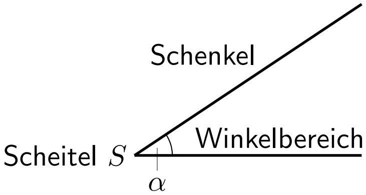
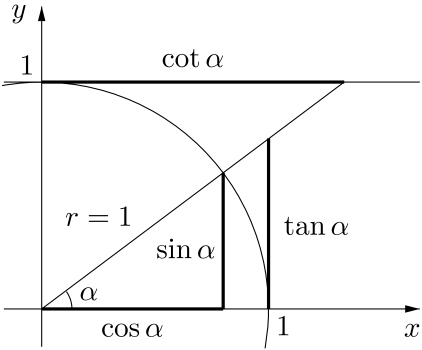
Kapitel 5 — Trigonometrie



Winkel werden in GRAD oder im BOGENMASS (auch RAD) angegeben: $360° \hat{=} 2\pi$.

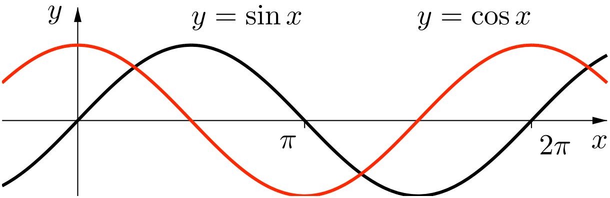


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

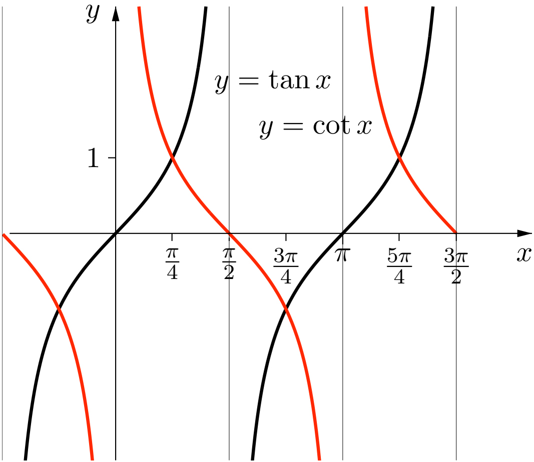
Definition 5.1 (Winkelfunktionen)

Name		D	W
Sinus	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Cosinus	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Tangens	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Cotangens	$\cot$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

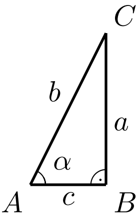
Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktionen



Die Graphen der Tangens- und Cotangensfunktionen:



Satz 5.2 (Interpretation am rechtwinkligen Dreieck)



Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{a}{c}$$

Definition 5.3 (Periodische Funktionen)

Es sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-PERIODISCH, wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 5.4 (Symmetrie von Funktionen)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... GERADE, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
2. ... UNGERADE, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 5.5 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

1. $\sin$ sowie $\cos$ sind 2π- und $\tan$ sowie $\cot$ sind π-periodisch.
2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$.
3. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.
5. $\cos$ ist eine gerade Funktion und $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind ungerade Funktionen.
6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$.
7. $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
   $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ der Trigonometrische Pythagoras.
9. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ und $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x}$.

Satz 5.6 (Einschränkungen der Winkelfunktionen)

Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen sind streng monoton und wegen Satz 4.20 damit bijektiv auf das jeweilige Bild.

1. $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ ist streng monoton wachsend.
2. $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist streng monoton fallend.
3. $\tan\big|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
4. $\cot\big|_{]0,\pi[} :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

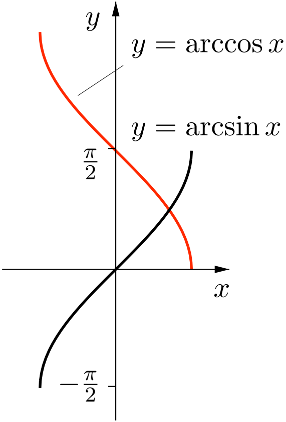
Wegen Satz 4.18 können wir von diesen Einschränkungen aus Satz 5.6 die Umkehrfunktionen angeben.

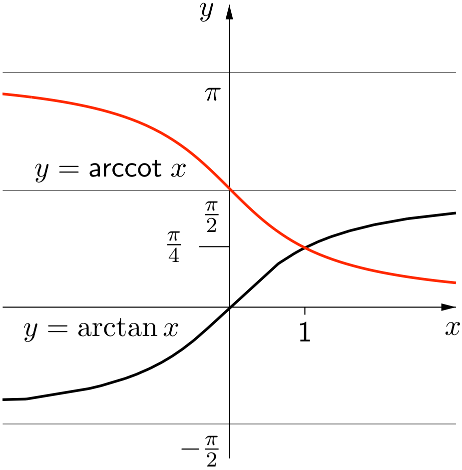
Definition 5.7 (Arcusfunktionen)

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

1. $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
3. $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
4. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus (siehe Bemerkung 4.19):


y
y = arccos x
y = arcsin x
π/2
x
−π/2


y
π
y = arccot x
π/2
π/4
y = arctan x
1
x
−π/2

Beim Rechnen mit den Winkelfunktionen sind folgende Additionstheoreme sehr nützlich:

Satz 5.8 (Additionstheoreme)

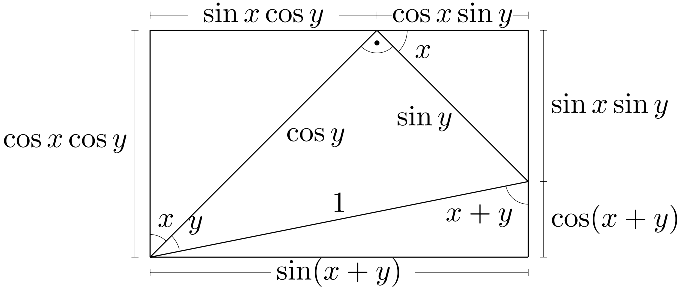
1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man dann

Folgerung 5.9 (Doppelte Winkel)

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme:



Und nun noch ein paar spezielle Werte der Winkelfunktionen (und mit 5.5, 5.8 und 5.9 dann natürlich weitere)

x in Grad x in Rad	0 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Kapitel 6 — Folgen und Stetigkeit

Definition 6.1 (Zahlenfolgen)

Eine ZAHLENFOLGE (oder kurz: FOLGE) ist eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Statt $f(n)$ schreiben wir x_n und schreiben abkürzend $(x_n) := (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ für die Sammlung aller Bilder. x_n heißt n-TES FOLGENGLIED.

Bemerkung: Manchmal macht es Sinn den Definitionsbereich einzuschränken, dieser sollte allerdings dann keine "Lücken" haben.

Beispiele:

- (n) hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$.
- $\left(\frac{1}{n}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}$.
- $\left(\frac{1}{(n+1)(n-4)}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}^{\geq 5}$.

Technisches Hilfsmittel zur Beschreibung des Verhaltens von Zahlenfolgen:

Definition (ε-Umgebung)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ heißt das offene Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$ die ε-Umgebung von a und wird mit $U_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Was bedeutet "Eine Folge läuft gegen einen festen Wert"?

Definition 6.3 (Konvergenz von Zahlenfolgen)

Eine Folge (x_n) heißt KONVERGENT gegen den GRENZWERT a, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \, \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon \, .$$

Wir schreiben: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ oder manchmal auch $x_n \to a \, (n \to \infty)$ und sagen: (x_n) geht gegen a für n gegen unendlich, oder auch: (x_n) konvergiert gegen a.

Satz 6.4

1. Eine konvergente Folge besitzt einen eindeutigen Grenzwert.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ist gleichbedeutend mit $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.
3. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ und $0 \leq x_n \leq y_n$ für alle n, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Und nun halten wir noch fest, was es bedeutet, wenn eine Folge nicht konvergiert. Von "Nicht-Konvergenz" gibt es verschiedene Abstufungen.

Definition 6.5 (Divergenz)

1. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt DIVERGENT.
2. Eine Folge (x_n) heißt UNEIGENTLICH KONVERGENT, wenn gilt

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0\, \forall n \geq n_0 : x_n > M$$

   Wir schreiben in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $x_n \to \infty\,(n \to \infty)$. Analog macht man das für $-\infty$.

Beispiele 6.6:

1. Jede Folge, die konstant wird (d.h. es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = x_m$ für alle $n \geq m$), ist konvergent.
2. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ konvergiert gegen 0. Genauso auch die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ (falls $k > 0$).
3. Ist die Folge (x_n) uneigentlich konvergent und ist $x_n \neq 0$ für alle n, so konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ gegen 0.
4. Die Folge $\left((-1)^n\right)$ ist divergent.

Definition 6.7 (Teilfolge)

Eine TEILFOLGE einer Folge erhält man, indem man aus ihr eine beliebige Anzahl von Gliedern weg lässt (keines, endlich oder unendlich viele), wobei aber unendlich viele Glieder übrigbleiben müssen.

Satz 6.8 (Eigenschaften von Teilfolgen)

1. Ist eine Folge konvergent gegen a, so konvergiert jede Teilfolge ebenfalls gegen a.
2. Hat eine Folge zwei Teilfolgen, die gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren, dann ist die Folge divergent.

Satz 6.9 (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Es seien (x_n) bzw. (y_n) konvergente Folgen und außerdem sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ (hierbei sei $y_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).
5. Ist $x_n \leq y_n$ oder $x_n < y_n$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Definition 6.10 (Grenzwert einer Funktion)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $\hat{x} \in D$. Weiter sei $f : D \setminus \{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat in $\hat{x}$ den Grenzwert $\hat{y}$ wenn gilt:

Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{\hat{x}\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \hat{y}$.

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to\hat{x}} f(x) = \hat{y}$. Die Definition lässt sich auch auf $\hat{x} = \pm\infty$ oder $\hat{y} = \pm\infty$ erweitern.

Definition 6.11 (Stetigkeit)

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt ...

1. ... STETIG IN $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. ... STETIG, wenn f in jedem Punkt aus D stetig ist.

Beispiele 6.12:

1. Die Identität und die Betragsfunktion sind stetig.
2. Die SIGNUM-FUNKTION $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sigma(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

   ist nicht stetig.
3. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4. Die Wurzelfunktionen $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$ sind stetig.

Satz 6.13 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Es seien $f, g : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = a \pm b$.
2. $\lim_{x \to x_0} \big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot a$.
3. $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = a \cdot b$.
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$).

Beispiele 6.12 [cont.]:

5. Die Potenzfunktionen sind stetig und die Polynome sind stetig.

Satz 6.14

1. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f \pm g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ stetig (wobei im letzten Fall $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ vorausgesetzt werden muss).
2. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $g : \hat{D} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset \hat{D}$ stetig in $f(x_0) \in \hat{D}$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

Satz 6.15

Die Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen sind stetig auf ihren Definitionsbereichen.

Beispiele 6.11 [cont.]:

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ ist stetig.
7. $x \mapsto \arctan\big(\sin(x)\big)$ ist stetig.

Nullstellensatz 6.16

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, so gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.

Beispiel: Das Polynom f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ erfüllt $f(-3) = -8 < 0$ und $f(2) = 12$, hat also eine Nullstelle in $[-3,2]$ (sogar drei: -2, -1 und 1).

Zwischenwertsatz 6.17

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a,b]$, so dass $f(x) = y$.

Beispiel [cont.]: Das Polynom f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ nimmt sogar jeden Wert in $[-8,12]$ im Intervall $[-3,2]$ an.