オンライン学習（15章）

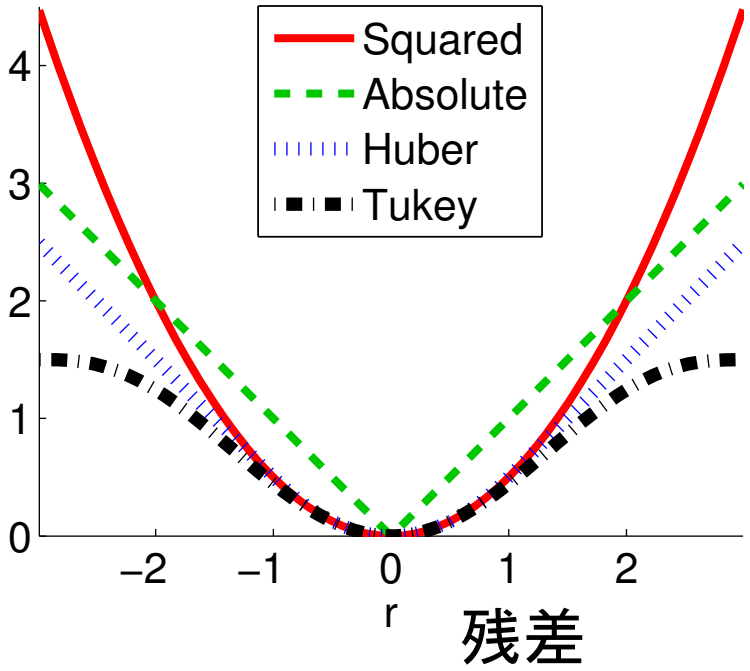
杉山将・本多淳也
sugi@k.u-tokyo.ac.jp, jhonda@k.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.k.u-tokyo.ac.jp

一括学習

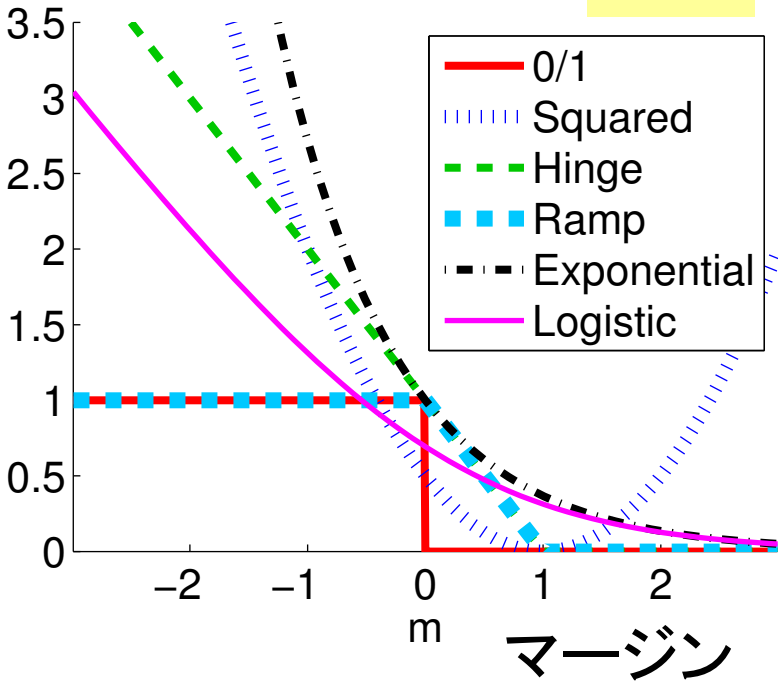
- 全ての訓練標本を用いてパラメータを学習
- 標本が多いとき，一括で学習するのは困難

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_i), y_i \Big) \qquad \{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$$

回帰



分類



オンライン学習

- データを一つ一つ（あるいはいくつかずつ）学習していく
- 一回一回の解の更新は非常に簡単に行える
- データを生成する確率分布が変化するような場面にも適応できる

講義の流れ

1. 確率的勾配法
2. 受動攻撃学習
3. 適応正則化学習

確率的勾配法

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_i), y_i\Big)$$

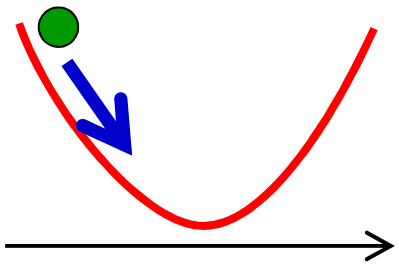
$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{b} \theta_j \phi_j(\boldsymbol{x})$$

1. パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を適当に初期化
2. 標本 $(\boldsymbol{x}, y)$ をランダムに選び，勾配を少し降下

$$\boldsymbol{\theta} \longleftarrow \boldsymbol{\theta} - \varepsilon \nabla \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}), y\Big)$$

ステップ幅
$\varepsilon > 0$

3. 収束するまで 2. を繰り返す



- 実用上は，一つでなく複数の標本（ミニバッチ）を用いることが多い

実行例

- ガウスカーネルモデル

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_j)$$

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2}{2h^2}\right)$$

に対する最小二乗法

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_i) - y_i\right)^2$$

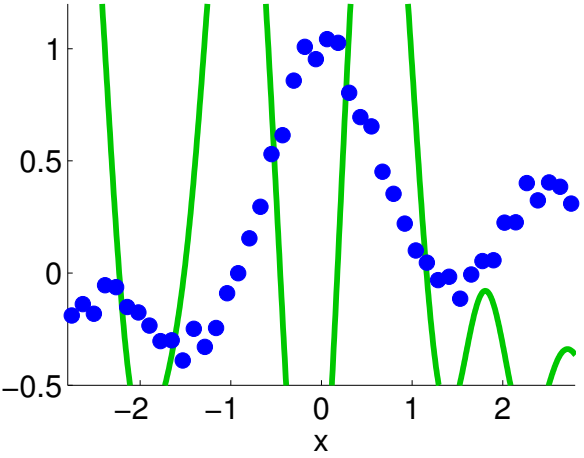
の確率的勾配法

- 勾配は $\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{\theta} - y\right)$

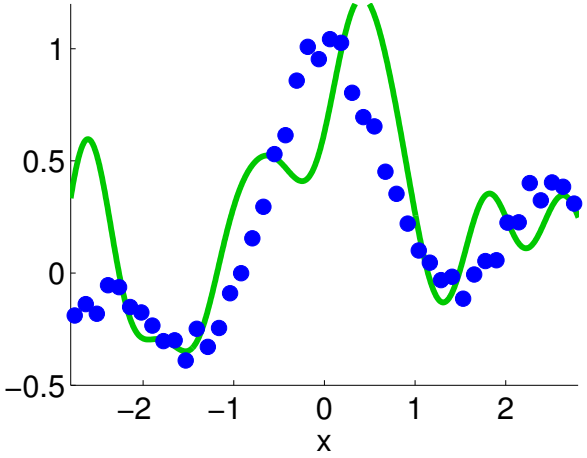
$$\boldsymbol{k} = (K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1), \ldots, K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n))^\top$$

実行例（続き）

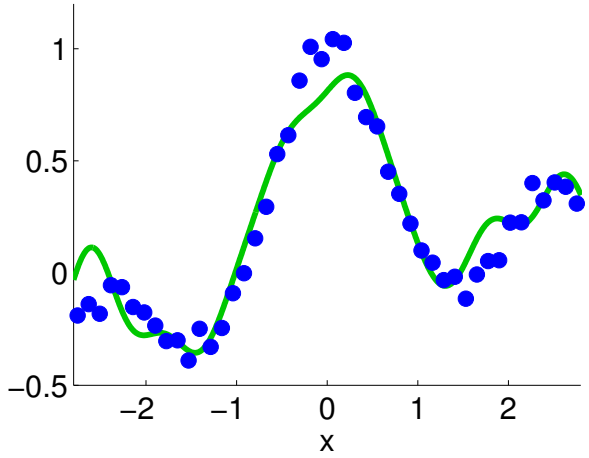
初期値



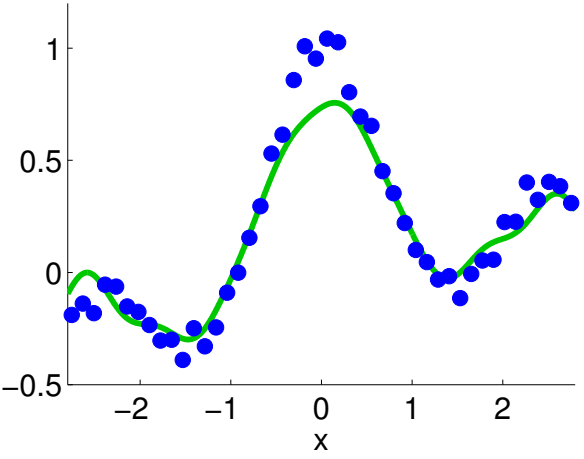
50反復後



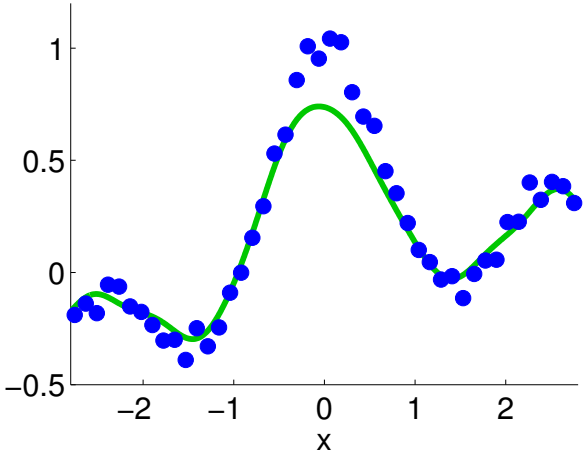
100反復後



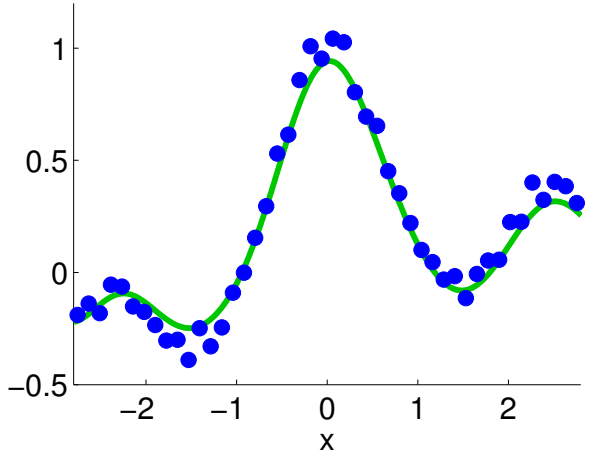
150反復後



200反復後



11556反復後

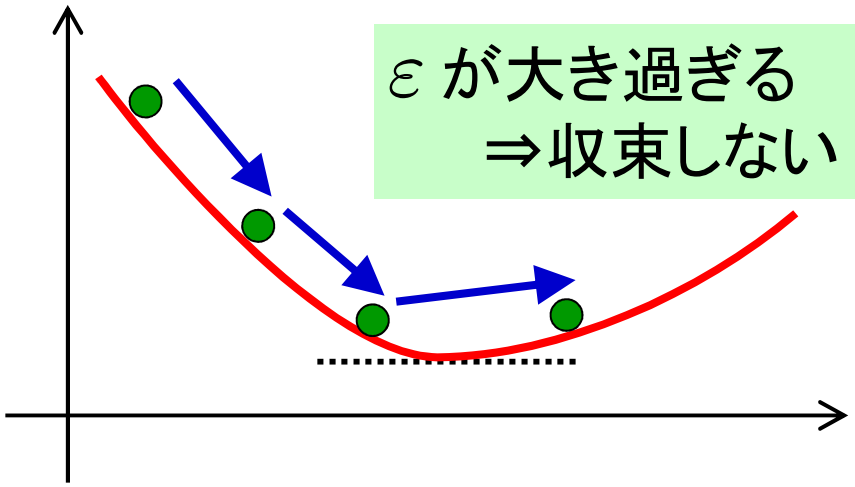


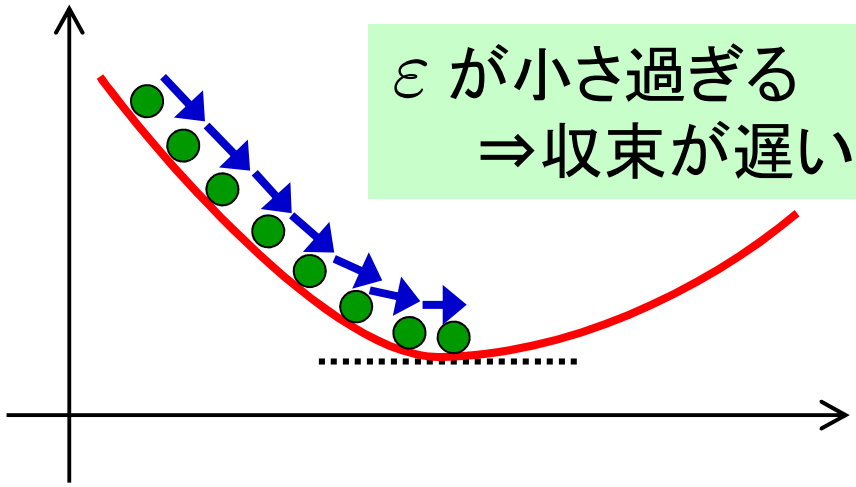
実装例


```
clear all; rand('state',0); randn('state',0);
n=50; N=1000; x=linspace(-3,3,n)';
X=linspace(-3,3,N)';
pix=pi*x; y=sin(pix)./(pix)+0.1*x+0.05*randn(n,1);

hh=2*0.3^2; t0=randn(n,1); e=0.1;
for o=1:n*1000
  i=ceil(rand*n); ki=exp(-(x-x(i)).^2/hh);
  t=t0-e*ki*(ki'*t0-y(i));
  if norm(t-t0)<0.000001, break, end
  t0=t;
end
K=exp(-(repmat(X.^2,1,n)+repmat(x.^2',N,1)-2*X*x')/hh);
F=K*t;

figure(1); clf; hold on; axis([-2.8 2.8 -0.5 1.2]);
plot(X,F,'g-'); plot(x,y,'bo');
```

確率的勾配法の問題点

- ステップ幅 ε の設定が難しい





- 最小二乗回帰では，一気に谷底まで勾配降下することが可能（停留解が解析的に求まる）
- しかし，そのような急激な学習を行うと，過去の学習で得られた知識が損なわれる恐れがある

講義の流れ

1. 確率的勾配法
2. 受動攻撃学習
3. 適応正則化学習

受動攻撃(passive-aggressive)学習

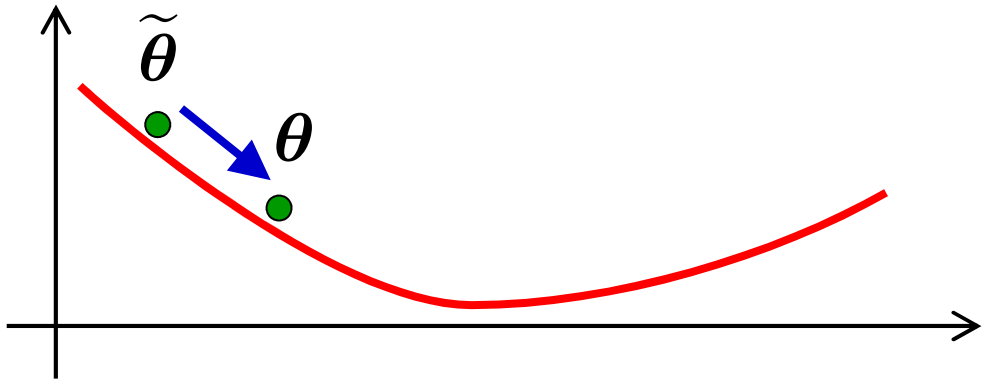
- 現在の解 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ からの変化量を抑制する

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}), y\Big) + \gamma \|\boldsymbol{\theta} - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2$$

訓練出力に対する適合の良さ

パラメータの変化量を抑制

受動係数 $\gamma > 0$



基底関数 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$

- 以下，線形モデルを考える: $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$

確率的勾配法との比較

- 二乗損失に対する受動攻撃回帰の解の更新式:

$$\boldsymbol{\theta} \longleftarrow \boldsymbol{\theta} - \frac{\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - y}{\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\|^2 + \gamma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$\gamma > 0$

導出は後ほど

$$\mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}), y\Big) = \Big(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) - y\Big)^2$$

- 確率的勾配法の解の更新式:

$$\boldsymbol{\theta} \longleftarrow \boldsymbol{\theta} - \varepsilon \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \Big(\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - y\Big)$$

- 受動攻撃回帰では，ステップ幅をデータ $\boldsymbol{x}$ に合わせて適応的に調整:

$$\varepsilon = \frac{1}{\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\|^2 + \gamma}$$

二乗ヒンジ損失

- 二乗ヒンジ損失に対する受動攻撃分類

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$$

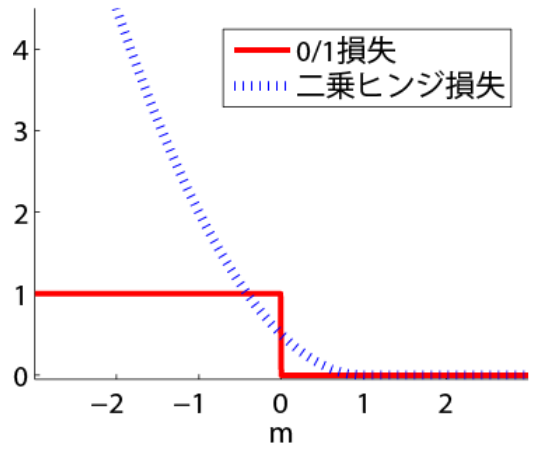
$\gamma > 0$

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\max\left(0, 1 - \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) y\right)\right)^2 + \frac{\gamma}{2}\|\boldsymbol{\theta} - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2$$

の解は次式で与えられる

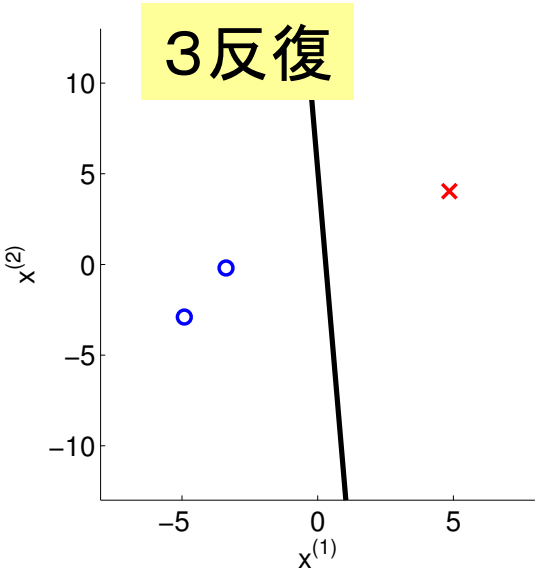
$$\boldsymbol{\theta} \longleftarrow \boldsymbol{\theta} + \frac{y \max\left(0, 1 - y\boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\right)}{\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\|^2 + \gamma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

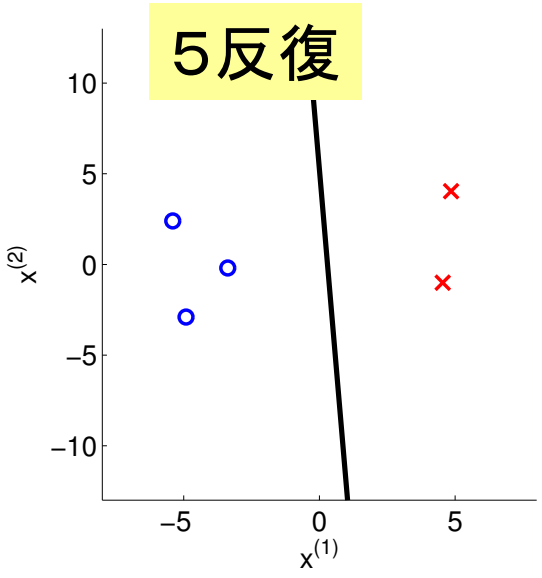
導出は後ほど

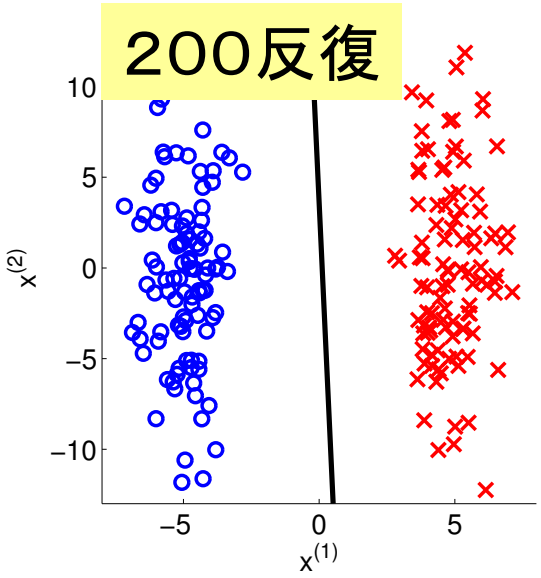


実行例

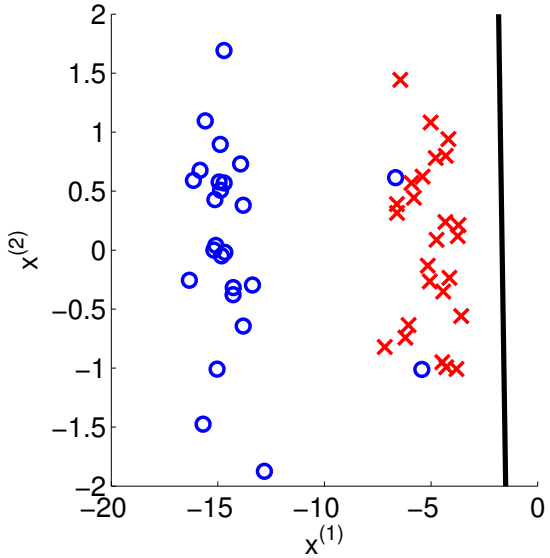
- うまく分類できている







- ただし，異常値に弱い

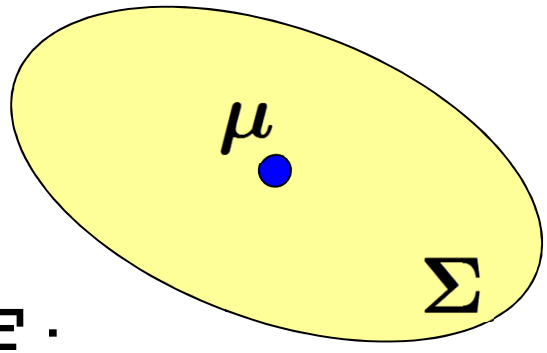


講義の流れ

1. 確率的勾配法
2. 受動攻撃学習
3. 適応正則化学習

適応正則化学習

- パラメータを推定するかわりに
  パラメータの確率分布を推定
  （ベイズ推定とは異なる）



- 簡単のため，ガウス分布を仮定：

$$\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

- パラメータの変化量を分布間のカルバック・ライブラー距離で測る：

$$\mathrm{KL}\left[N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \middle\| N(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})\right] \qquad \mathrm{KL}(p\|\widetilde{p}) = \int p(\boldsymbol{\theta}) \log \frac{p(\boldsymbol{\theta})}{\widetilde{p}(\boldsymbol{\theta})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

- 分散共分散行列の適応正則化：$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$

数学演習

- パラメータの分布がガウス分布

$$\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

にしたがうとき，点 $\boldsymbol{x}$ での予測値 $f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ の分散は

$$\mathrm{Var}[f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

で与えられることを示せ

- ヒント: 分散の定義

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(X - \mathrm{E}[X])]$$

適応正則化学習(続き)

- パラメータの学習規準:

$$\min_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \left\{ \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}), y \Big) \right.$$

訓練出力に対する
適合の良さ

$$+2\gamma \mathrm{KL}\Big[N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) \Big\| N(\widetilde{\boldsymbol{\mu}},\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}) \Big]$$

パラメータの
変化量を抑制

$$\left. +\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \right\}$$

適応正則化:
予測値の分散を抑制

$$\gamma > 0$$

数学演習

$$\mathrm{KL}(p\|\widetilde{p}) = \int p(\boldsymbol{\theta}) \log \frac{p(\boldsymbol{\theta})}{\widetilde{p}(\boldsymbol{\theta})} \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

- ガウス分布間のカルバック・ライブラー距離が

$$\mathrm{KL}\left[N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \middle\| N(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^{\top} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

で与えられることを示せ.

d: $\boldsymbol{x}$の次元数

ヒント

- ガウス分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$の確率密度関数 $p(\boldsymbol{\theta})$は

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-d/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

- $(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top\right)$

- 分散共分散行列: $\int p(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}$

- 期待値ベクトル: $\int p(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}$

数学演習(再掲)

- 以下の式を示せ:

$$\mathrm{KL}\left[N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})\middle\|N(\widetilde{\boldsymbol{\mu}},\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})\right]$$

$$\mathrm{KL}(p\|\widetilde{p}) = \int p(\boldsymbol{\theta})\log\frac{p(\boldsymbol{\theta})}{\widetilde{p}(\boldsymbol{\theta})}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\log\frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu}-\widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d\right\}$$

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-d/2}\det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

$$(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu}) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top\right)$$

$$\int p(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\mu}$$

$$\int p(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\mu})^\top\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}$$

受動攻撃学習との関係

- Σ を単位行列に固定すれば,
  μ の学習規準は受動攻撃学習と一致:

適応正則化学習		受動攻撃学習
$\mathrm{loss}\left(f_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}), y\right)$	⇒	$\mathrm{loss}\left(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}), y\right)$
$\mathrm{KL}\left[N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \middle\| N(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})\right]$	⇒	$\|\boldsymbol{\theta} - \widetilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2$
$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$	⇒	定数

解の求め方：共分散行列

$$(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \underset{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}{\operatorname{argmin}} J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \operatorname{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}), y\Big) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$+\gamma \left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

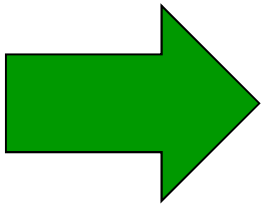
- 数学演習：適応正則化学習の $\boldsymbol{\Sigma}$の解が次式で与えられることを示せ

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma}$$

ヒント

- 行列での微分の公式を利用する:
  - $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top$
  - $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \log \det(\boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \mathrm{tr}\left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}\right) = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$
- 逆行列の公式を利用する:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top$$



$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma}$$

解の求め方：共分散行列（再掲）

$$J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{loss}\Big(f_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}), y\Big) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$+\gamma \left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \mathrm{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

■ 数学演習：以下の式を示せ

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma}$$

$$(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \underset{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}{\mathrm{argmin}}\, J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \log\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \mathrm{tr}\left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}\right) = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$$

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top\right)^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma}$$

解の求め方：期待値

- 数学演習：二乗損失に対する適応正則化回帰の μ の解は次式で与えられることを示せ

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}} - \frac{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\mu}} - y}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \left(\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - y\right)^2 + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$+\gamma \left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

- ヒント： $\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\mu}$ および逆行列の公式

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} + \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top\right)^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma}$$

適応正則化回帰

- パラメータの更新式:

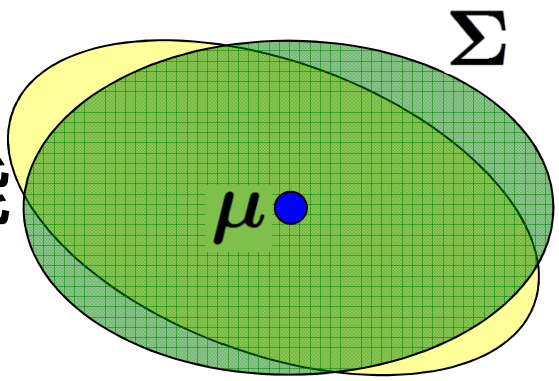
$$\boldsymbol{\mu} \longleftarrow \boldsymbol{\mu} - (\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - y)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})/\beta$$

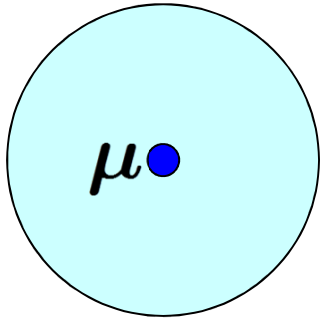
$$\boldsymbol{\Sigma} \longleftarrow \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\Sigma}/\beta$$

$$\beta = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma$$

- Σ を対角行列で近似すれば,
  計算時間とメモリ使用量を削減可能
- Σ を単位行列に固定すれば,
  μ の更新式は受動攻撃学習と一致:

$$\boldsymbol{\theta} \longleftarrow \boldsymbol{\theta} - \frac{\boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - y}{\|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\|^2 + \gamma}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$





二乗ヒンジ損失に対する期待値の解

$$(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \left(\max\left(0, 1 - \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) y\right)\right)^2 + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$+\gamma \left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

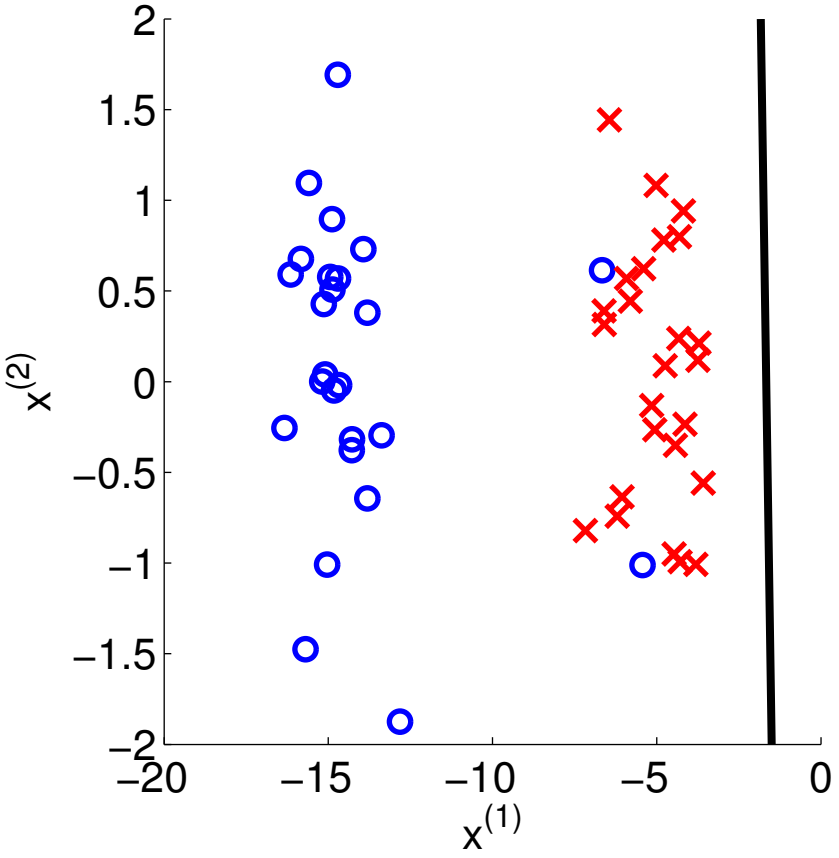
- 二乗ヒンジ損失に対する適応正則化分類の$\boldsymbol{\mu}$の解は次式で与えられる:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}} + \frac{y \max(0, 1 - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) y)}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

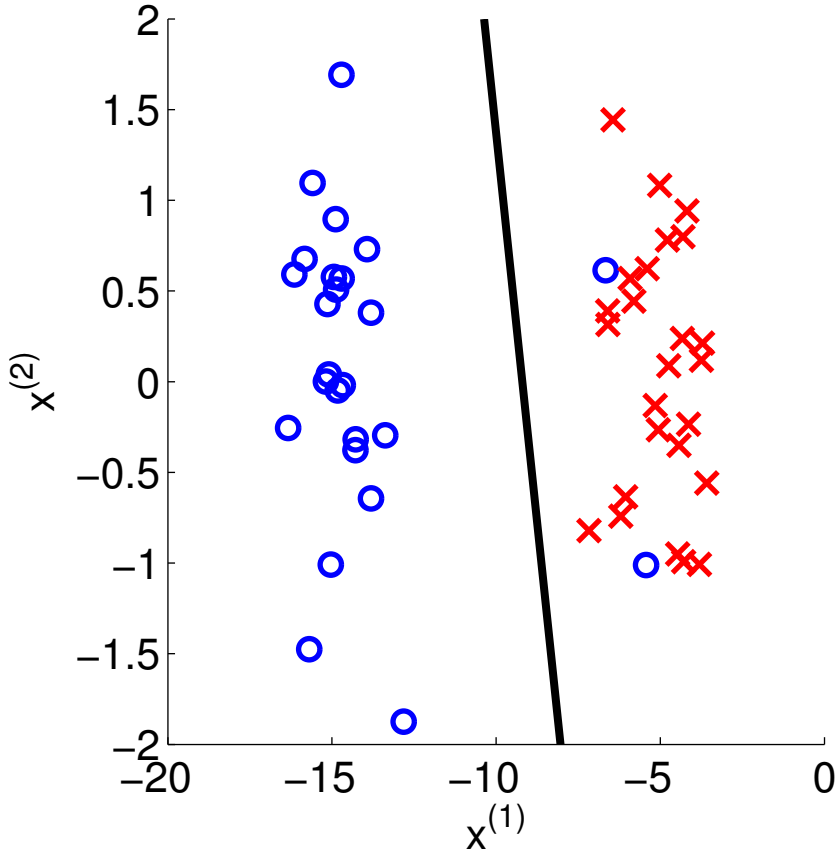
証明は宿題

実行例

受動攻撃分類



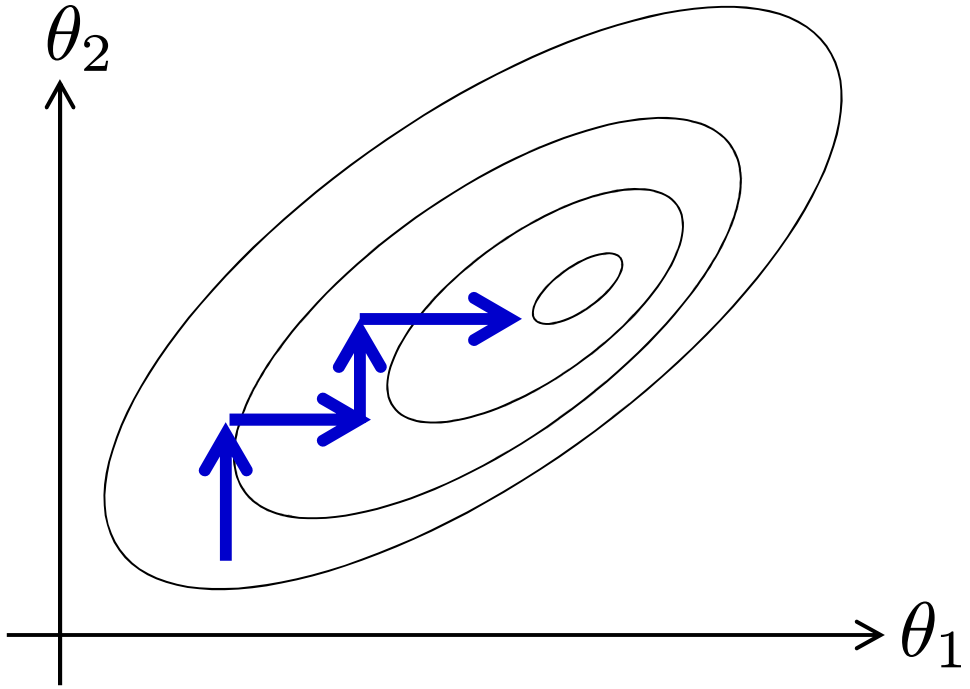
適応正則化分類



- 異常値に対してロバストな解が得られている

オンライン学習：まとめ

- オンライン学習では，一部の標本のみを使うことにより，勾配の計算を高速化
- パラメータを一部分ごとに学習する座標降下法も実用上有用



講義の流れ

1. 確率的勾配法
2. 受動攻撃学習
3. 適応正則化学習

まとめ

- オンライン学習：データを一つ一つ学習していく
  - 確率的勾配法：学習係数の決定が困難
  - 受動攻撃学習：パラメータの変化量を抑制
  - 適応正則化学習：パラメータの分布を考える

次回の予告

- 半教師付き学習（16章）
- 転移学習（18章）

宿題1

$$(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \underset{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}}{\operatorname{argmin}} J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \left(\max\left(0, 1 - \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) y\right)\right)^2 + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

$$+\gamma \left\{ \log \frac{\det(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}})}{\det(\boldsymbol{\Sigma})} + \operatorname{tr}(\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}) + (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}) - d \right\}$$

- 二乗ヒンジ損失に対する適応正則化分類の$\boldsymbol{\mu}$の解は次式で与えられることを示せ

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}} + \frac{y \max(0, 1 - \widetilde{\boldsymbol{\mu}}^\top \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) y)}{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})^\top \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \gamma} \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$$

宿題2

- データ

```
clear all; rand('state',0); randn('state',0); n=50;
x=[randn(1,n/2)-15 randn(1,n/2)-5; randn(1,n)]';
y=[ones(n/2,1); -ones(n/2,1)]; x(1:2,1)=x(1:2,1)+10;
x(:,3)=1; p=randperm(n); x=x(p,:); y=y(p);
```

を用いて，二乗ヒンジ損失に基づく適応正則化分類を線形モデル

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(1)}, x^{(2)})$$
$$= (x^{(1)} \; x^{(2)} \; 1)\boldsymbol{\theta}$$

に対して実装せよ