

# 1 ВВЕДЕНИЕ

2 Металлические наноструктуры привлекают к себе большое внимание благодаря своим  
3 уникальным характеристикам, связанным с возможностью возбуждения в них плаз-  
4 монных резонансов на частоте падающего на наночастицу электромагнитного излуче-  
5 ния. Основной интерес к таким плазмонным наноструктурам обусловлен их уникальной  
6 способностью локализовать электромагнитные поля на нанометровых масштабах, су-  
7 щественно меньших дифракционного предела, что позволяет контролировать свойства  
8 света в размерах, намного меньших его длины волны.[A]

9 Благодаря плазмонным резонансам в наноструктурах происходит существенное уве-  
10 личение локальной плотности энергии поля, что приводит к возможности проявления в  
11 них различного рода нелинейных эффектов, включающих многофотонную люминесцен-  
12 цию [], четырехволновое смешивание [], и генерацию гармоник оптического излучения  
13 [вт гарм тр гарм].

14 В частности, явление генерации второй гармоники в наноструктурах, возможность  
15 возникновения которого в ограниченных металлических объектах была впервые обна-  
16 ружена экспериментально и объяснена теоретически в работах [5, 6], является в на-  
17 стоящее время основой для широкого круга практических применений, включающего  
18 диагностику наноструктур [см эксп обзор] и оптических сред [7].

19 Важным фактором, благодаря которому наноструктуры и основанные на них мета-  
20 материалы могут служить эффективным инструментом для генерации второй гармони-  
21 ки, является возможность резонансного усиления поля не только основной гармоники  
22 оптического излучения, но и его второй гармоники при совпадении удвоенной частоты  
23 с собственной частотой другой плазмонной модой наноструктуры.

24 К настоящему моменту явление двойного плазмонного резонанса исследовалось фак-  
25 тически только для наноструктур обеспечивающих одновременное возбуждение двух

26 различных поверхностных плазмонов наночастицы на основной и удвоенной гармониче-  
27 ских падающего излучения.

28 Однако в общем случае в наноструктуре, помимо поверхностных плазмонов могут  
29 существовать и объемные плазмоны  $\omega_p$  — моды коллективных электронных колебаний,  
30 представляющие собой стоячие плазменные (Ленгмюровские) волны и возникающие  
31 из-за пространственной дисперсии (нелокальности поляризуемости плазмы). Объем-  
32 ные плазмоны, как известно, могут сильно проявлять себя в случае, когда источник  
33 возбуждения коллективных электронных колебаний находится внутри наночастицы и  
34 характеризуется неоднородным распределением поля, что, например имеет место в за-  
35 дачах спектроскопии характеристических потерь энергии электронами (англ. Electron  
36 Energy Loss Spectroscopy) при рассеянии пучков заряженных частиц наноструктурами.

37 Подобная ситуация может возникнуть и в задачах генерации второй гармоники,  
38 когда обусловленные нелинейностью токи второй гармоники, возбуждаемые при ре-  
39 зонансе поверхностного плазмона на основной частоте колебаний, могут возбуждать  
40 объемные плазмонные колебания в наночастице. Данный эффект может иметь место,  
41 например, в случае наноструктуры простейшей формы, металлической сферической на-  
42 ночастицы, однако к настоящему моменту двойные плазмонные резонансы типа поверх-  
43 ностный плазмон  $\rightarrow$  объемный плазмон фактически не были исследованы и являются  
44 предметом исследования данной работы.

45 В данной работе на основании гидродинамической модели  $\omega_p$  исследуются нелиней-  
46 ные эффекты, обусловленные возникновением резонансов объемных плазмонов на удво-  
47 енной частоте в условиях, когда частота основной гармоники наночастицы также ис-  
48 пытывает резонанс и совпадает с частотой дипольного поверхностного плазмона нано-  
49 частицы (хорошо известный резонанс Ми). Работа организована следующим образом:  
50 вначале на основе уравнений гидродинамики с использованием метода последователь-

ных приближений сформулированы краевые задачи, описывающие в квазистатическом приближении пространственное распределение поля и плотности заряда на основной и удвоенной гармониках внешнего поля в малой металлической наночастице произвольной формы. Далее описано решение этих задач применительно к случаю сферической наночастицы, и исследованы условия отвечающие условию возбуждения в наночастицах двойных резонансов типа поверхностный плазмон – объемный плазмон. После приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие влияние исследуемых резонансов на частотные зависимости сечения поглощения сферических наночастиц и сформулированы основные результаты работы.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим металлическую наночастицу произвольной формы, находящуюся в заданном внешнем поле падающей электромагнитной волны, и находящуюся в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$ . Как известно, достаточно подробное описание нелинейной динамики носителей в квазиклассическом приближении может быть получено с помощью набора уравнений гидродинамики (уравнение непрерывности и уравнение Эйлера), описывающих электронную плазму как сжимаемую заряженную жидкость [ОБЗ ТЕОР ГД 12–15].

При дальнейшем построении физической модели исследуемых двойных резонансов будем считать выполненными ряд приближений, а именно будем предполагать, что (I) размеры наночастицы малы по сравнению с длиной падающей волны и допустимо квазистатическое приближение для описания поля внутри и вблизи поверхности наночастицы (II) вклад в магнитную составляющую силы Лоренца, действующую на электроны в металле пренебрежимо мал, (III) электроны находятся внутри бесконечно глубокой потенциальной ямы, то есть будем пренебрегать эффектом размывания про-

75 филья электронной плотности близ границы металла (так называемый spill-out effect)  
 76 ||, возникающим при учете давления электронов и (IV) положительный заряд ионного  
 77 остова с равномерной плотностью распределен по объему наночастицы (предполагает-  
 78 ся, что в отсутствие внешнего поля электроны, как и ионы, распределены равномерно  
 79 по объему частицы с плотностью  $N_0$ , а диэлектрическая проницаемость ионного остова  
 80 материала частицы равна  $\varepsilon_\infty$ ):

$$\frac{v_F}{\omega_p} \ll L \ll \frac{2\pi c}{2\omega\sqrt{\varepsilon_{d,\infty}}} \quad v \ll c, \quad (1)$$

81 где  $v_F = \hbar(3\pi^2 N_0)^{1/3}/m$  — скорость Ферми,  $c$  — скорость света,  $e$  и  $m$  — заряд и масса  
 82 электрона,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $L$  — характерный размер частицы,  $\omega$  — частота  
 83 падающего поля,  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0/m$  — плазменная частота.

84 Вместе с условиями применимости гидродинамического подхода указанные выше  
 85 условия несколько сужают область применимости рассматриваемой модели, однако по-  
 86 скольку ранее двойные плазмонные резонансы обсуждаемого здесь типа фактически не  
 87 исследовались, такое упрощение модели представляется оправданным первым шагом  
 88 на пути построения более точной модели. Таким образом, с учетом указанных предпо-  
 89 ложений, нелинейная динамика коллективных электронных колебаний в наночастице  
 90 подчиняется системе уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N\mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

91

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{1}{mN}\nabla p, \quad (3)$$

92 где  $\mathbf{v}$  — скорость электронов,  $N$  — возмущённая концентрация электронов,  $\nu$  — эффектив-  
 93 ная частота соударений электронов,  $\mathbf{f} = N\mathbf{v}$  имеет смысл потока электронов,  $p$  — давле-  
 94 ние электронов. Конкретный вид выражения для последней из перечисленных величин,  
 95 фактически отвечающей за нелокальность поляризационного отклика плазмы, являл-  
 96 ся предметом множества дискуссий и в настоящее время существует широкий спектр

97 моделей, описывающих эту величину применительно к различным условиям. В рамках  
 98 рассматриваемой здесь простой модели мы используем следующее феноменологическое  
 99 уравнение состояния, отвечающее исследуемому здесь случаю быстрого адиабатическо-  
 100 го процесса и позволяющее получить из описанных выше уравнений ( ) известный закон  
 101 дисперсии как для поверхностных, так и для объемных плазмонов:  $p = p_0(N/N_0)^\gamma$ , где  
 102  $p_0 = mv_f^2 N_0/5$ ,  $\gamma = 3$ .

103 Следуя обычной процедуре метода возмущений, применяемого в случае слабой нели-  
 104 нейности, представим в уравнениях неизвестные плотность электронов, скорость и на-  
 105 пряженность поля в виде суммы гармонических слагаемых, изменяющихся на частоте,  
 106 кратной частоте внешнего поля. Далее сопоставляя в получившихся уравнениях вели-  
 107 чины одинакового порядка малости, получаем следующие уравнения, определяющие  
 108 комплексные амплитуды плотности заряда и потенциала поля для основной ( $\omega_1 = \omega$ ,  
 109  $n = 1$ ) и удвоенной ( $\omega_2 = 2\omega$ ,  $n = 2$ ) гармоник.

$$\Delta\rho_n + k_p^2(\omega_n)\rho_n = -\frac{1}{4\pi r_0^2}\Delta\varphi^{ex} + \frac{\omega_n(\omega_n - i\nu)}{\omega_p^2 r_0^2}\rho^{ex} \quad (4)$$

$$\Delta\varphi_n = -\frac{4\pi}{\varepsilon_\infty}\rho_n, \quad n = 1, 2. \quad (5)$$

111 ОБОЗНАЧЕНИЕ R0 ВВЕСТИ Введенные в уравнения обозначения  $\varphi^{ex}$  и  $\rho^{ex}$  играют  
 112 фактически роль расположенных внутри плазмы сторонних источников колебаний. Для  
 113 первой гармоники они, очевидно, тождественно равны нулю и введены только для более  
 114 краткой и единой записи результирующих уравнений. Для колебаний второй гармоники  
 115 выражения для источников определяется выражениями

$$-2i\omega\rho^{ex} = \frac{1}{2}\operatorname{div}\rho_1\mathbf{v}_1, \quad (6)$$

$$\varphi^{ex} = \frac{m}{4e}\left(\frac{v_0^2}{N_0^2}N_1^2 + \mathbf{v}_1^2\right), \quad (7)$$

117 и фактически имеют смысл сторонней осциллирующей плотности заряда, (возникаю-  
 118 щей из-за нелинейного слагаемого в уравнении непрерывности ( )) и потенциала сторон-

119 него поля, определяющего дополнительную силу, действующую на заряды плазмы на  
 120 удвоенной частоте (возникающего из-за нелинейности уравнения состояния ( ) и из-за  
 121 конвективного члена в уравнении ( ) ).

122 Система уравнений ( ) должна быть дополнена граничными условиями на поверхно-  
 123 сти наночастицы. Первые из используемых нами граничных условий, вытекают непо-  
 124 средственно из уравнений Максвелла

$$\varphi_n|_S = \varphi_n^{out}|_S \quad (8)$$

125

$$\varepsilon_\infty \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_n^{out}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S, \quad n = 1, 2, \quad (9)$$

126 и связывают потенциалы электрического поля внутри наночастицы с соответствующи-  
 127 ми потенциалами  $\varphi_{1,2}^{out}$  в окружающем ее однородном диэлектрике, удовлетворяющими  
 128 уравнению ЧЧЧ. Последнее, необходимое для однозначного решения сформулирован-  
 129 ных уравнений, граничное условие определяется характером движения электронов близ  
 130 границы наночастицы. В случае принимаемого здесь условия зеркального отражения  
 131 электронов от поверхности металла соответствующее граничное условие принимает вид,

$$\mathbf{v}_n = -\frac{e}{i(\omega_n - i\nu)m} \nabla \psi_n \quad (10)$$

132

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad \psi_n = \varphi_n + 4\pi r_0^2 \rho_n + \varphi^{ex}, \quad n = 1, 2, \quad (11)$$

133 где  $\psi_{1,2}$  фактически имеют смысл потенциала скорости электронов на основной и удво-  
 134 енной гармониках колебаний.

135 Сформулированная система уравнений ( ), как и в других подобных работах, по-  
 136 священных исследованию генерации второй гармоники в условиях двойных резонан-  
 137 сов, позволяет рассчитать структуру колебаний [ ]. Новым основным новым элементом  
 138 здесь является здесь учет нелокальности поляризации плазмы не только для основ-  
 139 ной, но и для удвоенной гармоники, что позволяет описать возникновение резонансов

объемных плазмонов на этой частоте. Как известно, поле объемных плазмонов сильно локализовано внутри наночастицы и соответствующие им резонансы обычно слабо проявляются в спектрах рассеянного излучения, однако как будет показано далее, возбуждение объемных плазмонов на удвоенной частоте может приводить к заметному изменению поглощаемой наночастицей мощности. Расчет спектров поглощения в рамках рассматриваемой модели может быть выполнен следующим образом. Потери энергии обусловлены наличием в уравнении (1.2) диссипативной силы, с плотностью  $\mu = m\nu\mathbf{f}$ . Средняя за период плотность мощности этой силы очевидным образом может быть выражена через комплексные амплитуды плотностей потока и скоростей первой и второй гармоник. Интегрируя по объему наночастицы  $V$  с учетом соотношений ( ) и граничного условия ( ), приходим к следующему выражению для средней за период мощности потерь во всем объеме наночастицы:

$$Q = \frac{\nu}{2} Re \iiint \left( \frac{\omega}{i(\omega - i\nu)} \rho_1 \psi_1^* + \frac{2\omega}{i(2\omega - i\nu)} \rho_2 \psi_2^* \right) dV. \quad (12)$$

## 2 СФЕРИЧЕСКАЯ НАНОЧАСТИЦА

Применительно к сферической наночастице радиуса  $a$ , помещенной в однородную среду с проницаемостью  $\varepsilon_d$  решение линейной задачи, описывающей колебания на частоте внешнего поля хорошо известно (см. например [ ]), и выражается через сферические функции Бесселя  $j_n$ ). Как можно показать, выражения для потенциала и плотности заряда в этом случае имеют следующий вид

$$C = \frac{-3\varepsilon_d E_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_d[1 + (\varepsilon/\varepsilon_\infty - 1)G_1]}, \quad (13)$$

$$\rho_{01} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} k_{p1} \frac{C}{j_1'(\varkappa_1)}, \quad (14)$$

$$\rho_1 = C \frac{-k_{p1}^2 a \omega_p^2}{4\pi\omega(\omega - i\nu)} \frac{j_1(k_{p1}r)}{\varkappa_1 j_1'(\varkappa_1)} \cos \theta, \quad \varphi_1 = Cr + \frac{4\pi\rho_1}{\varkappa_1^2 \varepsilon_\infty}, \quad (15)$$

УБРАТЬ ОТДЕЛЬНУЮ КАППА? где  $a$  — радиус сферы,  $\theta$  и  $r$  — полярный угол  
и радиус,  $G_1 = j_1(\kappa_1)/\kappa_1 j_1'(\kappa_1)$ ,  $\kappa_1 = k_p(\omega)a$ ,  $k_{p1,2} = \sqrt{[\omega_{1,2}(\omega_{1,2} - i\nu) - \omega_p^2/\varepsilon_\infty]/v_0^2}$ ,  
 $\varepsilon = \varepsilon_\infty - \omega_p^2/\omega(\omega - i\nu)$ . Последнее из перечисленных величин имеет смысл диэлек-  
трической проницаемости металла в отсутствие нелокальности. Положение наиболее  
сильного из них, дипольного поверхностного плазмона (резонанс Ми), без учета про-  
странственной дисперсии, зависит от диэлектрической проницаемости внешней среды,  
определяется выражением  $\varepsilon + 2\varepsilon_d \approx 0$ , и частота генерируемой в наночастице второй  
гармоники колебаний может лежать в области частот отвечающей возможности воз-  
буждения объемных плазмонов. Значения их резонансных частот определяются общим  
дисперсионным уравнением:

$$m\varepsilon + \varepsilon_d(m+1)(1 + m(\varepsilon/\varepsilon_\infty - 1)G_m) = 0, \quad (16)$$

ПОСМОТРЕТЬ ИНДЕКС G. ПРИ M=0,2 ИНДЕКС КАППА НЕ РАВЕН 0,2 ( $m$  — по-  
мер мультиполя), которое может быть также получено из решения однородной краевой  
задачи () в отсутствие внешнего поля. В интересующем нас случае слабой простран-  
ственной дисперсии  $r_0 \ll a$  значения резонансных частот слабо зависят от параметров  
окружающей среды и приближенно могут быть найдены из соотношения  $\kappa_1 \approx \eta_{m+1}^k$ ,  
где  $\eta_{m+1}^k$   $k$ -й корень сферической функции Бесселя порядка  $m+1$ . Из всех возмож-  
ных условий двойных резонансов здесь представляет интерес рассмотрение случая с  
 $m=0$  и  $m=2$  (монопольные и квадрупольные объемные резонансы соответственно), по-  
скольку в случае сферической наночастицы, как можно увидеть из соотношений () (),  
источники поля второй гармоники могут возбуждать только колебания монопольного  
и квадрупольного типов.

На рисунке () проиллюстрированы положения частот резонансов от диэлектриче-  
ской проницаемости, при типичных для металлических наночастиц значениях пара-  
метров  $\mu$ ,  $V_f$ ,  $W_p$  ==. ПРО ВОЗМОЖНОЕ ЧИСЛО ДВОЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ И



## 184 УСЛОВИЯ ДЛЯ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ (ПРО НЮ)

185 На основании решения краевых задач для трех мультипольных составляющих по-  
186 тенциала и плотности заряда полная средняя за период мощность потерь может быть  
187 рассчитана как  $Q = Q_{dip} + Q_{mono} + Q_{quad}$ , где содержит вклады от дипольных колебаний  
188 на основной частоте ( $Q_d$ ) и монопольных и квадрупольных колебаний на удвоенной ча-  
189 стоте внешнего поля ( $Q_{mono}$ ,  $m = 0$  и  $Q_{quad}$ ,  $m = 2$  соответственно). Более подробное  
190 описание расчета мощности потерь описано в приложении. Помимо этого, для диполь-  
191 ных плазмонов необходимо учесть дополнительные потери, обусловленные поверхност-  
192 ными потерями. Для этого эффективную частоту соударений электронов дипольных  
193 плазмонов можно представить в виде  $\nu_{dip} = \nu + 3/4 v_f / a / \omega_p$  [].

194 На рисунке () представлены зависимости мощности потерь от частоты при различ-  
195 ных значениях проницаемостей  $\epsilon_{Inf}$  и  $\epsilon_D$ . Сплошной линией указана полная мощ-  
196 ность потерь, dot – вклад в потери от дипольных колебаний, пунктир и пунктир с  
197 точкой вклад от монопольных и квадрупольных колебаний соответственно.

198 Из приведенных графиков видно, что дополнительные резонансы не проявляются в  
199 виде отдельных пиков на фоне основных потерь энергии, однако из-за этого увеличи-  
200 вается суммарная мощность потерь. Стоит отметить влияние монопольных резонансов,  
201 которые не проявляются в лазерной спектроскопии, так как потенциал монопольных ко-  
202 лебаний не выходит за границы частицы, а также не возбуждаются однородным полем.  
203 Так же, в некоторых случаях происходит уширение линии потерь. При этом чем ближе  
204 резонансная частота находится к удвоенной частоте первой гармоники, тем больший  
205 вклад в потери вносит тот или иной тип колебаний.

206 Чтобы показать, насколько восприимчивы двойные резонансы к параметрам внеш-  
207 ней среды можно построить зависимость максимального значения потерь от диэлектри-  
208 ческой проницаемости внешней среды. На рисунке () представлены результаты расчетов

209 для сферической наночастицы натрия . . . . . Sodium cluster and field params

210 В практических задачах чаще сталкиваются с наночастицами покрытыми слоем  
211 диэлектрика, а не находящимися в сплошной среде, как представлено в данной работе.  
212 Однако, модифицируя уравнения ( ) – ( ), можно получить следующее дисперсионное  
213 уравнение для наночастицы в слое диэлектрика толщиной  $b$ :

$$\varepsilon + \varepsilon_d \frac{m+1}{m} \frac{1 - K_m}{1 + (m+1)K_m/m} = 0, \quad K_m = \left(\frac{a}{b}\right)^{2m+1} \frac{\varepsilon_d - 1}{\varepsilon_d + (m+1)/m} \quad (17)$$

## 214 3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

215 В работе продемонстрировано, что в сферических металлических наноструктурах воз-  
216 можно возбуждение двойных плазмонных резонансов, включающих поверхностные плаз-  
217 моны на основной частоте и объемные плазмоны на удвоенной частоте. Это явление  
218 обусловлено нелинейными эффектами, которые усиливаются благодаря резонансным  
219 условиям. Результаты показывают, что такие резонансы приводят к увеличению об-  
220 щей мощности поглощения энергии наночастицей, а также могут влиять на уширение  
221 спектральных линий. Интерес так же представляет возбуждение монополярных колеба-  
222 ний, которые обычно слабо проявляются. С практической стороны, благодаря эффекту  
223 двойного резонанса и высокой чувствительности к параметрам внешней среды наноча-  
224 стицы могут служить источниками излучения для нужд диагностики оптических сред  
225 и спектроскопии.

## 226 4 ПРИЛОЖЕНИЕ

227 Для второй гармоники, в случае сферической наночастицы, можно получить вид функ-  
228 ций для сторонних источников:

$$\varphi^{ex} = \frac{e}{4\pi\omega_p^2} [(4\pi)^2 r_0^2 \rho_1^2 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\nu)^2} (\nabla\psi_1)^2], \quad (18)$$

$$\rho^{ex} = \frac{e}{4m\omega(\omega - i\nu)} (-4\pi\rho_1^2 \frac{w(\omega - i\nu)}{\omega_p^2} + \nabla\psi_1 \nabla\rho_1). \quad (19)$$

Поскольку выражения для потенциала и электронной плотности на первой гармонике известно ( ), можно заметить что сторонние источники ( ) состоят из суммы слагаемых пропорциональных квадратам косинуса и синуса. Значит, для дальнейшего решения этой задачи методом разделения переменных, можно представить правую часть уравнения ( ) (сторонние источники) в виде произведений некоторых радиальных функций на полиномы Лежандра  $P_m$ :

$$\varphi^{ex} = F_0^\varphi(r)P_0(\cos\theta) + F_2^\varphi(r)P_2(\cos\theta), \quad (20)$$

$$\rho^{ex} = F_0^\rho(r)P_0(\cos\theta) + F_2^\rho(r)P_2(\cos\theta), \quad (21)$$

где  $F_{0,2}^{\varphi,\rho}(r)$  радиальные функции при соответствующих полиномах Лежандра. Представление сторонних источников в виде ( ), явно показывает наличие монопольных ( $P_0$ ) и квадрупольных ( $P_2$ ) источников. А значит и искомые функции  $\varphi_2$  и  $\rho_2$  можно представлять в аналогичном виде:

$$\varphi_2 = R_0(r)P_0(\cos\theta) + R_2(r)P_2(\cos\theta), \quad (22)$$

$$\rho_2 = \Phi_0(r)P_0(\cos\theta) + \Phi_2(r)P_2(\cos\theta), \quad (23)$$

где  $R_{0,2}$ ,  $\Phi_{0,2}$  неизвестные радиальные функции. Тогда от системы уравнений ( ) переходим к следующей (для  $m = 0, 2$ ):

$$(\hat{L}_m + \varkappa_p^2)R_m = -\frac{1}{4\pi r_0^2} \hat{L}_m F_m^\varphi + \frac{2\omega(2\omega - i\nu)}{\omega_p^2 r_0^2} F_m^\rho, \quad (24)$$

$$\hat{L}_m \Phi_m = -\frac{4\pi}{\varepsilon_\infty} R_m, \quad \hat{L}_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m(m+1)}{r^2}. \quad (25)$$

Дополняя уравнения ( ) граничными условиями аналогично ( ), можно решать образовавшуюся систему уравнений относительно радиальных функций  $(R_{0,2}, \Phi_{0,2})$  различными методами решения дифференциальных уравнений. В данной работе система решалась численными методами, с помощью метода Галеркина и метода матричной прогонки. Мощность потерь можно рассчитать по найденным радиальным функциям следующим образом:

$$Q_m = \frac{2\pi\nu}{2m+1} \operatorname{Re} \frac{2\omega}{i(2\omega - i\nu)} \int_0^a R_m (\Phi_m + 4\pi r_0^2 R_m + F_m^\varphi)^* r^2 dr, \quad m = 0, 2. \quad (26)$$

Введённых обозначениях,  $Q_{mono} \equiv Q_0$  и  $Q_{quad} \equiv Q_2$  мощности потерь монопольной и квадрупольной составляющей второй гармоники соответственно.

## 5 ЛИТЕРАТУРА

Ссылки на список литературы в тексте приводятся в квадратных скобках [3, 5–9]. Нумерация должна соответствовать порядку упоминания источников в тексте. Каждый пункт в списке литературы должен содержать только один источник. Не допускается указывать в одном пункте списка несколько статей (в том числе несколько самостоятельных частей одной статьи). Ссылки на конкретную страницу, раздел, формулу в цитируемом источнике даются следующим образом: [1, с. 5], [1, раздел 2], [1, формула (4)].

Образцы ссылок на типовые источники (статьи в журналах, книги и т. д.) приведены ниже, в разделе «Список литературы». Общие принципы построения ссылок следующие:

— для статей в периодических изданиях и сборниках обязательно следует указывать DOI (при наличии);

— если авторов (редакторов) в цитируемом источнике четверо или менее, то указываются все. Если их пятеро или более, то указываются первые трое и дописывается «и др.» / «, et al.».

## 6 РИСУНКИ И ТАБЛИЦЫ

Статья может содержать рисунки и таблицы. Их следует размещать на отдельных страницах в конце документа.

Если рисунок представляет собой какой-либо график, диаграмму и т. д., то его желательно предоставить в векторном формате (eps, pdf и т. п.), воспользовавшись соответствующими опциями экспорта из используемой математической или лабораторной программной среды. При невозможности предоставить рисунок в векторном формате принимается и растровый вариант (png, bmp и т. п.), с которого желательно убрать координатную сетку.

Если рисунок представляет собой фотографию установки, образца и т. п., то его нужно предоставить в растровом формате.

Ширина рисунков должна быть равна 80 или 160 мм. Разрешение растровых рисунков должно быть не хуже 300 точек на дюйм (300 dpi). К печати принимаются цветные рисунки.

При наборе таблиц величины одной размерности следует располагать в столбцах, а не в строках (если позволяет размер таблицы).

Физические величины в названиях осей и шкал на графиках, а также в столбцах таблиц следует обозначать буквами (как в формулах): например, вместо «скорость (м/с)» следует писать « $V$ , м/с».

## 286 7 БЛАГОДАРНОСТИ

287 Абзац с благодарностями размещается после основного текста (после заключения или  
288 выводов):

289 Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 24-02-00000),  
290 Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых россий-  
291 ских учёных и по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект МК-  
292 0000.2024.1.2), Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государствен-  
293 ного задания ИПФ РАН (проект FFUF-2024-0000).

## 294 ПРИЛОЖЕНИЕ

295 Статья может включать одно или несколько приложений, которые размещаются меж-  
296 ду абзацем с благодарностями и списком литературы. Если приложение одно, то оно  
297 именуется «ПРИЛОЖЕНИЕ». Нумерация формул в нём отдельная: (П1), (П2), (П3).  
298 Если приложений два или более, то они именуются «ПРИЛОЖЕНИЕ 1», «ПРИЛО-  
299 ЖЕНИЕ 2» и т. д. В каждом таком приложении нумерация формул отдельная: (П1.1),  
300 (П1.2), (П1.3) в приложении 1, (П2.1), (П2.2), (П2.3) в приложении 2 и так далее. В до-  
301 полнение к слову «ПРИЛОЖЕНИЕ» названия приложений могут включать также со-  
302 ответствующие смысловые заголовки (как у обычных разделов).

## 303 Список литературы

304 [1] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Изд. 2-е, пере-  
305 раб. М. : Наука, 1967. 684 с. [\[ссылка на монографию; издание указывается при](#)  
306 [необходимости; указывается общее число страниц\]](#)

- 307 [2] Плазменная гелиогеофизика. В 2 т. Т. 2 / под ред. Л. М. Зеленого, И. С. Веселовско-  
308 го. М. : Физматлит, 2008. 560 с. [\[ссылка на коллективную монографию; указывается](#)  
309 [общее число страниц\]](#)
- 310 [3] Шкляр Д. Р. // Плазменная гелиогеофизика. В 2 т. Т. 2 / под ред. Л. М. Зеленого,  
311 И. С. Веселовского. М. : Физматлит, 2008. С. 390–553. [\[ссылка на отдельную статью](#)  
312 [в коллективной монографии; название статьи опускается; указывается соответству-](#)  
313 [ющий диапазон страниц; DOI статьи при наличии указывается обязательно\]](#)
- 314 [4] Balanis C. A. Advanced engineering electromagnetics. 2nd ed. Hoboken : Wiley, 2012.  
315 1040 p. [\[ссылка на англоязычную монографию; издание указывается при необходи-](#)  
316 [мости; указывается общее число страниц\]](#)
- 317 [5] The THEMIS mission / ed. by J. L. Burch, V. Angelopoulos. New York : Springer-Verlag,  
318 2009. 587 p. [\[ссылка на англоязычную коллективную монографию; указывается](#)  
319 [общее число страниц\]](#)
- 320 [6] Harvey P., Taylor E., Sterling R., Cully M. // The THEMIS mission / ed. by J. L. Burch,  
321 V. Angelopoulos. New York : Springer-Verlag, 2009. P. 117–152. doi: 10.1007/s11214-  
322 008-9416-2 [\[ссылка на отдельную статью в англоязычной коллективной моногра-](#)  
323 [фии; название статьи опускается; указывается соответствующий диапазон страниц;](#)  
324 [DOI статьи при наличии указывается обязательно\]](#)
- 325 [7] Бабин А. А., Киселев А. М., Правденко К. И. и др. // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169,  
326 № 1. С. 80–84. doi: 10.3367/UFNr.0169.1999011.0080 [\[ссылка на статью в журнале;](#)  
327 [название статьи опускается; название журнала приводится в сокращённом виде;](#)  
328 [указывается соответствующий диапазон страниц; DOI статьи при наличии указы-](#)  
329 [вается обязательно\]](#)

- 330 [8] Balmain K.G. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1964. V. 12, No. 5. P. 605–617. doi:  
331 10.1109/TAP.1964.1138278 [ссылка на статью в англоязычном журнале; название  
332 статьи опускается; название журнала приводится в сокращённом виде; указыва-  
333 ется соответствующий диапазон страниц; DOI статьи при наличии указывается  
334 обязательно]
- 335 [9] Myers D. J., Espenlaub A. C., Gelzinyte K., et al. // Appl. Phys. Lett. 2020. V. 116,  
336 No. 9. Art. no. 091102. doi: 10.1063/1.5125605 [ссылка на статью в англоязычном  
337 журнале, где вместо нумерации страниц используется нумерация статей; название  
338 статьи опускается; название журнала приводится в сокращённом виде; DOI статьи  
339 при наличии указывается обязательно]
- 340 [10] Шарыкин И. Н., Зимовец И. В. // 14-я ежегодная конференция «Физика плазмы  
341 в Солнечной системе». 11–15 февраля 2019 г., Москва, Россия. С. 72. [ссылка на  
342 статью в сборнике материалов конференции; название статьи опускается; указы-  
343 ваются дата и место проведения; указывается соответствующий диапазон страниц;  
344 DOI статьи при наличии указывается обязательно]
- 345 [11] Macotela E. L., Clilverd M., Manninen J. // VERSIM 2018 Workshop. Abstracts. 19–  
346 23 March 2018, Apatity, Russia. P. 3. [ссылка на статью в англоязычном сборнике  
347 материалов конференции; название статьи опускается; указываются дата и место  
348 проведения; указывается соответствующий диапазон страниц; DOI статьи при на-  
349 личии указывается обязательно]
- 350 [12] Баханов В. В., Демакова А. А., Зуйкова Э. М. Определение спектров короткомас-  
351 штабных ветровых волн оптическим методом : препринт № 814. Нижний Новгород :  
352 Ин-т прикладной физики РАН, 2017. 8 с. [ссылка на препринт; указывается общее  
353 число страниц]



- [13] Poggio A. J., Adams R. W. Approximations for terms related to the kernel in thin-wire integral equations : techn. rep. AFWL-TR-76-98. Livermore : Lawrence Livermore Laboratory, 1977. 44 p. [\[ссылка на англоязычный технический отчёт; указывается общее число страниц\]](#)
- [14] Beasley M. A. <https://arxiv.org/abs/2003.04093> [\[ссылка на препринт в arXiv\]](#)
- [15] Зотова И. В. Генерация, усиление и нелинейная трансформация импульсов сверхизлучения релятивистскими электронными пучками и сгустками : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2014. 291 с. [\[ссылка на диссертацию; указывается общее число страниц\]](#)
- [16] Манаков С. А. Экспериментальные исследования структурно-неоднородных сред методами когерентной акустики : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2016. 24 с. [\[ссылка на автореферат диссертации; указывается общее число страниц\]](#)
- [17] Manninen J. Some aspects of ELF-VLF emissions in geophysical research : PhD thesis. Oulu, 2005. 194 p. [\[ссылка на англоязычную диссертацию; указывается общее число страниц\]](#)
- [18] <https://radiophysics.unn.ru/> [\[ссылка на интернет-ресурс\]](#)
- [19] Пат. 2637215 РФ, МПК В02С 19/16 (2006.01), В02С 17/00 (2006.01). Вибрационная мельница : № 2017105030 : заявл. 15.02.2017 : опубл. 01.12.2017 / Артеменко К. И., Богданов Н. Э. ; заявитель БГТУ. 8 с. [\[ссылка на патент РФ; индексы МПК/МКИ указываются при наличии; заявитель указывается при необходимости; указывается общее число страниц\]](#)

376 [20] Пат. 6147647 США, МПК H01Q 1/38. Circularly polarized dielectric resonator  
377 antenna : № 09/150157 : заявл. 09.09.1998 : опубл. 14.11.2000 / Tassoudji M.A.,  
378 Ozaki E. T., Lin Y. C. 14 с. [ссылка на патент США; индексы МПК/МКИ указыва-  
379 ются при наличии; заявитель указывается при необходимости; указывается общее  
380 число страниц]

381 [21] Авт. свид. 1007970 СССР, МКИ В25J 15/00. Устройство для захвата неориентиро-  
382 ванных деталей типа валов : № 3360585/25-08 : заявл. 23.11.1981 : опубл. 30.03.1983 /  
383 Баулин В. С., Кемайкин В. Г. 2 с. [ссылка на авторское свидетельство; индексы  
384 МПК/МКИ указываются при наличии; указывается общее число страниц]

385 [22] ГОСТ Р 51771-2001. Аппаратура радиоэлектронная бытовая. Входные и выходные  
386 параметры и типы соединений. Технические требования. М. : Госстандарт России,  
387 2001. 31 с. [ссылка на стандарт; указывается общее число страниц]

388 [23] ISO 26324:2012. Information and documentation. Digital object identifier system.  
389 Geneva : ISO, 2012. 24 р. [ссылка на англоязычный стандарт; указывается общее  
390 число страниц]