

# Analysis für Informatik

Ass.Prof. Clemens Amstler

Tanja Kohler

24. Oktober 2018

# 1 Reelle und Komplexe Zahlen

## 1.1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  erfüllen eine Reihe von Axiomen, die in drei Gruppen unterteilt werden können.

- I. Algebraische Axiome
- II. Anordnungsaxiome
- III. Vollständigkeitsaxiome

### 1.1.1 Algebraische Axiome

Die reellen Zahlen bilden mit der Addition  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a + b$  und der Multiplikation  $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(a, b) \mapsto a * b$  einen Körper  $(\mathbb{R}, +, *)$ , der folgende Axiome erfüllt:

- 1)  $\mathbb{R}$  ist bzgl. der Addition eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, +)$
- 2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist bzgl. der Multiplikation eine Abelsche Gruppe.  $(\mathbb{R}, *)$
- 3) Das Distributivgesetz gilt:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a * (b + c) = a * b + a * c$

Andere Beispiele von Körpern:  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}_p$  für  $p$  prim. Die Natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, \dots, \infty\}$  und die Ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bilden keinen Körper.

#### 1.1.1. Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}$  gilt  $0 * a = 0$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \Rightarrow \\ a(0 + 0) &= a * 0 \xrightarrow{\text{Distributivgesetz}} \\ a * 0 + a * 0 &= a * 0 \xrightarrow{\text{assoziativ}} \\ a * 0 + (a * 0 - a * 0) &= (a * 0 - a * 0) \xrightarrow{\text{additives Inverses}} \\ a * 0 + 0 &\stackrel{0+0=0}{=} a * 0 = 0. \end{aligned}$$

*q.e.d.*

#### 1.1.2. Definition Potenzschreibweise

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  wird  $a^n$  folgendermaßen induktiv definiert:

- $a^0 = 1$
- $\forall n > 1 \quad a^{n+1} = a * a^n$
- $\forall n > 1 \quad \forall a \neq 0 \quad a^{-n} = (a^{-1})^n$

### 1.1.3. Bemerkung

$\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\forall n, m \in \mathbb{Z}$  gilt:

- (1)  $a^n * a^m = a^{n+m}$
- (2)  $a^{n^m} = a^{n*m}$
- (3)  $a^n * b^n = (a * b)^n$

**Beweis:**

- (1)  $a^n * a^m \stackrel{\text{n. Def.}}{=} \overbrace{a \dots a}^{n\text{-mal}} * \overbrace{a \dots a}^{m\text{-mal}} = \overbrace{a \dots a}^{n+m\text{-mal}} \stackrel{\text{n. Def.}}{=} a^{n+m}$
- (2)  $a^{n^m} = \overbrace{a^n \dots a^n}^{m\text{-mal}} = a^{m*n} = a^{n*m}$
- (3)  $a^n * b^n = \overbrace{a \dots a}^{n\text{-mal}} * \overbrace{b \dots b}^{n\text{-mal}} = \overbrace{a \dots a b \dots b}^{n\text{-mal}} = (a * b)^n$

*q.e.d.*

### 1.1.2 Anordnungsaxiome

Die reellen Zahlen werden in positive Zahlen ( $x > 0$ ), negative Zahlen ( $x < 0$ ) und 0 ( $x = 0$ ) unterteilt. Dabei ist  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$  Und es gelten folgende Axiome:

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der folgenden Bedingungen:  $x > 0$ ,  $x = 0$ ,  $x < 0$
- (2)  $\forall x, b \in \mathbb{R} \ x, b > 0$  gilt:  $a + b > 0 \wedge a * b > 0$

Wir schreiben für  $a, b \in \mathbb{R}$   $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$  und  $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

### 1.1.4. Proposition

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$

**Beweis:** selbst

*q.e.d.*

### 1.1.5. Bemerkung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- b)  $a < b$  und  $c > 0 \Rightarrow a * c < b * c$
- c)  $a < b$  und  $c < 0 \Rightarrow a * c > b * c$
- d)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$  speziell  $1 > 0$
- e)  $0 < a < b$  und  $a < b < 1 \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$

### 1.1.6. Definition

Für  $a \in \mathbb{R}$  und der Betrag  $|a|$  folgendermaßen definiert.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a > 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

### 1.1.7. Satz

$\forall b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $|a * b| = |a| * |b|$
- (2)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  genannt Dreiecksungleichung
- (3)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$  umgekehrte Dreiecksungleichung

**Beweis:** (1) siehe PS

- (2)
  - $a \leq |a|$  und  $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |b| + b \leq |a| + |b|$
  - $-a \leq |a|$  und  $-b \leq |b| \Rightarrow -(a + b) = -a + -b \leq |a| + -b \leq |a| + |b|$ $\Rightarrow$  d.h.  $a + b \leq |a| + |b|$  und  $-(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$
- (3) siehe PS

*q.e.d.*

### 1.1.8. Bemerkung Archimedisches Axiom

Für zwei positive Zahlen,  $a, b$  gibt es immer eine natürliche Zahl  $n$ , sodass folgendes gilt:

$$n * b > a$$

Als Folgerung erhalten wir: Setze  $b = 1$

$$\forall a > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n > a$$

### 1.1.9. Satz Bernoullische Ungleichung

Sei  $a > -1$  dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + a)^n \geq 1 + na$

**Beweis:** Übung.

*q.e.d.*

### 1.1.10. Korollar

Sei  $a > 0$ .

- (1) Ist  $a > 1 \forall k > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n > k$ .
- (2)  $0 < a < 1 \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n < \epsilon$

**Beweis:**

- (1)  $a > 1 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} x = a - 1 > 0 \Rightarrow a = x + 1 \Rightarrow a^n = (x + 1)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nx > 1 + k - 1 = k$ , da  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x > 0$  mit  $nx > k - 1$
- (2) Sei  $0 < a < 1$ , sei  $b = \frac{1}{a} > 1$ ,  $\stackrel{\text{mit (1)}}{\Rightarrow} \exists k \in \mathbb{R}$  mit  $b^n > k = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow a^n < \epsilon$ .

*q.e.d.*

### 1.1.3 Vollständigkeitsaxiom

Die Zahlengerade  $\mathbb{R}$  hat keine Lücken.

#### 1.1.11. Definition

Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge.

1.  $k \in \mathbb{R}$  heißt obere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \leq k$ .  $M$  heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt. zB  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt, nach dem Archimedischem Axiom.
2.  $k \in \mathbb{R}$  heißt untere Schranke von  $M$  wenn gilt,  $\forall x \in M, x \geq k$ .  $M$  heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt.
3.  $M$  heißt beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existiert. (äquivalente Definition für Beschränktheit:  $\exists k \in \mathbb{R}, |x| \leq k \forall x \in M$ )
4.  $a \in \mathbb{R}$  heißt Infimum von  $M$ , falls  $a$  größte untere Schranke von  $M$  ist. d.h.  $a$  ist untere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine untere Schranke von  $M$ , dann folgt  $k \leq a$

Schreibweise:  $a = \inf(M)$

5.  $b \in \mathbb{R}$  heißt Supremum von  $M$ , falls  $b$  kleinste obere Schranke von  $M$  ist. d.h.  $b$  ist obere Schranke von  $M$  und ist  $k$  eine obere Schranke von  $M$ , dann folgt  $k \geq b$

Schreibweise:  $b = \sup(M)$

#### 1.1.12. Beispiel

Sei  $a < b$  dann ist  $\inf([a, b]) = a = \inf((a, b))$  und  $\sup([a, b]) = b = \sup((a, b))$ .

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  heißt abgeschlossenes Intervall

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$  heißt offenes Intervall

#### 1.1.13. Bemerkung zur Erinnerung

Definition der natürlichen Zahlen (Axiom des kleinsten Element (Peanoaxiome))  
Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

#### 1.1.14. Satz Vollständigkeitsaxiom

Jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum  $\inf(M) \in \mathbb{R}$ .

ohne Beweis.

q.e.d.

#### 1.1.15. Bemerkung

$\inf(M)$  muss kein Element von  $\mathbb{R}$  sein.

#### 1.1.16. Proposition

Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum  $\sup(M) \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Sei  $M$  nach oben beschränkt. Sei  $-M = \{-x \mid x \in M\}$ . Sei  $a$  eine obere Schranke von  $M$ . d.h.  $\forall x \in M, x \leq a \Rightarrow -a \leq -x \forall x \in M \Rightarrow$  d.h.  $-a$  ist untere Schranke von  $-M$ . d.h.  $-M$  ist nach unten beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom, existiert ein Infimum. Sei  $b = \inf(-M) \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow -b \leq a$  und  $b \leq -x \Rightarrow x \leq -b$ . Also  $-b$  ist obere Schranke und kleinste obere Schranke.  $\Rightarrow -b = \sup(M)$  *q.e.d.*

### 1.1.17. Proposition

$\sup(M)$  und  $\inf(M)$  sind eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Seien  $m$  und  $m'$  Supremum von  $M \Rightarrow m \leq m'$  und  $m' \leq m \Rightarrow m = m'$ .  
analog für Infimum. *q.e.d.*

## 1.2 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind die Punkte der Ebene  $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Wir setzen  $1 = (1, 0), i = (0, 1) \Rightarrow (a, b) = a + ib$   
[grafik R2 mit  $z = (a, b)$  und  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  eingezeichnet]  
zusätzlich verlangen wir  $i^2 = -1$  Also:

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

### 1.2.1. Satz

Es gilt:  $\mathbb{C}$  ist ein Körper.

**Beweis:** nachrechnen. *q.e.d.*

### 1.2.2. Definition

Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , dann heißt  $\bar{z} = a - ib$  die konjugiert komplexe Zahl von  $z$ .  
 $|z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$  heißt Betrag von  $z$   $a = \operatorname{Re}(z)$  heißt Realteil von  $z$   
 $b = \operatorname{Im}(z)$  heißt Imaginärteil von  $z$

### 1.2.3. Satz

Es gilt:  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  und  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

**Beweis:** selber mit grafik. *q.e.d.*

### 1.2.4. Proposition

Es gilt:

- (i)  $\bar{\bar{z}} = z, \bar{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \bar{z_1 * z_2} = \bar{z_1} * \bar{z_2}, |\bar{z}| = |z|$
- (ii)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (iii)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- (iv)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**Beweis:** (i) und (ii) nachrechnen.

(iii)  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = \dots$

(iv) Sei  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Sei  $z = a + ib, a = \operatorname{Re}(z) \Rightarrow |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq$   
 realteil ersetzen nach oben und dann hamma quadrate , mit wurzel ziehen folgt  
 die aussage. *q.e.d.*

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Folgen

#### 2.1.1. Beispiel

Betrachte [Rechtwinkliges Dreieck mit beschriftung 1, 1, und  $\sqrt{2}$ ]  $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ,  
 aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

**Beweis:** indirekter Beweis: Angenommen  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , d.h.  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ . Wir können annehmen, dass p und q nicht beide durch 2 teilbar sind (sonst kürzen wir.) teilerfremd.  $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow \exists m$  mit  $p = 2m$ .  $\Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$  d.h.  $2|q^2 \Rightarrow 2|q$  Also p und q sind beide durch 2 teilbar. Widerspruch zur Annahme, p und q sind teilerfremd.  
 $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  *q.e.d.*

#### 2.1.2. Bemerkung

$\sqrt{2}$  ist die positive Lösung von  $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right)$   
 Betrachte die rechte Seite dieser Gleichung und berechne diese induktiv Setze  
 zB

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

$a_1 = 1, a_2 = \dots = 1, 5a_3 = \dots \approx 1.41a_3 = \dots \approx 1,4142 \dots$

Also  $a_n$  nähert sich mit wachsendem n immer mehr an  $\sqrt{2}$  Dies führt zu dem Begriff **Grenzwert einer Folge**.

#### 2.1.3. Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$   
 Bezeichnung: Wir schreiben für Folgen

- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$
- $(a_n)_{n \geq 0}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $(a_n)$
- $(a_n)_{n \geq n_0}$  für  $n_0 \in \mathbb{N}$

- 2.1.4. Definition**
1. Eine Folge  $(a_n)$  heißt (streng) monoton wachsend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N}_0 \ a_n \leq a_{n+1} (a_n < a_{n+1})$  gilt. Schreibweise:  $(a_n) \nearrow, (a_n) \uparrow$ .
  2. Eine Folge  $(a_n)$  heißt (streng) monoton fallend, wenn  $\forall a \in \mathbb{N} \ a_n \geq a_{n+1} (a_n > a_{n+1})$  gilt. Schreibweise:  $(a_n) \searrow, (a_n) \downarrow$ .
  3. Eine Folge  $(a_n)$  heißt (streng) monoton, sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

- 2.1.5. Beispiel**
1. Die konstante Folge  $a_n := a$  ist monoton fallend und steigend.
  2. Die harmonische Folge  $a_n := \frac{1}{n} \forall n \geq 1$  ist streng monoton fallend.
  3. Die alternierende Folge  $a_n := (-1)^n$  ist nicht monoton.

4. Die geometrische Folge, Sei  $a \in \mathbb{R} a_n := a^n \forall n \geq 0$  ist
 

{	streng monoton wachsend	wenn $a > 1$
	streng monoton fallend	wenn $0 < a < 1$
	monoton fallend und steigend	wenn $a = 1$
	nicht monoton	sonst
5. Die Fibonacci Folge  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \forall n \geq 2$  ist monoton wachsend.

**2.1.6. Definition der Konvergenz**

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$  (Schreibweise.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim a_n = a$  wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq N$  die Ungleichung  $|a_n - a| < \epsilon$  gilt.  $a$  heißt der Grenzwert (Limes) der Folge  $(a_n)$  Die Folge  $(a_n)$  heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

$$\text{Also: } \lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |a_n - a| < \epsilon$$

- 2.1.7. Bemerkung**
1. Sei  $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \ U_\epsilon(a) := (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} | a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$  heißt  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$ .

$$a_n \in U_\epsilon(a) \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < a_n - a < \epsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Also Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Leftrightarrow$  Die Folgenglieder  $a_n$  liegen ab einer Schwelle  $N$  alle in der  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$ .

2.  $(a_n)$  konvergiert nicht gegen  $a \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N |a_n - a| \geq \epsilon$ .

**2.1.8. Beispiel**

- 1) Die harmonische Folge  $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0$  Wähle  $N > \frac{1}{\epsilon} |a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \quad q.e.d.$

- 2) Die alternierende Folge  $a_n = (-1)^n$



**Beweis:** Angenommen  $\exists a \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wähle  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |b_n - a| < \frac{1}{2}$ . Da  $b_{n+1} - b_n = +2$  ist  $\forall n \geq N 2 = |b_{n+1} - b_n| = |b_{n+1} - a - (b_n - a)| \leq |b_{n+1} - a| + |b_n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1$  Widerspruch  $\Rightarrow (b_n)$  ist divergent. q.e.d.

3) Die geometrische Folge  $(a^n)_{n \geq 1}$ . 1. Fall  $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

**Beweis:** Sei  $\epsilon < 0 \xrightarrow{\text{archim}} \exists N \in \mathbb{N} |a|^N < \epsilon \Rightarrow \forall n \geq N : |a^n - 0| = |a|^n \leq |a|^N < \epsilon$  q.e.d.

2. Fall  $a = 1 \Rightarrow a^n = 1 \Rightarrow \lim a^n = 1$  3. Fall  $a = -1 \Rightarrow$  divergent weil alternierend. 4. Fall  $|a| > 1 \forall K > 0 \exists n \in \mathbb{N} |a|^n > K$  d.h.  $(a^n)$  ist unbeschränkt.

### 2.1.9. Definition

Eine Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein  $A \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq A$  ( $a_n \geq A$ ).  $(a_n)$  heißt beschränkt, wenn  $(a_n)$  nach oben oder unten beschränkt ist. d.h.  $\exists K \in \mathbb{R} |a_n| \leq K \forall n \in \mathbb{N}$

### 2.1.10. Satz

Jede konvergente Folge  $(a_n)$  ist beschränkt.

**Beweis:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wähle  $\epsilon = 1 > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1 \forall n \geq N$ . Sei  $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N - 1|, |a| + 1\} \Rightarrow |a_n| < K \forall n \geq 1$  q.e.d.

### 2.1.11. Bemerkung

Die Umkehrung gilt nicht. d.h. eine beschränkte Folge ist nicht konvergent. siehe die alternierende Folge.

### 2.1.12. Satz Monotoniekriterium

(1) Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

(2) Jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Bem: Das Monotonie-Kriterium ist äquivalent zur Vollständigkeit.

**Beweis:** (1) Sei  $(a_n)$  monoton wachsend und nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert  $a := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ . Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow a - \epsilon$  ist keine obere Schranke von  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$ . Da  $(a_n)$  monoton wachsend ist,  $\Rightarrow \forall n \geq N a_N \leq a_n \Rightarrow a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N \Rightarrow \lim a_k = a$ . (2) analog. q.e.d.

### 2.1.13. Satz

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Angenommen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  und  $a \neq b$ .

Sei  $\epsilon = \frac{1}{2} |b - a| \Rightarrow \exists N_1 \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \epsilon$  und  $\Rightarrow \exists N_2 \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \epsilon$ . Sei  $N := \max\{N_1, N_2\}$ .

$\Rightarrow n \geq N : |b-a| = |(b-a_n) + (a_n-a)| \leq |b-a_n| + |a_n-a| = |a_n-b| + |a_n-a| < \frac{1}{2}|b-a| + \frac{1}{2}|b-a| = |b-a| \Rightarrow |b-a| < |b-a|$  Widerspruch  $\Rightarrow a=b$  q.e.d.

#### 2.1.14. Satz Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

1.  $(a_n \pm b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $\lambda(a_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
3.  $(a_n b_n)$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
4. Ist  $(b_n) \neq 0 \forall n \geq n_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$  Dann  $(\frac{a_n}{b_n})$  ist konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ .
5.  $a_n \leq b_n$  dann ist  $\lim a \leq \lim b \forall n \geq n_0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim a_n = 0$  und  $\lim b_n = b$ .

1) Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_2$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \max N_1, N_2$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow \text{beschränkt und } \lim a_n + b_n = a + b. \text{ analog für } -$$

#### 2) Übung

3) Jede konvergente Folge ist beschränkt  $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}$  mit  $|a_n| \leq K$  und  $|b| \leq K$   
 Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K}$  und  $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K} \Rightarrow \forall n \geq \max N_1, N_2$  gilt  $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b + ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = \underbrace{|a_n|}_{\leq K} |b_n - b| + \underbrace{|b|}_{\leq K} |a_n - a| < K \frac{\epsilon}{2K} + K \frac{\epsilon}{2K} = \epsilon$

$$4) \text{ Zeige } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} |b_n| - |b| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| <$$

$$\frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \text{ frallengrern}_0 \text{ Sei } \epsilon > 0 \text{ folgt es gibt } N \text{ frallengrergleich } N |b_n -$$

$$b| < (\epsilon |b|^2)/2 \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \text{auf gleichennenner} = \frac{1}{|b_n|} \frac{1}{|b|} |rest in klammer| \text{ mitepsilon nach voraussetzungen } a$$

5) Sei  $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ . z.z.  $a \leq b$  Angenommen  $a > b$  Sei  $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N_1 |b_n - b| < \epsilon \forall n \geq N_2 \Rightarrow \forall n \geq \max N_1, N_2 b_n < b + \epsilon = b + (a - b)/2 = (2b + a - b)/2 = (b + a)/2 = (2a - a + b)/2 = a - (a - b)/2 = a - \epsilon < a_n \Rightarrow b_n < a_n \forall n \geq \max N_1, N_2$  Widerspruch  $\Rightarrow a \leq b$  q.e.d.

#### 2.1.15. Satz Sandwich-Theorem

Sei  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei konvergente Folgen mit der Eigenschaft, dass  $\lim a_n = \lim b_n = a$ . Sei  $(c_n)$  eine Folge mit der Eigenschaft, dass  $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq n_0$ . Dann ist  $(c_n)$  konvergent und  $\lim c_n = a$ .

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$  frallen  $\Rightarrow N_1 a - \epsilon < b_n < a + \epsilon$  frallen  $\Rightarrow N_2 \Rightarrow$  frallenaussmaxn1, N2 gilt  $a - \epsilon < a_n < c_n < b_n < a + \epsilon$  frallen  $\Rightarrow N \Rightarrow |c_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim c_n = a$  q.e.d.

**2.1.16. Beispiel** 1. Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim a_n = 0$

$$2. a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n} \text{ ist divergent, denn } a_n = (\sqrt{2n} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} = \frac{2n - n}{\sqrt{n}(\sqrt{2} + 1)} = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{2} + 1)}}_{\geq 3} = \frac{n}{3\sqrt{2} - 3} \rightarrow \infty.$$

**2.1.17. Definition**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt bestimmt divergent gegen  $+\infty$  ( $-\infty$ ) wenn gilt:  $\forall K \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N a_n > K$  (bzw.  $a_n < K$ )

Wir schreiben:  $\lim a_n = +\infty$  (bzw.  $-\infty$ )

nach oben unbeschränkt oder nach unten unbeschränkt

**2.1.18. Beispiel** 1. Die Fibonacci Folge ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$

2. Sei  $a_n = n$ , dann folgt  $\lim a_n = \infty$

3. Sei  $\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \lim -a_n = -\infty$

4. Die Folge  $a_n = (-1)^n$  ist divergent aber nicht bestimmt divergent.

5. Sei  $(a_n)$  bestimmt divergent und  $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$ , dann folgt  $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ .

**Beweis:** Sei  $\lim a_n = \infty \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N a_n > \frac{1}{\epsilon} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{a_n} - 0 \right| < \epsilon$ , da  $a_n > 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$  *q.e.d.*

**2.1.19. Definition**

Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen, und  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**2.1.20. Bemerkung**

Ist die Folge  $(a_n)$  konvergent, dann ist auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergent.

**Beweis:** Übung *q.e.d.*

**2.1.21. Definition**

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt (Häufungswert) der Folge  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt die gegen  $a$  konvergiert.

**2.1.22. Bemerkung** 1. Sei  $\lim a_n = a$ , dann ist  $a$  der einzige Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ .

2. Eine bestimmt divergente Folge hat keinen Häufungspunkt.

3. Die Folge  $a_n = (1/n) + (-1)^n$  besitzt die zwei Häufungspunkte  $-1$  und  $+1$ .  
 $\lim a_{2n} = \lim \frac{1}{2n} (-1)^{2n} = \lim \frac{1}{2n} + 1 = 1$  und  $\lim a_{2n+1} = \lim \frac{1}{2n+1} (-1)^{2n+1} = \lim \frac{1}{2n+1} - 1 = -1$

4. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber jede beschränkte Folge muss nicht konvergent sein.

Folgender Satz ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom:

### 2.1.23. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beweis:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist beschränkt, d.h.  $\exists A \in \mathbb{R}$  mit  $-A \leq a_n \leq A \forall n \geq 0$

Sei  $A_k = \{a_m : m \geq k\} \Rightarrow$  jede der Mengen  $A_k$  ist beschränkt.

Mit dem Vollständigkeitsaxiom existiert für jedes  $A_k$  ein Infimum. Sei etwa,  $x_k = \inf(A_k)$

$A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{k-1} \supset A_k \supset \dots \Rightarrow x_k \leq x_{k+1} \forall k \geq 0$

d.h. Die Folge  $(x_k)_{k \geq 0}$  ist monoton wachsend und durch  $A$  nach oben beschränkt.

Nach dem Monotoniekriterium ist die Folge  $(x_k)_{k \geq 0}$  konvergent. Sei etwa der  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$ .

Behauptung:  $z$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

I) Sei  $\epsilon > 0$ , da  $\lim x_k = z \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_k - z| < \frac{\epsilon}{2} \forall k \geq N$  II) Da  $x_k = \inf(A_k) = \inf(\{a_m : m \geq k\}) \Rightarrow \exists a_{k_m}$  mit  $|x_k - a_{k_m}| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |a_{k_m} - z| = |a_{k_m} - x_k + x_k - z| \leq |a_{k_m} - x_k| + |x_k - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Also  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N \exists a_{k_m} \in (a_n) |a_{k_m} - z| < \epsilon$

d.h. die Teilfolge  $(a_{k_m})_{m \geq 0}$  ist konvergent gegen  $z$

Also  $(a_{k_m})$  ist eine konvergente Teilfolge von der beschränkten Folge  $(a_n)$ . *q.e.d.*

### 2.1.24. Bemerkung

Äquivalente Formulierungen: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

### 2.1.25. Definition Cauchy-Folge

Eine Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  heißt CAUCHY-Folge, wenn gilt:  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < \epsilon$

### 2.1.26. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

1. Die Folge  $(a_n)$  ist konvergent
2. Die Folge  $(a_n)$  ist eine Cauchy-Folge

**Beweis:** 1)  $\Rightarrow$  2)

Sei  $\lim a_n = a \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N : \forall m \geq N |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq N |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow a_n$  ist eine Cauchy Folge  
2)  $\Rightarrow$  1)

Jede Cauchy Folge ist beschränkt. Sei  $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < 1 \Rightarrow |a_n - a_N| < 1 \Rightarrow |a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \forall n \geq N \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} \Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \geq 0}$  sei  $\lim a_{n_k} = a$ .

Wir zeigen.  $\lim a_n = a$ .

Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $m$  so groß, dass  $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, m \geq N$  und  $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \forall k \geq N \Rightarrow |a - a_n| = \frac{a - a_{n_k} + a_{n_k} - a_n}{\leq} |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ , da  $n_k \geq n \geq N$  *q.e.d.*

### 2.1.27. Beispiel Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Seien  $a = 0$ ,  $a_0 > 0$  reelle Zahlen. Wir definieren die Folge  $(x_n)$  rekursiv.

$$x_0 = x_0$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Wir zeigen:  $(x_n)$  ist konvergent und  $\lim x_n = x$  und  $x^2 = a$ .

**Beweis:** 1.  $x_n > 0 \forall n \geq 0$   $I A : n = 0 : x_0 > 0$   $n \rightarrow n+1$  Sei  $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n) > 0$ , da alle Teile  $> 0$  sind. (mit unterbrace und overbrace d.h.  $(x_n)$  ist nach unten durch 0 beschränkt.)  
 $\forall n \geq 1$  denn  $x_{n+1}^2 - a = (1/4(x_n + a/x_n)^2 - a = \dots$  ainklammer rein ziehen und ausrechnen...  $= 1/4(x_n^2 - 2a + a^2/x_n^2) = 1/4(x_n - a/x_n)^2 \geq 0$ .  
 $(x_n)$  ist monoton fallend  $x_n - x_{n+1} = x_n - 1/2(x_n + a/x_n) = 1/2(x_n - a/x_n) \geq 0$  weil beides  $\geq 0$  ( $x_n > 0$ )  $\Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$  Nach dem Monotoniekriterium ist  $(x_n)$  konvergent. 4. Sei  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) \Rightarrow 2x = x + a/x \Rightarrow x = a/x \Rightarrow x^2 = a.$  q.e.d.

Die positive Lösung der Gleichung  $x^2 = a$  heißt die Quadratwurzel von  $a$ .  
 Wir schreiben  $x = \sqrt{a}$ .

### 3 Test

zum Formeln raus kopieren  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$   
( $a_n$ )