Kapitel 1 — Mengen

Definition 1.1 (Menge)

Unter einer MENGE verstehen wir eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen.
Diese Objekte heißen dann ELEMENTE der Menge.

Beschreibung von Mengen durch ...

- ... Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\ldots\}$.
- ... Angabe einer Eigenschaft E, die die Elemente beschreibt:

$$\{x \,|\, x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Beispiele:

- Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN
  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN MIT NULL
  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ definieren wir
  $\mathbb{N}^{\geq k} := \{k, k+1, k+2, \ldots\}$.
- Die Menge der GANZEN ZAHLEN: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Die Menge der RATIONALEN ZAHLEN als Menge der (gekürzten) Brüche: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \text{ ganze Zahlen und } b > 0 \right\}$.
- Die Menge der REELLEN ZAHLEN: $\mathbb{R}$.
- Die Menge der POSITIVEN bzw. NICHT NEGATIVEN REELLEN ZAHLEN: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\quad \mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- Die Menge der KOMPLEXEN ZAHLEN: $\mathbb{C}$.
- Die LEERE MENGE $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Schreibweisen:

- Ist a ein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $a \in M$.
- Ist a kein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $a \notin M$.

Beispiel: $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$ aber $-3 \notin \mathbb{N}$.

Definition 1.2 (Mengenoperationen)

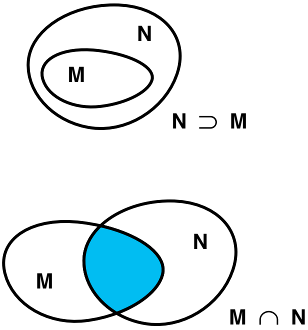
Es seien M und N Mengen.

1. Die VEREINIGUNGSMENGE $M \cup N$ ist die Menge der Elemente, die in M oder in N enthalten sind. Also $M \cup N = \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$.
2. Die SCHNITTMENGE $M \cap N$ ist die Menge der Elemente, die in M und in N enthalten sind. Also $M \cap N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}$.
3. M heißt Teilmenge von N, wenn alle Elemente die in M enthalten sind auch in N enthalten sind. Wir schreiben dann $M \subset N$ oder $N \supset M$.
4. Die Differenzmenge $N \setminus M$ ist die Menge der Elemente, die in N enthalten sind, aber nicht in M, also $N \setminus M := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}$.
5. Ist $M \subset N$ so ist das KOMPLEMENT VON M (BEZÜGLICH N) durch $M^c := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}$ definiert.

Bemerkung 1.3

- Es gilt in jedem Fall $\emptyset \subset M \subset M$.
- In 4. muss M keine Teilmenge von N sein. Ist zum Beispiel $M \cap N = \emptyset$, so ist $N \setminus M = N$ und $M \setminus N = M$.
- Ist aber $M \subset N$ so ist $N \setminus M = M^c$ und $M \setminus N = \emptyset$.
- Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn die eine jeweils eine Teilmenge der anderen ist. Also $M = N$ genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.

Graphisch kann man die Mengenoperationen gut mit Hilfe von VENN-DIAGRAMMEN darstellen:



Satz 1.4 (Rechenregeln für Mengenoperationen)

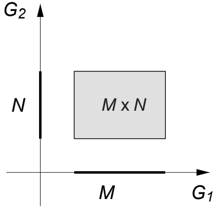
1. $M \cup N = N \cup M$ und $M \cap N = N \cap M$.
2. $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$ und $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.
3. $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.
4. $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
5. $(M^c)^c = M$.
6. $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$ und $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$.
7. $M \cap N = \big(M \cup N\big) \setminus \big((M \setminus N) \cup (N \setminus M)\big)$.
8. $(M \setminus N) \cup (N \setminus M) = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.

Definition 1.5 (Kartesisches Produkt)

1. Das KARTESISCHE PRODUKT zweier Mengen M und N wird mit $M \times N$ bezeichnet und enthält als Elemente die geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$. Also:

$$M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M \text{ und } n \in N\}\,.$$

Ist $M \subset G_1$ und $N \subset G_2$ so kann man das kartesische Produkt wie folgt darstellen:



Definition 1.5 [cont.]

2. Das kartesische Produkt mehrerer Mengen $M_1, \ldots, M_k$ wird analog mit Hilfe geordneter k-Tupel definiert:
$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k \\ &= \{(m_1, m_2, \ldots, m_k) \,|\, m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2 \\ &\qquad \text{und } \ldots \text{ und } m_k \in M_k\}. \end{aligned}$$
3. Stimmen die Mengen überein, so schreiben wir auch $M^2 = M \times M$, $M^3 = M \times M \times M$, usw.

Bemerkung 1.6

- Als Mengen stimmen $M \times N$ und $N \times M$ i.A. nicht überein.
- Als Mengen stimmen $(M \times N) \times P$ und $M \times N \times P$ und $M \times (N \times P)$ i.A. nicht überein.

Definition 1.7 (Quantoren)

Ist A eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge M sinnvoll ist, so schreiben wir

$$\forall x \in M : A(x)\,,$$

wenn jedes Element aus M die Eigenschaft A hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ und

$$\exists x \in M : A(x)\,,$$

wenn es mindestens ein Element aus M gibt, das die Eigenschaft A hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

Beispiel: Das kartesische Produkt von k Mengen lässt sich wie folgt schreiben:

$$M_1 \times \ldots \times M_k = \big\{(m_1, \ldots, m_k) \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, k\} : m_i \in M_i\big\}\,.$$

Kapitel 2 — Zahlen

Uns bisher bekannte Zahlenbereiche sind

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \underbrace{(\subset \mathbb{C})}_{\text{später}} .$$

Definition 2.1 (Rationale und irrationale Zahlen)

1. $\mathbb{R}$ ist die Menge der Dezimalbrüche.
2. $\mathbb{Q}$ ist die Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche. Dabei wird allerdings die Periode 9 ausgeschlossen, indem man die Zahl $n, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k \overline{9}$ mit der Zahl $n, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} b_k$ identifiziert mit $b_k = a_k + 1$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.
3. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbrüche, heißen IRRATIONALE ZAHLEN.

Beispiele irrationaler Zahlen:

- Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge 1 ist irrational. Diese Länge ist $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$
- Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 ist irrational. Diese Länge ist $\pi = 3{,}141592654\ldots$
- Die Eulersche Zahl $e = 2{,}718281828\ldots$ ist irrational.

Definition 2.2 (Rechenoperationen)

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ so sind die Rechenoperationen $x + y$, $x - y$, xy und für $y \neq 0$ auch $\frac{x}{y}$ erklärt.

Satz 2.3 (Rechenregeln)

1. $x + y = y + x$ und $xy = yx$ (Kommutativgesetze)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $x(yz) = (xy)z$ (Assoziativgesetze)
3. $x(y + z) = xy + xz$ (Distributivgesetz)

Als direkte Konsequenz erhalten wir die drei Binomischen Formeln

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Definition 2.4 (Kurzschreibweisen für Summen und Produkte)

Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ so schreiben wir

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ und
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Dabei kann der Laufindex eine beliebige Variable sein, etwa

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j .$$

Es gelten die folgenden Vereinbarungen wenn $m > n$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Rechenregeln und Beispiele:

- $a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)$
- $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$ und
- $\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$.
- Indexverschiebung: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t}$.
- Arithmetische Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- geometrische Summenformel: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für eine reelle Zahl $q \neq 1$.

Definition 2.5 (Potenzen)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^n := \prod_{k=1}^{n} a$.

Insbesondere gilt also $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$ aber $0^n = 0$ für $n > 0$.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

$a \in \mathbb{R}$ heißt die $\textsc{Basis}$ und $n \in \mathbb{Z}$ der $\textsc{Exponent}$ der $\textsc{Potenz}$ a^n.

Satz 2.6 (Potenzregeln)

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^m a^n = a^{n+m}$ und $a^n b^n = (ab)^n$ sowie
2. $(a^m)^n = a^{mn}$

falls die Ausdrücke definiert sind.

Definition 2.7 (Quadratwurzel)

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $b^2 = a$ so definieren wir

$$\sqrt{a} := \begin{cases} b & \text{falls } b \geq 0 \\ -b & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Die stets nicht-negative Zahl $\sqrt{a}$ heißt Quadratwurzel von a.

Satz 2.8 (Existenz der Quadratwurzel)

Die Gleichung $x^2 = a$ besitzt ...

- ... für $a < 0$ keine reelle Lösung,
- ... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und
- ... für $a > 0$ die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Der Satz 2.8 lässt sich noch verallgemeinern:

Satz 2.9 (Höhere Wurzeln)

1. Ist n eine natürliche ungerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung und diese bezeichnen wir mit $x = \sqrt[n]{a}$.
2. Ist n eine natürliche gerade Zahl mit $n \neq 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ ...
   - ... für $a < 0$ keine reelle Lösung,
   - ... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und
   - ... für $a > 0$ die zwei reellen Lösungen, die wir mit $x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ bezeichnen.

Bemerkung 2.10

Wir setzen nun $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$ und $n \neq 0$, und definieren(!) $a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dann kann man zeigen, dass die Rechenregeln aus Satz 2.6 weiterhin gültig bleiben.
Somit haben wir das Potenzieren von ganzen auf rationale Exponenten erweitert.

Satz 2.11 (pq-Formel)

Es sei $D := p^2 - 4q$. Dann besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ...

- ... die eindeutige (reelle) Lösung $x = -\dfrac{p}{2}$ falls $D = 0$,
- ... die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = -\dfrac{p + \sqrt{D}}{2}$ und $x_2 = -\dfrac{p - \sqrt{D}}{2}$ falls $D > 0$, und
- ... keine reelle Lösung falls $D < 0$.

Die Zahl D heißt Diskriminante der quadratischen Gleichung.

Definition 2.12 (Fakultät und Binominalkoeffizient)

1. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ ist die FAKULTÄT definiert als

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k \,.$$

   Also gilt insbesondere $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

2. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der BINOMIALKOEFFIZIENT definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Satz 2.13 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten)

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Additionstheorem).

Begründung: Es ist $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Wegen des Additiontheorems lassen sich die Binomialkoeffizienten im PASCALSCHEN DREIECK anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & \binom{n}{k} & & & & & n \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \\
 & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Satz 2.14 (Binomischer Lehrsatz)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$