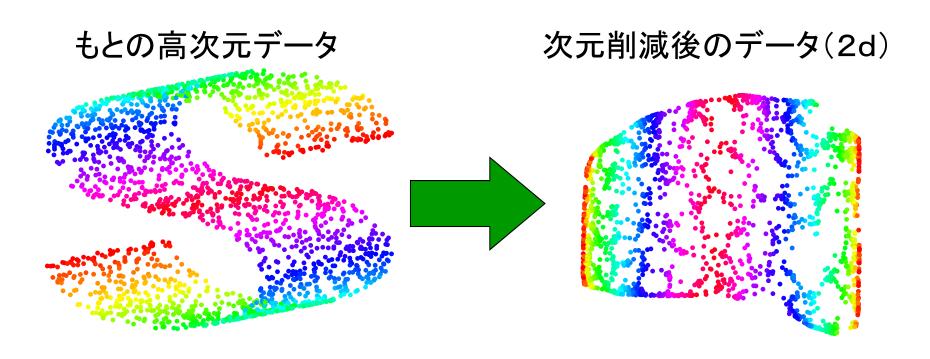
カーネルを用いた 非線形次元削減(13章)

杉山将•本多淳也

sugi@k.u-tokyo.ac.jp, jhonda@k.u-tokyo.ac.jp http://www.ms.k.u-tokyo.ac.jp

次元削減

■本質的な情報を保持したまま次元を減らしたい!



- ■1~3次元に減らせば、データを可視化できる.
- ■次元削減の基本的な仮定
 - 手持ちの高次元データはある意味で冗長である

線形次元削減

■(高次元)標本:

$$\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n, \ \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d, \ d \gg 1$$

■埋め込み行列:

$$T \in \mathbb{R}^{m \times d}, \ 1 \le m \ll d$$

■埋め込まれた標本

$$\{oldsymbol{z}_i\}_{i=1}^n, \ oldsymbol{z}_i = oldsymbol{T}oldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$$

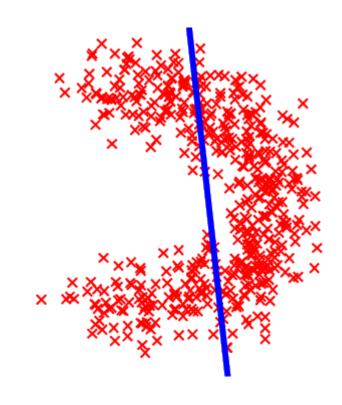
様々な線形次元削減法

- ■教師無し次元削減
 - 主成分分析(PCA): もとのデータを保存
 - 局所性保存射影(LPP): クラスタ構造を保存

- ■教師付き次元削減
 - ●フィッシャー判別分析(FDA): クラス間の分離性を保存

線形次元削減の限界

■データの分布が曲がっているとき、 原理的に線形次元削減法では うまく構造を抽出できない





講義の流れ

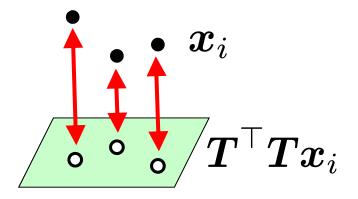
- 1. カーネル主成分分析(13章)
 - A) 双対空間における直接的計算法
 - B) カーネルを用いた間接的計算法
 - c) カーネルについて
- 2. ラプラス固有写像(13章)

主成分分析

■射影誤差の和を最小にする:

$$m{T}_{ ext{PCA}} = \mathop{
m argmin}_{m{T} \in \mathbb{R}^{m imes d}} \left[\sum_{i=1}^n \|m{T}^ op m{T} m{x}_i - m{x}_i\|^2
ight]$$

 $ext{subject to } oldsymbol{T}oldsymbol{T}^ op = oldsymbol{I}_m$ (正規直交性の拘束条件をつける)



主成分分析の解の求め方

1. 固有値問題を解く:

$$oldsymbol{x}_i \longleftarrow oldsymbol{x}_i - rac{1}{n} \sum_{i'=1}^n oldsymbol{x}_{i'}$$
 中心化

$$C\xi = \lambda \xi$$

$$oldsymbol{C} = \sum_{i=1}^n oldsymbol{x}_i oldsymbol{x}_i^ op$$
 標本の散布行列

• 固有値を降順にソート: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d$

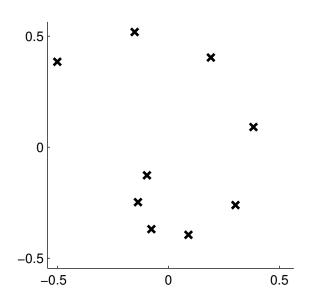
- 固有ベクトルを正規化 : $\|oldsymbol{\xi}_j\|=1$
- 2. 上位 *m* 個の固有ベクトルを並べる:

$$oldsymbol{T}_{ ext{PCA}} = oldsymbol{U}(oldsymbol{\xi}_1, \ldots, oldsymbol{\xi}_m)^{ op}$$

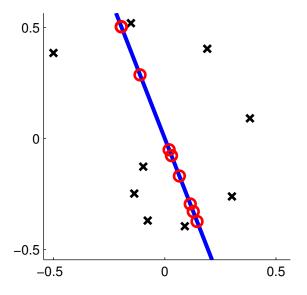
 $oldsymbol{U}$:任意の直交行列

線形次元削減法の問題点

■データの分布が曲がっていると、うまくいかない



線形の主成分分析



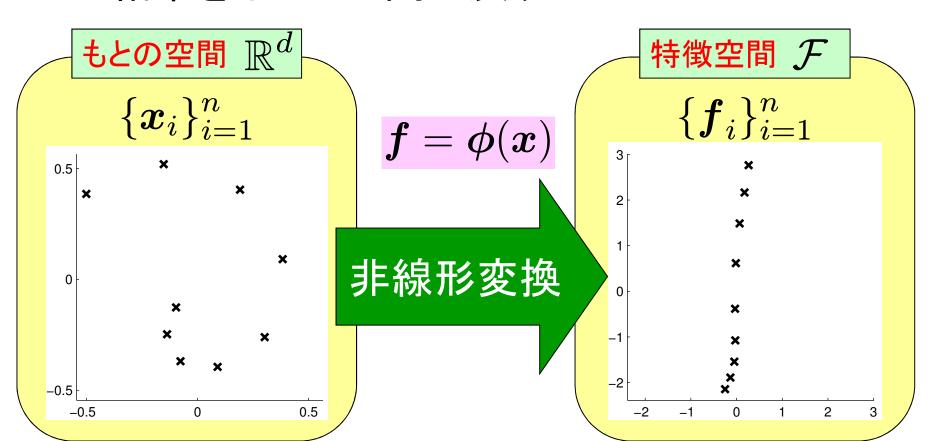


講義の流れ

- 1. カーネル主成分分析(13章)
 - A) 双対空間における直接的計算法
 - B) カーネルを用いた間接的計算法
 - c) カーネルについて
- 2. ラプラス固有写像(13章)

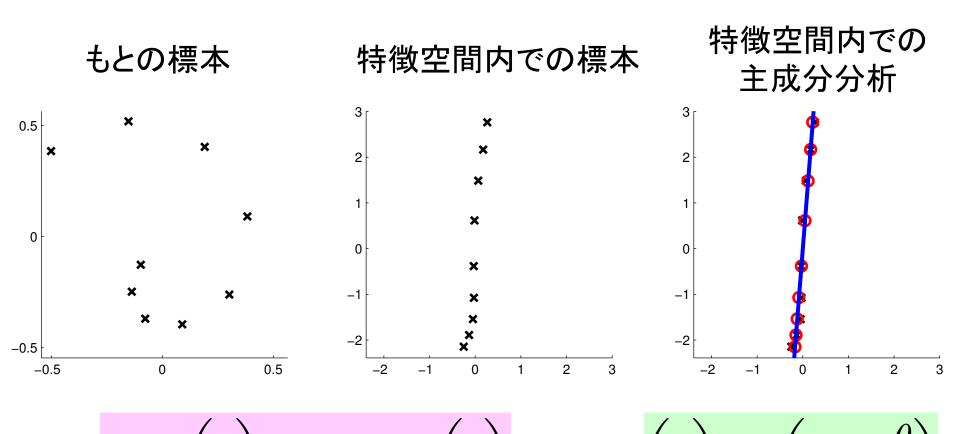
線形の手法を非線形にする方法11

- 1. もとのデータを特徴空間に非線形変換する.
- 2. 線形次元削減法を特徴空間で実行する.
- 3. 結果をもとの空間に戻す.



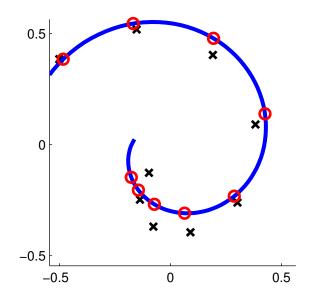
非線形主成分分析の例

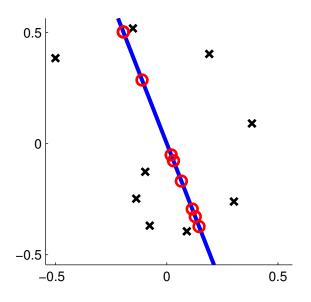
■特徴空間で主成分分析を行なう.



■結果をもとの空間に戻す.

非線形 主成分分析 線形 主成分分析



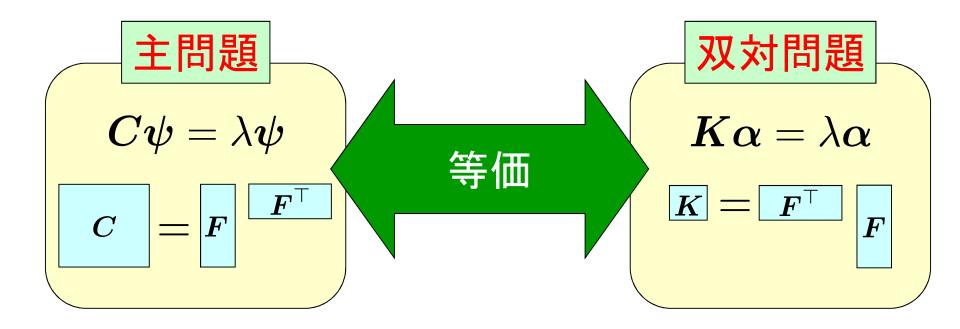


固有値問題

 $lacksymbol{lack}lacksymbol{lack}lacksymbol{eta} = \lambda \psi$ の解を用いて, 固有値問題 $oldsymbol{K} lpha = \lambda lpha$ の解を求められる

$$oldsymbol{C} = oldsymbol{F} oldsymbol{F}^ op oldsymbol{K} = oldsymbol{F}^ op oldsymbol{F} = (oldsymbol{f}_1, \dots, oldsymbol{f}_n)$$

■また、その逆も可能である



固有値問題

■固有方程式 $FF^{ op}\psi=\lambda\psi$ の左から $F^{ op}$ をかけると

$$egin{aligned} oldsymbol{C} & oldsymbol{C} & oldsymbol{C} & oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{V} & oldsymbol{A} oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{V} & oldsymbol{K} & oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} \ oldsymbol{K} & oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} & oldsymbol{K} & oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} \\ oldsymbol{K} & oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{F} oldsymbol{V} & oldsymbol{F} oldsymbol{F}$$

ここで $oldsymbol{lpha} = oldsymbol{F}^ op \psi$ とおけば $oldsymbol{K} oldsymbol{lpha} = \lambda oldsymbol{lpha}$

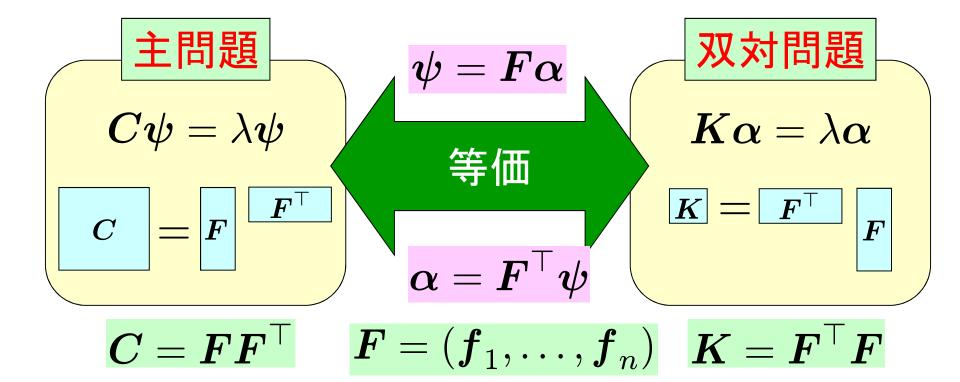
■固有方程式 $F^ op Flpha=\lambdalpha$ の左からF をかけると

$$FF^{\top}F\alpha = \lambda F\alpha$$

ここで $\psi = F lpha$ とおけば $C \psi = \lambda \psi$

特徴空間の次元

- ■高次元の特徴空間を用いれば,
 - アルゴリズムの能力は高まる.
 - しかし、計算時間は増加してしまう。
- $\blacksquare n < \dim(\mathcal{F})$ のとき、双対問題の方が速く解ける.



数学演習

$$\frac{\boldsymbol{\psi}}{\|\boldsymbol{\psi}\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \boldsymbol{F} \boldsymbol{\alpha}$$

で与えられることを示せ

■ヒント: $\psi = F \alpha$ と $F^{\top} F \alpha = \lambda \alpha$ を使う

埋め込み行列の計算

■特徴空間上での埋め込み行列:

$$egin{aligned} oldsymbol{T}_{ ext{PCA}} &= (oldsymbol{\xi}_1, \dots, oldsymbol{\xi}_m)^{ op} \ &= \left(rac{oldsymbol{\psi}_m}{\|oldsymbol{\psi}_m\|}, \dots, rac{oldsymbol{\psi}_m}{\|oldsymbol{\psi}_m\|}
ight)^{ op} oldsymbol{F}^{ op} \ &= \left(rac{oldsymbol{lpha}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, rac{oldsymbol{lpha}_m}{\sqrt{\lambda_m}}
ight)^{ op} oldsymbol{F}^{ op} \ &= oldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \left(oldsymbol{lpha}_1, \dots, oldsymbol{lpha}_m\right)^{ op} oldsymbol{F}^{ op} \ oldsymbol{A} = (oldsymbol{lpha}_1, \dots, oldsymbol{lpha}_m)^{ op} \ oldsymb$$

非線形主成分分析(双対)

■特徴の中心化:

$$oldsymbol{f}_i \longleftarrow oldsymbol{f}_i - rac{1}{n} \sum_{i'=1}^n oldsymbol{f}_{i'}$$

■特徴 f の埋め込み結果:

$$oldsymbol{\Lambda}^{-rac{1}{2}}oldsymbol{A}^ opoldsymbol{F}^ opoldsymbol{f} = oldsymbol{\Lambda}^{-rac{1}{2}}oldsymbol{A}^ opoldsymbol{k}$$

$$k_i = oldsymbol{f}_i^ op oldsymbol{f}$$

$$C\psi = \lambda\psi | K\alpha = \lambda\alpha$$

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \|\boldsymbol{\alpha}_j\| = 1$$

$$\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_m\right)$$

$$oldsymbol{A} = (oldsymbol{lpha}_1, \dots, oldsymbol{lpha}_m)^ op$$

I:单位行列

1:全てが1のベクトル・行列

 $lacksymbol{\blacksquare}$ 元のデータ $\{oldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n$ を埋め込むときは

$$oldsymbol{\Lambda}^{-rac{1}{2}}oldsymbol{A}^ op oldsymbol{K} = oldsymbol{F}^ op oldsymbol{F}$$

非線形主成分分析:まとめ

- ■手持ちの訓練標本を非線形変換し、変換後の標本に対して主成分分析を適用する
 - これにより、もとの標本に対しては非線形な 主成分分析を行なったことになる
- ■非線形変換後の標本の次元が高い時は 計算量が増加する
 - 訓練標本数が次元数より小さいときは、双対 問題を解く方が効率が良い



講義の流れ

- 1. カーネル主成分分析(13章)
 - A) 双対空間における直接的計算法
 - B) カーネルを用いた間接的計算法
 - c) カーネルについて
- 2. ラプラス固有写像(13章)

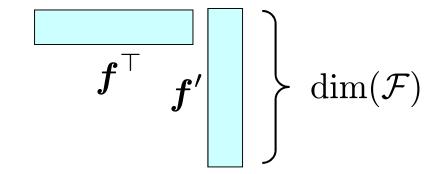
内積の計算

$$K_{i,i'} = oldsymbol{f}_i^ op oldsymbol{f}_{i'}$$

$$k_i = oldsymbol{f}^ op oldsymbol{f}_i$$

- $\blacksquare K$ と k が与えられれば、双対問題を解くための計算量は $\dim(\mathcal{F})$ によらない。
- ■しかし、Kとkの計算は $\dim(\mathcal{F})$ に依存する.

$$oldsymbol{f}^{ op} oldsymbol{f}' = \sum_{j=1}^{\dim(\mathcal{F})} f^{(j)} f'^{(j)}$$



カーネル・トリック

$$oldsymbol{f}^{ op} oldsymbol{f}' = \sum_{j=1}^{\dim(\mathcal{F})} f^{(j)} f'^{(j)}$$

- ■もし上記の積和が閉じた形で書ければ、 内積の値は一発で計算できる.
- ■実用的には、逆に上記の積和が閉じた形で 書けるような特徴ベクトル f を考えればよい!
- ■任意の半正値カーネルK(x,x')に対して、

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{f}^{\top} \boldsymbol{f}'$$

を満たす特徴ベクトルf, f'が常に存在する.

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \geq 0$$

数学演習

■多項式カーネル

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}^{\top} \boldsymbol{x}')^c$$
 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ $c \in \mathbb{N}$

に対応する特徴ベクトル f を d=2,c=2 に対して明示的に求めよ

$$ullet$$
 ヒント: $oldsymbol{x} = inom{s}{t}$ とおいて $(oldsymbol{x}^ op oldsymbol{x}')^2$ を明示的に計算

ガウスカーネル

$$K(x, x') = \exp(-\|x - x'\|^2/c^2)$$
 $c > 0$

- ■特徴ベクトル ƒ の形は明示的には分からない.
- ■気持ちは悪いが、計算する上では何の支障もない.

$$\boldsymbol{f}^{ op} \boldsymbol{f}' = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$$

■暗に定義されている特徴空間は無限次元!

$$\dim(\mathcal{F}) = \infty$$

中心化

■中心化した特徴ベクトル

$$\overline{\boldsymbol{f}}_i = \boldsymbol{f}_i - \frac{1}{n} \sum_{i'=1}^n \boldsymbol{f}_{i'}$$

に対するカーネル行列は

$$\overline{m{K}} = m{H}m{K}m{H}$$

で与えられる

- ■数学演習:これを証明せよ
 - ヒント: 中心化を行列で表現する

$$m{F} = (m{f}_1, \dots, m{f}_n) \mid m{\overline{F}} = (m{\overline{f}}_1, \dots, m{\overline{f}}_n)$$

$$oldsymbol{H} = oldsymbol{I}_n - rac{1}{n} oldsymbol{1}_{n imes n}$$

I:単位行列

1:全てが1の行列

$$oldsymbol{K} = oldsymbol{F}_{-}^{ op} oldsymbol{F}$$

$$\overline{oldsymbol{K}} = \overline{oldsymbol{F}}^ op \overline{oldsymbol{F}}$$

カーネル主成分分析

1. カーネル関数 K(x,x') を選ぶ.

$$oldsymbol{H} = oldsymbol{I}_n - rac{1}{n} oldsymbol{1}_{n imes n}$$

2. 特徴の中心化を(暗に)行なう:

I:单位行列

1:全てが1のベクトル・行列

3. (双対の)固有値問題を解く:

$$K_{i,j} = K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$$

$$K\alpha = \lambda \alpha$$

$$|\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n|$$
 $||\alpha_i|| = 1$

4. 入力 x の特徴空間内での埋め込み結果:

$$oldsymbol{\Lambda}^{-rac{1}{2}}oldsymbol{A}^ opoldsymbol{k}$$

元のデータ $\{x_i\}_{i=1}^n$ を埋め込む ときは

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{K}$$

$$oldsymbol{A} = (oldsymbol{lpha}_1, \dots, oldsymbol{lpha}_m)^{ op}$$

 $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

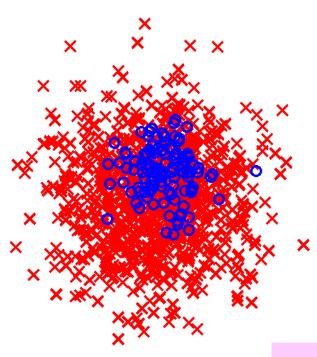
$$k_i = K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})$$

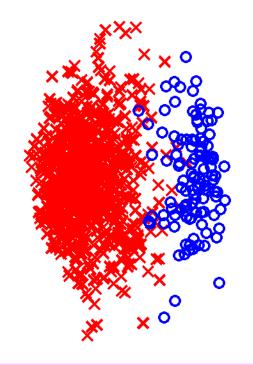
実行例

■ringnorm data(20次元)

線形主成分分析

カーネル主成分分析 (ガウスカーネル)

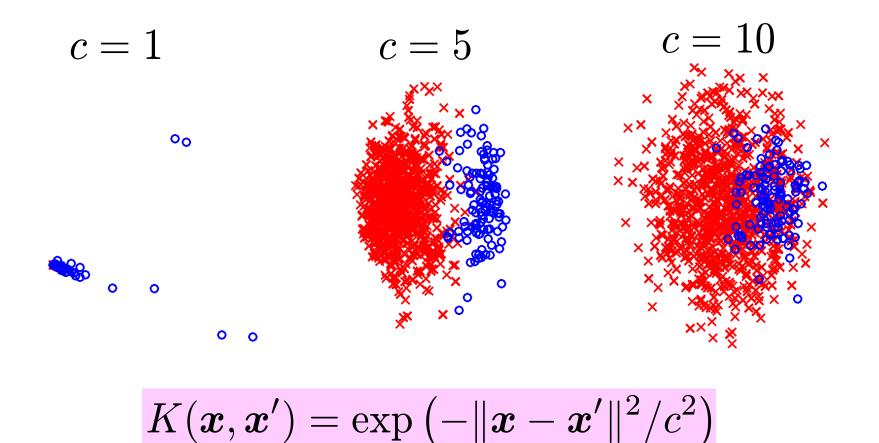




c = 5

$$K(x, x') = \exp(-\|x - x'\|^2/c^2)$$

カーネル主成分分析の問題点



- ■カーネルの選び方で大きく結果が変わる.
- ■特徴空間の次元が高いと元の空間に戻せない.

カーネル主成分分析:まとめ

- ■非線形変換を指定するのでなく、非線形変換後の標本の内積をカーネル関数で指定する
- ■カーネル関数が簡単に計算できる限りは、 カーネル主成分分析の計算量は特徴空間の 次元数に依存しない
- ■ガウスカーネルを用いると,特徴空間の次元数は無限大
- ■カーネルの選び方(=非線形変換の選び方) が難しい



講義の流れ

- 1. カーネル主成分分析(13章)
 - A) 双対空間における直接的計算法
 - B) カーネルを用いた間接的計算法
 - c) カーネルについて
- 2. ラプラス固有写像(13章)

カーネル関数の変形・合成

■二つのカーネル関数

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{f}^{ op} \boldsymbol{f}' \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{g}^{ op} \boldsymbol{g}'$$

に対して,以下もカーネル関数である:

- 1. 定数倍: $\alpha K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ $\alpha > 0$
- 2. 和: $K(oldsymbol{x},oldsymbol{x}')+L(oldsymbol{x},oldsymbol{x}')$
- 3. 積: $K(oldsymbol{x},oldsymbol{x}')L(oldsymbol{x},oldsymbol{x}')$
- ■数学演習:これらを証明せよ

カーネル関数の性質

■ノルム:

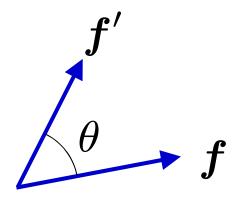
$$\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

■距離:

$$\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}'\|^2 = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + K(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}')$$

■角度: $f^{\top}f' = \|f\|\|f'\|\cos\theta$ より

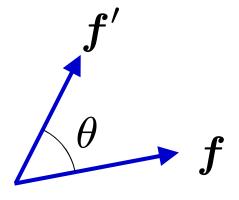
$$\cos \theta = \frac{K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{\sqrt{K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}')}}$$



ガウスカーネルの性質

$$K(x, x') = \exp(-\|x - x'\|^2/c^2)$$
 $c > 0$

- ■ガウスカーネルに対しては,
 - ||f|| = 1
 - $\|\boldsymbol{f} \boldsymbol{f}'\|^2 = 2 2K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$
 - $\cos \theta = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$



カーネル・トリック: まとめ

$$\boldsymbol{f}^{\top}\boldsymbol{f}' = K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$$

- ■特徴空間での内積をカーネル関数を用いて 効率良く計算できる.
- ■内積だけで表現できる線形アルゴリズムは、 カーネル化できる!
 - 次元削減: PCA, LPP, FDAなど
 - クラスタリング: k-平均法など
 - 関数近似:線形回帰,線形サポートベクトルマシン, フィッシャー線形判別分析など

$$oldsymbol{x}^{ op} oldsymbol{x}' o K(oldsymbol{x}, oldsymbol{x}')$$

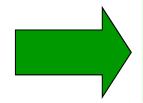


講義の流れ

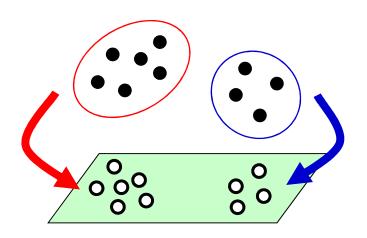
- 1. カーネル主成分分析(13章)
- 2. ラプラス固有写像(13章)

局所性保存射影 (LPP: 4² Locality Preserving Projection)

■考え方: データの局所的な構造をできるだけ 保存したい



もとの空間で近くにある 標本を近くに埋め込む



類似度行列

- $lacksymbol{\mathtt{I}}$ 類似度行列 $oldsymbol{W}$:
 - $oldsymbol{x}_i$ と $oldsymbol{x}_{i'}$ が近い: $W_{i,i'}
 ightarrow 1$
 - $oldsymbol{x}_i$ と $oldsymbol{x}_{i'}$ が遠い: $W_{i,i'}
 ightarrow 0$

$$\frac{W_{i,i'} = W_{i',i}}{\exists \boldsymbol{W}^{-1}}$$

- 例:

・距離ベース:
$$W_{i,i'}=\exp\left(-rac{\|oldsymbol{x}_i-oldsymbol{x}_{i'}\|^2}{2t^2}
ight)$$

 $k \in \mathbb{N}$

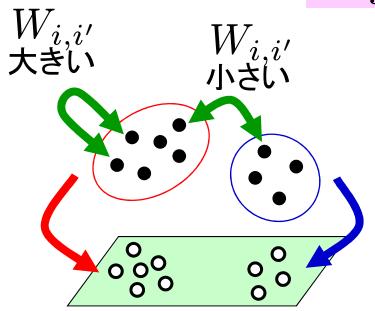
・近傍ベース:
$$W_{i,i'}=\left\{egin{array}{ll} 1 & ext{if } m{x}_i \in kNN(m{x}_{i'}) \ & ext{or } m{x}_{i'} \in kNN(m{x}_i) \ 0 & ext{otherwise} \end{array}
ight.$$

局所性保存射影の規準

■もとの空間で近くにある標本を近くに埋め込む:

$$oldsymbol{T}_{ ext{LPP}} = \mathop{\mathrm{argmin}}_{oldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{m imes d}} \sum_{i,i'=1}^n W_{i,i'} \|oldsymbol{T} oldsymbol{x}_i - oldsymbol{T} oldsymbol{x}_{i'}\|^2$$

subject to $m{T}m{X}m{D}m{X}^{ op}m{T}^{ op} = m{I}_m$



解が縮退しないように 適当な拘束条件をつける

$$oldsymbol{X} = (oldsymbol{x}_1, \dots, oldsymbol{x}_n)$$

$$m{D} = \operatorname{diag}\left(\sum_{i'=1}^{n} W_{i,i'}\right)$$

I:単位行列

局所性保存射影の解の求め方 44

$$m{T}_{ ext{LPP}} = \mathop{
m argmin}_{m{T} \in \mathbb{R}^{m imes d}} \operatorname{tr} \left(m{T} m{X} m{L} m{X}^ op m{T}^ op
ight)$$

subject to $\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{T}^{\top}=\boldsymbol{I}_{m}$

1. 一般化固有値問題を解く:

$$L = D - W$$

$$m{X}m{L}m{X}^{ op}m{\xi} = \lambda m{X}m{D}m{X}^{ op}m{\xi}$$
 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \ m{\xi}_j^{ op}m{X}m{D}m{X}^{ op}m{\xi}_j = 1$

$$oldsymbol{D} = \operatorname{diag}\left(\sum_{i'=1}^n W_{i,i'}
ight)$$

$$oldsymbol{X} = (oldsymbol{x}_1, \dots, oldsymbol{x}_n)$$

2. 下位 *m* 個の一般化固有ベクトルを並べる:

$$oldsymbol{T}_{ ext{LPP}} = (oldsymbol{\xi}_d, oldsymbol{\xi}_{d-1}, \dots, oldsymbol{\xi}_{d-m+1})^ op$$

局所性保存射影の解の求め方 45

■局所性保存射影:

$$m{T}_{ ext{LPP}} = \mathop{
m argmin}_{m{T} \in \mathbb{R}^{m imes d}} \operatorname{tr} \left(m{T} m{X} m{L} m{X}^ op m{T}^ op
ight)$$

subject to
$$m{T}m{X}m{D}m{X}^{ op}m{T}^{ op} = m{I}_m$$

- ullet 埋め込んだデータ: $oldsymbol{\Psi}^ op = oldsymbol{T}_{ ext{LPP}}oldsymbol{X}$
- ■暗黙のうちに各標本の次元*d* が大きい場合を 考える
 - ●埋め込み先を直接求める
- lacksquare 一般化固有値問題 $oldsymbol{L}\psi=\gamma oldsymbol{D}\psi$ の解を小さい順に並べたものが解となる

ラプラス固有写像

■固有値問題 $L\psi = \gamma D\psi$ の最小固有値 γ_n は Oであり、その固有ベクトルは1(定数).

証明は宿題 1:全てが1のベクトル

■よって、最小固有値に対応する固有ベクトルは 無視する、このとき、埋め込み先は

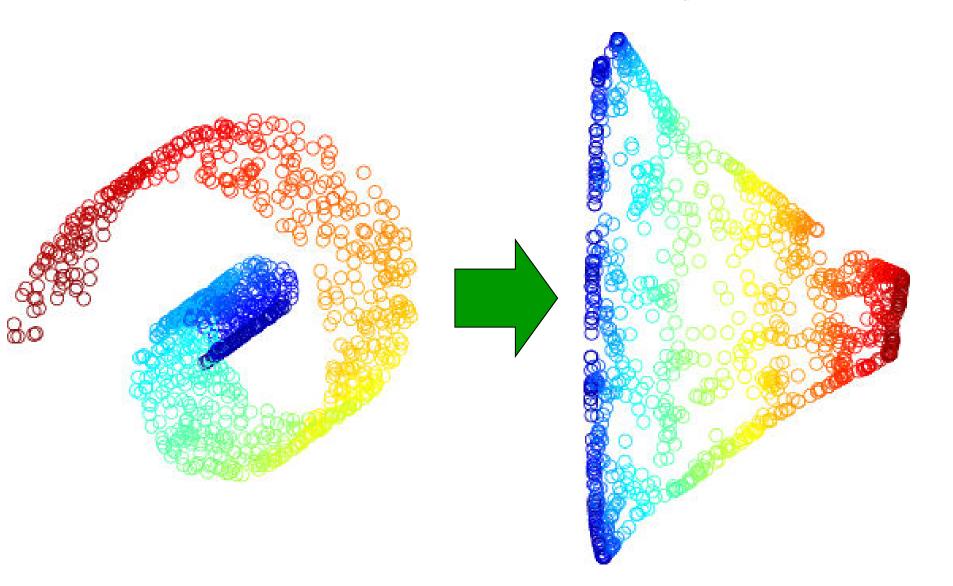
$$oldsymbol{\Psi}^ op = (oldsymbol{\psi}_{n-1}, oldsymbol{\psi}_{n-2}, \dots, oldsymbol{\psi}_{n-m})^ op$$
 $oldsymbol{\gamma}_1 \geq \dots \geq oldsymbol{\gamma}_n \ oldsymbol{\psi}_i^ op oldsymbol{D} oldsymbol{\psi}_i = 1$

■類似度行列Wがスパースの時はLとDも スパースになり、固有値問題が効率良く解ける

実行例

もとの3次元データ

次元削減後の2次元データ



ラプラス固有写像:まとめ

- ■局所性保存射影のカーネル化
- ■手持ちの訓練標本を埋め込むときは、 固有値問題が単純化できる
- ■類似度行列がスパースの時、スパース 固有値問題になり効率良く解ける



講義の流れ

- 1. カーネル主成分分析(13章)
- 2. ラプラス固有写像(13章)

まとめ

- ■次元の呪い: 高次元データは非常に扱いにくい
- ■次元削減:データの特徴を残しつつ次元を削減
- ■カーネル・トリック:
 - 線形次元削減アルゴリズムを手軽に非線形化
 - 大域的最適解が求まる
 - 回帰, 分類, クラスタリングなどにも適用可能
 - カーネルの選択が難しい



次回の予告

■ニューラルネットワークを用いた非線形 次元削減

宿題1

■固有値問題 $L\psi = \gamma D\psi$ の最小固有値 γ_n は O, 対応する固有ベクトルは1であることを示せ

$$oldsymbol{L} = oldsymbol{D} - oldsymbol{W} \quad oldsymbol{D} = \operatorname{diag} \left(\sum_{i'=1}^n W_{i,i'}
ight)$$

■ヒント:

1:全てが1のベクトル

- Lが半正定値行列(全ての固有値が非負), つまり任意の lpha で $lpha^{ op}Llpha\geq 0$ であることを示す.
- 1が固有値ゼロに対応する固有ベクトルであること を示す

宿題2

■最近傍類似度に対するラプラス固有写像 を実装せよ

$$W_{i,i'} = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x}_i \in kNN(\boldsymbol{x}_{i'}) \\ & \text{or } \boldsymbol{x}_{i'} \in kNN(\boldsymbol{x}_i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
clear all; rand('state',0); randn('state',0); n=1000; a=3*pi*rand(n,1); x=[a.*cos(a) 30*rand(n,1) a.*sin(a)]; z=LapEig(x,2); figure(1); clf; hold on; view([15 10]); scatter3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),40,a,'o'); LapEig.m figure(2); clf; hold on; scatter(z(:,2),z(:,1),40,a,'o');
```