IFT-2002 Informatique Théorique
Devoir 2

Question 1.

Montrez que les langages ci-dessous sont non-contextuels. Vous pouvez le faire soit en donnant une grammaire non-contextuelle qui génère le langage, soit un automate à pile qui accepte le langage. (Notez que si vous donnez une grammaire et un automate, les deux seront corrigés mais seul le premier des deux sera noté)

1. $L = \{uba^nba^nbv : n \in \mathbb{N} \wedge u, v \in \{a, b\}^*\}$.

2. L'ensemble des mots de $\{a, b\}^*$ contenant deux fois plus de a que de b.

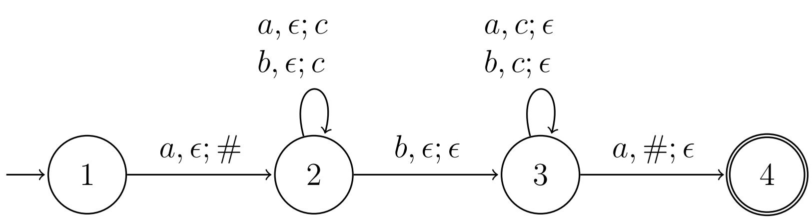
Question 2.

Montrez que le langage suivant est non-contextuel. (*Je pense qu'il est plus facile de construire un automate à pile pour ce langage plutôt que de fournir une grammaire non-contextuelle mais vous pouvez faire l'un ou l'autre.*)

$T = \{x\$y^r$: x est la représentation en binaire d'un entier n_x et y représente l'entier $n_x + 1\}$ Rappelons que y^r est le mot y renversé. Par exemple $10010\$11001 \in T$ parce que 10010 représente l'entier 18 et que le renversé du mot qui suit le \$ est 10011 qui représente l'entier 19. De la même façon 11011\$00111 est dans le langage puisque 11011 représente 27 et 11100 représente 28.

Question 3.

Considérez l'automate à pile suivant:



1. Dites si les séquences suivantes sont acceptées ou rejetées par cet automate:
   abba, *ababa*, *abaabaaaa*, *abbab*

2. Décrivez le langage accepté par cet automate à pile. Vous pouvez écrire une expression ensembliste mais ça n'est pas nécessaire. Votre description n'a même pas besoin d'être particulièrement élégante mais elle devrait être *claire*. Je suggère d'illustrer votre explication en utilisant les quatre séquences de la première partie de la question.

3. Donnez une grammaire non-contextuelle qui génère le même langage.

Question 4.

Construisez une grammaire en forme normale de Chomsky équivalente à la grammaire suivante. (Indiquez les étapes intermédiaires)

$S \to CDC \;\; S \to bD \;\; C \to bDS \;\; C \to bS \;\; C \to \epsilon$

$D \to aDa \;\; D \to bS \;\; D \to b$

Question 5.

Considérez la grammaire G donnée par les règles ci-dessous. (L'alphabet terminal est $\{a, b, c\}$.)

$S \to abPR; \quad S \to QTba$
$P \to abPR; \quad P \to c$
$T \to QTba; \quad T \to c;$
$R \to Ra; \quad R \to ba;$
$Q \to Qb; \quad Q \to ab;$

a) Décrivez le langage généré par cette grammaire. (Par une expression ensembliste ou de toute autre façon qui est suffisamment claire et précise pour que le correcteur vous comprenne. Je suggère d'illustrer votre explication avec quelques exemples bien choisis de séquences qui appartiennent au langage et de séquences qui n'appartiennent pas au langage)

b) Montrez que G est ambigüe en donnant deux arbres de dérivation distincts pour un même mot.

Question 6.

Soit L le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant les mots z tel que le nombre de b dans z est le carré du nombre de a dans z.

Utilisez le lemme de pompage pour les langages non-contextuels afin de montrer que L n'est pas non-contextuel.

Question facultative

Soit $\{a, b\}$ un alphabet et définissons la relation $\sim$ sur les mots de $\{a, b\}^*$ par $x \sim y$ si x et y ont le même nombre de a et ont le même nombre de b. Par exemple $abaa \sim baaa$ et $ababb \sim bbaab$. Si L est un langage sur $\{a, b\}^*$ on peut maintenant définir

$$K_L = \{x : \exists y \; x \sim y \wedge y \in L\}.$$

Donc un mot x appartient à K_L si ses lettres peuvent être réordonnées pour former un mot de L.

1. Donnez un exemple de langage régulier L tel que K_L n'est pas régulier.
2. Montrez que si L est un langage régulier alors le langage K_L est toujours non-contextuel.
3. Montrez si l'alphabet est maintenant $\{a, b, c\}$ alors on peut trouver un langage régulier L tel que K_L n'est pas non-contextuel. (Évidemment, on ajuste la définition de $\sim$, c'est-à-dire $x \sim y$ si x et y ont le même nombre de a, le même nombre de b et le même nombre de c.)