

Aufgaben zum Vorkurs Mathematik für Natur- und Ingenieurwissenschaften

1 Übungsblatt – "Mengen"

Aufgabe 1:

Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

$$A = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid 0 < x < 4, 8\}$$

$$B = \{t \in \mathbb{N}_0 \mid t \text{ ist Teiler von } 24\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist positiv, durch } 3 \text{ teilbar und kleiner als } 21\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 = 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 8 = 9\}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind die vier Mengen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \quad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \quad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Diskutieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$(i) A = B, \quad (ii) A \subseteq B, \quad (iii) A \subset C, \quad (iv) A \in C, \quad (v) A \subset D$$

$$(vi) B \subset C, \quad (vii) B \subset D, \quad (viii) B \in D, \quad (ix) A \in D$$

Aufgabe 3:

Prüfen Sie, ob folgende Mengenformeln gültig sind (Benutzen Sie Mengendiagramme zur Veranschaulichung)

$$(i) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$$

$$(ii) (A \cup B) \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$$

$$(iii) (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

Aufgabe 4:

Beweisen Sie folgende Mengenformeln:

$$(i) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(ii) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Aufgabe 5*:

Beweisen Sie, dass die eine der folgenden Mengenformeln immer richtig, die andere manchmal falsch ist:

$$(i) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$$

$$(ii) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

Aufgabe 6*:

Richtig oder falsch?

(i) (a) $\forall x > 2 \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$

(b) $\exists x > 2 \forall y \in \mathbb{R} : y^2 = x$

(ii) (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2 Übungen zu "Zahlen"

Aufgabe 1:

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes $999^3 = (1000 - 1)^3$ und 1001^4 .

Aufgabe 2:

(i) Schreiben Sie den Bruch als Dezimalzahl (mit Angabe der Periode)

(a) $\frac{3}{8}$, (b) $\frac{3}{7}$, (c) $\frac{311}{5}$

(ii) Schreiben Sie die Dezimalzahl als Bruch ganzer Zahlen in gekürzter Form:

(a) 0,8, (b) $0,7\bar{9}$, (c) $0,15\bar{3}$

Aufgabe 3:

Benutzen Sie die Potenzrechenregeln, um den Ausdruck zu vereinfachen:

(i) $\frac{26 \cdot 5^m - 5^m}{5^{m+2}}$, (ii) $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$

(iii) $\frac{a^n + 2a^{n-1}}{a^{n-2} + 2a^{n-3}}$, (iv) $\left(\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 : \left(\frac{ab^2}{c^2d^2}\right)^4$

Aufgabe 4:

Mit endlichen Summen rechnen:

(i) $\sum_{k=1}^n (3k + 2)$

(ii) $\sum_{k=-5}^5 3$,

(iii) $\sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=-1}^{n-2} 2^{k+1}$

(iv) $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung (durch quadratische Ergänzung):

(i) $x^2 + 6x + 5 = 0$, (ii) $x^2 + 6x + 9 = 0$, (iii) $x^2 + 6x + 13 = 0$

(iv) $x(x - 2) = 3$, (v) $x^2 - 5x + 6 = 0$, (vi) $x^2 - 3x + 3 = x - 1$

Aufgabe 6*:

Zerlegen Sie den quadratischen Ausdruck in ein Produkt von Linearfaktoren:

(i) $x^2 - 8x + 15$, (ii) $4t^2 - 4t + 1$, (iii) $18u^2 - 9u + 1$

3 Übungen zu "Relationen, Ordnung und Betrag"

Aufgabe 1:

Formen Sie in betragsfreie Ausdrücke um:

(i) $|x^2 - 2xy + y^2|$

(ii) $a - |a - |a||$

(iii) $\frac{a + b + |a - b|}{2}$

Aufgabe 2:

Deuten Sie die auftretenden Beträge geometrisch als Abstände von Punkten auf der Zahlengeraden, und bestimmen Sie so die Lösung der Gleichung bzw. Ungleichung:

(i) $|x - 3| = 8$; $|x + 3| = 8$; $|x| \leq 5$; $|x - 3| < 8$; $|x + 3| > 8$; $x^2 > 9$ ($\Leftrightarrow |x| > 3$)

(ii) $|x + 1| = |x - 1|$; $|x - 1| + |x - 2| > 1$; $|x - 1| + |x - 2| = 1$; $|x - 1| + |x + 1| < 2$

(iii) Formen Sie zuerst so um, dass der Koeffizient bei x gleich 1 ist und Sie einen Ausdruck der Form $|x - a|$ erhalten: $|3 - 5x| = 2$; $|4 - 2x| < 3$; $5 - 2|x - 3| \leq 6$.

Aufgabe 3:

Beispiele für Ungleichungen, bei deren Lösung naheliegende Umformungen nicht immer äquivalente Umformungen sind:

(i) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} = 0$

(ii) $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$

Diskutieren Sie die möglichen Vorgehensweisen, wenn bei einer wünschenswerten Umformung keine Äquivalenz, sondern nur die Implikation „ \Rightarrow “ in der Schreibrichtung gilt; z.B.: Welche Beziehung besteht dann zwischen der Zahlenmenge, die man schließlich erhält, und der Lösungsmenge der Gleichung? Was bedeutet es im Grunde, wenn man von einer erforderlichen „Probe“ spricht? Lässt sich u.U. zeigen, dass eine Umformung doch eine äquivalente Umformung ist, wenn man sich auf die Betrachtung des Definitionsbereiches der Gleichung beschränkt?

(iii) Dass die vorhergehende Bestimmung des Definitionsbereiches nützlich sein kann, zeigt die Untersuchung der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

Aufgabe 4:

Lösen Sie folgende Ungleichungen, indem Sie Äquivalenzen wie „ $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ “, oder „ $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \dots$ “, oder „ $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \dots$ “ usw. ausnutzen:

(i) $(x - 1)(x - 3) > 0$

(ii) $\frac{x - 1}{x - 3} > 0$

(iii) $x^3 + 5x^2 \geq 0$

(iv) $x^2 - 4x < 0$

(v) $\frac{2x}{3x+4} \geq 0$

Aufgabe 5*:

Lösen Sie folgende Ungleichungen durch Fallunterscheidung oder durch Umformung in Ungleichungen:

(i) $\frac{2x-5}{x-4} > 1$

(ii) $\frac{3}{x-5} < \frac{2}{x+3}$

(iii) $\frac{x+3}{x} \geq \frac{x}{x+3}$

4 Übungen zu "Abbildungen und Funktionen"

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f , deren Zuordnungsvorschrift $f(x)$ gegeben ist durch:

- i) $\sqrt{1-x^2}$ ii) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ iii) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$
iv) $\sqrt{3|1-x|}$ v) $\frac{1}{|x-1|} + \frac{|x|}{x+2}$

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f , wenn $f(x)$ gegeben ist durch:

- (i) a) $|x|$ b) $|x-1|$ c) $|x+1|$ d) $|x|+1$

- (ii) a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{|x|}$ c) $\frac{1}{x+1}$ d) $\frac{1}{x}+1$

- (iii) $||x|-1|$

- (iv) $\frac{|x^2-9|}{x-3}$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Achsen, wenn $f(x)$ gegeben ist durch:

- i) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ii) $\frac{1}{1+x^2}$ iii) $x^2(2x+1)$

Aufgabe 4:

- (i) Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch: $f(x) = \frac{1+x}{2-x}$

Bilden Sie: $f(3t)$, $f(x-1)$, $f(\frac{1}{x})$

- (ii) Bilden Sie die zusammengesetzten Funktionen $f(g(x))$ und $g(f(x))$:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x-1$

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich der zusammengesetzten Funktion an.

Aufgabe 5:

Welche der Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton und besitzt daher eine Umkehrfunktion?

- (i) $f(x) = x + x^2$ mit

a) $D = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$

b) $D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$

- (ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mit

a) $D = \{x | x > 0\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aufgabe 6*:

(i) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{2-x}$$

(ii) Sei $f : [-\frac{5}{2}, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1 - (2x + 5)^3$

- a) Geben Sie an, in welcher Weise f aus welchen Funktionen zusammengesetzt ist
- b) Zeigen Sie, dass f streng monoton ist. Untersuchen Sie dazu die Funktionen, aus denen f nach a) zusammengesetzt ist.
- c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f .

5 Übungen zu "Trigonometrie"

Aufgabe 1:

Bogen und Gradmaß

- (i) Geben Sie das Bogenmaß des Winkels α vom Gradmaß 135° an.
- (ii) Geben Sie das Gradmaß des Winkels α vom Bogenmaß 5 an.
- (iii) Geben Sie Grad- und Bogenmaß des Winkels α an, der aus einem Kreis mit Radius $r = 3$ einen Bogen der Länge 5 ausschneidet.

Aufgabe 2:

$\cos x$ und $\sin x$ sind als die Koordinaten des Punktes P_x auf dem Einheitskreis definiert (vgl. Skript); daher: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- (i) Bestimmen Sie $\cos x$ und $\sin x$ für (1) $x = \frac{3}{4}\pi$, (2) $x = \frac{7}{4}\pi$

- (ii) Bestimmen Sie $\cos \frac{\pi}{3}$ und $\sin \frac{\pi}{3}$ (gleichseitiges Dreieck)

- (iii) Begründen Sie (am Einheitskreis):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad , \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Aufgabe 3:

Anwendung der Additionstheoreme für \cos und \sin :

- (i) Berechnen Sie $\cos \frac{\pi}{3}$ und $\sin \frac{\pi}{3}$:

$$\cos \frac{\pi}{6} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{6} \quad , \quad \cos \frac{2\pi}{3} \quad , \quad \sin \frac{2\pi}{3}$$

- (ii) Zeigen Sie, daß für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

- (iii) Vereinfachen Sie: $\sqrt{1 + \cos x} \cdot \sqrt{1 - \cos x}$

Aufgabe 4:

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion über einem geeigneten Intervall und diskutieren Sie die Wirkung der Koeffizienten und der additiven Konstanten:

$$f_1(x) = \sin x \quad , \quad f_2(x) = 2 \sin x \quad , \quad f_3(x) = -2 \sin x$$

$$f_4(x) = \sin(2x) \quad , \quad f_5(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$f_6(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f_7(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 5:

Beziehungen zwischen \sin , \cos , \tan , \cot . Vereinfachen Sie:

(i) $\cos x + \sin x \tan x$

(ii) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x}$.

Aufgabe 6*:

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

- (i) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sin(\arcsin x + \arccos x)$, und zeigen Sie damit, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

- (ii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion der Funktion

$$f : \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{3} \tan x^2.$$

6 Übungen zu "Folgen und Stetigkeit"

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) den angegebenen Grenzwert a hat:

(i) $(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), a = 0$

(ii) $(x_n) = \left((-1)^n \frac{b^n}{\sqrt{n}}\right)$ (wobei $|b| < 1$), $a = 0$

(iii) $(x_n) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $a = 0$ (Erweitern mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$).

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n) = ((-1)^n + \frac{n}{n+1})$ divergent ist. (Untersuchen Sie dazu die Teilfolgen (x_{2k}) und (x_{2k+1})).

Aufgabe 3:

Berechnen Sie den Grenzwert:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{2x^2 + 6x}$

Aufgabe 4:

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+2)}$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f , etwa vorhandene Nullstellen von f , die Grenzwerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow -2$, und skizzieren Sie den Graph von f aufgrund dieser Informationen.

Aufgabe 5*:

Zeigen Sie durch den Nachweis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, dass die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x^4 + 1}$$

stetig ist.

Aufgabe 6*:

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei reelle Folgen mit $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weisen Sie mit der Definition der Konvergenz nach, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

gilt.

7 Übungen zu "Differenzierbarkeit"

Aufgabe 1:

- (i) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) = 3x^2 - 2x$$

in $x_0 = \frac{1}{2}$ (also im Punkt $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$), und geben Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen in $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ an.

- (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

- (1) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph von f in $(x_0, f(x_0))$ die Steigung -1 hat.
(2) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $y = -x$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Ableitung von $\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}$ oder von $x^2\sqrt{x^3}$, indem Sie

- (i) direkt die Differentiationsregeln anwenden,
(ii) erst mit Hilfe der Potenzregeln vereinfachen, und dann die erforderliche Differentiationsregel benutzen.

Aufgabe 3:

Vereinfachen Sie (falls möglich) folgende Funktionsausdrücke zuerst mit Hilfe der Potenzregeln, und berechnen Sie dann die Ableitung:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} \sqrt[3]{x^2} & \text{(ii)} \sqrt[3]{x^2 + 1} & \text{(iii)} \sqrt[3]{(x+1)^2} & \text{(iv)} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \\ \text{(v)} \frac{1}{x+1} & \text{(vi)} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{(vii)} \frac{1}{\sqrt{1+x}} & \text{(viii)} \sqrt[5]{3x(x-1)^7} \end{array}$$

Aufgabe 4:

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} x\sqrt{x+1} & \text{(ii)} \frac{x}{x-1} & \text{(iii)} \tan x - \cot x & \text{(iv)} \frac{x}{\sqrt{4-x}} \\ \text{(v)} \arcsin x \arccos x & \text{(vi)} \sin[\sin(\sin x)] & \text{(vii)} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} & \\ \text{(viii)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} \text{ (Achtung! etwas schwierig)} & & \text{(ix)} \arctan \frac{1+x}{1-x} & \end{array}$$

Vereinfachen Sie die Ableitungen, wenn es möglich ist.

Aufgabe 5*

Bilden Sie die Verkettungen $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$ und geben Sie jeweils ihre Definitionsbereiche und Ableitungen an.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ und $g(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x - 1$

Aufgabe 6*

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass $g(x) = x^2 f(x)$ in 0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(0)$.

8 Übungen zu "Anwendungen der Differentialrechnung"

Aufgabe 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie lautet die n -te Ableitung von

(i) $\frac{x}{1-x}$

(ii) $\sin 2x$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die relativen Extrema von $f(x) = x^4 + ax^2$.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x^2}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^k}, k = 1, 2, 3, 4$

Aufgabe 4:

Was ist der maximale Flächeninhalt eines Rechtecks mit dem Umfang 1?

Aufgabe 5*:

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion mit $n + 1$ Nullstellen. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass mindestens ein $y \in]a, b[$ mit $f^{(n)}(y) = 0$ existiert.

9 Übungen zu "Integralrechnung"

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen, indem Sie ggf. die „einfachen Regeln“ benutzen:

$$(i) \frac{1}{(x+1)^2} \quad , \quad \frac{4}{(x-3)^5} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x+2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$(ii) \sin(x+2) \quad , \quad \cos(3x-1)$$

$$(iii) \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad \frac{1}{1+(x-2)^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$
$$\frac{1}{4+x^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \quad , \quad \frac{1}{4+(x-2)^2} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie durch partielle Integration:

$$(i) \int x^2 \cos x \, dx$$

$$(ii) \int \arctan x \, dx$$

$$(iii) \int x \arctan x \, dx$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie durch Substitution:

$$(i) \int \frac{1}{(3x+2)^2} \, dx, \quad \int (x+1)^n \, dx, \quad \int (x^2+7)^8 x \, dx$$

$$(ii) \int \cos^5 x \sin x \, dx \quad , \quad \int \sin(ax) \, dx \quad , \quad \int \cos(ax) \, dx$$

$$(iii) \int \sin(ax+b) \, dx \quad , \quad \int \sin^3 x \, dx \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} \, dx$$

$$(iv) \int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2} \, dx \quad , \quad \int \frac{1}{9x^2+4} \, dx$$

Aufgabe 4:

Benutzen Sie die Formel $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$, um folgende Integrale zu berechnen:

$$(i) \int \tan x \, dx$$

$$(ii) \int \frac{2}{3x-5} \, dx$$

$$(iii) \int \frac{2x}{x^2+3} \, dx$$

Aufgabe 5*:

Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$(i) \int_{-1}^2 x^2 \sqrt{1+x^3} dx, \quad (ii) \int_0^{\pi} x \cos x dx,$$

$$(iii) \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx, \quad (iv) \int_{-1}^0 x \sqrt{x+1} dx.$$

Aufgabe 6*:

Berechnen Sie folgendes Integral, indem Sie den Integranden zuerst in eine Summe zerlegen, so dass ein Summand \ln , der andere \arctan liefert:

$$(i) \int \frac{x+1}{(x+3)^2+1} dx$$

$$(ii) \int \frac{3x+1}{x^2+4} dx$$

10 Übungen zu "Logarithmus- und Exponentialfunktion"

Aufgabe 1:

Logarithmus- und Exponentialfunktion differenzieren.

- (i) Beachten Sie, dass es manchmal zweckmäßig ist, einen Ausdruck zuerst mit Hilfe der Eigenschaften von \ln zu vereinfachen, und erst dann zu differenzieren:

Bestimmen Sie die Ableitung, wenn $f(x)$ gegeben ist durch:

(a) $\ln(1+x^2)$ (b) $\ln \sqrt{1+x^2}$ (c) $\ln(\ln x)$ (d) $\ln(x^2 \ln x)$ (e) $x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$
(f) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (g) $\ln \sqrt[3]{x^5}$

- (ii) Bestimmen Sie die Ableitung, wenn $f(x)$ gegeben ist durch:

(a) e^{-x} (b) e^{3x-1} (c) $e^{\sin x}$ (d) $e^{\frac{1}{x}}$ (e) $e^{3x} \cos 2x$ (f) $x^2 e^{-x}$ (g) $\ln(x^2 e^{-x})$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) 2^x (b) x^x (c) x^{x^x} (d) $\sin x^{\arctan x}$

Hinweis: $a^b = e^{b \ln a}$.

Aufgabe 3:

Partielle Integration:

- (i) $\int x \ln x dx$
(ii) $\int \ln x dx$
(iii) $\int x^2 e^x dx$
(iv) $\int e^x \cos x dx$

Aufgabe 4:

Finden Sie eine geeignete Substitution: $\int \frac{(e^x - 2)e^x}{e^x + 1} dx$

Aufgabe 5*:

Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

11 Übungen zu "Vollständige Induktion"

Aufgabe 1:

Beweisen Sie die arithmetische und die geometrische Summenformel aus Kapitel 2 "Zahlen":

$$\text{i) } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ für eine reelle Zahl } q \neq 1$$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Gleichungen erfüllt sind. Achten Sie hierbei auf den korrekten Induktionsanfang.

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, & \text{ii) } \sum_{k=1}^n (k \cdot k!) = (n+1)! - 1, \\ \text{iii) } \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}, & \text{iv) } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{array}$$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen mittels vollständiger Induktion:

$$\text{i) Es sei } x > -1 \text{ eine feste reelle Zahl. Dann gilt: Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ist } (1+x)^n \geq 1+nx.$$

$$\text{ii) Für alle } n \in \mathbb{N}^{\geq 5} \text{ gilt } 2^n > n^2.$$

Aufgabe 4:

Benutzen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion, um zu zeigen, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

$$\text{i) } 3 \text{ teilt } 2^{2n+1} + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{ii) Es ist } f(x) = \frac{x}{1-x}. \text{ Dann ist } f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: „ a teilt b “ bedeutet, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $b = a \cdot k$ ist.

12 Übungen zu "Komplexe Zahlen"

Aufgabe 1:

Berechnen Sie $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots$. Was fällt auf? Berechnen Sie weiter $i^3 - i^4, i^3(i + i^6), i + i^2 + i^3$.

Aufgabe 2:

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in ihrer „Normalform“ $a + bi$ dar und zeichnen Sie die Zahlen in die komplexe Ebene ein:

- (a) $(1 + 2i)^4$, (b) $(3 + 2i)^2 + (7 - 3i)(-2 + i)$,
(c) $\frac{2 + 6i}{3 - 5i}$, (d) $\frac{1}{1 - i}$,
(e) $\frac{3 + 2i}{(1 - 2i)(3 + i)}$, (f) $\frac{(6 - 3i)(2 + 4i)}{3 - 4i}$, (g) $\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die komplexe Zahl z , die Lösung folgender Gleichung ist:

- (i) $(1 + 3i)z + 3 + i = z$,
(ii) $\frac{1 - iz}{1 + iz} = \frac{1 + i}{1 - i}$,
(iii) $\left(\frac{-3 + 11i}{3 - i} + \frac{-11 + 10i}{1 - 4i} \right) z = 24 - 10i$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der folgenden komplexen Zahlen, und zeichnen Sie die Zahlen als Punkte in die komplexe Zahlenebene ein:

- (a) $i^3 + i^4$, (b) $3i$, (c) $(3 + 2i) \cdot (2 - 3i)$, (d) $(1 + 2i) \cdot (1 - 2i)$,
(e) $\frac{5 - 5i}{2 + i}$, (f) $\frac{1}{i}$, (g) $\frac{1}{1 + i} + \frac{1}{1 - i}$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle z mit $z^2 = 5 + 12i$.

Aufgabe 6*:

Lösen Sie durch quadratische Ergänzung die quadratische Gleichung:

- (i) $z^2 - 4z + 7 = 0$,
(ii) $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

13 Übungen zu "Gleichungen mit komplexen Zahlen"

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung in \mathbb{C} , und skizzieren Sie die zugehörige Punktmenge in der komplexen Ebene:

- (a) $z + \bar{z} = 6$, (b) $z - \bar{z} = 6i$, (c) $z \cdot \bar{z} - z + \bar{z} = 1$,
(d) $z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} = 0$, (e) $(z - i)^2 = (z + i)^2$

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Punktmenge, die beschrieben wird durch folgende Gleichung bzw. Ungleichung:

- (a) $|z| = 2$, (b) $|z - 2i| = 1$, (c) $|z + 2| = 1$,
(d) $|z + 2| < 1$, (e) $|z + 1 - i| \geq 1$, (f) $\left| \arg z - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{\pi}{2}$,
(g) $|\arg(z - 1)| \leq \frac{\pi}{2}$

Lösen Sie diese Aufgabe rechnerisch, und skizzieren Sie dann die Lösungsmenge oder bestimmen Sie die Lösungsmenge direkt durch geometrische Argumentation.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Polarkoordinaten und die Real- und Imaginärteile folgender komplexen Zahlen:

- (a) $2e^{\pm \frac{\pi}{6}i}$, (b) $e^{(1+i)\frac{\pi}{6}}$, (c) $(1 + \sqrt{3}i) e^{-\frac{\pi}{6}i}$, (d) $\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ (Veranschaulichen Sie am Einheitskreis die Lösungen, und erläutern Sie, warum diese die Lösungen sind).

Aufgabe 5:

Tragen Sie die Zahlen z als Punkte in die komplexe Ebene ein, und geben Sie den Betrag, das Argument und die Polarkoordinatendarstellung an:

- (a) $z = -3$, (b) $z = -3i$, (c) $z = 1 - i$, (d) $z = -1 + i$,
(e) $z = |1 + i|$

Aufgabe 6*:

Lösen Sie die Ungleichungen, und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Ebene:

- (a) $\left| \frac{z - i}{z + i} \right| \leq 1$, (b) $|\arg((1 + i)z)| \leq \frac{\pi}{4}$, (c) $\left| \arg \frac{z}{i} \right| < \frac{\pi}{4}$

14 Übungen zu "Komplexe Polarkoordinaten und Wurzeln"

15 Übungen zu "Lineare Gleichungssysteme"

Aufgabe 1:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -x_2 & = 1 \\ -7x_1 & +3,5x_2 & = 7 \end{array}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & -2x_2 & = -1 \\ -x_1 & +3x_2 & = 5 \\ 2x_1 & +x_2 & = 4 \end{array}$$

Aufgabe 3:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 6 \\ 2x_1 & -2x_2 & = 6 \\ x_1 & & +x_3 = 5 \end{array}$$

Aufgabe 4:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +4x_4 = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +4x_4 = 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 = -4 \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 = 2 \end{array}$$

Aufgabe 5*

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & -2x_2 & = -1 \\ -x_1 & +3x_2 & = 5 \\ x_1 & +4x_2 & = 2 \end{array}$$

Aufgabe 6*

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & +x_2 & = -4 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 = 3 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 = 7 \end{array}$$

16 Übungen zu "Vektoren"

Aufgabe 1:

Drücken Sie für ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overrightarrow{AB} = a$ und $\overrightarrow{AD} = b$ die Vektoren \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{BD} mit Hilfe von a und b aus.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten eines beliebigen Vierecks in der Ebene miteinander, so erhält man ein Parallelogramm.

Aufgabe 3:

a, b seien Vektoren, die nicht beide Null sind. Diskutieren Sie Bedingungen für das Bestehen folgender Beziehungen:

(a) $|a + b| = |a| + |b|$, (b) $|a + b| = |a| - |b|$,

(c) $|a + b| > |a| + |b|$, (d) $|a + b| < |a| + |b|$,

(e) $|a + b| = |a|$, (f) $|a + b| = 0$

17 Übungen zu "Skalar- und Vektorprodukt"

Aufgabe 1:

Sei α der Winkel bei A in dem Dreieck $\triangle ABC$ mit

$$A = (2, -1, 1)^T, \quad B = (1, -3, -5)^T, \quad C = (3, -4, -4)^T$$

Bestimmen Sie $\cos \alpha$ (nicht berechnen).

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie einen Vektor \vec{x} , der linear abhängig von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, senkrecht steht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Länge 1 hat.

Aufgabe 3:

Wo liegen alle Vektoren, die mit einem festen Vektor $\vec{a} \neq 0$ ein festes Skalarprodukt haben?

Aufgabe 4:

Berechnen Sie

(i) Das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

(ii) Das Spatprodukt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:

Geben Sie alle Lösungen von $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ an für

(i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6*:

Beweisen Sie den Satz des Thales vektoriell.

18 Übungen zu "Geraden und Ebenen"

Aufgabe 1:

(i) Geben Sie die Parameterdarstellung an

a) der Geraden durch die Punkte $P = (1, 2)^T, Q = (-2, 5)^T$

b) der Geraden mit der Gleichung $y = -x + 3$

c) der Strecke von $A = (-1, 2)^T$ nach $B = (3, 1)^T$

(ii) Geben Sie die Normalenform der Geraden mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ an.}$$

(iii) Welche der Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4, 5 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad g_2 : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6, 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g_3 : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad g_4 : x = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sind parallel?

(iv) Liegen die drei Punkte $A = (2, 2, 3)^T, B = (-2, 3, 1)^T, C = (-6, 4, 1)^T$ auf einer Geraden? Diskutieren Sie verschiedene Möglichkeiten, dies zu prüfen.

(v) Beweisen Sie vektoriell, dass die Schwerlinien (Seitenhalbierenden) eines Dreiecks durch einen Punkt gehen. Berechnen Sie diesen Schwerpunkt für das Dreieck mit den Ecken $(-1, -1)^T, (3, 0)^T, (-2, 4)^T$.

(vi) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Mittelsenkrechten auf der Strecke mit den Endpunkten $A = (2, 1)^T, B = (-1, 3)^T$.

Aufgabe 2:

(i) Liegen die vier Punkte

$$A = (0, 2, 2)^T, B = (2, 0, -1)^T, C = (3, 4, 0)^T, D = (0, -1, 1)^T$$

in einer Ebene?

(ii) Geben Sie die Normalenform der Gleichung der Ebene in vektorieller Schreibweise an, wenn die Ebene die Gleichung $2x - y + 2z = 12$ hat.

(iii) Durch folgende Gleichungen sind vier Ebenen gegeben:

$$e_1 : x + 2y - 2z = 5, \quad e_2 : 3x - 6y + 3z = 2, \quad e_3 : 2x + y + 2z = -1, \quad e_4 : x - 2y + z = 7$$

Stellen Sie fest, welche der Ebenen parallel bzw. senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 3:

(i) Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung $x + y = 3$

a) in der Ebene,

b) im Raum?

(ii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

und der Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

indem Sie die Ebene zunächst in Normalenform bringen.

Aufgabe 4:

Haben die Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

einen Schnittpunkt?

19 Übungen zu "Partialbruchzerlegung"

Aufgabe 1:

Faktorisieren Sie so weit wie möglich

(i) $x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$

(ii) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

(iii) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$

(iv) $x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x - 20$

(v) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

Aufgabe 2:

Führen Sie die Polynomdivision durch

(i) $\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

(ii) $\frac{-2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 5x}{-2x^2 + x - 3}$

(iii) $\frac{x^4 + x^2 + 4x}{x^2 + 2}$

(iv) $\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(v) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

(vi) $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$

(vii) $\frac{x^n - 1}{x - 1}$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

(i) $\frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$

(ii) $\frac{x - 6}{x^2 - 4}$

(iii) $\frac{x - 1}{(x - 2)^2}$

(iv) $\frac{9x^2 + 34x + 29}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

Aufgabe 4*:

Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\frac{5x^2 + 4 - 7x}{(x - 2)(x^2 + 1)}$ mit einem Ansatz $\frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$.