent zur Vollständigkeit.

### 2.1.14. Satz

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  und  $a \neq b$ .

$$\text{Sei } \varepsilon = \frac{1}{2} |b - a| \Rightarrow \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

$$\text{Sei } N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n \geq N \quad |b - a| = |(b - a_n) + (a_n - a)|$$

$$\leq |b - a_n| + |a_n - a|$$

$$= |a_n - b| + |a_n - a|$$

$$< \frac{1}{2} |b - a| + \frac{1}{2} |b - a|$$

$$= |b - a|$$

$$\Rightarrow |b - a| < |b - a| \text{ Widerspruch! } \Rightarrow a = b \quad \quad \quad q.e.d.$$

### 2.1.15. Satz Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1.  $(a_n \pm b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $\lambda(a_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
3.  $(a_n b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
4. Ist  $(b_n) \neq 0 \forall n \geq n_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ . Dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .
5.  $a_n \leq b_n$  dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \forall n \geq n_0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

1. Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$   
 $\Rightarrow \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$   
 $| (a_n \pm b_n) - (a \pm b) | = | (a_n - a) \pm (b_n - b) |$   
 $\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$   
 $\Rightarrow (a_n \pm b_n)$  beschränkt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b$ .
2. Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \forall n \geq N$   
 $|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda| |a_n - a| < \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$
3. Jede konvergente Folge ist beschränkt  $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$  mit  $|a_n| \leq K$  und  $|b| \leq K$   
 Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$  und  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \Rightarrow$   
 $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b + ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$   
 $\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$   
 $= \underbrace{|a_n|}_{\leq K} |b_n - b| + \underbrace{|b|}_{\leq K} |a_n - a| < K \frac{\varepsilon}{2K} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$
4. Zeige  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \Rightarrow ||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0$   
 $\Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \quad \forall n \geq n_0$   
 Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \quad \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \Rightarrow$   
 $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{bb_n} \right| = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b - b_n| < \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon.$
5. Sei  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$ . Angenommen  $a > b$ . Sei  $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$   
 $\Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$   
 $b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{2b+a-b}{2} = \frac{b+a}{2} = \frac{2a-a+b}{2}$   
 $= a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$   
 $\Rightarrow b_n < a_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$  Widerspruch!  $\Rightarrow a \leq b$

*q.e.d.*

### 2.1.16. Satz Sandwich-Theorem

Sei  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen mit der Eigenschaft, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . Sei  $(c_n)$  eine Folge mit der Eigenschaft, dass  $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$ . Dann ist  $(c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \text{ gilt: } a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

*q.e.d.*

### 2.1.17. Beispiel

Zwei Beispiele zum Sandwich-Theorem:

1. Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2.  $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$  ist divergent, denn  

$$a_n = \frac{(\sqrt{2n} - \sqrt{n})(\sqrt{2n} + \sqrt{n})}{(\sqrt{2n} + \sqrt{n})} = \frac{2n - n}{\underbrace{\sqrt{n}(\sqrt{2} + 1)}_{\leq 3}} \geq \frac{n}{3\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{3} \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

### 2.1.18. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $\pm\infty$  wenn gilt:

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \leq K$$

Für jedes  $K$  aus  $\mathbb{R}$  gibt es ein  $N$  aus  $\mathbb{N}$  ab dem  $a_n$  größer/kleiner als  $K$  wird. Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$

### 2.1.19. Beispiel

Beispiele zu bestimmt divergenten Folgen:

1. Die Fibonacci Folge ist bestimmt divergent gegen  $+\infty = \infty$

2. Sei  $a_n = n$ , dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

3. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = -\infty$

4. Die Folge  $a_n = (-1)^n$  ist divergent aber nicht bestimmt divergent.

5. Sei  $(a_n)$  bestimmt divergent und  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ , dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{da } a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

*q.e.d.*

### 2.1.20. Definition

Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen und  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ .

Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 2.1.21. Bemerkung

Ist die Folge  $(a_n)$  konvergent, dann ist auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergent.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  konvergent gegen  $a$ . Also  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ . Da  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  mit  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  und da  $n_k$  monoton steigend ist, ist  $k \leq n_k$  und  $n_k \geq N \quad \forall k \geq N$  daraus folgt  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$ . *q.e.d.*

### 2.1.22. Definition

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt (Häufungswert) der Folge  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert.

### 2.1.23. Bemerkung

Beispiele zu Häufungspunkten:

1. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , dann ist  $a$  der einzige Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ .
2. Eine bestimmt divergente Folge hat keinen Häufungspunkt.
3. Die Folge  $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$  besitzt die zwei Häufungspunkte  $\pm 1$ :
 
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} (-1)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} - 1 = -1 \end{aligned}$$
4. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber jede beschränkte Folge muss nicht konvergent sein.

### 2.1.24. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist beschränkt, d.h.  $\exists A \in \mathbb{R}$  mit  $-A \leq a_n \leq A \quad \forall n \geq 0$

Sei  $A_k = \{a_m : m \geq k\}$ . Beachte: dass jede der Mengen  $A_k$  beschränkt ist, durch  $A$

Daraus folgt mit dem Vollständigkeitsaxiom  $\exists \inf(A_k) \quad \forall A_k$  Wähle  $x_k = \inf(A_k)$ .

Da  $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots \Rightarrow x_k \leq x_{k+1} \quad \forall k \geq 0$ .

Betrachte die Folge  $(x_n)_{k \geq 0}$ .  $(x_n)$  ist monoton wachsend und durch  $A$  beschränkt.

Mit dem Monotoniekriterium konvergiert  $(x_n)$ . Sei etwa  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$

zu zeigen:  $z$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)$

1. Sei  $\varepsilon > 0$ , da  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_k - z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$
2. Da  $x_k = \inf(A_k) = \inf\{a_m : m \geq k\} \Rightarrow \exists a_{k_m}$  mit  $|x_k - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  

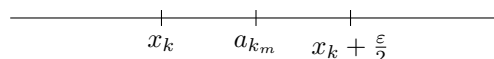
$$\Rightarrow |a_{k_m} - z| = |a_{k_m} - x_k + x_k - z| \leq |a_{k_m} - x_k| + |x_k - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N \quad \exists a_{k_m} \in (a_n) \quad |a_{k_m} - z| < \varepsilon$

d.h. die Teilfolge  $(a_{k_m})_{m \geq 0}$  ist konvergent gegen  $z$

Also  $(a_{k_m})$  ist eine konvergente Teilfolge von der beschränkten Folge  $(a_n)$ .

*q.e.d.*



### 2.1.25. Bemerkung

Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom. Andere äquivalente Formulierungen zu Bolzano-Weierstraß:

- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.
- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

### 2.1.26. Definition Cauchy-Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  heißt CAUCHY-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

### 2.1.27. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Die Folge  $(a_n)$  ist konvergent
2. Die Folge  $(a_n)$  ist eine Cauchy-Folge

**Beweis:** 1)  $\Rightarrow$  2) Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m \geq N |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N$   
 $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$   
 $\Rightarrow a_n$  ist eine Cauchy Folge

2)  $\Rightarrow$  1) Jede Cauchy Folge ist beschränkt.

Sei  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < 1 \Rightarrow |a_n - a_N| < 1$   
 $\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \quad \forall n \geq N$   
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge:  $(a_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$

zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $m$  so groß, dass  $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$  und

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_k \geq k \geq N$$

$$\Rightarrow |a - a_n| = |a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

q.e.d.

### 2.1.28. Beispiel Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Seien  $a = 0, a_0 > 0$  reelle Zahlen. Wir definieren die Folge  $(x_n)$  rekursiv.

$$x_0 = a_0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Wir zeigen:  $(x_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $x^2 = a$ .



**Beweis:** zu zeigen: nach unten durch 0 beschränkt:  $x_n > 0 \quad \forall n \geq 0$

$$\text{IA } n = 0: \quad x_0 > 0$$

$$\text{IV } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

$$\text{IS } n \mapsto n + 1$$

$$\text{Sei } x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \left( \underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0} \right) > 0 \Rightarrow (x_n) \text{ ist n.u. durch 0 beschränkt.}$$

zu zeigen:  $x_n^2 \geq a \quad \forall n \geq 1$  denn

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + 2x_n \frac{a}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} \right) - a \\ &= \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{2ax_n}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a \right) = \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{2ax_n}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} - \frac{4ax_n}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( x_n^2 - 2x_n \frac{a}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left( x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$(x_n)$  ist monoton fallend

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( 2x_n - x_n - \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{(2x_n)(x_n^2 - a)} \geq 0$$

weil beides  $\geq 0$  ( $x_n > 0$ )  $\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$

Nach dem Monotonie-Kriterium ist  $(x_n)$  konvergent.

$$\text{Sei } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \Rightarrow 2x = x + \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a$$

*q.e.d.*

Die positive Lösung der Gleichung  $x^2 = a$  heißt die Quadratwurzel von  $a$ . Wir schreiben  $x = \sqrt{a}$ .

## 2.2 Reihen

### 2.2.1. Definition

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge reeller Zahlen. Sei weiters  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$  die  $N$ -te Partialsumme, dann heißt die Folge  $(S_N)_{N \geq 0}$  der Partialsummen eine unendliche Reihe.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Konvergiert die Folge  $(S_N)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_N = s$ , dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$  der Wert der Reihe. Man sagt:

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

**2.2.2. Beispiel** 1. Die geometrische Reihe. Sei  $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ . Ist  $|a| \geq 1$ , dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  divergent.

**Beweis:** Die geometrische Summe:  $\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$  dann:  $IAN = 01 = a^0 = (1-a)/(1-a) = 1$

$$\text{IV } \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

$$ISN \mapsto N + 1$$

$$\sum_{n=0}^{N+1} a^n = a^{N+1} + \sum_{n=0}^N a^n \stackrel{IV}{=} a^{N+1} + \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \dots \text{selber}$$

$$\text{Sei } S_N = \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

$$\text{Sei } |a| < 1. \text{ Dann folgt } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

$$\text{Sei } a \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^N a^n \geq \sum_{n=0}^N 1 = N+1 \rightarrow \infty$$

$$\text{Sei } a \leq -1 \Rightarrow a = -b \text{ mit } b \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^N a^n \geq \sum_{n=0}^N (-1)^n b^n \text{ divergent} \quad q.e.d.$$

2. Die harmonische Reihe:  $\sum n = 1 \infty \frac{1}{n} = +\infty$

$$\textbf{Beweis: } S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{24}}_{=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{N-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^N}}_{=\frac{1}{2}} \geq$$

$1 + n \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$  Würde  $(S_N)_{N \geq 1}$  konvergieren, dann auch die Teilfolge  $(S_{2N})_{N \geq 1}$ , da diese divergiert, divergiert auch  $(S_N)_N$  q.e.d.

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1$

$$\textbf{Beweis: } S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} = 1 + \frac{1}{N+1} \rightarrow 1 \quad q.e.d.$$

### 2.2.3. Satz

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{R}$  Dann ist auch  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n$  konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

**Beweis:** folgt auf grund der Rechenregeln für konvergente Folgen. q.e.d.

### 2.2.4. Satz Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent, genau dann wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad (\star)$$

**Beweis:**  $S_n - S_m = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k = \sum_{k=m+1}^n a_k$ .  $(\star)$  bedeutet die  $(S_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge  $\Leftrightarrow (S_n)_n$  ist konvergent q.e.d.

### 2.2.5. Korollar

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Beweis:**  $a_n = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = mna_k$ . Da  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N |a_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  q.e.d.

### 2.2.6. Bemerkung

Die Umkehrung des Korrolars gilt nicht. z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  aber  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n = \infty$  harmonische Reihe.

### 2.2.7. Definition

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

### 2.2.8. Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

**Beweis:** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow$  Dreiecksungleichung  $\left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$  Cauchy-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent.  
*q.e.d.*

### 2.2.9. Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. zB kann man zeigen, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  konvergiert. Aber die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

### 2.2.10. Satz Majoranten-Kriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent mit  $b_k \geq 0 \forall k \geq N_0$ . Sei  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  eine Folge mit  $|a_k| \leq b_k \forall k \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$  und  $b_k \geq 0$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$  Cauchy-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  ist konvergent.  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.  
*q.e.d.*

### 2.2.11. Korollar Minoranten-Kriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent mit  $b_k \geq 0 \forall k \geq N_0$ . und  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  eine Folge mit  $|a_k| \geq b_k \forall k \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist auch divergent.

**Beweis:** Wäre  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, dann wäre nach dem Majoranten-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, da  $|b_k| \leq |a_k|$ . Widerspruch!  
*q.e.d.*

### 2.2.12. Satz Quotienten-Kriterium

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe mit  $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$  Existiert eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 < q < 1$  sodass  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \forall n \geq 0$  (o.B.d.A.)  $\Rightarrow |a_{n+1}| \leq q |a_n| \Rightarrow |a_n| \leq q |a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-2}| \leq \dots \leq q^n |a_0|$ . Also  $|a_n| \leq q^n |a_0|$ , da  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n |a_0| = |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} q^n = |a_0| \frac{1}{1-q}$ , denn  $0 < q < 1$ , geometrische Reihe.  $\Rightarrow$  aus dem Majoranten-Kriterium folgt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent. *q.e.d.*

### 2.2.13. Korollar einfaches Quotienten-Kriterium

Sei  $a_n \neq 0 \forall n > n_0$  und existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha < 1$

Sei  $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \quad \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \alpha \right| < \varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1-\alpha}{2} + \alpha = \frac{1+\alpha}{2}$  da  $\alpha < 1$   
 $\frac{1}{2} = 1$  Sei  $q = \frac{1+\alpha}{2} < 1$  und  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$  Nach dem Quotienten-Kriterium ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  
*q.e.d.*

**2.2.14. Beispiel** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty \quad \forall k \geq 2$  [Bemerkung: Die Konvergenz gilt auch  $\forall k \in \mathbb{R}, k > 1$  ohne Beweis]

**Beweis:**  $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall k \geq 2$  und  
 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ , denn  $\Leftrightarrow 2n^2 \geq n(n+1) \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$   
 $\Rightarrow \frac{1}{n^k} \leq \frac{2}{n(n+1)} \forall k \geq 2$  und

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 * 1 = 2$  Majoranten-Kriterium  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^k < \infty \forall k \geq 2$   
 Frage: Wie sind die Werte der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^k$  für  $k \geq 2$  Euler:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = C_k \pi^{2k}$  Aber:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5} = ?$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} = ?$  *q.e.d.*

2. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ist konvergent.

Quotienten-Kriterium.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \frac{1}{2} * \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$  *q.e.d.*

3. Die Exponentialfunktion Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist für jedes  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergent

Quotienten-Kriterium.  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x^{k+1}| * k!}{|x^k| * (k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist absolut konvergent. *q.e.d.*

**2.2.15. Bemerkung** 1. Für  $k = 1$  ist die harmonische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent.

2. Das Quotienten-Kriterium ist hier nicht anwendbar, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \not< 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 \rightarrow 1 \not< 1$$

### 2.2.16. Definition

Die Funktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  heißt Exponentialfunktion.

Die Zahl  $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$  heißt Euler'sche Zahl.

### 2.2.17. Bemerkung

Wir werden später zeigen:

$$e = \frac{1^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828...$$

### 2.2.18. Satz Cauchy-Produkt von Reihe

Seien die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergent. Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir das Cauchy-Produkt folgendermaßen:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$$

Dann gilt: Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  ist absolut konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

*Beweisidee.*

### 2.2.19. Korollar Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Sei  $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  die Exponentialfunktion. Dann gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

**Beweis:** Wir bilden das Cauchy-Produkt, der absolut konvergenten Reihen  $e^x$  und  $e^y$ . Dafür verwenden wir den Binomischen Lehrsatz:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$

$$\begin{aligned}
 e^x e^y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \quad q.e.d. \\
 &\stackrel{Binom.LS}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x + y)^n = e^{x+y}
 \end{aligned}$$

## 3 Stetigkeit

### 3.1 Stetigkeit

#### 3.1.1. Definition

Sei  $D \subset \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x)$ . ist eine Vorschrift, die jedes  $x \in D$  genau einem Wert  $f(x)$  zuordnet.

**3.1.2. Beispiel** 1. Für  $c \in \mathbb{R}$   $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = c$  heißt die konstante Funktion

2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = x$  heißt identische Funktion

3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = |x|$  heißt Betragsfunktion

4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor$

5.  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$  heißt Wurzelfunktion

6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = e^x$  heißt Exponentialfunktion

7.  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit  $a_k \in \mathbb{R}$  heißt Polynomfunktion

#### 3.1.3. Definition

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir definieren.

$$f + g, fg, \lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Sei weiters  $g(x) \neq 0 \forall x \in D$   $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $f(D) \subset E$   $(f(D) = \{f(x) : x \in D\})$   $(g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}$   $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**3.1.4. Beispiel** 1.  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sqrt{x}$   $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

2.  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$   $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$   $D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$   $r = \frac{p}{q} : D \rightarrow \mathbb{R}$   $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  heißt rationale Funktion.

#### 3.1.5. Definition Grenzwert einer Funktion

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $a \in \mathbb{R}$  eine Zahl, sodass es mindestens eine Folge  $(a_n)$  gibt mit  $a_n \in D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gibt. Man definiert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ , wenn gilt: Für jede Folge  $(x_n)_{n \geq 0}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .  
 $c$  heißt dann Grenzwert

#### 3.1.6. Definition Stetigkeit

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in D$ .  $f$  heißt stetig in  $a$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Das heißt für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .  
 $f$  heißt stetig in  $D$ , falls  $f$  in jedem Punkt  $a \in D$  stetig ist.

### 3.1.7. Bemerkung

$f$  ist in  $a \in D$  nicht stetig  $\Leftrightarrow \exists$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  aber die Folge  $(f(x_n))$  ist divergent oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a)$

**3.1.8. Proposition Rechenregeln** 1. Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, fg, \lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

2. Sei  $g(x) \neq 0 \forall x \in D \Rightarrow \frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

3. Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, mit  $f(D) \subset E \Rightarrow g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

**Beweis:**  $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $x_n$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \text{nach Definition} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + g(x_n) = \text{Rechenregeln f Folgen} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(a) + g(a) = \text{nach Definition} = (f + g)(a)$ .

analog f rmal, und  $\lambda$  und division.

$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Sei  $x_n$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$ , da  $f$  stetig ist folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(a)$ . Sei  $y_n = f(x_n)$  und  $b = f(a)$ . Da  $f(D) \subset E$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \in E$ .

Da  $g$  stetig in  $b$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(y_n)) = g(b)$ .

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$  q.e.d.

### 3.1.9. Satz $\varepsilon - \delta$ Kriterium für Stetigkeit

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Dann gilt

$f$  ist stetig in  $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

**Beweis:**  $\Leftarrow$  Sei  $(x_n)$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

Sei  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta$  gilt  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da  $\lim x_n = a \Rightarrow \exists N = N(\delta) : \forall n \geq N(\delta) \quad |x_n - a| < \delta \xrightarrow{\varepsilon - \delta \text{ Kriterium}} |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$

$\Rightarrow$  Sei  $f$  in  $a$  stetig. zu zeigen: ist das  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium. Angenommen:  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium gilt nicht:  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x \in D : |x - a| < \delta$  und  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ .  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : |x_n - a| < \frac{1}{n} = \delta$  und  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Betrachte die Folge  $(x_n)$ , da  $|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow (x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Da  $f$  stetig in  $a$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Widerspruch! zu  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \Rightarrow$  das  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium gilt.

q.e.d.

**3.1.10. Beispiel** 1. Die konstante Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = 1$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $(x_n)$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim 1 = 1 = f(a)$

2. Die identische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = x$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $(x_n)$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = f(a)$

3. Jede Polynomfunktion  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  mit  $a_k \in \mathbb{R}$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig. Dies folgt sofort aus den Rechenregeln.

4. Jede rationale Funktion  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  ist auf ihrem Definitionsbereich stetig. Dies folgt auch sofort aus den Rechenregeln.

5. Die Betragsfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = |x|$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Denn  $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  *die identische Funktion*  $(-1)x$  ist stetig (Rechenregeln).  
 6. Die Funktion  $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, wenn  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. folgt aus den Rechenregeln.  
 7. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  ist in  $a = 0$  nicht stetig. denn : Sei  $(x_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$  Sei  $(y_n) = -\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1 \Rightarrow f$  ist nicht stetig in  $a = 0$ .  
 8. Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.

**Beweis:** (a)  $\exp$  ist in  $a = 0$  stetig.

i) Sei  $|x| < 1 \Rightarrow |a^x - 1| \leq 2|x|$ . denn : es gilt  $(n+1)! \geq 2^n$ , da  $(n+1)! = \underbrace{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2}_{\geq 2} \cdot 1 \geq 2^n \forall n \geq 1$

Sei  $m \geq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^m \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^m \frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{n=0}^m \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = |x| \sum_{n=0}^m \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq |x| \sum_{n=0}^m \frac{|x|^n}{2^n} = |x| \sum_{n=0}^m \left( \frac{|x|}{2} \right)^n$$

Daraus folgt  $|a^x - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n!} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sum_{n=0}^m \left( \frac{|x|}{2} \right)^n = |x| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{2} \right)^n = |x| \frac{1}{1 - \frac{|x|}{2}} = \frac{2|x|}{2 - |x|} \leq 2|x|$

ii) Sei  $(x_n)$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\exp(x_n) - 1| \stackrel{i)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = 1 = \exp(0)$

(b)  $\exp$  ist in  $a \in \mathbb{R}$  stetig. Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $(x_n)$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - a = 0$ . Da  $\exp$  stetig in 0, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(x_n - a) + a} \stackrel{\text{Funktion}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n - a} e^a = e^a \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n - a} = e^a \underbrace{1}_{=1} = e^a \Rightarrow \exp$  ist in  $a \in \mathbb{R}$  stetig.

q.e.d.

### 3.1.11. Bemerkung Wiederholung Stetigkeit

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x_0 \in D$  wenn gilt:

Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ist die Folge  $(f(x_n))$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ .

### 3.1.12. Satz Zwischenwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann gibt es ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = 0$ .

**Beweis:** Wir konstruieren durch Intervallhalbierung eine Folge, deren Grenzwert eine Nullstelle von  $f$  ist.

Wir definieren induktiv zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$



- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

IA  $n = 0$ :  $a_0 = a$ ,  $b_n = b$

IV Seien  $a_n$  und  $b_n$  schon konstruiert

Definiere den Mittelpunkt  $M = \frac{a_n + b_n}{2}$ . Ist  $f(M) = 0$ , dann setze  $x = M$

IS  $n \mapsto n + 1$

Fall 1: Ist  $f(M) < 0$ :  $a_{n+1} = M, b_{n+1} = b_n$ .

Fall 2: Ist  $f(M) > 0$ :  $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = M$ .

Nach Definition ist  $f(a_{n+1}) < 0$  und  $f(b_{n+1}) > 0$ .

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Denn Fall 1:  $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{2b_n + a_n - b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$  und Fall 2:  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n + a_n - 2a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}$

Nach Konstruktion ist die Folge  $(a_n)$  monoton wachsend und durch  $b$  nach oben beschränkt. Die Folge  $(b_n)$  ist monoton fallend und durch  $a$  nach unten beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium konvergieren die beiden Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$ . Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$

Aus  $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$  folgt  $0 \leq b_0 - a_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$  Dann folgt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x \in (a, b)$  Da  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  und  $f$  stetig ist, folgt  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ . *q.e.d.*

### 3.1.13. Definition

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn die Menge  $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$  beschränkt ist. d.h.  $\exists M \in \mathbb{R}$  sodass  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$

### 3.1.14. Satz vom Maximum und Minimum

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.

d.h.  $\exists p, q \in [a, b]$  mit  $f(p) = \sup(\{f(x) : x \in [a, b]\}) = \sup f$  und  $f(q) = \inf(\{f(x) : x \in [a, b]\}) = \inf f$

**Beweis:** Wir zeigen nur das Maximum. Denn das Minimum ist das Maximum von  $-f$ .

Sei  $M = \sup(\{f(x) : x \in [a, b]\}) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

1. Ist  $f$  nicht nach oben beschränkt, dann gibt es  $\forall n \in \mathbb{N}$  ein  $f(x_n)$  mit  $f(x_n) \geq n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty = M$

2. Ist  $f$  beschränkt  $\Rightarrow M \in \mathbb{R}$  und  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f(x_n)$  mit  $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$  Also gibt es in beiden Fällen eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in [a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ .

Da  $x_n \in [a, b]$  ist die Folge  $(x_n)$  beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = p \in [a, b]$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$  und jede Teilfolge eine konvergente Folge den selben Grenzwert hat folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$

Wir wissen  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = p$ . Da  $f$  stetig ist, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(p)$ . Aber  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M \Rightarrow M = f(p)$ . *q.e.d.*

### 3.1.15. Bemerkung

$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$

$f$  ist stetig aber nicht nach oben beschränkt.

### 3.1.16. Definition

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (streng) monoton wachsend wenn gilt:  $\forall a, b \in D \quad a \leq b \quad (a < b) \Rightarrow f(a) \leq f(b) \quad (f(a) < f(b))$ . Entsprechend für (streng) monoton fallend.

### 3.1.17. Satz von der stetigen Umkehrfunktion

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend (fallend). Sei  $A = f(a)$  und  $B = f(b)$ . Dann ist

$f : [a, b] \rightarrow [A, B]$  bijektiv und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$  ist stetig und streng monoton wachsend (fallend).

**Beweis:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend.  $f(a) = A$  und  $f(b) = B$ .

Sei  $x \in [a, b]$  mit  $a < x < b$

$$\stackrel{\nearrow}{\Rightarrow} f(a) < f(x) < f(b) \text{ also } A < f(x) < B \Rightarrow f(x) \in [A, B] \quad \forall x \in [a, b]$$

Injektiv:  $x \neq x' \Rightarrow x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow f$  ist injektiv.

Surjektiv: Sei  $C \in [A, B]$ . Für  $C = A$  oder  $C = B$  wähle  $x = a$  oder  $x = b$ .

Sei also  $C \in (A, B)$ . Betrachte  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = f(x) - C$ . Da  $f$  stetig ist, ist auch  $g$  stetig.  $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$  und  $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$ . Aus dem Zwischenwertsatz folgt:  $\exists p \in [a, b]$  mit  $g(p) = 0$  also  $f(p) - C = 0 \Rightarrow f(p) = C \Rightarrow f$  ist surjektiv.

$\Rightarrow f : [a, b] \rightarrow [A, B]$  ist bijektiv.

Betrachte die Umkehrfunktion.  $f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ . 1.  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend: Sei  $y < y'$ . zu zeigen:  $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ . Angenommen  $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$ , da  $f$  streng monoton wachsend ist folgt  $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) \Rightarrow y \geq y'$  Widerspruch!  $\Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$

2. Noch zu zeigen:  $g = f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$  ist stetig. Sei  $y \in [A, B]$  und  $(y_n)$  eine Folge mit  $y_n \in [A, B]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ .

zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$

Angenommen, das gilt nicht.

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ . d.h. es gibt eine Teilfolge  $(y_{n_k})$  von  $(y_n)$  mit  $|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$ . Da  $a \leq f^{-1}(y_{n_k}) \leq b$ , also beschränkt ist, folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, es gibt eine konvergente Teilfolge  $(f^{-1}(y_{n_{k_l}}))_{l \geq 0}$  von  $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k \geq 0}$ .

Wir können also annehmen. Es gibt eine konvergente Teilfolge  $(f^{-1}(y_{n_{k_l}}))_{l \geq 0}$  von  $(f^{-1}(y_n))_{n \geq 0}$  mit  $(f^{-1}(y_{n_{k_l}})) = c$  und  $|f^{-1}(y_{n_{k_l}}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \Rightarrow |c - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$ .

Nach der Definition der Umkehrabbildung ist  $f(f^{-1}(y_{n_k})) = y_{n_k}$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt daher

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(c)$$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(c)) = c \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon > 0$  Widerspruch!  $\Rightarrow f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$  ist stetig. q.e.d.

### 3.1.18. Beispiel

Beispiele zur...

#### 1. Die Wurzelfunktion $\sqrt[k]{x}$

Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $f(x) = x^k$  und  $k \geq 2$ . Für  $x \in \mathbb{R}_+$  ist  $f$  stetig, streng monoton wachsend und  $f(x) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$  Es gibt eine streng monoton wachsende und stetige Umkehrfunktion  $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $= \sqrt[k]{x}$

Für  $k$  ungerade sind  $f$  und  $f^{-1}$  auf  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert.

#### 2. Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ist streng monoton wachsend und bijektiv von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}_+$

**Beweis:**  $e^x = e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$

Für  $x > 0$  folgt:  $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} > 1$ , also  $e^x > 1$

Sei  $x < x' \Rightarrow y = x' - x > 0 \Rightarrow e^y > 1 \Rightarrow e^{x'} = e^{x+(x'-x)} = e^{x+y} = e^x \underbrace{e^y}_{>1} > e^x \Rightarrow \exp$  ist streng

monoton. d.h.  $\exp$  ist auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und bijektiv.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp(n) \geq 1 + n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x) = 0$  Es gibt daher eine stetige Umkehrfunktion  $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \ln(x)$  der natürliche Logarithmus.  $\ln$  ist wieder stetig und streng monoton wachsend. q.e.d.

$$\text{Es gilt: } \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

**Beweis:**  $\ln(x) = \xi$  und  $\ln(y) = \eta$

d.h.  $e^\xi = x$  und  $e^\eta = y$

$$\Rightarrow e^{\xi+\eta} = e^\xi e^\eta = xy \quad | \ln$$

$$\Rightarrow \ln(e^{\xi+\eta}) = \ln(xy)$$

$$\Rightarrow \xi + \eta = \ln(xy)$$

$$\Rightarrow \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

q.e.d.

### 3. Die allgemeine Potenz und der allgemeine Logarithmus.

Sei  $a > 0, x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

**Beweis:** Sei  $x = n \in \mathbb{N}$   $e^{n \ln(a)} = \underbrace{e^{\ln(a)} \dots e^{\ln(a)}}_{n\text{-mal}} = a \dots a = a^n$  q.e.d.

Diese Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend. Es gilt:  $a^{x+y} = a^x a^y$   $(a^x)^y = a^{xy}$   $a^x b^x = (ab)^x$   $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$

**Beweis:** Übung. Die Umkehrfunktion  $\log_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \log_a(x)$  heißt der Logarithmus zur Basis  $a$ .

Also  $\log_a(a^x) = x$   $a^{\log(x)} = x$ .

$$\text{Es gilt: } \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

**Beweis:** Übung.

#### 3.1.19. Definition

Sei  $(z_n)$  mit  $z_n = a_n + ib_n$  eine Folge komplexer Zahlen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = a + ib \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad |z_n - z| < \varepsilon$$

Es gelten alle Sätze auch für komplexe Folgen. Nur das Monotonie-Kriterium gilt nicht, da  $\mathbb{C}$  nicht angeordnet ist.

#### 3.1.20. Bemerkung

Speziell gilt: Sei  $z_n = a_n + ib_n$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = a + ib \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a + ib \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad |z_n - (a + ib)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |a_n - a| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon \forall n \geq N$$

$$|b_n - b| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon \forall n \geq N$$

$$\text{Sei } |z_n - z| = |a_n + ib_n - (a + ib)| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |i| |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{q.e.d.}$$

Weiters gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}$

**Beweis:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n + ib_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - ib_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}$  q.e.d.

### 3.1.21. Definition

Sei  $D \subset \mathbb{C}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt stetig in  $z \in D$ , wenn für jede komplexe Folge  $(z_n), z_n \in \mathbb{C}$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z)$

### 3.1.22. Beispiel Die komplexe Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  ist definiert  $\forall z \in \mathbb{C}$  und stetig  $\forall z \in \mathbb{C}$

**Beweis:** Analog zu dem Beweis der Exponentialfunktion im Reellen.

*q.e.d.*

Achtung: Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$  ist nicht bijektiv  $\Rightarrow$  Schwierigkeiten beim Logarithmus im Komplexen.

### 3.1.23. Bemerkung

Es gilt:  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

**Beweis:**  $\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}$

*q.e.d.*

### 3.1.24. Bemerkung

Wir betrachten für  $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix})$$

### 3.1.25. Definition

Für  $x \in \mathbb{R}$  heißt  $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$  der Kosinus von  $x$  und  $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$  der Sinus von  $x$ .

Es gilt die Eulersche Formel:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

### 3.1.26. Bemerkung

Da  $\overline{ix} = -ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$  folgt  $1 = e^0 = e^{ix-ix} = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} \overline{e^{ix}} = |e^{ix}|^2$

$$\Rightarrow 1 = |e^{ix}|$$

D.h.  $e^{ix}$  liegt auf dem Einheitskreis  $|z| = 1$

**3.1.27. Proposition** 1.  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$2. \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$3. \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

**Beweis:** Von a und b:

$$e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix}) = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \overline{e^{ix}} = \operatorname{Re}(e^{ix}) - i \operatorname{Im}(e^{ix}) = \cos x - i \sin x$$

Also  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \text{ und } e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

von c:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix} - e^{2ix} + 2e^{ix-ix} - e^{-2ix}) = \frac{1}{4} (2 + 2) = 1$$

*q.e.d.*

### 3.1.28. Bemerkung

Die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ : Folgt aus den Rechenregeln für stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$

### 3.1.29. Proposition Additionstheoreme

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$$

**Beweis:**  $\cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$  Vergleich von Real- und Imaginärteil, folgt die Behauptung. q.e.d.

### 3.1.30. Proposition Reihendarstellung

$\forall x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beide Reihen konvergieren absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$

**Beweis:** Absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. (oder aus dem Quotientenkriterium)

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \stackrel{i^2 = -1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Die Formeln folgen durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. q.e.d.

### 3.1.31. Satz

Die Funktion  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat im Intervall von  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle  $x_0$ .

**Beweis:** 1.) Existenz:  $\cos$  ist stetig,  $\cos 0 = 1 > 0$  und  $\cos 2 < 0$

zu zeigen:  $\cos 2 < 0$

$$a) \forall x \in [0, 2], \forall n \geq 1 \text{ gilt } -\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0$$

$$\text{denn } \forall n \geq 1 \quad (2n+1)(2n+2) > 2 \cdot 2 \geq x^2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow 0 > \left( \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} - 1 \right) \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{x^{2n}}{(2n)!} b) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n \geq 3, \text{ ungerade}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\Rightarrow \cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

$\stackrel{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [0, 2] \text{ mit } \cos x_0 = 0.$  2.) Eindeutigkeit:

a)  $\sin x > 0 \forall x \in (0, 2)$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}}_{>0} + \dots > x - \frac{x^3}{3!} = \frac{1}{6}(6x - x^3) = \frac{x}{6} \underbrace{(6 - x^2)}_{0 < x < 2} > 0$$

b)  $\cos : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton fallend.

Seien  $0 < x_1 < x_2 < 2$

$$\text{Setze } x = \frac{x_1+x_2}{2} \in (0, 2) \text{ und } y = \frac{x_2-x_1}{2} \in (0, 2)$$

$$\Rightarrow x_2 = x + y \text{ und } x_1 = x - y$$

Aus den Additionstheoremen folgt:

$$\cos x_2 = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos x_1 = \cos(x-y) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) \quad \text{quad} \quad \cos -x = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = \cos x$$

$$\sin -x = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = -\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\sin x$$

$$\Rightarrow \cos(x_2) - \cos(x_1) = -2 \sin x \sin y = -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow \cos x_2 < \cos x_1 \Rightarrow \cos$  ist auf  $(0, 2)$  streng monoton fallend, speziell injektiv.

$\Rightarrow \cos$  hat genau eine Nullstelle.

*q.e.d.*

### 3.1.32. Definition

Sei  $x_0 \in (0, 2)$  die eindeutig bestimmte Nullstelle von  $\cos : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definieren wir die Kreiszahl

$$\pi = 2x_0$$

. Also  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

### 3.1.33. Bemerkung

$\pi \approx 3,1415\dots$

$\pi$  und  $e$  sind irrational und transzendent, sind also keine Lösung einer algebraischen Gleichung. Wir werden später (Integralrechnung zeigen, dass  $\pi$  die Fläche des Einheitskreises ist.

### 3.1.34. Bemerkung    Eigenschaften von $\pi$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{Da } \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1, \text{ da } \sin \frac{\pi}{2} > 0$$

Weiter gilt:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\Rightarrow -1 = i^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{\pi i}$$

$$\Rightarrow -i = i^2 = e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 = i^2 = e^{2\pi i}$$

$$\Rightarrow e^{i(x+2\pi)} = e^{ix+i2\pi} = e^{ix} + e^{i2\pi} = e^{ix}$$

$$\Rightarrow \cos(x+2\pi) + i \sin(x+2\pi) = e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Also  $\cos$  und  $\sin$  sind  $2\pi$ -periodische Funktionen. Nullstellen von  $\sin$  und  $\cos$ :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*ohne Beweis.*

### 3.1.35. Definition

Der Tangens und Kotangens sind definiert durch:

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Die Umkehrfunktionen von  $\sin, \cos, \tan, \cot$  heißen:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arccos : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

Diese Funktionen sind wieder stetig und streng monoton.

## 4 Differential- und Integralrechnung

### 4.1 Differentialrechnung

#### 4.1.1. Definition

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar in  $x_0 \in D$ , falls  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

**4.1.2. Bemerkung** 1.  $f$  differenzierbar in  $x_0$  bedeutet: Für jede Folge  $(h_n)$  mit  $h_n \neq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  ist die Folge  $\left( \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} \right)$  konvergent. Ihren Grenzwert nennen wir  $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

$$2. f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x-x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

3. GRAFIK grenzwert mit annäherungen der Tangenten

**4.1.3. Beispiel** 1. Die konstante Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = c \in \mathbb{R}$  oder  $c \in \mathbb{C}$ .  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0 \Rightarrow c' = 0$

2. Eine lineare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = ax$   $a \in \mathbb{R}$  oder  $a \in \mathbb{C}$ .  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax-ax_0}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a \Rightarrow (ax)' = a$

3. Eine quadratische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$ .  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-(x_0)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x \Rightarrow (x^2)' = 2x$

4. eine rationale Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ .  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x_0} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{x_0-x-h}{x_0(x_0+h)} \right)$  und dann gleicher nenner und ausrechnen.  $\Rightarrow \left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. Die Exponentialfunktion.  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Wir zeigen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

denn Sei  $n \geq 0 \Rightarrow (n+2)! \geq 2 \cdot 3^n \Rightarrow \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \leq \frac{|h|^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \left( \frac{|h|}{3} \right)^n$

Für  $|h| < \frac{3}{2}$  folgt  $|e^h - 1 - h| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} \right| \leq |h|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h^n}{(n+2)!} \right| \leq |h|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{|h|}{3} \right)^h = \frac{|h|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{|h|}{3} \right)^h}_{<1} \stackrel{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{|h|^2}{2} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{|h|}{3}}}_{<\frac{3}{2}} \leq |h|^2$

$\Rightarrow \left| \frac{e^h-1}{h} - 1 \right| \leq |h| \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$

$\Rightarrow (e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$

$\Rightarrow (e^x)' = e^x$

6. Die Ableitungsfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|$  ist in  $x = 0$  nicht differenzierbar.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h}$$

#### 4.1.4. Proposition

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in D$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  ist in  $a$  stetig.



**Beweis:** Wir definieren  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ .

Also:  $\phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \Rightarrow \phi(x)(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \phi(x)(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f$  ist in  $a$  stetig. q.e.d.

#### 4.1.5. Satz Rechenregeln

Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $a \in D$  und  $\lambda \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{C})$ . Dann gilt

1.  $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $a$  differenzierbar und

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

2.  $\lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $a$  differenzierbar und

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

3.  $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $a$  differenzierbar und

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \text{Produktregel}$$

4. Ist  $g(x) \neq 0 \forall x \in D$  so ist  $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $a$  differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(x))^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

**Beweis:** 1. Folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

2. Folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

$$3. \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \frac{1}{h} (f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)) = f(a+h) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a) \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$$

$$4. \text{ Sei } f(x) = 1 \quad \forall x \in D \quad \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right) = \frac{g(a)-g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} = -\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -g'(a) \frac{1}{(g(a))^2}$$

Sei  $f$  beliebig. Dann folgt aus der Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g}(a) - \frac{1}{(g(a))^2} f'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(x))^2}$$

q.e.d.

#### 4.1.6. Satz Kettenregel

Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen mit  $f(D) \subset E$

Ist  $f$  in  $a \in D$  differenzierbar und  $g$  in  $f(a) \in E$  differenzierbar, dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  differenzierbar und

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

$$\text{Beweisidee. } \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} = \underbrace{\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(f(a))} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} h = g'(f(a))f'(a) \quad \text{q.e.d.}$$

#### 4.1.7. Beispiel

Weitere Beispiele

1. Sei  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$

**Beweis:** Sei  $n \geq 0$

IA  $n = 0, n = 1$  : schon gezeigt.

IV  $(x^n)' = nx^{n-1}$

IS  $n \mapsto n + 1$

$$(x^{n+1})' = (xx^n)' \stackrel{\text{Produktregel}}{=} 1x^n + x(nx^{n-1}) = x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

Sei  $n < 0$ . Setze  $n = -m$  mit  $m > 0$

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \stackrel{\text{Quotientenregel}}{\Rightarrow} (x^m)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{0x^m - 1mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{m+m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^m x^m} = -m \frac{1}{x^m} \frac{1}{x} = -m \frac{1}{x^m} x^{-1} = nx^n x^{-1} = nx^{n-1} \quad q.e.d.$$

Sei  $f(x) = e^{ax}$  mit  $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^{ax})' = ae^{ax}$$

Sei  $g(x) = ax \stackrel{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} (e^{ax})' = (e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x) = ae^{ax}$

$$(\sin x)' = \cos x (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

$$(\sin^2 x)' = \sin(2x)$$

$$g(x) = x^2, f(x) = \sin x$$

$$(\sin^2 x)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$$

#### 4.1.8. Satz Ableitung der Umkehrfunktion

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton, mit  $f([a, b]) = [A, B]$ . Sei  $f^{-1} : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  die Umkehrfunktion. Ist  $f$  in  $x \in [a, b]$  differenzierbar und  $f'(x) \neq 0$  dann ist  $f^{-1}$  in  $y = f(x)$  differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

**Beweis:** Wir wissen, schon  $f^{-1}$  ist stetig. Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $[A, B]$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

Da  $f^{-1}$  stetig in  $y$ , folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$

Sei  $x_n = f^{-1}(y_n), x = f^{-1}(y)$

Da  $f$  in  $x$  differenzierbar und  $f'(x) \neq 0$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{x_n - y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad q.e.d.$

#### 4.1.9. Beispiel

$\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Umkehrfunktion von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Sei  $f(x) = \exp(x)$ , dann ist  $f^{-1}(x) = \ln(y)$ . Wir wissen  $f'(x) = (\exp(x))' = \exp(x) = f(x) \Rightarrow (\ln(x))' = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}$

**4.1.10. Bemerkung    Anwendung**

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$