Homework ada6

TMI M1 37-176839 Koichiro Tamura

homework1

相補性条件

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$

$$\beta_i \xi_i = 0$$

より，以下の性質を示せ

1. $$\alpha_i = 0 \Longrightarrow y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} \geq 1$$
2. $$0 < \alpha_i < C \Longrightarrow y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} = 1$$
3. $$\alpha_i = C \Longrightarrow y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} \leq 1$$
4. $$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} > 1 \Longrightarrow \alpha_i = 0$$
5. $$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} < 1 \Longrightarrow \alpha_i = C$$

answer

1:
$\alpha_i = 0$の時,

$$\beta_i = C$$

$\beta_i \xi_i = 0$より

$$\xi_i = 0$$

この時，$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i \geq 0$において

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} \geq 1$$

【Q.E.D】

==

2:

$0 < \alpha_i < C$の時，$\alpha_i + \beta_i = C$から,

$$0 < \beta_i < C$$

よって

$$\xi_i = 0$$

$\xi_i = 0, 0 < \alpha_i < C$と相補性条件

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$

より,

$$(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1) = 0$$
$$\therefore y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} = 1$$

【Q.E.D】

===

3.

$\alpha_i = C$の時，$\alpha_i + \beta_i = C$から,

$$\beta_i = 0$$

$\alpha_i = C$と相補性条件

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$

より,

$$(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$
$$\therefore y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} = 1 - \xi_i$$

$\xi_i \geq 0$より

$$\alpha_i = C \Longrightarrow y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} \leq 1$$

【Q.E.D】

===

4.

$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} > 1$の時,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i > \xi_i$$

$\xi_i \geq 0$より,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i > 0$$

相補性条件

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$

より,

$$\alpha_i = 0$$

【Q.E.D】

===

5.

$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} < 1$の時,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i < \xi_i$$

$i)\alpha_i > 0$の時,

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) < \alpha_i \xi_i$$

相補性条件

$$\alpha_i(y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i) = 0$$

より,

$$0 < \alpha_i \xi_i$$

$\alpha_i > 0$なので

$$\xi_i > 0$$

$\beta_i \xi_i = 0$より,

$$\beta_i = 0$$

$\alpha_i + \beta_i = C$から,

$$\alpha_i = C$$

$ii)\alpha_i = 0$の時, $\alpha_i + \beta_i = C$から,

$$\beta_i = C$$

この時, $\beta_i \xi_i = 0$より

$$\xi_i = 0$$

これと$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} - 1 + \xi_i \geq 0$より,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} \geq 1$$

しかし, これは所与の条件に矛盾。

以上$i), ii)$より,

$$y_i \mathbf{w}^T \mathbf{x_i} < 1 \Longrightarrow \alpha_i = C$$

【Q.E.D】

homework2

線形モデル

$$f_{\mathbf{w},b}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$$

に対するサポートベクターマシンの劣勾配アルゴリズムを実装せよ

answer

In [125]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

サンプルデータ

In [107]:

```
# X
x_1 = np.random.normal(0,1, size=[100,2])
x_1[:, 0] -= 5
x_1[0:6,0] +=8
x_1[0:6,1] +=3
x_2 = np.random.normal(0,1, size=[100,2])
x_2[:, 0] += 5
x_2[0:6, 0] -=8
x_2[0:6, 1] -=3

X = np.concatenate([x_1, x_2])

# Y

t = []
for i in range(100):
    t.append(1.0)   # クラス1
for i in range(100):
    t.append(-1.0)  # クラス2
y = np.array(t)
```

In [108]:

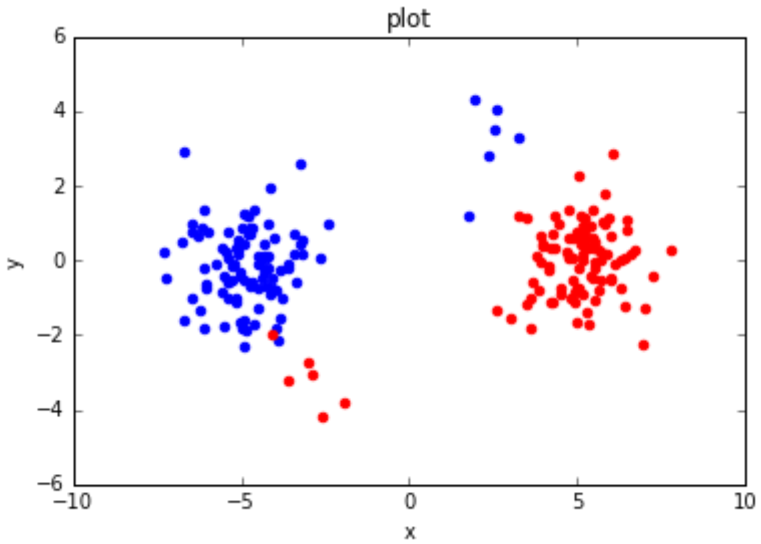
```
fig = plt.figure()

ax = fig.add_subplot(1,1,1)

ax.scatter(x_1[:,0],x_1[:,1], color="b")
ax.scatter(x_2[:,0],x_2[:,1], color="r")
ax.set_title('plot')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')

fig.show()
```

```
/Users/tamurakouichirou/.pyenv/versions/anaconda3-2.4.1/lib/python3.5/site-packag
es/matplotlib/figure.py:397: UserWarning: matplotlib is currently using a non-GUI backe
nd, so cannot show the figure
  "matplotlib is currently using a non-GUI backend, "
```



In [155]:

```
class SVM:
    def __init__(self, h=0.3, _lambda=0.1):
        # hyperparameter
        self.h = h
        self._lambda = _lambda
        self.LR = 0.05
        self.C = float("inf")
        self.CountMax = 1000
        self.count = 0

    def function(self, x1):
        """
        function of border
        b=w[2]に対応している
        """
        return  (self.w[0] / self.w[1]) * x1 + (self.w[2] / self.w[1])

    def kernel(self, x, c):
        """kernel function"""
        return math.exp(-1*np.power(x-c, 2).sum()) / (2*self.h**2)

    def dL(self, i):
        ans = 0
        for j in range(0,self.N):
            ans += self.L[j] * self.t[i] * self.t[j] * self.kernel(self.X[i], self.X[j])
        return (1 - ans)

    def train(self, X, y):
        self.t = y
        self.X = X
        # bの項を追加(Xに畳み込む)
        self.X = np.c_[self.X, np.ones(X.shape[0])]
        self.N = X.shape[0]

        # データの個数分のラグランジュ乗数を用意
        self.L = np.zeros((self.N,1))

        # ラグランジュ未定乗数法を劣勾配で実現
        while (self.count < self.CountMax):
            for i in range(self.N):
                self.L[i] = self.L[i] + self.LR * self.dL(i)    # ラグランジュ乗数の更新
                if (self.L[i] < 0):
                    self.L[i] = 0
                elif (self.L[i] > self.C):
                    self.L[i] = self.C
            self.count += 1

        # ラグランジュ未定乗数法によって，マージンを最大にするa_{i}=L_{i}がもとまった


        # サポートベクトルのインデックスを抽出
        # 十分小さなa_{i}については無視できる
        self.S = []
        for i in range(len(self.L)):
            if self.L[i] < 0.00001: continue
            self.S.append(i)

        # wを計算
        self.w = np.dot(self.X.T, self.t*self.L)
```

In [156]:

```
model = SVM()
model.train(X, y)
```

In [157]:

```
# 識別境界を描画
fig = plt.figure()

ax = fig.add_subplot(1,1,1)

ax.scatter(x_1[:,0],x_1[:,1], color="b")
ax.scatter(x_2[:,0],x_2[:,1], color="r")
ax.set_title('plot')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')

x1 = np.linspace(-8, 8, 1000)
x2 = [model.function(x) for x in x1]
plt.plot(x1, x2, 'g-')

fig.show()
```

```
/Users/tamurakouichirou/.pyenv/versions/anaconda3-2.4.1/lib/python3.5/site-packag
es/matplotlib/figure.py:397: UserWarning: matplotlib is currently using a non-GUI backe
nd, so cannot show the figure
  "matplotlib is currently using a non-GUI backend, "
```