

# Analysis für Informatik

Ass.Prof. Clemens Amstler

Tanja Kohler

8. November 2018

# 1 Reelle und Komplexe Zahlen

## 1.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  erfüllen eine Reihe von Axiomen, die in drei Gruppen unterteilt werden können.

I. Algebraische Axiome

II. Anordnungsaxiome

III. Vollständigkeitsaxiome

### 1.1.1 Algebraische Axiome

Die reellen Zahlen bilden mit der Addition  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a + b$  und der Multiplikation  $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a * b$  einen Körper  $(\mathbb{R}, +, *)$ , der folgende Axiome erfüllt:

- 1)  $\mathbb{R}$  ist bzgl. der Addition eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, +)$
- 2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist bzgl. der Multiplikation eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, *)$
- 3) Das Distributivgesetz gilt:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a * (b + c) = a * b + a * c$

Andere Beispiele von Körpern:  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_p$  für  $p$  prim. Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, \dots, \infty\}$  und die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bilden keinen Körper.

#### 1.1.1. Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}$  gilt  $0 * a = 0$ .

**Beweis:**

$0 + 0 = 0 \Rightarrow a(0 + 0) = a * 0$	Distributivgesetz
$\Rightarrow a * 0 + a * 0 = a * 0$	$\mathbb{R}$ assoziativ
$\Rightarrow a * 0 + (a * 0 - a * 0) = (a * 0 - a * 0)$	add Inv
$\Rightarrow a * 0 + 0$	$0 + 0 = 0$
$\Rightarrow a * 0 = 0$	

*q.e.d.*

#### 1.1.2. Definition Potenzschreibweise

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  wird  $a^n$  folgendermaßen induktiv definiert:

- $a^0 = 1$
- $\forall n > 1 \quad a^{n+1} = a * a^n$
- $\forall n > 1 \quad \forall a \neq 0 \quad a^{-n} = (a^{-1})^n$

### 1.1.3. Bemerkung

$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\forall n, m \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$(1) \quad a^n * a^m = a^{n+m}$$

$$(2) \quad a^{n^m} = a^{n*m}$$

$$(3) \quad a^n * b^n = (a * b)^n$$

**Beweis:**

$$(1) \quad a^n * a^m \stackrel{\text{n. Def.}}{=} \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}} * \underbrace{a \dots a}_{m\text{-mal}} = \underbrace{a \dots a}_{n+m\text{-mal}} \stackrel{\text{n. Def.}}{=} a^{n+m}$$

$$(2) \quad a^{n^m} = a^{\underbrace{n \dots n}_{m\text{-mal}}} = a^{m*n} = a^{n*m}$$

$$(3) \quad a^n * b^n = \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}} * \underbrace{b \dots b}_{n\text{-mal}} = \underbrace{a \dots ab \dots b}_{n\text{-mal}} = (a * b)^n$$

*q.e.d.*

### 1.1.2 Anordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden in positive Zahlen, negative Zahlen und 0 unterteilt. Dabei ist  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

Und es gelten folgende Axiome:

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt genau eine der folgenden Bedingungen: } x > 0, x = 0, x < 0$$

$$(2) \quad \forall x, b \in \mathbb{R} \ x, b > 0 \text{ gilt: } a + b > 0 \wedge a * b > 0$$

Wir schreiben für  $a, b \in \mathbb{R}$   $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$  und  $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

### 1.1.4. Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$

**Beweis:** Sei  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a - b < 0$  und  $b - c < 0 \Rightarrow a - b + b - c < 0 \Rightarrow a - c < 0 \Rightarrow a < c$  *q.e.d.*

### 1.1.5. Bemerkung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$a) \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$b) \quad a < b \text{ und } c > 0 \Rightarrow a * c < b * c$$

$$c) \quad a < b \text{ und } c < 0 \Rightarrow a * c > b * c$$

$$d) \quad a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \text{ speziell } 1 > 0$$

$$e) \quad 0 < a < b \text{ und } a < b < 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$$

### 1.1.6. Definition

Für  $a \in \mathbb{R}$  und der Betrag  $|a|$  folgendermaßen definiert.

$$|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

### 1.1.7. Satz

$\forall b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|a * b| = |a| * |b|$
- (2)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
- (3)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$  (umgekehrte Dreiecksungleichung)

**Beweis:**

- (1) Beweis durch Fallunterscheidung.
- (2)
  - $a \leq |a|$  und  $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$
  - $-a \leq |a|$  und  $-b \leq |b| \Rightarrow -a + -b \leq |a| + |b|$ $\Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$  und  $-(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$
- (3)
  - $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$
  - $|b| = |a - b - a| \leq |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$ $\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$  und  $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$   
 $\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$

*q.e.d.*

### 1.1.8. Bemerkung Archimedisches Axiom

Für zwei positive Zahlen,  $a, b$  gibt es immer eine natürliche Zahl  $n$ , sodass folgendes gilt:  $n * b > a$  Also:

$$\forall a, b > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad n * b > a$$

Als Folgerung erhalten wir: Setze  $b = 1$

$$\forall a > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad n > a$$

### 1.1.9. Satz Bernoullische Ungleichung

Sei  $a > -1$  dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1 + a)^n \geq 1 + na$$

**Beweis:** IA  $n = 0 : n = 0 \quad 1 = (1 + a)^0 \geq 1 + 0 * a = 1$

$$\text{IV } (1 + a)^n \geq 1 + na$$

$$\text{IS } n \mapsto n + 1 \quad n \mapsto n + 1$$

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n$$

$$\stackrel{\text{IV}}{\geq} (1 + a)(1 + na)$$

$$= 1 + na + a + \underbrace{na^2}_{>0}$$

$$\geq 1 + (n + 1)a$$

*q.e.d.*

### 1.1.10. Korollar

Sei  $a > 0$ .

(1) Ist  $a > 1 \forall k > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n > k$ .

(2)  $0 < a < 1 \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n < \varepsilon$

**Beweis:**

(1) Sei  $a = x + 1 > 1 \Rightarrow a^n = (x + 1)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx$   
 $\forall n \in \mathbb{N} \exists x > 0$  mit  $nx > k - 1 \Rightarrow a^n \geq 1 + nx > 1 + k - 1 = k$

(2) Sei  $0 < a < 1$  und  $b = \frac{1}{a} > 1 \stackrel{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{R}$  mit  $\left(\frac{1}{a}\right)^n = b^n > k = \frac{1}{\varepsilon}$   
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon$ .

*q.e.d.*

### 1.1.3 Vollständigkeitsaxiom

Die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  hat keine Lücken.

#### 1.1.11. Definition

Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge.

1.  $k \in \mathbb{R}$  heißt obere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \leq k$ .  $M$  heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt. zB  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt, nach dem Archimedischem Axiom.
2.  $k \in \mathbb{R}$  heißt untere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \geq k$ .  $M$  heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt.
3.  $M$  heißt beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existiert. Äquivalente Definition für Beschränktheit:  $\exists k \in \mathbb{R}, |x| \leq k \forall x \in M$
4.  $a \in \mathbb{R}$  heißt Infimum von  $M$ , falls  $a$  größte untere Schranke von  $M$  ist. Das heißt  $a$  ist untere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine untere schranke von  $M$ , dann folgt  $k \leq a$

Schreibweise:  $a = \inf(M)$

5.  $b \in \mathbb{R}$  heißt Supremum von  $M$ , falls  $b$  kleinste obere Schranke von  $M$  ist. Das heißt  $b$  ist obere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine obere schranke von  $M$ , dann folgt  $k \geq b$

Schreibweise:  $b = \sup(M)$

#### 1.1.12. Beispiel

Sei  $a < b$  dann ist  $\inf[a, b] = a = \inf(a, b)$  und  $\sup[a, b] = b = \sup(a, b)$ .

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  heißt abgeschlossenes Intervall

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  heißt offenes Intervall

#### 1.1.13. Bemerkung zur Erinnerung

Definition der natürlichen Zahlen (Axiom des kleinsten Element (Peanoaxiome))

Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

### 1.1.14. Satz Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum  $\inf(M) \in \mathbb{R}$ .

ohne Beweis.

### 1.1.15. Bemerkung

$\inf(M)$  muss kein Element von  $M$  sein.

### 1.1.16. Proposition

Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum  $\sup(M) \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Seien  $M$  nach oben beschränkt und  $a$  eine obere Schranke von  $M$ .

$\Rightarrow \forall x \in M \quad x \leq a \Rightarrow -a \leq -x \quad \forall x \in M \Rightarrow -a$  ist untere Schranke von  $-M = \{-x : x \in M\}$

$\Rightarrow -M$  ist nach unten beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom, existiert ein Infimum.

Sei  $b = \inf(-M) \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow -b \leq a$  und  $b \leq -x \Rightarrow x \leq -b \quad \forall x \in M$ .

Also  $-b$  ist obere Schranke und kleinste obere Schranke.  $\Rightarrow -b = \sup(M)$

q.e.d.

### 1.1.17. Proposition

$\sup(M)$  und  $\inf(M)$  sind eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Seien  $m$  und  $m'$  Suprema von  $M \Rightarrow m \leq m'$  und  $m' \leq m \Rightarrow m = m'$ .

analog für Infimum.

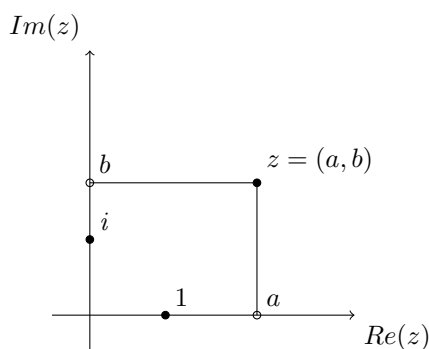
q.e.d.

## 1.2 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind die Punkte der Ebene  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Wir setzen  $1 = (1, 0), i = (0, 1) \Rightarrow z = (a, b) = a + ib$



zusätzlich verlangen wir  $i^2 = -1$  Also:  $\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

### 1.2.1. Satz

Es gilt:  $\mathbb{C}$  ist ein Körper.

**Beweis:** Sei  $x, y, z \in \mathbb{C}$  und  $x = a + ib, y = c + id, z = e + if$

I)  $\mathbb{C}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition:

- i)  $x + y = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C}$
- ii)  $x + 0 = a + ib + 0 + i0 = a + ib = x$
- iii)  $\exists -x \in \mathbb{C}$  mit  $x + -x = a + ib - a - ib = 0$
- iv)  $x + y = (a + c) + i(b + d) = (c + a) + i(d + b) = y + x$

II)  $\mathbb{C}$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation:

- i)  $xy = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad - bc) \in \mathbb{C}$
- ii)  $1x = (1 + i0)(a + ib) = a + ib = x$
- iii)  $\exists x^{-1} \in \mathbb{C}$  mit  $xx^{-1} = (a + ib)\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = 1$
- iv)  $xy = (ac - bd) + i(ad - bc) = (ca - bd) + i(da - cb) = yx$

III) Das Distributivgesetz gilt:

$$\begin{aligned} z(x + y) &= (e + if)(a + c + ib + id) \\ &= ea + ec - fb - fd + ifa + ifc + ieb + ied \\ &= ea - fb + ifa + ieb + ec - fd + ied + ifc \\ &= xy + xz \end{aligned}$$

*q.e.d.*

### 1.2.2. Definition

Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$

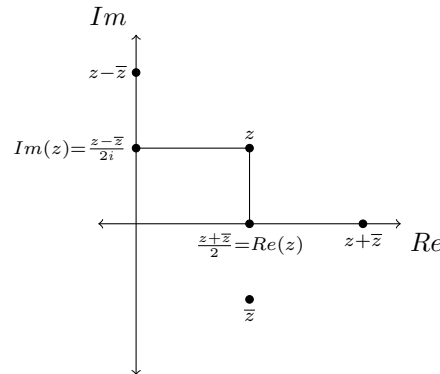
- $\bar{z} = a - ib$  heißt die konjugiert komplexe Zahl von  $z$ .
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  heißt Betrag von  $z$ .
- $a = \operatorname{Re}(z)$  heißt Realteil von  $z$ .
- $b = \operatorname{Im}(z)$  heißt Imaginärteil von  $z$ .

### 1.2.3. Satz

Es gilt:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

**Beweis:**



*q.e.d.*

### 1.2.4. Proposition

Es gilt:

- (i)  $\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad |\bar{z}| = |z|$
- (ii)  $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (iii)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iv)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**Beweis:**

- (i)
  - $\bar{\bar{z}} = \overline{a + ib} = \overline{a - ib} = a + ib = z$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + ib + c + id} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{ac + i(ad + bc) - bd} = (ac - bd) - i(ad + bc) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
  - $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- (ii)
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \Leftrightarrow a = b = 0$
- (iii)  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iv) Sei  $a, b \in \mathbb{R} \quad z \in \mathbb{C} \quad z = a + ib$ 

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z)^2 = a^2 &\leq a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq |z| \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2| \\ |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 && \text{denn } z_2 \bar{z}_1 = \overline{z_1 \bar{z}_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 && \text{denn } z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 && \text{denn } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1| |z_2| \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ \Rightarrow |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

*q.e.d.*

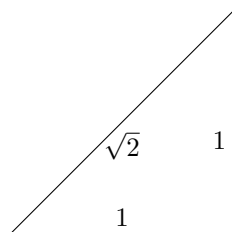


## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Folgen

#### 2.1.1. Beispiel

Betrachte



Annahme:  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ , aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

**Beweis:** Angenommen  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  und p und q nicht beide durch 2 teilbar, sonst kürzen wir.

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow \text{Also } 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow \exists m \text{ mit } p = 2m.$$

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow$$

$$q^2 = 2m^2 \quad \text{d.h. } 2|q^2 \Rightarrow 2|q \text{ Also p und q sind beide durch 2 teilbar.}$$

Widerspruch! p und q sind nicht beide durch 2 teilbar.  $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  *q.e.d.*

#### 2.1.2. Bemerkung

$\sqrt{2}$  ist die positive Lösung von  $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right)$

Betrachte die rechte Seite dieser Gleichung und berechne diese induktiv

Setze zB

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1,5$$

$$a_3 \approx 1,41$$

$$a_3 \approx 1,4142$$

...

Also  $a_n$  nähert sich mit wachsendem  $n$  immer mehr an  $\sqrt{2}$ . Dies führt zu dem Begriff **Grenzwert einer Folge**.

#### 2.1.3. Definition

Eine Folge  $(a_n)_{k=0}^{\infty}$  reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$  Bezeichnung: Wir schreiben für Folgen

$$(a_n)_{k=0}^{\infty}$$

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(a_n)$$

$$(a_n)_{n \geq n_0}$$

### 2.1.4. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

1. (streng) monoton wachsend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N} \ a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n) \nearrow \quad (a_n < a_{n+1} \quad (a_n) \uparrow)$
2. (streng) monoton fallend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N} \ a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n) \searrow \quad (a_n > a_{n+1} \quad (a_n) \downarrow)$
3. (streng) monoton, sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

### 2.1.5. Beispiel

Ein paar Beispiele zu Folgen:

(1) Die konstante Folge  $a_n = k$  ist monoton fallend und steigend.

(2) Die harmonische Folge  $a_n = \frac{1}{n} \ \forall n \geq 1$  ist streng monoton fallend.

(3) Die alternierende Folge  $a_n = (-1)^n$  ist nicht monoton.

(4) Die geometrische Folge  $a_n = a^n \ \forall n \geq 0$  Sei  $a \in \mathbb{R} \ a^n$  ist

streng monoton wachsend	$a > 1$
streng monoton fallend	$0 < a < 1$
monoton	$a = 1$
nicht monoton	

(5) Die Fibonacci Folge ist monoton wachsend.  $f_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0, n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{sonst} \end{cases}$

### 2.1.6. Definition der Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$  wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$a$  heißt der Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)$ . Die Folge  $(a_n)$  heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Schreibweise:  $\lim a_n = a$  oder  $\lim_{n \rightarrow k} a_n = a$ . Wobei  $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

### 2.1.7. Bemerkung

Sei  $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ .  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$  heißt  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Also: Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Leftrightarrow$  Die Folgenglieder  $a_n$  liegen ab einer Schwelle  $N$  alle in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .  $(a_n)$  konvergiert nicht gegen  $a \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \ |a_n - a| \geq \varepsilon$ .

### 2.1.8. Beispiel

Beispiele zur Konvergenz:

- (1) Die harmonische Folge konvergiert:  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N > \frac{1}{\varepsilon}$   $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$  *q.e.d.*

- (2) Die alternierende Folge  $b_n = (-1)^n$  ist divergent

**Beweis:** Angenommen  $\exists a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

Wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |b_n - a| < \frac{1}{2}$ . Da  $b_{n+1} - b_n = \pm 2$  ist  $\forall n \geq N$

$$2 = |b_{n+1} - b_n| = |b_{n+1} - a - (b_n - a)| \leq |b_{n+1} - a| + |b_n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1$$

Widerspruch!  $\Rightarrow (b_n)$  ist divergent. *q.e.d.*

- (3) Ob die geometrische Folge  $(a^n)_{n \geq 1}$  hängt davon ab, welchen Wert  $a$  hat.

**Beweis:** Durch Fallunterscheidung

Fall 1  $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

Sei  $\varepsilon > 0$   $\xrightarrow{\text{Archimedisches Axiom}} \exists N \in \mathbb{N} \quad |a|^N < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N \quad |a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^N < \varepsilon$

Fall 2  $a = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim a^n = 1$

Fall 3  $a = -1 \Rightarrow$  divergent weil alternierend.

Fall 4  $|a| > 1 \quad \forall K > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad |a|^n > K$  d.h.  $(a^n)$  ist unbeschränkt.

*q.e.d.*

### 2.1.9. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein  $A \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq A \quad (a_n \geq A)$$

$(a_n)$  heißt beschränkt, wenn  $(a_n)$  nach oben oder unten beschränkt ist. d.h.

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad |a_n| \leq K \vee |a_n| \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2.1.10. Satz

Jede konvergente Folge  $(a_n)$  ist beschränkt.

**Beweis:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wähle  $\varepsilon = 1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < 1$ . *q.e.d.*

$$|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1 \quad \forall n \geq N$$

Sei  $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$

$$|a_n| < K \quad \forall n \geq 1$$

### 2.1.11. Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. Das heißt eine beschränkte Folge ist nicht konvergent.

*Gegenbeispiel:* die alternierende Folge  $(-1)^n$ .

### 2.1.12. Satz Monotoniekriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann gilt:

- Ist  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist  $(a_n)$  konvergent.
- Ist  $(a_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist  $(a_n)$  konvergent.

**Beweis:** Es reicht die erste Aussage zu zeigen, denn ist  $(a_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt  $\Rightarrow (-a_n)$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  ist konvergent.

Sei also  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt. Mit dem Vollständigkeitsaxiom  $\Rightarrow \exists a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .  
Und sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad a - \varepsilon < a_N \leq a$ .

$$\begin{aligned} \text{Da } (a_n) \nearrow \Rightarrow \forall n \geq N \quad a_N \leq a_n & \quad q.e.d. \\ \Rightarrow a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \end{aligned}$$

### 2.1.13. Bemerkung

Das Monotonie-Kriterium ist äquivalent zur Vollständigkeit.

### 2.1.14. Satz

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  und  $a \neq b$ .

$$\begin{aligned} \text{Sei } \varepsilon = \frac{1}{2} |b - a| \Rightarrow \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon \\ \Rightarrow \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n \geq N \quad |b - a| &= |(b - a_n) + (a_n - a)| \\ &\leq |b - a_n| + |a_n - a| \\ &= |a_n - b| + |a_n - a| \\ &< \frac{1}{2} |b - a| + \frac{1}{2} |b - a| \\ &= |b - a| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |b - a| < |b - a| \text{ Widerspruch!} \Rightarrow a = b \quad q.e.d.$$

### 2.1.15. Satz Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1.  $(a_n \pm b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $\lambda(a_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
3.  $(a_n b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
4. Ist  $(b_n) \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ . Dann ist  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .
5.  $a_n \leq b_n$  dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \forall n \geq n_0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ .

$$1. \text{ Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$$

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow (a_n \pm b_n) \text{ beschränkt und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a + b.$$

$$2. \text{ Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \forall n \geq N$$

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda| |a_n - a| < \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

$$3. \text{ Jede konvergente Folge ist beschränkt } \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \text{ mit } |a_K| \leq K \text{ und } |b| \leq K$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \Rightarrow$$

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b + ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ = \underbrace{|a_n|}_{\leq K} |b_n - b| + \underbrace{|b|}_{\leq K} |a_n - a| < K \frac{\varepsilon}{2K} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

$$4. \text{ Zeige } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \\ \Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \quad \forall n \geq N \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{bb_n} \right| = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |b - b_n| < \frac{2}{|b|} \frac{1}{|b|} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon.$$

$$5. \text{ Sei } a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\text{Angenommen } a > b. \text{ Sei } \varepsilon = \frac{a - b}{2} > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{2b + a - b}{2} = \frac{b + a}{2} = \frac{2a - a + b}{2}$$

$$= a - \frac{a - b}{2} = a - \varepsilon < a_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$$

$$\Rightarrow b_n < a_n \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \quad \text{Widerspruch!} \Rightarrow a \leq b$$

*q.e.d.*

### 2.1.16. Satz Sandwich-Theorem

Sei  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen mit der Eigenschaft, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ . Sei  $(c_n)$  eine Folge mit der Eigenschaft, dass  $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$ . Dann ist  $(c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

$$\textbf{Beweis:} \text{ Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_1$$

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \text{ es gilt: } a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

*q.e.d.*

$$\textbf{2.1.17. Beispiel} \quad 1. \text{ Sei } (a_n) \text{ eine Folge mit } 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

2.  $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$  ist divergent  
denn  $a_n = (\sqrt{2n} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} = \frac{2n - n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} + 1)} \underset{(\sqrt{2}-1) \leq 3}{\geq} \frac{n}{3\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

### 2.1.18. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $\pm\infty$  wenn gilt:  $\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n \leq K$

Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$

nach oben unbeschränkt oder nach unten unbeschränkt

### 2.1.19. Beispiel

1. Die Fibonacci Folge ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$

2. Sei  $a_n = n$ , dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$   
3. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = -\infty$   
4. Die Folge  $a_n = (-1)^n$  ist divergent aber nicht bestimmt divergent.  
5. Sei  $(a_n)$  bestimmt divergent und  $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ , dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \varepsilon$ , da  $a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  *q.e.d.*

### 2.1.20. Definition

Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen und  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ .  
Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

### 2.1.21. Bemerkung

Ist die Folge  $(a_n)$  konvergent, dann ist auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergent.

**Beweis:** Übung

*q.e.d.*

### 2.1.22. Definition

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt (Häufungswert) der Folge  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt die gegen  $a$  konvergiert.

### 2.1.23. Bemerkung

1. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , dann ist  $a$  der einzige Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ .

2. Eine bestimmt divergente Folge hat keinen Häufungspunkt.  
3. Die Folge  $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$  besitzt die zwei Häufungspunkte  $-1$  und  $+1$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + (-1)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + 1 = 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} - 1 = -1$   
4. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber jede beschränkte Folge muss nicht konvergent sein.

### 2.1.24. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist beschränkt, d.h.  $\exists A \in \mathbb{R}$  mit  $-A \leq a_n \leq A \quad \forall n \geq 0$

Sei  $A_k = \{a_m : m \geq k\} \Rightarrow$  jede der Mengen  $A_k$  ist beschränkt.

Mit dem Vollständigkeitsaxiom  $\exists \inf \forall A_k$ . Sei etwa,  $X_k = \inf(A_k)$

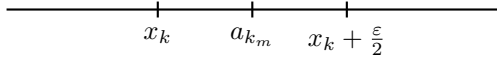
$$A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{k-1} \supset A_k \supset \dots \Rightarrow x_k \leq x_{k+1} \quad \forall k \geq 0$$

$\Rightarrow$  d.h. Die Folge  $(x_k)_{k \geq 0}$  ist monoton wachsend und durch  $A$  nach oben beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium ist die Folge  $(x_k)_{k \geq 0}$  konvergent. Sei etwa  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$

Behauptung:  $z$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

I) Sei  $\varepsilon > 0$ , da  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_k - z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$

II) Da  $x_k = \inf(A_k) = \inf\{a_m : m \geq k\} \Rightarrow \exists a_{k_m}$  mit  $|x_k - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$ .



$$\Rightarrow |a_{k_m} - z| = |a_{k_m} - x_k + x_k - z| \leq |a_{k_m} - x_k| + |x_k - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N \exists a_{k_m} \in (a_n) \quad |a_{k_m} - z| < \varepsilon$  d.h. die Teilfolge  $(a_{k_m})_{m \geq 0}$  ist konvergent gegen  $z$

Also  $(a_{k_m})$  ist eine konvergente Teilfolge von der beschränkten Folge  $(a_n)$ .

*q.e.d.*

### 2.1.25. Bemerkung

Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom.

Äquivalente Formulierungen:

- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt
- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt

### 2.1.26. Definition Cauchy-Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  heißt CAUCHY-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

### 2.1.27. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Die Folge  $(a_n)$  ist konvergent
2. Die Folge  $(a_n)$  ist eine Cauchy-Folge

**Beweis:** 1)  $\Rightarrow$  2)

Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m \geq N \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow a_n$  ist eine Cauchy Folge

2)  $\Rightarrow$  1)

Jede Cauchy Folge ist beschränkt. Sei  $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < 1 \Rightarrow |a_n - a_N| < 1$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \quad \forall n \geq N$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  sei  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

Wir zeigen.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $m$  so groß, dass  $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$  und  $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N$

$$\Rightarrow |a - a_n| = \frac{a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n}{\leq} |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ da } n_k \geq n \geq N \quad \text{q.e.d.}$$

### 2.1.28. Beispiel Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Seien  $a = 0$ ,  $a_0 > 0$  reelle Zahlen. Wir definieren die Folge  $(x_n)$  rekursiv.

$$x_0 = x_0 x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Wir zeigen:  $(x_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $x^2 = a$ .

**Beweis:** 1.  $x_n > 0 \forall n \geq 0$

IA  $n=0$   $x_0 > 0$

IV  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

$$\text{IS } n \mapsto n+1 \text{ Sei } x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \left( \underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{a}{x_n}}_{>0} \right) > 0$$

$\Rightarrow (x_n)$  ist nach unten durch 0 beschränkt.

2.  $x_n^2 \geq a \quad \forall n \geq 1$

denn  $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 - a = \dots \text{inklammerreinziehen und ausrechnen} \dots = \frac{1}{4} (x_n^2 - a)^2 \geq 0$

3.  $(x_n)$  ist monoton fallend

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = (x_n \text{ inklammerreinziehen und ausrechnen}) = \frac{1}{2} \frac{x_n^2 - a}{x_n} \geq 0$$

weil beides  $\geq 0$  ( $x_n > 0$ )  $\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$

Nach dem Monotonie-Kriterium ist  $(x_n)$  konvergent.

4. Sei  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \Rightarrow$   
 $2x = x + \frac{a}{x} \Rightarrow$   
 $x = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = a.$

*q.e.d.*

Die positive Lösung der Gleichung  $x^2 = a$  heißt die Quadratwurzel von  $a$ . Wir schreiben  $x = \sqrt{a}$ .

## 2.2 Reihen

### 2.2.1. Definition

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge reeller Zahlen. Sei weiters  $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$  die  $N$ -te Partialsumme, dann heißt die Folge  $(S_N)_{N \geq 0}$  der Partialsummen eine unendliche Reihe.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Konvergiert die Folge  $(S_N)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_N = s$ , dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$  der Wert der Reihe. Man sagt:

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert.

$$\text{Schreibweise: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

**2.2.2. Beispiel** 1. Die geometrische Reihe. Sei  $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ . Ist  $|a| \geq 1$ , dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  divergent.



**Beweis:** Die geometrische Summe:  $\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$  dann:  $IAN = 01 = a^0 = (1-a)/(1-a) = 1$   
 $IV \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$   
 $ISN \mapsto N+1$   
 $\sum_{n=0}^{N+1} a^n = a^{N+1} + \sum_{n=0}^N a^n \stackrel{IV}{=} a^{N+1} + \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \dots \text{selber}$   
Sei  $S_N = \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$   
Sei  $|a| < 1$ . Dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$   
Sei  $a \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^N a^n \geq \sum_{n=0}^N 1 = N+1 \rightarrow \infty$   
Sei  $a \leq -1 \Rightarrow a = -b$  mit  $b \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^N a^n \geq \sum_{n=0}^N (-1)^n b^n$  divergent *q.e.d.*

2. Die harmonische Reihe:  $\sum n = 1 \infty \frac{1}{n} = +\infty$

**Beweis:**  $S_{2^N} = \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}}_{=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{N-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^N}}_{=\frac{1}{2}} \geq$   
 $1 + n \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \rightarrow +\infty$  Würde  $(S_N)_{N \geq 1}$  konvergieren, dann auch die Teilfolge  $(S_{2^N})_{N \geq 1}$ , da diese divergiert, divergiert auch  $(S_N)_N$  *q.e.d.*

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(n+1)} \right) = 1$

**Beweis:**  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} =$   
 $1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} = 1 + \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$  *q.e.d.*

### 2.2.3. Satz

Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  zwei konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{R}$  Dann ist auch  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n$  konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n + b_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

**Beweis:** folgt auf grund der Rechenregeln für konvergente Folgen. *q.e.d.*

### 2.2.4. Satz Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent, genau dann wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad (*)$$

**Beweis:**  $S_n - S_m = \sum_{k=m}^n a_k - \sum_{k=m}^m a_k = 0$   $\Rightarrow \sum_{k=m}^n a_k = 0$ . (\*) bedeutet die  $(S_n)_n$  ist eine Cauchy-Folge  
 $\Leftrightarrow (S_n)_n$  ist konvergent *q.e.d.*

### 2.2.5. Korollar

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Beweis:**  $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ . Da  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N |a_n| =$   
 $|\sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  *q.e.d.*

### 2.2.6. Bemerkung

Die Umkehrung des Korrolars gilt nicht. z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  aber  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n = \infty$  harmonische Reihe.

### 2.2.7. Definition

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, wenn wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

### 2.2.8. Satz

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

**Beweis:** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow$  Dreiecksungleichung  $\left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$  Cauchy-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist konvergent.  
*q.e.d.*

### 2.2.9. Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. zB kann man zeigen, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  konvergiert. Aber die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

### 2.2.10. Satz Majoranten-Kriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent mit  $b_k \geq 0 \forall k \geq N_0$ . Sei  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  eine Folge mit  $|a_k| \leq b_k \forall k \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$  und  $b_k \geq 0$  Cauchy-Kriterium  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N \quad \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \sum_{k=m}^n b_k < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$  Cauchy-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  ist konvergent.  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.  
*q.e.d.*

### 2.2.11. Korollar Minoranten-Kriterium

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent mit  $b_k \geq 0 \forall k \geq N_0$ . und  $(a_k)_{k=0}^{\infty}$  eine Folge mit  $|a_k| \geq b_k \forall k \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist auch divergent.

**Beweis:** Wäre  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, dann wäre nach dem Majoranten-Kriterium  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, da  $|b_k| \leq a_k$ . Widerspruch!  
*q.e.d.*

### 2.2.12. Satz Quotienten-Kriterium

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe mit  $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$  Existiert eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 < q < 1$  sodass  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \forall n \geq 0$  (o.B.d.A.)  $\Rightarrow |a_{n+1}| \leq q |a_n| \Rightarrow |a_n| \leq q |a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-2}| \leq \dots \leq q^n |a_0|$ . Also  $|a_n| \leq q^n |a_0|$ , da  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n |a_0| = |a_0| \sum_{n=0}^{\infty} q^n = |a_0| \frac{1}{1-q}$ , denn  $0 < q < 1$ , geometrische Reihe.  $\Rightarrow$  aus dem Majoranten-Kriterium folgt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent. *q.e.d.*

### 2.2.13. Korollar einfaches Quotienten-Kriterium

Sei  $a_n \neq 0 \forall n > n_0$  und existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.

**Beweis:** Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha < 1$

Sei  $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0 \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \quad \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \alpha \right| < \varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1-\alpha}{2} + \alpha = \frac{1+\alpha}{2}$  da  $\alpha < 1$   
 $\frac{1}{2} = 1$  Sei  $q = \frac{1+\alpha}{2} < 1$  und  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$  Nach dem Quotienten-Kriterium ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent  
*q.e.d.*

**2.2.14. Beispiel** 1.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty \quad \forall k \geq 2$  [Bemerkung: Die Konvergenz gilt auch  $\forall k \in \mathbb{R}, k > 1$  ohne Beweis]

**Beweis:**  $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall k \geq 2$  und  
 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ , denn  $\Leftrightarrow 2n^2 \geq n(n+1) \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$   
 $\Rightarrow \frac{1}{n^k} \leq \frac{2}{n(n+1)} \forall k \geq 2$  und

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 * 1 = 2$  Majoranten-Kriterium  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^k < \infty \forall k \geq 2$   
 Frage: Wie sind die Werte der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n^k$  für  $k \geq 2$  Euler:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = C_k \pi^{2k}$  Aber:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5} = ?$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} = ?$  *q.e.d.*

2. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  ist konvergent.

Quotienten-Kriterium.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)^2}{2^{n+1}n^2} = \frac{1}{2} * \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$  *q.e.d.*

3. Die Exponentialfunktion Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist für jedes  $x \in \mathbb{R}$  absolut konvergent

Quotienten-Kriterium.  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x^{k+1}| * k!}{|x^k| * (k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist absolut konvergent. *q.e.d.*

**2.2.15. Bemerkung** 1. Für  $k = 1$  ist die harmonische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent.

2. Das Quotienten-Kriterium ist hier nicht anwendbar, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \not< 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 \rightarrow 1 \not< 1$$

### 2.2.16. Definition

Die Funktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  heißt Exponentialfunktion.

Die Zahl  $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$  heißt Euler'sche Zahl.

### 2.2.17. Bemerkung

Wir werden später zeigen:

$$e = \frac{1^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828...$$

### 3 Test

zum Formeln raus kopieren

1.  $\rightarrow$

2.  $(a_n)$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

4.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

5.  $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_n^k$$

Verschiedene Größen:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_k} + \frac{b_n}{c_n}$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_k} + \frac{b_n}{c_n}$

3.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_k} + \frac{b_n}{c_n}$

4.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_k} + \frac{b_n}{c_n}$

**Beweis:** IA  $n = 0$  :

IV

IS  $n \mapsto n + 1$

*q.e.d.*

