Реферат

В работе было рассматривается математическая модель гликолитического осциллятора Хиггинса, показаны некоторые детерминированные и стохастические свойства. Были выявлены значения параметров системы, для которых характерны индуцированные шумом смешанные осцилляции, в результате последовательности экспериментов сделны выводы о поведении осцилляций, обнаружена область больших значений функции стохастической чувствительности, в которой система чувствительна к малым шумам, проведено исследование стохастической устойчивости траекторий системы. Работа содержит описание методов проведения численных экспериментов, и анализ их результатов.

Содержание

1 Обозначения и сокращения

а

2 Введение

Построение и анализ математических моделей являются важными инструментами научного исследования различных явлений, в том числе физических и химических. В настоящее время существует возможность эффективно применять применять методы исследования моделей, опирающиеся на применение компьютерных технологий для постановки численных экспериментов и обработки их результатов. В частности представляет интерес исследование с помощью таких методов моделей химических процессов, каковой является и гликолитический осциллятор Хиггинса. Эта модель описывает колебательную биохимическую реакцию, в процессе которой осуществляется рапад глюкозы и образование новых соединений.[ПОЧТИ ЦИТАТА http://library.biophys.msu.ru/LectMB/lect08.htm Г.Ю.Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии] Этот процесс имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в различных биологических системах, например в клетках живого организма, потому что в значительной мере он определяет энергетические процессы в клетке. Также гликолиз исследуется с медицинской точки зрения, так как по энергопотреблению клеток организма можно делать выводы о здоровье или патологических изменениях этих клеток.

Впервые модель гликолиза в том виде, в котором она исследуется в данной работе была предложена Хиггинсом (Higgins) в 1964 году. В пункте ПУНКТ исследуются детерминированные свойства системы. В пункте ПУНКТ изучаются стохастические свойства, особенный интерес здесь представляет устойчивость предельных циклов и их чувствительность к малым случайным возмущениям, потому что эти характеристики в значительной мере характеризует протекание процесса, описываемого моделью, в естественной среде. ЧТО-ТО ПРО СМЕШАННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ. ЧТО-ТО ПРО ФСЧ

КАКАЯ-ТО СВЯЗЬ С ПРЕДЫДУЩИМИ ИССЛЕДОВАНИЯМИ

3 Основная часть

3.1 Обзор литературы

нет

3.2 Постановка задачи работы

сложно

3.3 Методика проведения наблюдений и измерений

3.3.1 Описание модели

Модель гликолитического осциллятора Хиггинса описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy; \\ \dot{y} = py\left(x - \dfrac{1+q}{q+y}\right); \\ p > 0; \\ q > 0; \end{cases} \qquad (1)$$

В определении системы фигурируют параметры p и q, которые являются действительными коэффициентами, не зависящими от каких-либо переменных. Ограничения на неотрицательность параметров возникают из физического смысла описываемого моделью процесса.

3.3.2 Детерминированные свойства модели

Свойства системы первого приближения

Для исследования детерминированных свойств модели воспользуемся теоремой Гробмана-Хартмана, утверждающей, что в окрестности неподвижной точки поведение исследуемой системы совпадает с поведением ее линеаризации. Из этого следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки фазовый портрет системы (1) совпадает с портретом линеаризованной системы, в случае, если система (1) имела портрет типа «узел», «фокус» или «седло». Вычислим точку покоя для исследуемой модели из условий равенства нулю производных:

$$\begin{cases} 1 - xy = 0; \\ py\left(x - \dfrac{1+q}{q+y}\right) = 0; \end{cases}$$

При действующих ограничениях на p и q получаем, что единственной точкой покоя является точка (1,1) при любых допустимых значениях p и q. Вычислим также линеаризованную систему в точке покоя:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1) - (y-1); \\ \dot{y} = p\,(x-1) + p\left(1 - \dfrac{q}{1+q}\right)(y-1); \end{cases}$$

Сделав замену $\widetilde{x} = x - 1, \quad \widetilde{y} = y - 1$ получаем:

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = -\widetilde{x} - \widetilde{y}; \\ \dot{\widetilde{y}} = p\widetilde{x} + p\left(1 - \dfrac{q}{1+q}\right)\widetilde{y}; \end{cases} \qquad (2)$$

Тип фазового портрета определяется собственными числами марицы системы первого приближения. В нашем случае это система (2) и её характеристическое уравнение имеет вид:

$$(-1-\lambda)\left(p\left(1 - \frac{q}{1+q}\right) - \lambda\right) + p = 0$$

Его корни, собственные числа матрицы системы (2), соответственно, имеют вид:

$$\lambda_1 = SAS; \lambda_2 = KEK$$

Так как собственные числа явно зависят от p и q, найдем зависимость типа фазового портрета от значений параметров p и q, больших ноля, и отобразим результат на бифуркационной диаграмме (см. рисунок 3.1).

Нумерованные области между кривыми, изображенными на рисунке 3.1 соответствуют определенным типам фазовых портретов при значения p и q таких, что точка (p,q) принадлежит данной области. Примеры каждого типа фазовых портретов системы приведены ниже(см. рисунки 3.2-3.5).

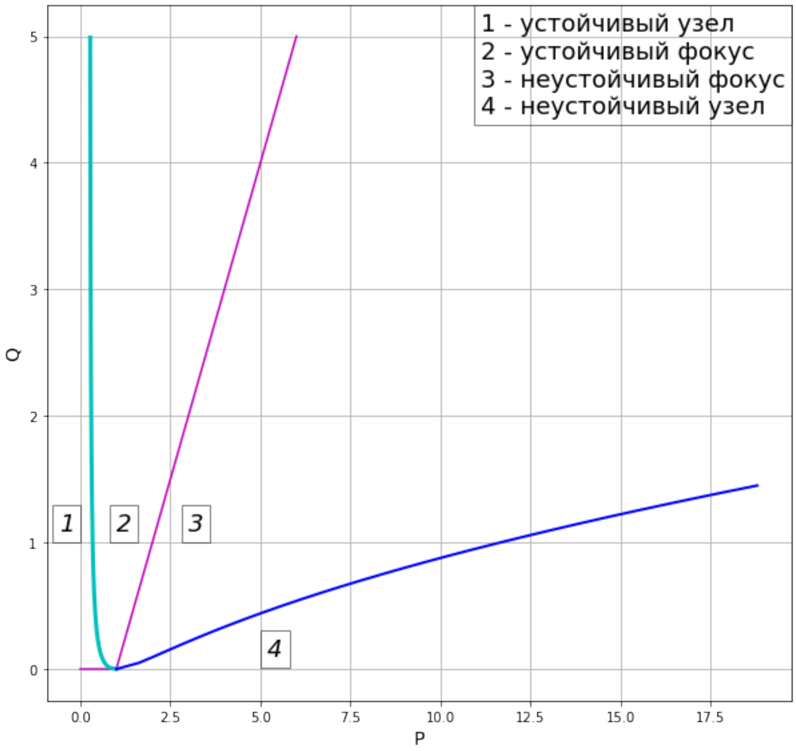

Рисунок 3.1 - бифуркационная диаграмма

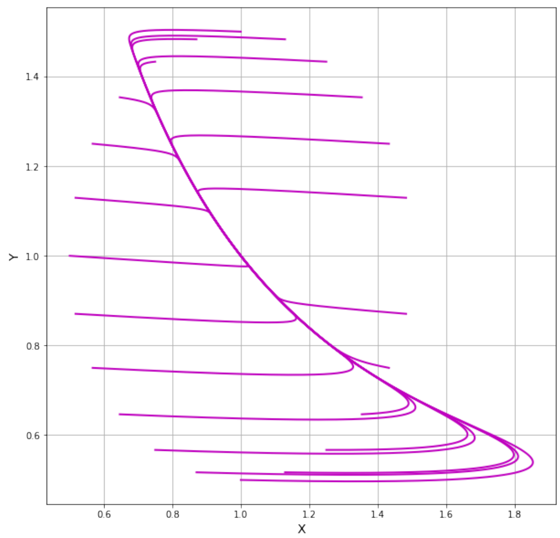

Рисунок 3.2 - устойчивый узел, p=0.05, q=1

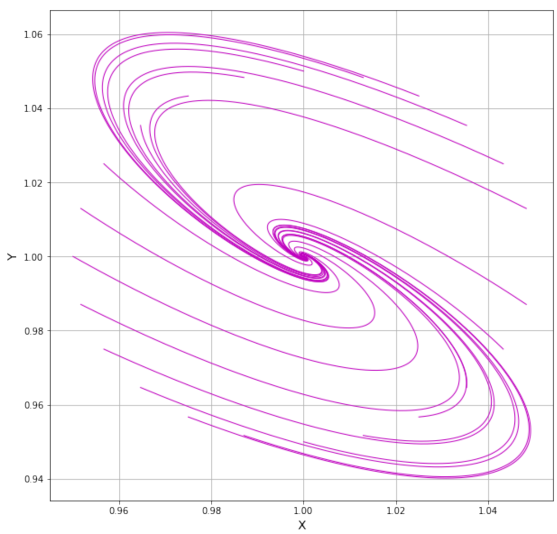

Рисунок 3.3 - устойчивый фокус, p=0.7, q=1

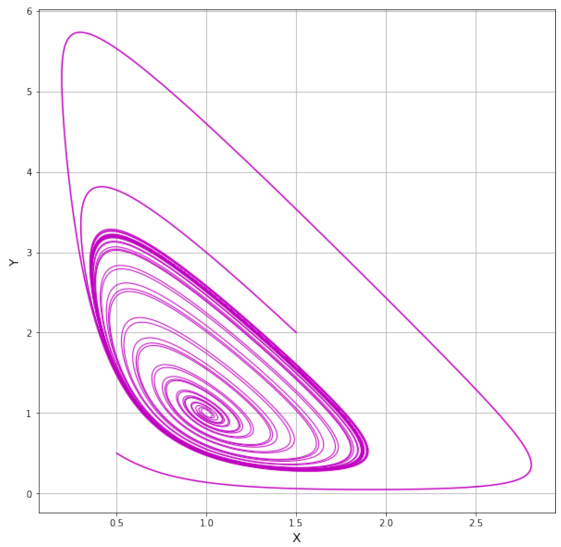

Рисунок 3.4 - неустойчивый фокус, p=2.5, q=1

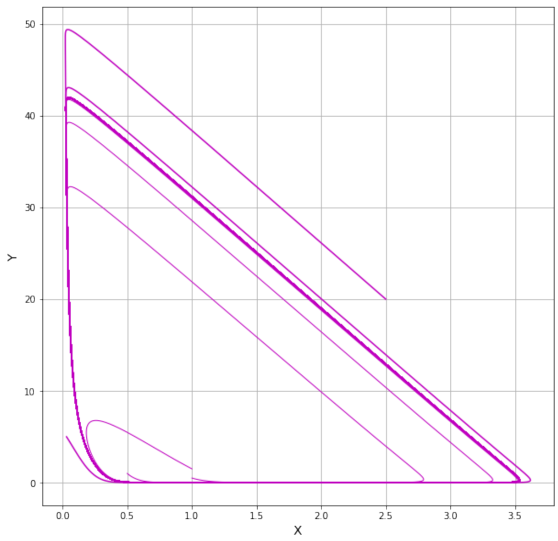

Рисунок 3.5 - неустойчивый узел, p=12.5, q=1

Свойства предельных циклов

Точка $\widetilde{x}$ фазовой плоскости называется предельной точкой траектории $X = \varphi(t)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, либо $t_n \to -\infty$ такая, что $\varphi(t_n) \to \widetilde{x}$. Предельным множеством траектории называется множество всех её предельных точек. Предельный цикл - это замкнутое (периодическое) решение системы, представляющее собой предельное множество ее траекторий. Для случая фазовой плоскости известно (Т. ПУАНКАРЕ-БЕНДИКСОНА?), что предельное множество любой траектории(НУЖНО ЛИ ГОВОРИТЬ ПРО ГЛАДКОСТЬ?) представляет собой либо точку покоя, либо предельный цикл, либо предельный полицикл. В нашем случае предельный полицикл невозможен ввиду единственности точки покоя. В случае, когда фазовый портрет системы (2) неустойчив, на фазовой плоскости присутствуют предельные циклы, что видно уже из рисунков 3.4 и 3.5.

Для численного поиска предельных циклов с заданной степенью точности применим следующий алгоритм. Рассмотрим на фазовой плоскости прямую, проходящую через точку покоя параллельно, без ограничения общности, оси OY. Рассмотрим траекторию, выходящую из какой-либо точки, не являющейся точкой покоя. В силу вышесказанного, при наличии предельного цикла эта траектория будет стремиться к нему либо в прямом, либо в обратном времени, а значит, в силу того, что точка покоя находится внутри цикла(КАКАЯ-ТО ТЕОРЕМА?) бесконечное число раз пересечет нашу прямую. В силу стационарности векторного поля, траектория системы, не являющаяся предельным циклом, не имеет самопересечений, значит, начиная с некоторого момента, каждое следующее пересечение траекторией вертикальной прямой будет ближе к предельному циклу чем предыдущее. Когда расстояние между соседними (по времени) пересечениями становится меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε, мы говорим, что часть траектории, заключённая между этими двумя точками, представляет собой предельный цикл с точностью ε.

Предельные циклы являются аттракторами системы и вопрос об их устойчивости весьма важен с точки зрения описания поведения моделируемого объекта. Для исследования устойчивости предельных циклов построим матрицу монодромии. Это, в случае системы (2), квадратная матрица размера 2, составленная из двух вектор-столбцов, представляющих собой фундаментальную систему решений векторного уравнения системы первого приближения:

$$\dot{z} = Fz$$

F - матрица Якоби системы (1). F периодична на предельном цикле с некоторым периодом T, так как предельный цикл есть замкнутая траектория. Указанную задачу можно решить численно, найдя цикл с некоторой точностью и решая, также численно, систему первого приближения вдоль него одношаговым методом, взяв в качестве начальных условий линейно независимые векторы [0,1] и [1,0].

Оценим корректность полученного решения, а также устойчивость предельного цикла с помощью теоремы Андронова-Хопфа. Она говорит, что одно из собственных чисел матрицы монодромии должно быть равно единице, а второе число, называемое мультипликатором, определяет устойчивость цикла. В случае, если второе число по модулю меньше 1, цикл устойчив.

В результате решения системы первого приближения методом Эйлера, для различных значений параметра p, при q = 1, первое собственное число матрицы монодромии равнялось 1 с точностью до 0.01 для любого p. Динамика изменения мультипликатора говорит о том, что предельные циклы устойчивы, причем при удалении параметра p от значения, для которого характерен фазовый портрет типа «центр» циклы становятся все более устойчивыми(см. рисунок 3.6).

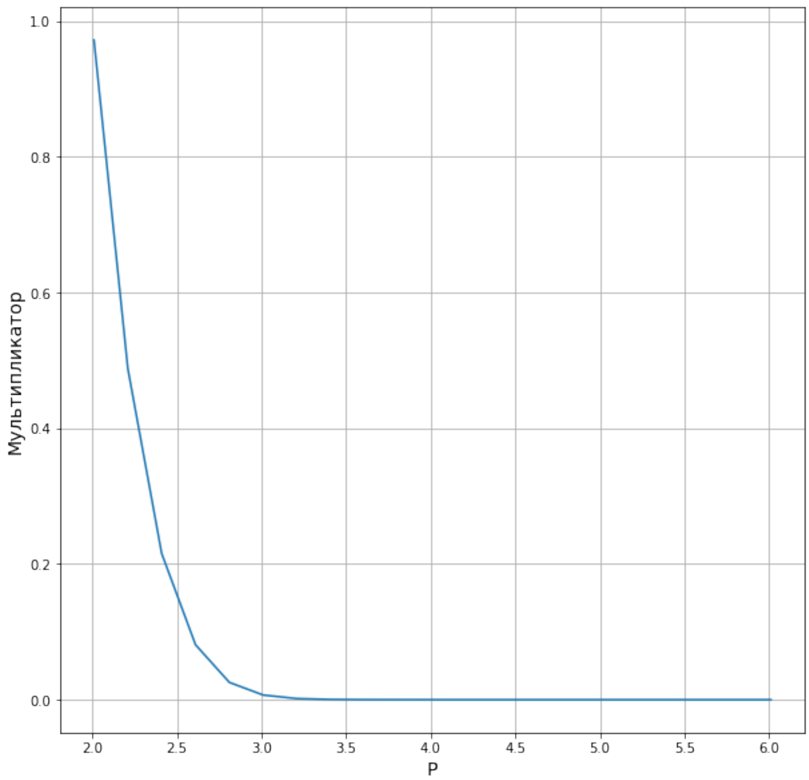

Рисунок 3.6 - график мультипликатора

3.3.3 Стохастические свойства модели

3.4 Результаты и их обсуждение

4 Заключение