Analysis für Informatik

-

Ass.Prof. Clemens Amstler

Tanja Kohler

25. Oktober 2018

1 Reelle und Komplexe Zahlen

1.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen eine Reihe von Axiomen, die in drei Gruppen unterteilt werden können.

I. Algebraische Axiome

II. Anordnungsaxiome

III. Vollständigkeitsaxiome

1.1.1 Algebraische Axiome

Die reellen Zahlen bilden mit der Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a + b$ und der Multiplikation $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(a, b) \mapsto a * b$ einen Körper $(\mathbb{R}, +, *)$, der folgende Axiome erfüllt:

1) $\mathbb{R}$ ist bzgl. der Addition eine Abelsche Gruppe. $(\mathbb{R}, +)$

2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bzgl der Multiplikation eine Abelsche Gruppe. $(\mathbb{R}, *)$

3) Das Distributivgesetz gilt: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $a * (b + c) = a * b + a * c$

Andere Beispiele von Körpern: $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ für p prim. Die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \infty\}$ und die Ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden keinen Körper.

1.1.1. Proposition
$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $0 * a = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \Rightarrow \\
a(0 + 0) &= a * 0 \overset{\text{Distributivgesetz}}{\Rightarrow} \\
a * 0 + a * 0 &= a * 0 \overset{\text{assiozativ}}{\Rightarrow} \\
a * 0 + (a * 0 - a * 0) &= (a * 0 - a * 0) \overset{\text{additives Inverses}}{\Rightarrow} \\
a * 0 + 0 \overset{0+0=0}{=} a * 0 &= 0.
\end{aligned}$$

q.e.d.

1.1.2. Definition Potenzschreibweise
Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ wird a^n folgendermapen induktiv definiert:

- $a^0 = 1$
- $\forall n > 1 \quad a^{n+1} = a * a^n$
- $\forall n > 1\ \forall a \neq 0 \quad a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$

1.1.3. Bemerkung
$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

(1) $a^n * a^m = a^{n+m}$

(2) $a^{n^m} = a^{n*m}$

(3) $a^n * b^n = (a * b)^n$

Beweis:

(1) $a^n * a^m \overset{\text{n. Def.}}{=} \overbrace{a \dots a}^{n\text{-mal}} * \overbrace{a \dots a}^{m\text{-mal}} = \overbrace{a \dots a}^{n+m\text{-mal}} \overset{\text{n. Def.}}{=} a^{n+m}$

(2) $a^{n^m} = a^{\overbrace{n \dots n}^{m\text{-mal}}} = a^{m*n} = a^{n*m}$

(3) $a^n * b^n = \overbrace{a \dots a}^{n\text{-mal}} * \overbrace{b \dots b}^{n\text{-mal}} = \overbrace{a \dots ab \dots b}^{n\text{-mal}} = (a * b)^n$

q.e.d.

1.1.2 Anordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden in positive Zahlen $(x > 0)$, negative Zahlen $(x < 0)$ und 0 $(x = 0)$ unterteilt. Dabei ist $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ Und es gelten folgende Axiome:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Bedingungen: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$

(2) $\forall x, b \in \mathbb{R}$ $x, b > 0$ gilt: $a + b > 0 \wedge a * b > 0$

Wir schreiben für $a, b \in \mathbb{R}$ $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ und $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

1.1.4. Proposition
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

Beweis: selbst *q.e.d.*

1.1.5. Bemerkung
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

b) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow a * c < b * c$

c) $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow a * c > b * c$

d) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ speziell $1 > 0$

e) $0 < a < b$ und $a < b < 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

1.1.6. Definition
Für $a \in \mathbb{R}$ und der Betrag $|\, a \,|$ folgendermaßen definiert.

$$|\, a \,| = \begin{cases} a & \text{wenn } a > 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

1.1.7. Satz

$\forall b \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|\, a * b \,| = |\, a \,| * |\, b \,|$

(2) $|\, a + b \,| \leq |\, a \,| + |\, b \,|$ (Dreiecksungleichung)

(3) $|\, a - b \,| \geq |\, |\, a \,| - |\, b \,| \,|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis: (1) siehe PS

(2)
- $a \leq |\, a \,|$ und $b \leq |\, b \,| \Rightarrow a + b \leq |\, b \,| + b \leq |\, a \,| + |\, b \,|$
- $-a \leq |\, a \,| und -b \leq |\, b \,| \Rightarrow -(a+b) = -a + -b \leq |\, a \,| + -b \leq |\, a \,| + |\, b \,|$

$\Rightarrow$ d.h. $a+b \leq |\, a \,| + |\, b \,|$ und $-(a+b) \leq |\, a \,| + |\, b \,| \Rightarrow |\, a + b \,| \leq |\, a \,| + |\, b \,|$

(3) siehe PS

q.e.d.

1.1.8. Bemerkung Archimedisches Axiom

Für zwei positive Zahlen, a, b gibt es immer eine natürliche Zahl n, sodass folgendes gilt: $n * b > a$ Also:

$$\forall a, b > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad n * b > a$$

Als Folgerung erhalten wir: Setze $b = 1$

$$\forall a > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \quad n > a$$

1.1.9. Satz Bernoullische Ungleichung

Sei $a > -1$ dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + a)^n >= 1 + na$

Beweis: Übung. *q.e.d.*

1.1.10. Korollar

Sei $a > 0$.

(1) Ist $a > 1 \; \forall k > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n > k$.

(2) $0 < a < 1 \; \forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n < \epsilon$

Beweis:

(1) $a > 1 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} x = a - 1 > 0 \Rightarrow a = x + 1 \Rightarrow a^n = (x+1)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx > 1 + k - 1 = k$, da $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x > 0$ mit $nx > k - 1$

(2) Sei $0 < a < 1$, sei $b = \frac{1}{a} > 1$, $\overset{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{R}$ mit $b^n > k = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow a^n < \epsilon$.

q.e.d.

1.1.3 Vollständigkeitsaxiom

Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ hat keine Lücken.

1.1.11. Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1. $k \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M wenn gilt, $\forall x \in M, x \leq k$. M heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt. zB $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beskchränkt, nach dem Archimedischem Axiom.
2. $k \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke von M wenn gilt, $\forall x \in M, x \geq k$. M heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt.
3. M heißt beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existiert. (äquivalente Definition für Beschränktheit: $\exists k \in \mathbb{R}, |x| \leq k \forall x \in M$)
4. $a \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von M, falls a größte untere Schranke von M ist. d.h. a ist untere Schranke von M und ist k eine untere schranke von M, dann folgt $k \leq a$
   Schreibweise: $a = inf(M)$
5. $b \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, falls b kleinste obere Schranke von M ist. d.h. b ist obere schranke von M und ist k eine obere schranke von M, dann folgt $k \geq a$
   Schreibweise: $b = sup(M)$

1.1.12. Beispiel
Sei a $<$ b dann ist $inf([a,b]) = a = inf((a,b))$ und $sup([a,b]) = b = sub((a,b))$.

$$[a,b] = \{a \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \text{ heißt abgeschlossenes Intervall}$$

$$(a,b) = \{a \in \mathbb{R} | a < x < b\} \text{ heißt offenes Intervall}$$

1.1.13. Bemerkung zur Erinnerung
Definition der natürlichen Zahlen (Axiom des kleinsten Element (Pianoaxiome)) Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

1.1.14. Satz Vollständigkeitsaxiom
Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum $inf(M) \in \mathbb{R}$.

ohne Beweis. *q.e.d.*

1.1.15. Bemerkung
$inf(M)$ muss kein Element von $\mathbb{R}$ sein.

1.1.16. Proposition
Jede nicht leere nach oben bescrhänkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $sup(M) \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei M nach oben beschränkt. Sei $-M = \{- < |x \in M\}$. Sei a eine obere Schranke von M. d.h. $\forall x \in Mx \leq a \Rightarrow -a \leq -x \forall x \in M \Rightarrow$ d.h. $-a$ ist untere Schranke von $-M$. d.h. $-M$ ist nach unten beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom, existiert ein Infimum. Sei $b = inf(-M) \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow -b \leq aundb \leq -x \Rightarrow x \leq -b$.Also $-b$ ist obere Schranke und kleinste obere Schanke. $\Rightarrow -b = sup(M)$ *q.e.d.*

1.1.17. Proposition

$sup(M)$ und $inf(M)$ sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien m und m' SupremuDm von $M \Rightarrow m \leq m'$ und $m' \leq m \Rightarrow m = m'$.
analog für Infimum. *q.e.d.*

1.2 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind die Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Wir setzen $1 = (1,0), i = (0,1) \Rightarrow (a,b) = a + ib$

[grafik R2 mit z = (a, b) und (1,0) und (0,1) eingezeichnet]

zusätzlkich verlangen wir $i^2 = -1$ Also:

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

1.2.1. Satz

Es gilt: $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Beweis: nachrechnen. *q.e.d.*

1.2.2. Definition

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dann heißt $\bar{z} = a - ib$ die konjungiert komplexe Zahl von z. $|\, z \,| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt Betrag von z $a = Re(z)$ heißt Realteil von z $b = Im(z)$ heißt Imaginärteil von z

1.2.3. Satz

Es gilt: $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Beweis: selber mit grafik. *q.e.d.*

1.2.4. Proposition

Es gilt:

(i) $\bar{\bar{z}} = z, \bar{z_1} + \bar{z_2} = z_1 \bar{+} z_2, \bar{z_1} * \bar{z_2} = z_1 \bar{*} z_2, |\, \bar{z} \,| = |\, z \,|$

(ii) $|\, z \,| \geq 0, |\, z \,| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(iii) $|\, z_1 z_2 \,| = |\, z_1 \,| |\, z_2 \,|$

(iv) $|\, z_1 + z_2 \,| \leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|$

Beweis: (i) und (ii) nachrechnen.
(iii) $\mid z_1 z_2 \mid^2 = (z_1 z_2)(\bar{z_1 z_2}) = ...$
(iv) Sei $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
Sei $z = a + ib, a = Re(z) \Rightarrow \mid Re(z) \mid \leq z \Rightarrow Re(z_1 \bar{z_2}) \leq \mid Re(z_1 \bar{z_2} \mid \leq \mid z_1 \bar{z_2} \mid = \mid z_1 \mid \mid \bar{z_2} \mid = \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid \Rightarrow \mid z_1 + z_2 \mid^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) = z_1 \bar{z_1} + z_2 \bar{z_1} + z_1 \bar{z_2} z_2 \bar{z_2} = \mid z_1 \mid^2 + z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1 \bar{z_2}} + \mid z_2 \mid^2 = |z_1|^2 + 2Re(z1\bar{z}2) + |z_2|^2 \leq$ realteil ersetzen nach oben und dann hamma quadrate , mit wurzel ziehen folgt die aussage. *q.e.d.*

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

2.1.1. Beispiel

Betrachte [Rechtwinkliges Dreieck mit beschriftung 1, 1, und $\sqrt{2}$] $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: indirekter Beweis: Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Wir können annehmen, dass p und q nicht beide durch 2 teilbar sind (sonst kürzen wir.) teilerfremd. $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow \exists m$ mit $p = 2m. \Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$ d.h. $2|q^2 \Rightarrow 2|q$ Also p und q sind beide durch 2 teilbar. Widerspruch zur Annahme, p und q sind teilerfremd. $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *q.e.d.*

2.1.2. Bemerkung

$\sqrt{2}$ ist die positive Lösung von $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$
Betrachte die rechte Seite dieser Gleichung und berechne diese induktiv Setze zB

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

$a_1 = 1 a_2 = ... = 1,5 a_3 = ... \approx 1.41 a_3 = ... \approx 1,4142 ...$

Also a_n nähert sich mit wachsendem n immer mehr an $\sqrt{2}$ Dies führt zu dem Begriff **Grenzwert einer Folge**.

2.1.3. Definition

Eine Folge $(a_n)_{k=0}^{\infty}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \mapsto a_n$
Bezeichnung: Wir schreiben für Folgen

- $(a_n)_{k=0}^{\infty}$
- $(a_n)_{n\geq 0}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- (a_n)
- $(a_n)_{n\geq n_0}$ für $n_0 \in \mathbb{N}$

2.1.4. Definition 1. Eine Folge (a_n) heißt (streng) monoton wachsend, wenn $\forall a \in \mathbb{N}_0$ $a_n \leq a_{n+1}(a_n < a_{n+1})$ gilt. Schreibweise: $(a_n) \nearrow$, $(a_n) \uparrow$.

2. Eine Folge (a_n) heißt (streng) monoton fallend, wenn $\forall a \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}(a_n > a_{n+1})$ gilt. Schreibweise: $(a_n) \searrow$, $(a_n) \downarrow$.

3. Eine Folge (a_n) heißt (streng) monoton, sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

2.1.5. Beispiel 1. Die konstante Folge $a_n := a$ ist monoton fallend und steigend.

2. Die harmonische Folge $a_n := \frac{1}{n} \forall n \geq 1$ ist streng monoton fallend.

3. Die alternierende Folge $a_n := (-1)^n$ ist nicht monoton.

4. Die geometische Folge, Sei $a \in \mathbb{R} a_n := a^n \forall n \geq 0$ ist $\begin{cases} \text{streng monoton wachsend} & \text{wenn } a > 0 \\ \text{streng monoton fallend} & \text{wenn } 0 < a < 1 \\ \text{monoton fallend und steigend} & \text{wenn } a = 1 \\ \text{nicht monoton} & \text{sonst} \end{cases}$

5. Die Fibonacci Folge $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \forall n \geq 2$ ist monoton wachsend.

2.1.6. Definition der Konvergenz

Eine Folge zeeller Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ (Schreibweise. $lim_{n\to\infty} a_n = a, lim a_n = a$ wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $\mid a_n - a \mid < \epsilon$ gilt. a heißt der Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) Die Folge (a_n) heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

$$\text{Also: } lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \mid a_n - a \mid < \epsilon$$

2.1.7. Bemerkung 1. Sei $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ $U_\epsilon(a) := (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} | a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$ heißt ϵ-Umgebung von a.

$$a_n \in U_\epsilon(a) \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon \Leftrightarrow \mid a_n - a \mid < \epsilon$$

Also Die Folge (a_n) konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$ Die Folgenglieder a_n liegen ab einer Schwelle N alle in der ϵ-Umgebung von a.

2. (a_n) konvergiert nicht gegen $a \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N |a_n - a| \geq \epsilon$.

2.1.8. Beispiel

1) Die harmonische Folge $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ Wähle $N > \frac{1}{\epsilon}$ $\mid a_n - 0 \mid = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} <= \frac{1}{N} < \epsilon$ *q.e.d.*

2) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$

Beweis: Angenommen $\exists a in \mathbb{R}$ mit $\lim a_n = a$ Wähle $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \mid b_n - a \mid < \frac{1}{2}$. Da $b_{n+1} - b_n = + - 2$ ist $\forall n \geq N 2 = \mid b_{n+1} - b_n \mid = \mid b_{n+1} - a - (b_n - a) \mid \leq \mid b_{b+1} - a \mid + \mid b_n - a \mid < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1$ Widerspruch $\Rightarrow (b_n)$ ist divergent. *q.e.d.*

3) Die geometsiche Folge $(a^n)_{n \geq 1}$ 1. Fall $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a^n = 0$

Beweis: Sei $\epsilon < 0 \overset{archim}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \mid a \mid^N < \epsilon \Rightarrow \forall n \geq N : |a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^N < \epsilon$ *q.e.d.*

2. Fall $a = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim a^n = 1$ 3. Fall $a = -1 \Rightarrow$ divergent weil alternierend. 4. Fall $|a| > 1 \forall K > 0 \exists n \in \mathbb{N} |a|^n > K$ d.h. (a^n) ist unbeschränkt.

2.1.9. Definition

Eine Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt mit $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq A (a_n \geq A)$. (a_n) heißt beschränkt, wenn (a_n) nach oben oder unten beschränkt ist. d.h. $\exists K \in \mathbb{R} |a_n| \leq K \forall n \in \mathbb{N}$

2.1.10. Satz

Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Wähle $\epsilon = 1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \mid a_n - a \mid < 1 \Rightarrow |a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - < | = |a| + 1 \forall n \geq N$. Sei $K = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n - 1|, |a| + 1\} \Rightarrow |a_n| < k \forall n \geq 1$ *q.e.d.*

2.1.11. Bemerkung

Die uMkehrung gilt nicht. d.h. eine beschränkte Folge ist nicht konvergent. siehe die alternierende Folge.

2.1.12. Satz Monotoniekriterium

(1) Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
(2) Jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge ist konvergent.
Bem: Das Monotonie-Kriterium ist äquivalent zur Vollständigkeit.

Beweis: (1) Sei (a_n) monoton wachsen und nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $a := sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow a - \epsilon$ ist keine obere Schranke von $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$. Da (a_n) monoton wachsend ist, $\Rightarrow \forall n \geq N a_N \leq a_n \Rightarrow a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim a_k = a$. (2) analog. *q.e.d.*

2.1.13. Satz

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Angenommen $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \to \infty} a_n = b$ und $a \neq b$.
Sei $\epsilon = \frac{1}{2} |b - a| \Rightarrow \exists N_1 \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \epsilon$ und $\Rightarrow \exists N_2 \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \epsilon$.
Sei $N := max\{N_1, N_2\}$.

$\Rightarrow n \geq N : |b-a| = |(b-a_n)+(a_n-a)| \leq |b-a_n|+|a_n-a| = |a_n-b|+|a_n-a| < \frac{1}{2}|b-a| + \frac{1}{2}|b-a| = |b-a| \Rightarrow |b-a| < |b-a|$ Widerspruch $\Rightarrow a = b$ *q.e.d.*

2.1.14. Satz Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1. $(a_n \pm b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lambda(a_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
3. $(a_n b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. Ist $(b_n) \neq 0 \forall n \geq n_0 und \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ Dann $(\frac{a_n}{b_n})$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
5. $a_n \leq b_n$ dann ist $\lim a \leq \lim b \forall n \geq n_0$.

Beweis: Sei $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = b$.
1) Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2, \in \mathbb{N}$
$\mid a_n - a \mid < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_1$
$\mid b_n - b \mid < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_2$
$\Rightarrow \forall n \geq max N_1, N_2$
$\mid (a_n + b_n) - (a+b) \mid = \mid (a_n - a) + (b_n + b) \mid \leq \mid (a_n - a) \mid + \mid (b_n + b) \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \Rightarrow beschrnktund \lim a_n + b_n = a + b.$ analog für $-$

2) Übung

3) Jede konvergente Folge ist beschränkt $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ mit $|a_K| \leq K$ und $|b| \leq K$
Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}. \Rightarrow \forall n \geq max N_1, N_2 gilt |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b + ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n-b)| + |b(a_n-a)| = \underbrace{|a_n|}_{\leq K}(b_n - b)| + \underbrace{|b|}_{\leq K}|(a_n - a)| < K\frac{\epsilon}{2K} + K\frac{\epsilon}{2K} = \epsilon$

$4) Zeige \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} ||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} frallengrern_0 Seiepsilon > 0 folgtesgibtN frallengrergleichN |b_n - b| < (\epsilon|b|^2)/2 \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = aufgleichennenner = \frac{1}{|b_n|}\frac{1}{|b|}|restinklammer|mitepsilonnachvoraussetzungen$

$5) Seia_n \leq b_n \forall n \geq n_0 . zz.a \leq b Angenommena > b Sei \epsilon \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \mid a_n - a \mid < \epsilon \forall n \geq N_1 \mid b_n - b \mid < \epsilon \forall n \geq N_2 \Rightarrow \forall n \geq max N_1, N_2 b_n < b + \epsilon = b + (a-b)/2 = (2b + a - b)/2 = (b+a)/2 = (2a - a + b)/2 = a - (a-b)/2 = a - \epsilon < a_n \Rightarrow b_n < a_n \forall n \geq max N_1, N_2 Widerspruch \Rightarrow a \leq b$ *q.e.d.*

2.1.15. Satz Sandwich-Theorem

Sei (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit der Eigenschaft, dass $\lim a_n = \lim b_n = a$. Sei (c_n) eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ Dann ist (c_n) konvergent und $\lim c_n = a$.

Beweis: $Sei \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} a - \epsilon < a_n < a + \epsilon frallen >= N1 a - \epsilon < b_n < a + \epsilon frallen >= N2 \Rightarrow frallenausmaxn1, N2 gilt a - \epsilon < a_n <= c_n <= b_n < a + \epsilon frallen >= N \Rightarrow |c_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim c_n = a$ *q.e.d.*

2.1.16. Beispiel 1. Sei (a_n) eine Folge mit $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim a_n = 0$

2. $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n}$ ist divergent, denn $a_n = \left(\sqrt{2n} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{2n}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n}} = \frac{2_n - n}{\sqrt{n} * \left(\sqrt{2}-1\right)} \underbrace{\geq}_{\left(\sqrt{2}-1\right) \leq 3} \frac{n}{3\sqrt{n}} = \frac{sqrtn}{3} \rightarrow^{n->\infty} \infty$.

2.1.17. Definition
Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ $(-\infty)$ wenn gilt: $\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N a_n > K (bzw a_n < K)$
Wir schreiben: $\lim a_n = +\infty$ (bzw $-\infty$)
nach oben unbeschränkt oder nach unten unbeschränkt

2.1.18. Beispiel 1. Die Fibonacci Folge ist bestimmt divergent gegen $+\infty$

2. Sei $a_n = n$, dann folgt $\lim a_n = \infty$

3. Sei $\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \lim -a_n = -\infty$

4. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent aber nicht bestimmt divergent.

5. Sei (a_n) bestimmt divergent und $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$, dann folgt $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Beweis: Sei $\lim a_n = \infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N a_n > \frac{1}{\epsilon} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \epsilon$, da $a_n > 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$ *q.e.d.*

2.1.19. Definition
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, und $n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < .....$ eine Teilmenge der Natürlichen Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2.1.20. Bemerkung
Ist die Folge (a_n) konvergent, dann ist auch jede Teilfolge von (a_n) konvergent.

Beweis: Übung *q.e.d.*

2.1.21. Definition
Sei (a_n) eine Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt (Häufungswert) der Folge (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt die gegen a konvergiert.

2.1.22. Bemerkung 1. Sei $\lim a_n = a$, dann ist a der einzige Häufungspunkt der Folge (a_n).

2. Eine bestimmt divergente Folge hat keinen Häufungspunkt.

3. Die Folge $a_n = (1/n) + (-1)^n$ besitzt die zwei Häufungspunkte -1 und $+1$. $\lim a_{2n} = \lim \frac{1}{2n}(-1)^{2n} = \lim \frac{1}{2n} + 1 = 1$ und $\lim a_{2n+1} = \lim \frac{1}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \lim \frac{1}{2n+1} - 1 = -1$

4. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber jede beschränkte Folge muss nicht konvergent sein.

Folgender Satz ist äquvivalent zum Vollstaändigkeitsaxiom:

2.1.23. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt, d.h. $\exists A \in \mathbb{R}$ mit $-A \leq a_n \leq A \forall n \geq 0$
Sei $A_k = \{a_m : m \geq k\} \Rightarrow$ jede der Mengen A_k ist beschränkt.
Mit dem Vollständigkeitsaxiom existiert für jedes A_k ein Infinum. Sei etwa, $X_k = inf(A_k)$
$A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_{k-1} \supset A_k \supset ... \Rightarrow x_k \leq x_{k+1} \forall k \geq 0$
d.h. Die Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ ist monoton wachsen und durch A nach oben beschränkt.
Nach dem Monotoniekriterium ist die Folge $(x_k)_{k\geq 0}$ konvergent. Sei etwa der $\lim k \to \infty(x_k) = z$.
Behauptung: z ist Häufungspunkt von (a_n).
I) Sei $\epsilon > 0$, da $\lim x_k = z \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\mid x_k - z \mid < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N$ II) Da $x_k = inf(A_k) = inf(\{a_m : m \geq k\}) \Rightarrow \exists a_{k_m}$ mit $\mid x_k - a_{k_m} \mid < \frac{\epsilon}{2}$. $\Rightarrow \mid a_{k_m} - z \mid = \mid a_{k_m} - x_k + x_k - z \mid \leq \mid a_{k_m} - x_k \mid + \mid x_k - z \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Also $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N \exists a_{k_m} \in (a_n) \mid a_{k_m} - z \mid < \epsilon$
d.h. die Teilfolge $(a_{k_m})_{m\geq 0}$ ist konvergent gegen z
Also (a_{k_m}) ist eine konvergente Teilfoge von der beschränkten Folge (a_n). *q.e.d.*

2.1.24. Bemerkung

Äquivalente Formulierungen: Jede beschränkte Folge reeler Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt

2.1.25. Definition Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt CAUCHY-Folge, wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \mid a_n - a_m \mid < \epsilon$

2.1.26. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Die Folge (a_n) ist konvergent
2. Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge

Beweis: Ï) $\Rightarrow$ 2)¨
Sei $\lim a_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N \mid a_n a \mid < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N \mid a_n - a_m \mid = \mid a_n - a + a - a_m \mid \leq \mid a_n - a \mid + \mid a_m - a \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow a_n$ ist eine Cauchy Folge 2̈) $\Rightarrow$ 1)¨
Jede Cauchy Folge ist beschränkt. Sei $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in N \forall n, m \geq N \mid a_n - a_m \mid < 1 \Rightarrow \mid a_n - a_N \mid < 1 \Rightarrow \mid a_n \mid = \mid a_n - a_N + a_N \mid \leq \mid a_n - a_N \mid + \mid a_N \mid < 1 + \mid a_N \mid \forall n \geq N \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \mid a_n \mid \leq max\{\mid a_0 \mid, ..., \mid a_{N-1} \mid, \mid a_N \mid + 1\} \Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ sei $\lim a_{n_k} = a$.
Wir zeigen. $lim a_n = a$.
Sei $\epsilon > 0$. Wähle m so groß, dass $\mid a_m - a_n \mid < \frac{\epsilon}{2} \forall n, m \geq N und \mid a_{n_k} - a \mid < \frac{\epsilon}{2} \forall k \geq N \Rightarrow \mid a - a_n \mid = \frac{a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n}{\leq} \mid a - a_{n_k} \mid + \mid a_{n_k} - a_n \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, da $n_k \geq n \geq N$ *q.e.d.*

2.1.27. Beispiel Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Seien $a = 0$, $a_0 > 0$ reelle Zahlen. Wir definieren die Folge (x_n) rekursiv.

$$x_0 = x_0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Wir zeigen: (x_n) ist konvergent und $\lim x_n = x$ und $x^2 = a$.

Beweis: $1.x_n > 0 \forall n \geq 0 IA : n = 0 : x_0 > 0 n- > n + 1 Sei x_n > 0 \Rightarrow x_n + 1 = 1/2(x_n + a/x_n) > 0, da alle teile > 0 sind.(mit underbrace und overbrace d.h.(x_n) ist nach unten durch 0 beschrnkt.$ $a \forall n >= 1 denn x_{n+1}^2 - a = (1/4(x_n + a/x_n)^2 - a = ...a in klammer reinzieihen und ausrechnen... = 1/4(mal sa quradrat) >= 0 3.(x_n) ist monoton fallend x_n - x_{n+1} = x_n - 1/2(x_n + a/x_n) = (x_n in klammer reinzeihen und ausrehcnen) = 1/(2x_n)(x_n^2 - a) >= weil beides >= 0(x_n > 0) \Rightarrow x_> n >= x_{n+1} Nachdem Monotonie-Kriterium ist (x_n) konvergent.4.Sei x = \lim n \to \infty x_n \Rightarrow x = \lim n \to \infty x_{n+1} = \lim n \to \infty \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim n \to \infty x_n + \frac{a}{\lim n \to \infty x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x = x + a/x \Rightarrow x = a/x \Rightarrow x^2 = a.$ *q.e.d.*

Die positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$ heißt die Quadratwurzeln von a. Wir Schreiben $x = \sqrt{a}$.

2.2 Reihen

2.2.1. Definition

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Sei weiters $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ die N-te Partialsumme, dann heißt die Folge $(S_N)_{N \geq 0}$ der Partialsummen eine unendliche Reihe.
Man schreibt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

3 Test

zum Formeln raus kopieren $\lim_{n \to \infty} a_n$

(a_n)