

1 ВВЕДЕНИЕ

2 «Прелюдия»

3 Металлические наноструктуры привлекают к себе большое внимание благодаря сво-
4 им уникальным характеристикам, связанным с возможностью возбуждения в них плаз-
5 монных резонансов на частоте падающего на наночастицу электромагнитного излуче-
6 ния. Основной интерес к таким плазмонным наноструктурам обусловлен их уникальной
7 способностью локализовать электромагнитные поля на нанометровых масштабах, су-
8 щественно меньших дифракционного предела, что позволяет контролировать свойства
9 света в размерах, намного меньших его длины волны [1, 2]. Благодаря плазмонным ре-
10 зонансам в наноструктурах происходит существенное увеличение локальной плотности
11 энергии поля, что приводит к возможности проявления в них различного рода нелиней-
12 ных эффектов, включающих многофотонную люминесценцию [3–6], четырехволновое
13 смешивание [7, 8, 10, 11], и генерацию гармоник оптического излучения [12–14]. В част-
14 ности, явление генерации второй гармоники в наноструктурах, возможность возник-
15 новения которого в ограниченных металлических объектах была впервые обнаружена
16 экспериментально и объяснена теоретически в работах [15, 16], является в настоящее
17 время основой для широкого круга практических применений, включающего диагно-
18 стику наноструктур [17] и оптических сред [18]. Важным фактором, благодаря которо-
19 му наноструктуры и основанные на них метаматериалы могут служить эффективным
20 инструментом для генерации второй гармоники, является возможность резонансного
21 усиления поля не только основной гармоники оптического излучения, но и его второй
22 гармоники при совпадении удвоенной частоты с собственной частотой другой плазмон-
23 ной модой наноструктуры.

24 К настоящему моменту явление двойного плазмонного резонанса исследовалось фак-
25 тически только для наноструктур обеспечивающих одновременное возбуждение двух

различных поверхностных плазмонов наночастицы на основной и удвоенной гармониках падающего излучения. Однако в общем случае в наноструктуре, помимо поверхностных плазмонов могут существовать и объемные плазмоны [19–22] – моды коллективных электронных колебаний, представляющие собой стоячие плазменные (Ленгмюровские) волны и возникающие из-за пространственной дисперсии (нелокальности поляризуемости плазмы). Объемные плазмоны, как известно, могут сильно проявлять себя в случае, когда источник возбуждения коллективных электронных колебаний находится внутри наночастицы и характеризуется неоднородным распределением поля, что, например, имеет место в задачах спектроскопии характеристических потерь энергии электронами (англ. Electron Energy Loss Spectroscopy) при рассеянии пучков заряженных частиц наноструктурами [21, 23]. Подобная ситуация может возникнуть и в задачах генерации второй гармоники, когда обусловленные нелинейностью токи второй гармоники, возбуждаемые при резонансе поверхностного плазмона на основной частоте колебаний, могут возбуждать объемные плазмонные колебания в наночастице. Данный эффект может иметь место, например, в случае наноструктуры простейшей формы, металлической сферической наночастицы, однако к настоящему моменту двойные плазмонные резонансы типа поверхностный плазмон – объемный плазмон фактически не были исследованы и являются предметом исследования данной работы.

В данной работе на основании гидродинамической модели [24–26] исследуются нелинейные эффекты, обусловленные возникновением резонансов объемных плазмонов на удвоенной частоте в условиях, когда частота основной гармоники наночастицы также испытывает резонанс и совпадает с частотой дипольного поверхностного плазмона наночастицы (хорошо известный резонанс Ми). Работа организована следующим образом: вначале на основе уравнений гидродинамики с использованием метода последовательных приближений сформулированы краевые задачи, описывающие в квазистатическом

приближении пространственное распределение поля и плотности заряда на основной и удвоенной гармониках внешнего поля в малой металлической наночастице произвольной формы. Далее описано решение этих задач применительно к случаю сферической наночастицы, и исследованы условия отвечающие условию возбуждения в наночастицах двойных резонансов типа поверхностный плазмон – объемный плазмон. После приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие влияние исследуемых резонансов на частотные зависимости сечения поглощения сферических наночастиц и сформулированы основные результаты работы.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим металлическую наночастицу произвольной формы, находящуюся в заданном внешнем поле падающей электромагнитной волны на частоте ω ($\mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$), и находящуюся в среде с диэлектрической проницаемостью ε_d . Как известно, достаточно подробное описание нелинейной динамики носителей в квазиклассическом приближении может быть получено с помощью набора уравнений гидродинамики (уравнение непрерывности и уравнение Эйлера), описывающих электронную плазму как сжимаемую заряженную жидкость [25, 27–29]. При построении физической модели двойных резонансов исследуемого типа будем считать выполненными ряд приближений, а именно будем предполагать, что (I) размеры наночастицы малы по сравнению с длиной падающей волны и допустимо квазистатическое приближение для описания поля внутри и вблизи поверхности наночастицы (II) вклад в магнитную составляющую силы Лоренца, действующую на электроны в металле пренебрежимо мал, (III) электроны находятся внутри бесконечно глубокой потенциальной ямы, то есть будем пренебрегать эффектом размывания профиля электронной плотности близ границы металла (так называемый spill-out effect) [

75], возникающим при учете давления электронов и (IV) положительный заряд ион-
 76 ного остова с равномерной плотностью распределен по объему наночастицы (предпо-
 77 лагается, что в отсутствие внешнего поля электроны, как и ионы, распределены равно-
 78 мерно по объему частицы с плотностью N_0 , а диэлектрическая проницаемость ионного
 79 остова материала частицы равна ε_∞). Описанные выше условия (вместе с условиями
 80 применимости гидродинамического подхода) приводят к следующим ограничениям на
 81 параметры задачи:

$$\frac{v_F}{\omega_p} \ll L \ll \frac{2\pi c}{2\omega\sqrt{\varepsilon_{d,\infty}}}, \quad v \ll c, \quad (1)$$

82 где $v_F = \hbar(3\pi^2 N_0)^{\frac{1}{3}}/m$ — скорость Ферми, c — скорость света, e и m — заряд и масса
 83 электрона, \hbar — постоянная Планка, L — характерный размер частицы, ω — частота
 84 внешнего поля, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0/m$ — плазменная частота. Принимаемые здесь прибли-
 85 жения несколько сужают область применимости рассматриваемой модели, однако по-
 86 скольку ранее двойные плазмонные резонансы обсуждаемого здесь типа фактически не
 87 исследовались, такое упрощение модели представляется оправданным первым шагом на
 88 пути построения более точной модели.

89 С учетом указанных предположений о характеристиках наночастицы и внешнего
 90 поля, нелинейная динамика коллективных электронных колебаний в наночастице под-
 91 чиняется системе уравнений:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N\mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nu \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{1}{mN} \nabla p, \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon_\infty} e(N - N_0), \quad (4)$$

94 где введены следующие параметры электронов: \mathbf{v} — скорость, N — возмущённая концен-
 95 трация, ν — эффективная частота соударений, $\mathbf{f} = N\mathbf{v}$ имеет смысл потока, p — давле-
 96 ние электронов. Конкретный вид выражения для последней из перечисленных величин,

фактически отвечающей за нелокальность поляризационного отклика плазмы, являл-
 ся предметом множества дискуссий и в настоящее время существует широкий спектр
 моделей, описывающих эту величину применительно к различным условиям. В рамках
 рассматриваемой здесь простой модели мы используем следующее феноменологическое
 уравнение состояния, отвечающее исследуемому здесь случаю быстрого адиабатическо-
 го процесса и позволяющее получить из описанных выше уравнений (2), (3) известный
 закон дисперсии как для поверхностных, так и для объемных плазмонов:

$$p = p_0(N/N_0)^\gamma, \quad p_0 = mv_F^2 N_0/5, \quad \gamma = 3. \quad (5)$$

Следуя обычной процедуре метода возмущений, применяемого в случае слабой нели-
 нейности, представим в уравнениях неизвестные плотность электронов, скорость и на-
 пряженность поля в виде суммы гармонических слагаемых, изменяющихся на частоте,
 кратной частоте внешнего поля. Далее сопоставляя в получившихся уравнениях вели-
 чины одинакового порядка малости, получаем следующие уравнения, определяющие
 комплексные амплитуды плотности заряда и потенциала поля для основной ($\omega_1 = \omega$,
 $n = 1$) и удвоенной ($\omega_2 = 2\omega$, $n = 2$) гармоник.

$$\Delta\rho_{1,2} + k_{p1,2}^2\rho_{1,2} = -\frac{1}{4\pi r_0^2}\Delta\varphi_{1,2}^{ex} + \left(k_{p1,2}^2 + \frac{1}{r_0^2\varepsilon_\infty}\right)\rho_{1,2}^{ex}, \quad (6)$$

111

$$\Delta\varphi_{1,2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_\infty}\rho_{1,2}, \quad (7)$$

где $r_0^2 = 3v_F^2/(5\omega_p^2)$ имеет смысл характерного радиуса нелокальности плазмы, $k_{p1,2}^2 =$
 $5[\omega_{1,2}(\omega_{1,2} - i\nu) - \omega_p^2/\varepsilon_\infty]/(3v_F^2)$. Введенные в уравнениях (6), (7) обозначения φ^{ex} и ρ^{ex}
 играют фактически роль расположенных внутри плазмы сторонних источников колеба-
 ний. Для первой гармоники они, очевидно, тождественно равны нулю ($\varphi_1^{ex} \equiv 0$, $\rho_1^{ex} \equiv 0$)
 и введены только для более краткой и единой записи результирующих уравнений. Для
 колебаний второй гармоники выражения для источников определяется выражениями

$$-2i\omega\rho^{ex} = \frac{1}{2}\text{div}\rho_1\mathbf{v}_1, \quad (8)$$

$$\varphi^{ex} = \frac{m}{4e} \left(\frac{v_0^2}{N_0^2} N_1^2 + \mathbf{v}_1^2 \right), \quad (9)$$

и фактически имеют смысл сторонней осциллирующей плотности заряда, (возникающей из-за нелинейного слагаемого в уравнении непрерывности (2)) и потенциала стороннего поля, определяющего дополнительную силу, действующую на заряды плазмы на удвоенной частоте (возникающего из-за нелинейности уравнения состояния (5) и из-за конвективного члена в уравнении (3)).

Система уравнений (7), (6) должна быть дополнена граничными условиями на поверхности наночастицы. Первые из используемых нами граничных условий, вытекают непосредственно из уравнений Максвелла

$$\varphi_n|_S = \varphi_n^{out}|_S \quad (10)$$

$$\varepsilon_\infty \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \varepsilon_d \frac{\partial \varphi_n^{out}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S, \quad n = 1, 2, \quad (11)$$

и связывают потенциалы электрического поля внутри наночастицы с соответствующими потенциалами $\varphi_{1,2}^{out}$ в окружающем ее однородном диэлектрике, удовлетворяющими уравнениям Максвелла. Последнее, необходимое для однозначного решения сформулированных уравнений, граничное условие определяется характером движения электронов близ границы наночастицы. В случае принимаемого здесь условия зеркального отражения электронов от поверхности металла соответствующее граничное условие принимает вид,

$$\mathbf{v}_n = -\frac{e}{i(\omega_n - i\nu)m} \nabla \psi_n \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = 0, \quad \psi_n = \varphi_n + 4\pi r_0^2 \rho_n + \varphi^{ex}, \quad n = 1, 2, \quad (13)$$

где $\psi_{1,2}$ фактически имеют смысл потенциала скорости электронов на основной и удвоенной гармониках колебаний.

Сформулированная система уравнений, как и в других подобных работах, посвященных исследованию генерации второй гармоники в условиях двойных резонансов,

140 позволяет рассчитать структуру колебаний \parallel . Новым основным новым элементом здесь
 141 является здесь учет нелокальности поляризации плазмы не только для основной, но и
 142 для удвоенной гармоник, что позволяет описать возникновение резонансов объемных
 143 плазмонов на этой частоте. Как известно, поле объемных плазмонов сильно локализо-
 144 вано внутри наночастицы и соответствующие им резонансы обычно слабо проявляет-
 145 ся в спектрах рассеянного излучения, однако как будет показано далее, возбуждение
 146 объемных плазмонов на удвоенной частоте может приводить к заметному изменению
 147 поглощаемой наночастицей мощности. Расчет спектров поглощения в рамках рассмат-
 148 риваемой модели может быть выполнен следующим образом. Потери энергии обуслов-
 149 лены наличием в уравнении (3) диссипативной силы, с плотностью $\mu = m\nu\mathbf{f}$. Средняя
 150 за период плотность мощности этой силы очевидным образом может быть выражена
 151 через комплексные амплитуды плотностей потока и скоростей первой и второй гармо-
 152 ник. Интегрируя по объему наночастицы с учетом соотношений (6), (7) и граничного
 153 условия (13), приходим к следующему выражению для средней за период мощности
 154 потерь во всем объеме наночастицы:

$$Q = \frac{\nu}{2} Re \iiint \left(\frac{\omega}{i(\omega - i\nu)} \rho_1 \psi_1^* + \frac{2\omega}{i(2\omega - i\nu)} \rho_2 \psi_2^* \right) dV. \quad (14)$$

155

$$Q = \frac{\nu}{2} Re \iiint \sum_{n=1,2} \frac{\omega_n}{i(\omega_n - i\nu)} \rho_n \psi_n^* dV. \quad (15)$$

156 Помимо этого, чтобы выражение для потерь (14) было справедливо для дипольных
 157 плазмонов (первая гармоника колебаний), необходимо учесть дополнительные потери,
 158 обусловленные поверхностными потерями. Для этого, в случае сферической наночасти-
 159 цы, эффективную частоту соударений электронов дипольных плазмонов можно пред-
 160 ставить в виде $\nu_{dip} = \nu + 3v_F/(4a\omega_p) \parallel$.

161 2 СФЕРИЧЕСКАЯ НАНОЧАСТИЦА

162 Применительно к сферической наночастице радиуса a , помещенной в однородную среду
 163 с проницаемостью ε_d решение линейной задачи, описывающей колебания на частоте
 164 внешнего поля хорошо известно (см. например [1]), и выражается через сферические
 165 функции Бесселя j_n). Как можно показать, выражения для потенциала и плотности
 166 заряда в этом случае имеют следующий вид

$$C = \frac{-3\varepsilon_d E_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_d[1 + (\varepsilon/\varepsilon_\infty - 1)G_1]}, \quad (16)$$

$$\rho_{01} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} k_{p1} \frac{C}{j_1'(\varkappa_1)}, \quad (17)$$

$$\rho_1 = C \frac{-k_{p1}^2 a \omega_p^2}{4\pi\omega(\omega - i\nu)} \frac{j_1(k_{p1}r)}{\varkappa_1 j_1'(\varkappa_1)} \cos\theta, \quad \varphi_1 = Cr + \frac{4\pi\rho_1}{\varkappa_1^2 \varepsilon_\infty}, \quad (18)$$

169 УБРАТЬ ОТДЕЛЬНУЮ КАППА? где a — радиус сферы, θ и r — полярный угол
 170 и радиус, $G_1 = j_1(\varkappa_1)/\varkappa_1 j_1'(\varkappa_1)$, $\varkappa_1 = k_p(\omega)a$, $\varepsilon = \varepsilon_\infty - \omega_p^2/\omega(\omega - i\nu)$. Последнее из
 171 перечисленных величин имеет смысл диэлектрической проницаемости металла в отсут-
 172 ствие нелокальности. Положение наиболее сильного из них, дипольного поверхностного
 173 плазмона (резонанс Ми), без учета пространственной дисперсии, зависит от диэлектри-
 174 ческой проницаемости внешней среды, определяется выражением $\varepsilon + 2\varepsilon_d \approx 0$, и часто-
 175 та генерируемой в наночастице второй гармоники колебаний может лежать в области
 176 частот отвечающей возможности возбуждения объемных плазмонов. Значения их ре-
 177 зонансных частот определяются общим дисперсионным уравнением:

$$m\varepsilon + \varepsilon_d(m + 1)(1 + m(\varepsilon/\varepsilon_\infty - 1)G_m) = 0, \quad (19)$$

178 ПОСМОТРЕТЬ ИНДЕКС G. ПРИ M=0,2 ИНДЕКС КАППА НЕ РАВЕН 0,2 (m — по-
 179 мер мультиполя), которое может быть также получено из решения однородной краевой
 180 задачи в отсутствие внешнего поля. В интересующем нас случае слабой пространствен-
 181 ной дисперсии $r_0 \ll a$ значения резонансных частот слабо зависят от параметров

182 окружающей среды и приближенно могут быть найдены из соотношения $\kappa_1 \approx \eta_{m+1}^k$,
183 где η_{m+1}^k k -й корень сферической функции Бесселя порядка $m + 1$. Из всех возможных
184 условий двойных резонансов здесь представляет интерес рассмотрение случая с $m=0$ и
185 $m=2$ (монопольные и квадрупольные объемные резонансы соответственно), поскольку
186 в случае сферической наночастицы, как можно увидеть из вида сторонних источников
187 (8) (9), источники поля второй гармоники могут возбуждать только колебания моно-
188 польного и квадрупольного типов.

189 На рисунке (1) проиллюстрированы положения частот резонансов от диэлектри-
190 ческой проницаемости, при типичных для металлических наночастиц значениях пара-
191 метров n , V_f , W_p ==. ПРО ВОЗМОЖНОЕ ЧИСЛО ДВОЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ И
192 УСЛОВИЯ ДЛЯ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ (ПРО НЮ)

193 На основании решения краевых задач для трех мультипольных составляющих по-
194 тенциала и плотности заряда полная средняя за период мощность потерь может быть
195 рассчитана как $Q = Q_{dip} + Q_{mono} + Q_{quad}$, где содержит вклады от дипольных колебаний
196 на основной частоте (Q_d) и монопольных и квадрупольных колебаний на удвоенной ча-
197 стоте внешнего поля (Q_{mono} , $m = 0$ и Q_{quad} , $m = 2$ соответственно). Более подробное
198 описание расчета мощности потерь описано в приложении.

199 На рисунках (2), (3) представлены зависимости мощности потерь от частоты при
200 различных значениях проницаемостей ε_∞ и ε_d . Сплошной линией указана полная мощ-
201 ность потерь, точечной линией – вклад в потери от дипольных колебаний, пунктир и
202 пунктир с точкой вклад от монопольных и квадрупольных колебаний соответственно.

203 Из приведенных графиков видно, что дополнительные резонансы не проявляются в
204 виде отдельных пиков на фоне основных потерь энергии, однако из-за этого увеличи-
205 вается суммарная мощность потерь. Стоит отметить влияние монопольных резонансов,
206 которые не проявляются в лазерной спектроскопии, так как потенциал монопольных ко-

207 лебаний не выходит за границы частицы, а также не возбуждаются однородным полем.
 208 Так же, в некоторых случаях происходит уширение линии потерь. При этом чем ближе
 209 резонансная частота находится к удвоенной частоте первой гармоники, тем больший
 210 вклад в потери вносит тот или иной тип колебаний.

211 Чтобы показать, насколько восприимчивы двойные резонансы к параметрам внеш-
 212 ней среды можно построить зависимость максимального значения потерь от диэлектри-
 213 ческой проницаемости внешней среды. На рисунке (4) представлены результаты рас-
 214 четов для сферической наночастицы натрия, при характерных для натрия параметрах
 215 $v_F = 1.07 \cdot 10^8$ см/с, $\omega_p = 5.71$ эВ, $\nu = 0.03$ эВ, $E_0 = 10^8$ ВТ/см².

216 В практических задачах чаще сталкиваются с наночастицами покрытыми слоем
 217 диэлектрика, а не находящимися в сплошной среде, как представлено в данной работе.
 218 Однако, модифицируя граничные условия, можно получить следующее дисперсионное
 219 уравнение для наночастицы в слое диэлектрика толщиной b :

$$\varepsilon + \varepsilon_d \frac{m+1}{m} \frac{1 - K_m}{1 + (m+1)K_m/m} = 0, \quad K_m = \left(\frac{a}{b}\right)^{2m+1} \frac{\varepsilon_d - 1}{\varepsilon_d + (m+1)/m} \quad (20)$$

220 3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

221 В работе продемонстрировано, что в сферических металлических наноструктурах воз-
 222 можно возбуждение двойных плазмонных резонансов, включающих поверхностные плаз-
 223 моны на основной частоте и объемные плазмоны на удвоенной частоте. Это явление
 224 обусловлено нелинейными эффектами, которые усиливаются благодаря резонансным
 225 условиям. Результаты показывают, что такие резонансы приводят к увеличению об-
 226 щей мощности поглощения энергии наночастицей, а также могут влиять на уширение
 227 спектральных линий. Интерес так же представляет возбуждение монополярных колеба-
 228 ний, которые обычно слабо проявляются. С практической стороны, благодаря эффекту
 229 двойного резонанса и высокой чувствительности к параметрам внешней среды наноча-

230 стицы могут служить источниками излучения для нужд диагностики оптических сред
231 и спектроскопии.

Для второй гармоники, в случае сферической наночастицы, можно получить вид функций для сторонних источников:

$$\varphi^{ex} = \frac{e}{4\pi\omega_p^2} [(4\pi)^2 r_0^2 \rho_1^2 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\nu)^2} (\nabla\psi_1)^2], \quad (\text{П1})$$

$$\rho^{ex} = \frac{e}{4m\omega(\omega - i\nu)} (-4\pi\rho_1^2 \frac{w(\omega - i\nu)}{\omega_p^2} + \nabla\psi_1 \nabla\rho_1). \quad (\text{П2})$$

Поскольку выражения для потенциала и электронной плотности на первой гармонике известно (), можно заметить что сторонние источники () состоят из суммы слагаемых пропорциональных квадратам косинуса и синуса. Значит, для дальнейшего решения этой задачи методом разделения переменных, можно представить правую часть уравнения () (сторонние источники) в виде произведений некоторых радиальных функций на полиномы Лежандра P_m :

$$\varphi^{ex} = F_0^\varphi(r)P_0(\cos\theta) + F_2^\varphi(r)P_2(\cos\theta), \quad (\text{П3})$$

$$\rho^{ex} = F_0^\rho(r)P_0(\cos\theta) + F_2^\rho(r)P_2(\cos\theta), \quad (\text{П4})$$

где $F_{0,2}^{\varphi,\rho}(r)$ радиальные функции при соответствующих полиномах Лежандра. Представление сторонних источников в виде (), явно показывает наличие монопольных (P_0) и квадрупольных (P_2) источников. А значит и искомые функции φ_2 и ρ_2 можно представить в аналогичном виде:

$$\varphi_2 = R_0(r)P_0(\cos\theta) + R_2(r)P_2(\cos\theta), \quad (\text{П5})$$

$$\rho_2 = \Phi_0(r)P_0(\cos\theta) + \Phi_2(r)P_2(\cos\theta), \quad (\text{П6})$$

где $R_{0,2}$, $\Phi_{0,2}$ неизвестные радиальные функции. Тогда от системы уравнений () переходим к следующей (для $m = 0, 2$):

$$(\hat{L}_m + \kappa_p^2)R_m = -\frac{1}{4\pi r_0^2}\hat{L}_m F_m^\varphi + \frac{2\omega(2\omega - i\nu)}{\omega_p^2 r_0^2}F_m^\rho, \quad (\text{П7})$$

249

$$\hat{L}_m \Phi_m = -\frac{4\pi}{\varepsilon_\infty}R_m, \quad \hat{L}_n = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m(m+1)}{r^2}. \quad (\text{П8})$$

250 Дополняя уравнения () граничными условиями аналогично (), можно решать образо-
 251 вавшуюся систему уравнений относительно радиальных функций $(R_{0,2}, \Phi_{0,2})$ различны-
 252 ми методами решения дифференциальных уравнений. В данной работе система реша-
 253 лась численными методами, с помощью метода Галеркина и метода матричной прогон-
 254 ки. Мощность потерь можно рассчитать по найденным радиальным функциям следу-
 255 ющим образом:

$$Q_m = \frac{2\pi\nu}{2m+1} \text{Re} \frac{2\omega}{i(2\omega - i\nu)} \int_0^a R_m(\Phi_m + 4\pi r_0^2 R_m + F_m^\varphi)^* r^2 dr, \quad m = 0, 2. \quad (\text{П9})$$

256 В ведённых обозначениях, $Q_{mono} \equiv Q_0$ и $Q_{quad} \equiv Q_2$ мощности потерь монопольной и
 257 квадрупольной составляющей второй гармоники соответственно.

258 Списание литературы

- 259 [1] Maier S. A. Plasmonics: Fundamentals and Applications. New York: Springer, 2007.
260 229 p.
- 261 [2] Gramotnev D. K., Bozhevolnyi S. I. // Nat. Photonics. 2010. V. 4. P. 83–91. doi:
262 10.1038/nphoton.2009.282
- 263 [3] Castro-Lopez M., Brinks D., Sapienza R., van Hulst N. F. // Nano Lett. 2011. V. 11.
264 P. 4674–4678. doi: 10.1021/nl202255g
- 265 [4] Biagioni P., Brida D., Huang J.-S., et al. // Nano Lett. 2012. V. 12, No. 7. P. 2941–2946.
266 doi: 10.1021/nl300616s.
- 267 [5] Chen H., Sun M., Ma J., et al. // ACS Photonics. 2021. V. 8, No. 4. P. 1084–1092. doi:
268 10.1021/acsphotonics.0c01747.
- 269 [6] Ko K.D., Kumar A., Fung K.H., et al. // Nano Lett. 2011. V. 11, No. 1. P. 61–65. doi:
270 10.1021/nl102751m.
- 271 [7] Danckwerts M., Novotny L. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. 026104. doi:
272 10.1103/PhysRevLett.98.026104.
- 273 [8] Harutyunyan H., Volpe G., Quidant R., et al. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. 217403.
274 doi: 10.1103/PhysRevLett.108.217403.
- 275 [9] Li J.-B., Liang S., Xiao S., He M.-D., Kim N.-C., Chen L.-Q., Wu G.-H., Peng Y.-X., Luo
276 X.-Y., Guo Z.-P. // Opt. Express. 2016. V. 24. P. 2360–2369. doi: 10.1364/OE.24.002360
- 277 [10] E. Paspalakis, S. Evangelou, S. G. Kosionis, and A. F. Terzis, *J. Appl. Phys.*, vol. 115,
278 no. 8, p. 083106, 2014, doi: 10.1063/1.4866424.

- [11] S. K. Singh, M. Kurtulus Abak, and M. E. Tasgin, *Phys. Rev. B*, vol. 93, no. 3, p. 035410, 2016, doi: 10.1103/PhysRevB.93.035410.
- [12] E. Drobnýh and M. Sukharev, *J. Chem. Phys.*, vol. 152, no. 9, p. 094706, 2020, doi: 10.1063/1.5143238.
- [13] D. A. Smirnova, I. V. Shadrivov, A. E. Miroshnichenko, A. I. Smirnov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. B*, vol. 90, no. 3, p. 035412, 2014, doi: 10.1103/PhysRevB.90.035412.
- [14] Torres-Torres C. // Int. J. Nanomedicine. 2010. P. 925. doi: 10.2147/ijn.s12463
- [15] P. A. Franken, A. E. Hill, C. P. Peters, and G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, no. 7, pp. 118–119, 1961, doi: 10.1103/PhysRevLett.7.118.
- [16] Bloembergen N., Pershan P. S. // Phys. Rev. 1962. V. 128, No. 2. P. 606–622. doi: 10.1103/physrev.128.606
- [17] J. Butet, P.-F. Brevet, and O. J. F. Martin, *ACS Nano*, vol. 9, no. 11, pp. 10545–10562, 2015, doi: 10.1021/acs.nano.5b04373.
- [18] Butet J., Russier-Antoine I., Jonin C. и др. // Nano Lett. 2012. V. 12, No. 3. P. 1697–1701. doi: 10.1021/nl300203u
- [19] Gildenburg V. B., Kondrat'ev I. G. // Radio Eng. Electr. Phys. 1965. V. 10, No. 4. P. 560.
- [20] Ruppin R. // Phys. Rev. B. 1975. V. 11, No. 8. P. 2871–2876. doi: 10.1103/physrevb.11.2871.
- [21] Gildenburg V. B., Kostin V. A., Pavlichenko I. A. // Phys. Plasmas. 2016. V. 23, No. 3. Art. no. 032120. doi: 10.1063/1.4944395.

- 300 [22] Elibol K., Downing C., Hobbs R. G. // Nanotechnology. 2022. V. 33, No. 47. Art.
301 no. 475203. doi: 10.1088/1361-6528/ac8812.
- 302 [23] Kryshchal A., Khshanovska O. // Sci. Rep. 2025. V. 15. Art. no. 5335. doi:
303 10.1038/s41598-025-88496-1.
- 304 [24] Haas F. Quantum plasmas: An hydrodynamic approach. New York : Springer, 2011.
305 65 p.
- 306 [25] Electromagnetic surface modes / ed. by A. D. Boardman. Chichester : Wiley, 1982.
307 770 p.
- 308 [26] Manfredi G., Hervieux P.-A., Hurst J. // Rev. Mod. Plasma Phys. 2021. V. 5. P. 7. doi:
309 10.1007/s41614-021-00056-y
- 310 [27] Forstmann F., Gerhardts R. R. Metal Optics Near the Plasma Frequency. Berlin :
311 Springer-Verlag, 1986. 132 p.
- 312 [28] Sipe J. E., So V. C. Y., Fukui M., Stegeman G. I. // Phys. Rev. B. 1980. V. 21.
313 P. 4389–4396. doi: 10.1103/PhysRevB.21.4389
- 314 [29] David C., García de Abajo F. J. // J. Phys. Chem. C. 2011. V. 115. P. 19470–19477.
315 doi: 10.1021/nn5038527

316 А РИСУНКИ И ТАБЛИЦЫ

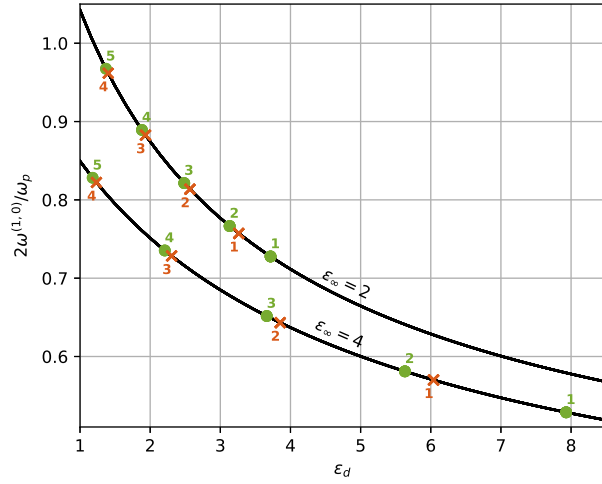


Рис. 1: Положение частоты основного дипольного поверхностного резонанса (сплошная линия) в зависимости от диэлектрической проницаемости внешней среды, а также положения резонансных частот при $m = 0, 2$ (монопольные и квадрупольные объемные резонансы), при разной диэлектрической проницаемости ионного остова

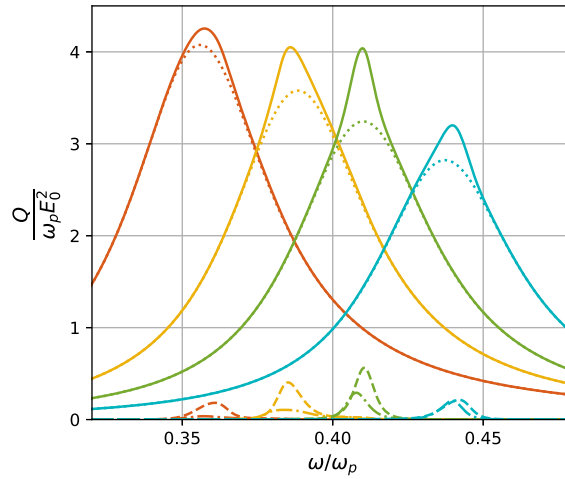


Рис. 2: Зависимость мощности потерь от частоты при $\varepsilon_\infty = 2$, $\varepsilon_d = 4, 3, 2.5, 2$ соответственно слева направо.

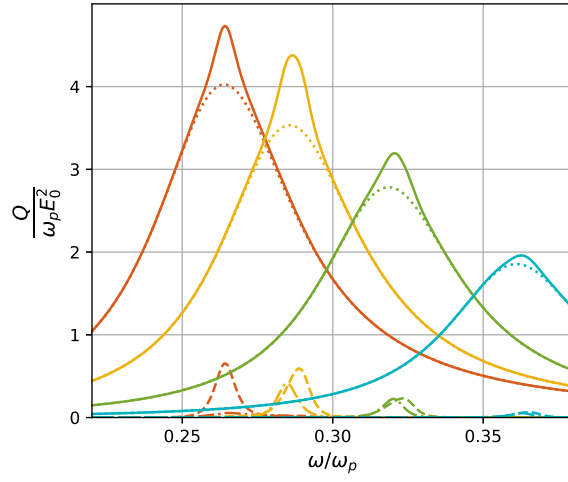


Рис. 3: Зависимость мощности потерь от частоты при $\varepsilon_\infty = 4$, $\varepsilon_d = 4, 3, 2.5, 2$ соответственно слева направо.

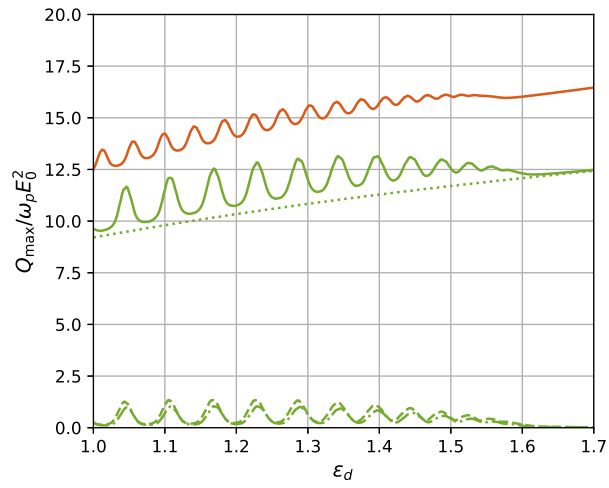


Рис. 4: Зависимость максимальной мощности потерь для сферической наночастицы натрия радиусом =