8.11.2018

Thursday, 8 November 2018 11:02

Satz: (Cauchy-Produkt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir das <u>Cauchy-Produkt</u>:

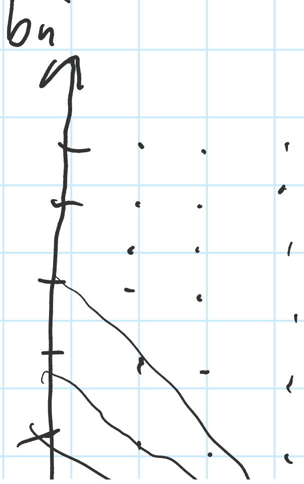
$$\boxed{c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0}$$

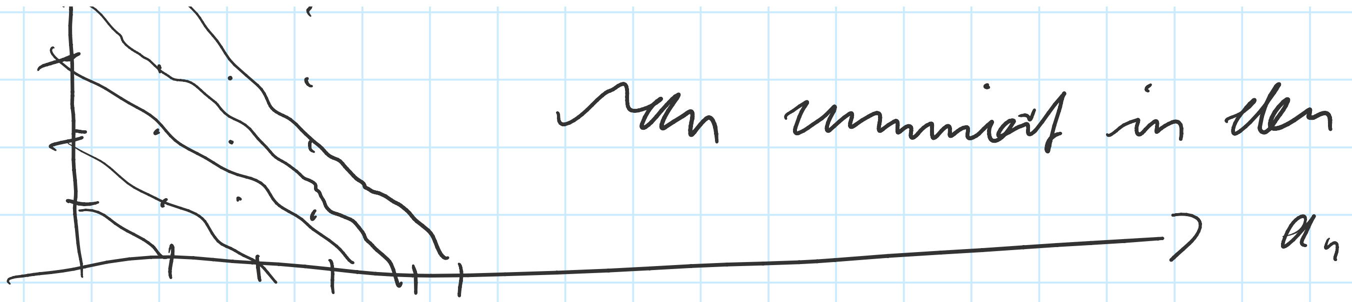
Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beweis: ohne Beweis (siehe z.B.: O. Forster: Analysis I)

Beweisidee:





man summiert in den Diagonale

Korollar: (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Sei $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die Exponentialfunktion

Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp(x) \cdot \exp(y) \\ e^{x+y} &= e^x \cdot e^y \end{aligned}}$$

Beweis: Wir bilden das Cauchy-Produkt der absolut konvergenten Reihen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Dafür verwenden wir den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right]$$

$x^n \quad , \quad y^n$

$a_n = \frac{x^n}{n!}$, $b_n = \frac{y^n}{n!}$

Cauchy-Prod.

$\Rightarrow$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} =$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Satz

$\Rightarrow$ $e^x \cdot e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \overset{\text{bin. Satz}}{=}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = e^{x+y} \qquad \square$$

IV STETIGKEIT

<u>Definition:</u> Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine <u>Funktion</u>

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

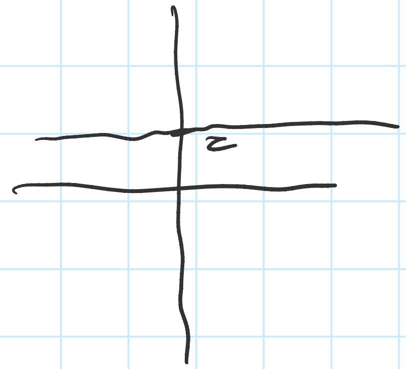
$x \mapsto f(x)$

ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$
genau einen Wert $f(x)$ zuordnet

Beispiele: (1) Sei $c \in \mathbb{R}$

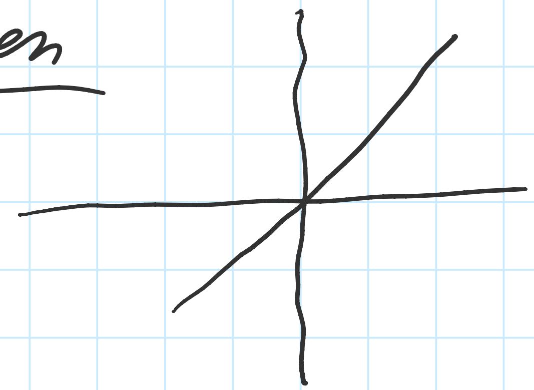
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = c$ konstante Funktion



(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

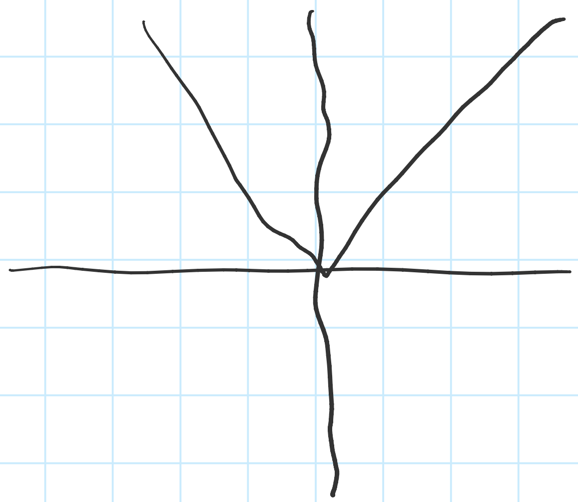
$f(x) = x$ identische Funktion



(3) Betragsfunktion

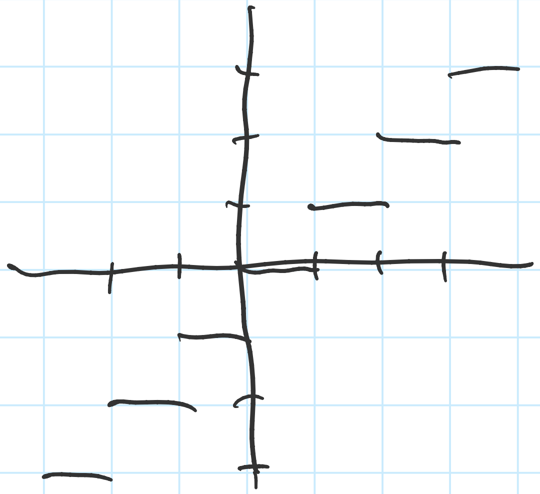
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |x|$



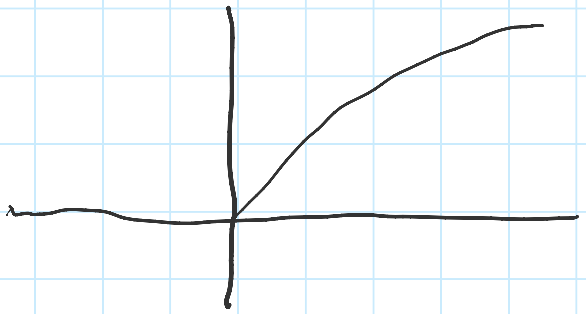
(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$



(5) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

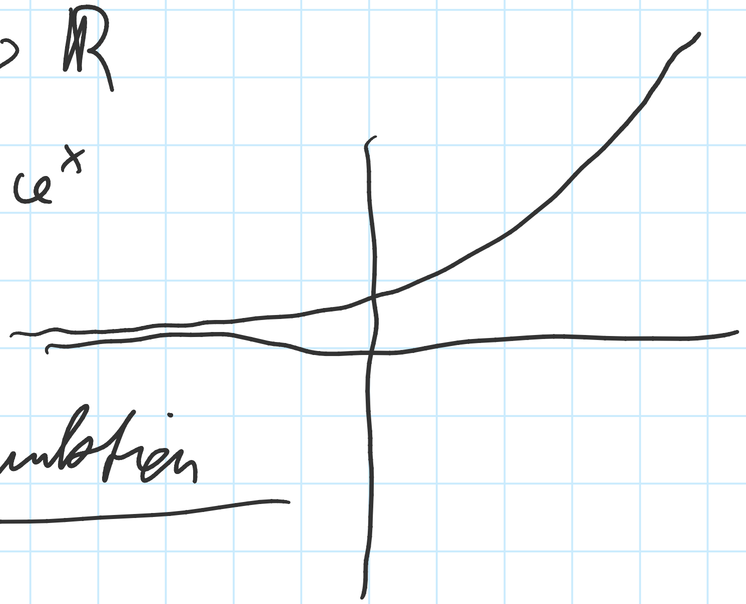
$x \mapsto \sqrt{x}$



Wurzelfunktion

(6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ce^x$



Exponentialfunktion

(7) Polynomfunktion

$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Definition: Seien f und g Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$

Wir definieren $f+g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Sei weiters $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ $\quad (f(D) = \{f(x) : x \in D\})$

$g \circ f : D \to \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & E \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiele: ① $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = +\sqrt{x} \qquad g(x) = x^2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = +\sqrt{x^2} = |x|$$

② $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$

$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$

$r = \frac{p}{q} : D \to \mathbb{R}$

$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ heißt rationale Funktion

Definition: (Grenzwert einer Funktion)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl, sodass es mindestens eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $a_n \in D$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ gibt.

Man definiert

Man definiert

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = c}$$

wenn gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

c heißt der Grenzwert.

<u>**Definition:**</u> (Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$

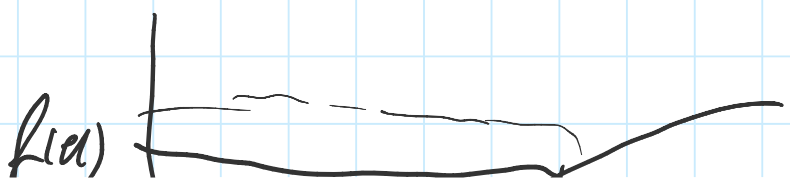
f heißt <u>stetig in a</u>, wenn

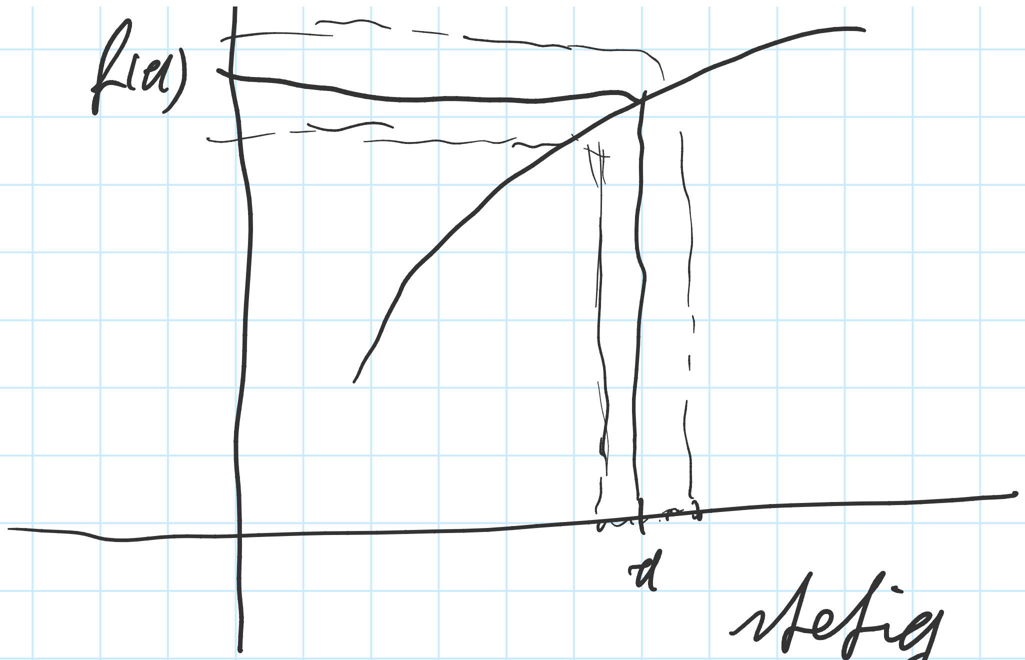
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

d.h.: Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

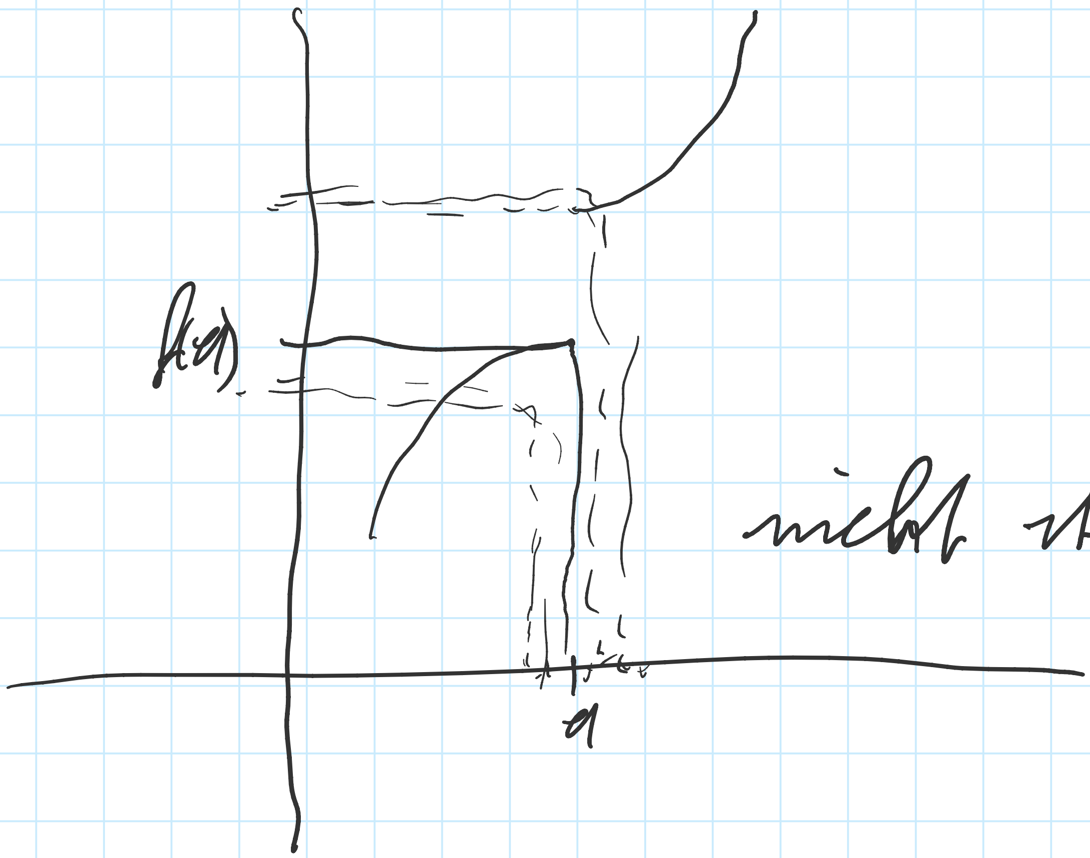
gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

f heißt <u>stetig in D</u>, falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist





stetig



nicht stetig

<u>Bemerkung</u>: f ist in $a \in D$ <u>nicht stetig</u> $\Leftrightarrow$
Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, aber
die Folge $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ist divergent oder
$\lim f(x_n) \neq f(a)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$$

Proposition: (Rechenregeln)

(a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \lambda f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig

Sei $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow \frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ ist stetig

(b) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $g : E \to \mathbb{R}$ stetig

mit $f(D) \subseteq E$

$\Rightarrow g \circ f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig

Beweis: (a) $f+g : D \to \mathbb{R}$

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine beliebige Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

z.z.: $\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = (f+g)(a)$

Aber: $\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n))$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))$

Rechenregeln für Folgen $=$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) \overset{f,g \text{ stetig}}{=} f(a)+g(a) = (f+g)(a)$

Ebenso: $f\cdot g$, λf, $\frac{f}{g}$

(b) Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Da f in a stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

Sei $y_n = f(x_n)$ und $b \in f(a)$. Da $f(D) \subseteq E$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Da g stetig in b ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(b)$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty}(g\circ f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) =$

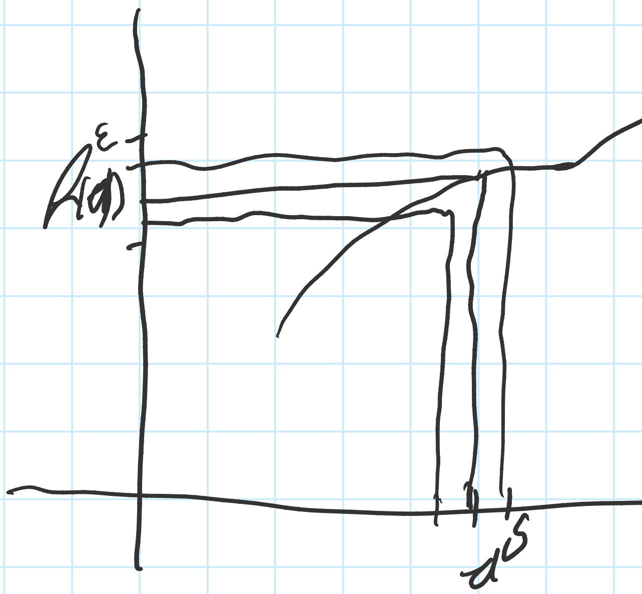
$= g(b) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$ $\square$

$g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ $\square$

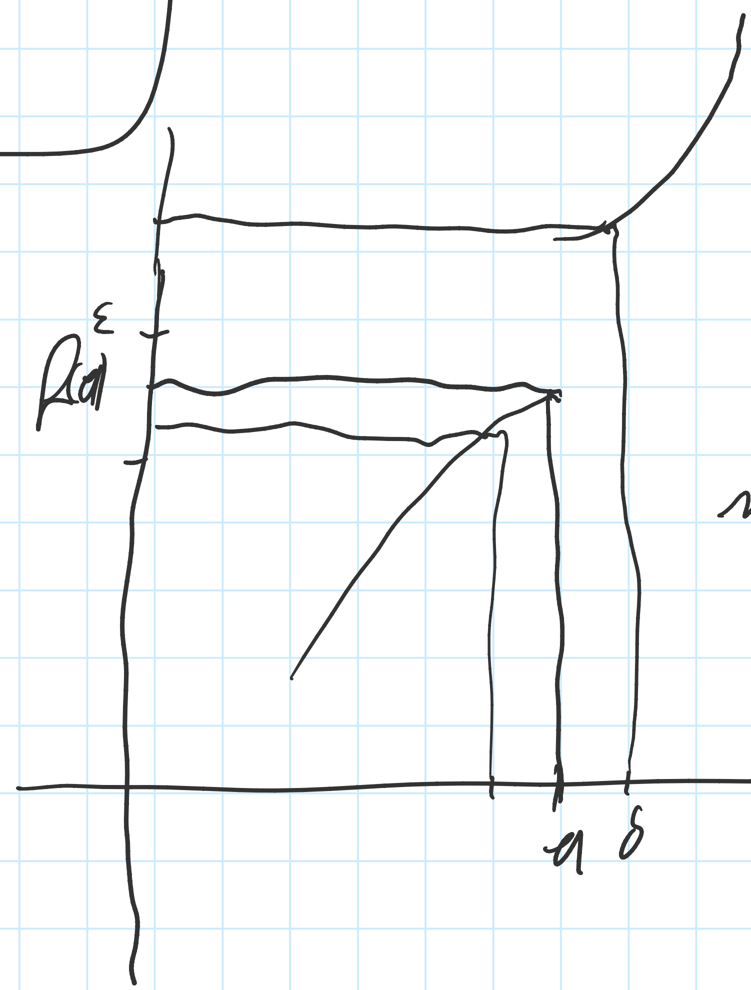
Satz: (ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ist stetig in } a \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta \text{ gilt} \\ \qquad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{array}}$$



stetig



nicht stetig

Beweis: $\Leftarrow$

Sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x \; |x-a| < \delta$

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists\, N = N(\delta) : \forall n \geq N$

$|x_n - a| < \delta$

ε-δ-Krit.

$\Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

"$\Rightarrow$" Sei f in a stetig.

z.z.: ε-δ-Kriterium

Beweis indirekt:

Ang.: ε-δ-Kriterium gilt nicht:

$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x \in D : |x-a| < \delta$

aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

allen $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in D : |x_n - a| < \frac{1}{n} = \delta$

und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$

Betrachte die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Da f stetig in a ist, folgt

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

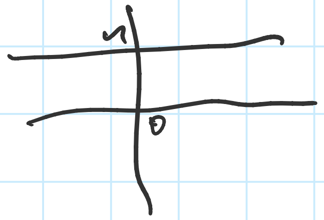
$\lightning$ Widerspruch zu $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\triangleright$

Beispiele:

(1) Die konstante Funktion

$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



ist stetig

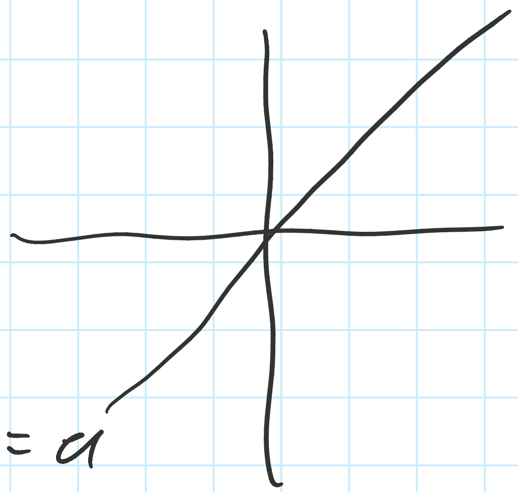
Sei $a \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit

Sei $a \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = f(a)$$

(2) Die identische Funktion



$$f(x) = x$$

ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

Sei $a \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a = f(a)$$

(3) Jede Polynomfunktion

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig

Dies folgt aus den Rechenregeln

(4) Jede rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

ist auf ihrem Definitionsbereich stetig

ist auf ihrem Definitionsbereich stetig
(folgt aus Rechenregeln)

(5) Die Betragsfunktion

$$f(x) = |x|$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig

denn: Für $x > 0$ ist

$|x| = x$ ... identische Funktion

Für $x < 0$ ist

$|x| = -x = (-1)x$ (Rechenregel)

sei $x = 0$ und (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 = |0|$

$\Rightarrow$ stetig $\square$

(6) sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow |f|: D \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow |f| : D \to \mathbb{R}$

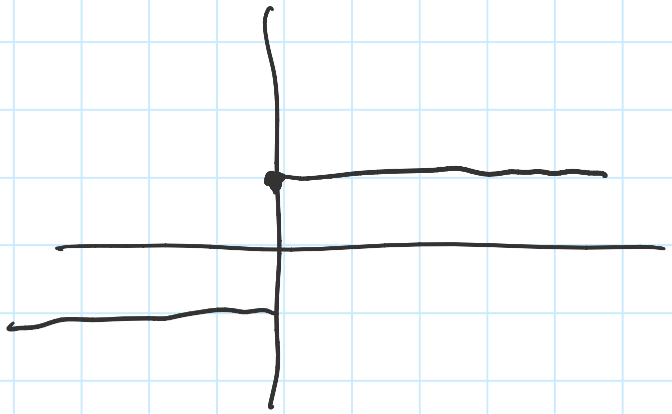
$x \mapsto |f(x)|$

ist stetig

denn: $|f| = |\cdot| \circ f$ ist stetig nach Rechenregel.

(7) sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$$



f ist in $a = 0$ nicht stetig

denn: Sei $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Sei $y_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1) = -1$

$\Rightarrow$ nicht stetig

$\Rightarrow$ nicht stetig

(8) Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis: (a) exp ist in $a=0$ stetig

(i) sei $|x| < 1$

$$\Rightarrow \quad |e^x - 1| \leq 2|x|$$

denn: Es gilt: $(n+1)! \geq 2^n$

da $(n+1)! = \underbrace{\underbrace{(n+1)}_{\geq 2} \cdot \underbrace{n}_{\geq 2} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq 2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2}_{=2}}_{n\text{-mal}} \cdot 1 \geq 2^n \quad \forall n \geq 1$

sei $m \geq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{m} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{m} \frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = |x| \sum_{n=0}^{m} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq |x| \sum_{n=0}^{m} \frac{|x|^n}{2^n}$$

$$= |x| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$$

Daraus folgt

$$|e^x - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{m \to \infty} \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \lim_{m \to \infty} |x| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n =$$

$$= |x| \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{|x|}{2}\right)}_{<1}^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} |x| \frac{1}{1 - \frac{|x|}{2}} = \frac{2|x|}{2 - |x|}$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| < 1 \\ 1 + |x| < 2 \\ 1 < 2 - |x| \end{array}\right]$$

$$\leq 2|x|$$

(ii) Sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |\exp(x_n) - 1| \overset{(i)}{\leq} \lim_{n \to \infty} 2|x_n| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \exp(x_n) = 1 = \exp(0)$$

(b) exp ist in $a \in \mathbb{R}$ stetig

(b) exp ist in $a \in \mathbb{R}$ stetig

Sei $a \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (x_n - a) = 0$

Da exp stetig in 0, folgt

$$\lim_{n \to \infty} \exp(x_n - a) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \exp(x_n) = \lim_{n \to \infty} e^{x_n} = \lim_{n \to \infty} e^{(x_n - a) + a} =$$

Funktionalgleichung

$$= \lim_{n \to \infty} e^{(x_n - a)} \cdot e^{a} = e^{a} \underbrace{\lim_{n \to \infty} e^{(x_n - a)}}_{=1} = e^{a} \cdot 1 = e^{a}$$

$\Rightarrow$ exp ist in $a \in \mathbb{R}$ stetig $\square$