先端データ解析論レポート第一回

学生番号 37-176839 田村浩一郎

2017 年 4 月 14 日

1　宿題 1

$$p(x = 好) = 0.8,\ p(x = 嫌) = 0.2$$
$$p(y = 眠\,|x = 好) = 0.25,\ p(y = 眠\,|x = 好) = 0.25$$

1.1　a

$$\begin{aligned} p(y = 眠, x = 好) &= p(y = 眠\,|x = 好) * p(x = 好) \\ &= 0.25 * 0.8 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

1.2　b

$$\begin{aligned} p(y = 眠, x = 嫌) &= p(y = 眠\,|x = 嫌) * p(x = 嫌) \\ &= 0.25 * 0.2 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(y = 眠) &= p(y = 眠, x = 嫌) + p(y = 眠, x = 好) \\ &= 0.2 + 0.05 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

1.3　c

$$\begin{aligned} p(x = 好\,|y = 眠) &= \frac{p(y = 眠, x = 好)}{p(y = 眠)} \\ &= \frac{0.2}{0.25} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

1.4 d

$$p(y = \text{眠}, x = \text{好}) = p(y = \text{眠い}) * p(x = \text{好})$$

より、独立。

2 宿題 2

2.1 a

Proof. 期待値の定義は、確率変数 $X = x_i$ の確率を p_i とすると、

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i * x_i$$

c が定数の時、c は確率 1 で c を取るので、

$$E(c) = 1 * c = c$$

以上より、定数は期待値をとっても値は変わらないことが示された。

□

2.2 b

Proof.

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y)p(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y xp(X=x, Y=y) + \sum_x \sum_y yp(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x x \sum_y p(X=x, Y=y) + \sum_x y \sum_y p(X=x, Y=y) \\
&= \sum_x xp(X=x) + \sum_y yp(Y=y) \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

□

2.3 c

Proof.

$$\begin{aligned} E(cX) &= \sum_{i=1}^{N} p_i * cx_i \\ &= c\sum_{i=1}^{N} p_i * x_i \\ &= cE(X) \end{aligned}$$

□

3 宿題 3

3.1 a

Proof.

$$\begin{aligned} V(c) &= E(c^2) - E(c)^2 \\ &= c^2 - c^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

3.2 b

Proof.

$$\begin{aligned} V(X+c) &= E((X+c)^2) - E(X+c)^2 \\ &= E(X^2 + 2Xc + c^2) - E(X+c)^2 \\ &= E(X^2) + E(2Xc) + E(c^2) - (E(X) + E(c))^2 \\ &= E(X^2) + 2cE(X) + c^2 - E(X)^2 - 2cE(X) - c^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= V(X) \end{aligned}$$

□

3.3 c

Proof.

$$\begin{aligned}
V(cX) &= E((cX)^2) - E(cX)^2 \\
&= E(c^2X^2) - (cE(X))^2 \\
&= c^2E(X^2) - c^2E(X)^2 \\
&= c^2(E(X^2) - E(X)^2) \\
&= c^2V(X)
\end{aligned}$$

□

3.4 d

Proof.

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \\
&= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + \mu_x \mu_y) \\
&= V(X) + V(Y) + 2(E((X - \mu_x)(E(Y) - \mu_y))) \\
&= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)
\end{aligned}$$

□