Стохастические свойства в модели гликолиза

Панкратов Александр

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доц. Башкирцева И.А.

Институт естественных наук и математики

2017

Гликолитический осциллятор Хиггинса

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py\left(x - \dfrac{1+q}{q+y}\right) \end{cases} \qquad p > 0, q > 0.$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений моделирующая процесс гликолиза. Предложена Хиггинсом в 1964г.

Точки покоя системы

Единственной точкой покоя системы является $(1,1)$, при любых значениях p и q. Для исследования поведения в окрестности точки покоя постоим линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = -\widetilde{x} - \widetilde{y} \\ \dot{\widetilde{y}} = p\widetilde{x} + p\left(1 - \dfrac{q}{1+q}\right)\widetilde{y} \end{cases} .$$

Её матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p & 1 - \dfrac{q}{1+q} \end{pmatrix}.$$

Фазовые портреты в окрестности точки покоя

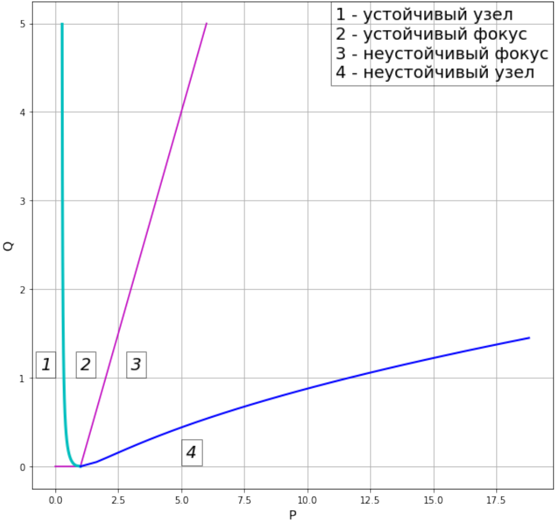
Собственные числа матрицы A, имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \left(\left(p - 1 - p\frac{q}{1+q}\right) \pm \sqrt{\left(1 - p + p\frac{q}{1+q}\right)^2 - 4p\frac{q}{1+q}}\right)/2,$$

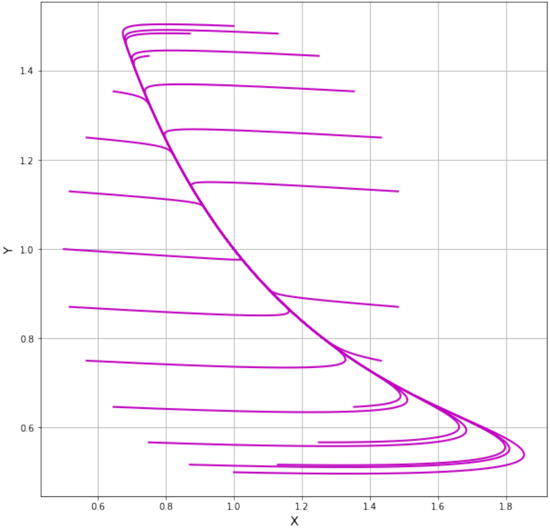
что позволяет определить тип фазового портрета в

окрестности $(1, 1)$ и построить бифуркационную диаграмму.

Бифуркационная диаграмма

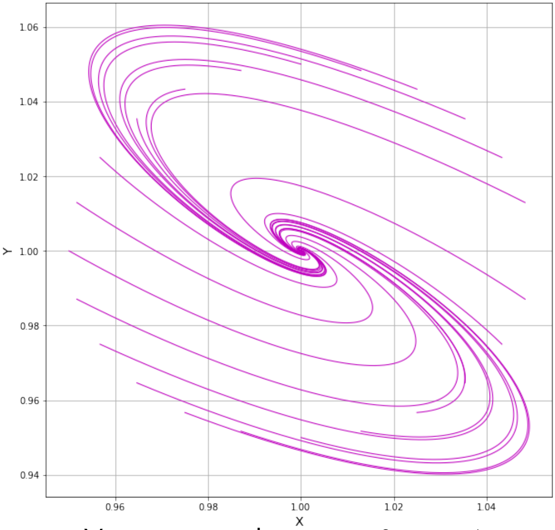


Примеры фазовых портретов



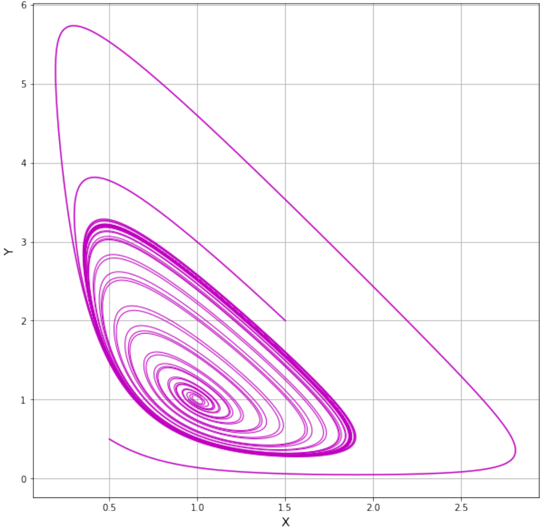
Устойчивый узел, p=0.05, q=1

Примеры фазовых портретов



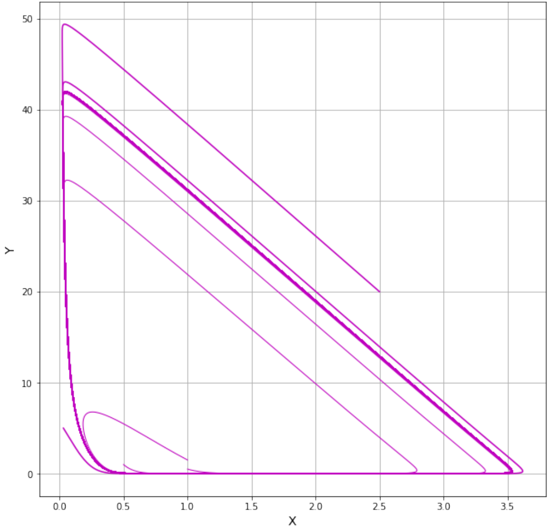
Устойчивый фокус, p=0.7, q=1

Примеры фазовых портретов



Неустойчивый фокус, p=2.5, q=1

Примеры фазовых портретов

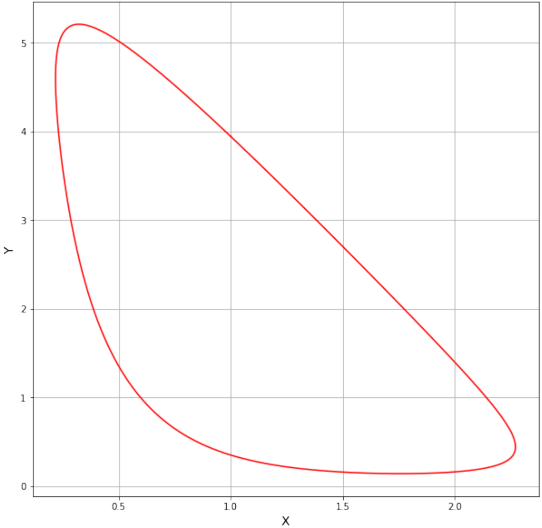


Неустойчивый узел, p=12.5, q=1

Предельные циклы

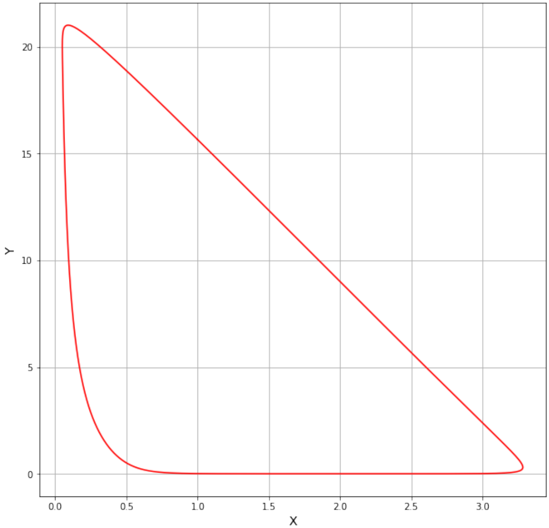
В случаях, когда фазовый портрет системы неустойчив, на фазовой плоскости присутствуют предельные циклы. Их размер и форма изменяются в зависимости от параметров p и q, также представляет интерес вопрос об их устойчивости. Предельные циклы могут быть найдены с некоторой наперед заданной точностью

Пример предельного цикла



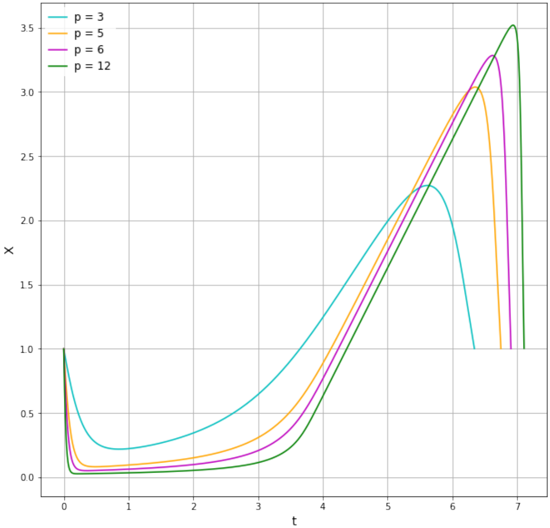
p=3, q=1

Пример предельного цикла



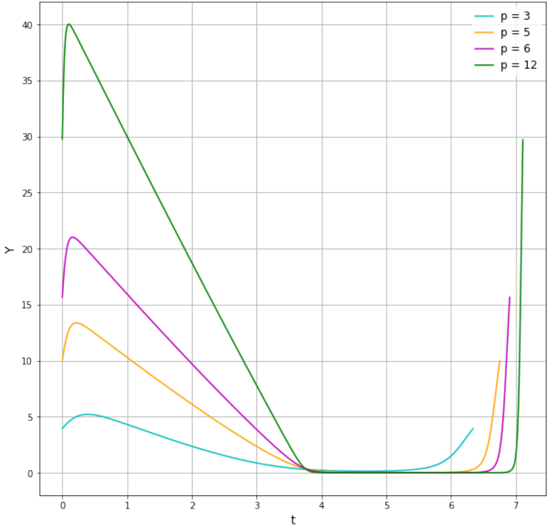
p=7, q=1

Пример предельного цикла



Временные ряды для переменной x, при q=1

Пример предельного цикла



Временные ряды для переменной y, при q=1

Устойчивость предельных циклов

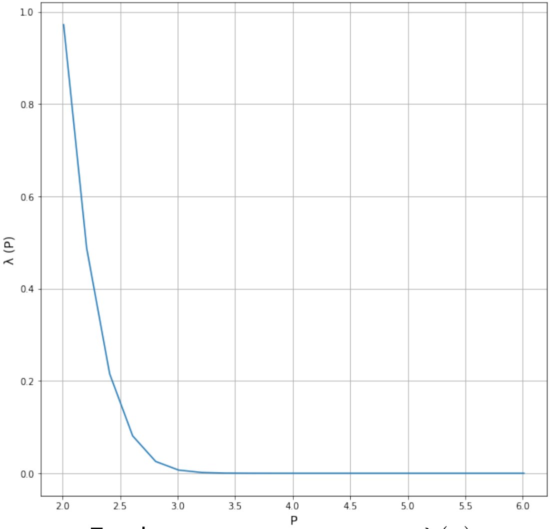
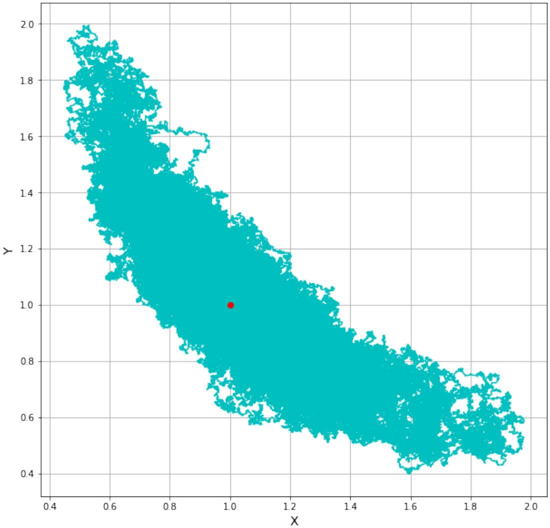


График мультипликатора $\lambda(p)$

Стохастические свойства модели

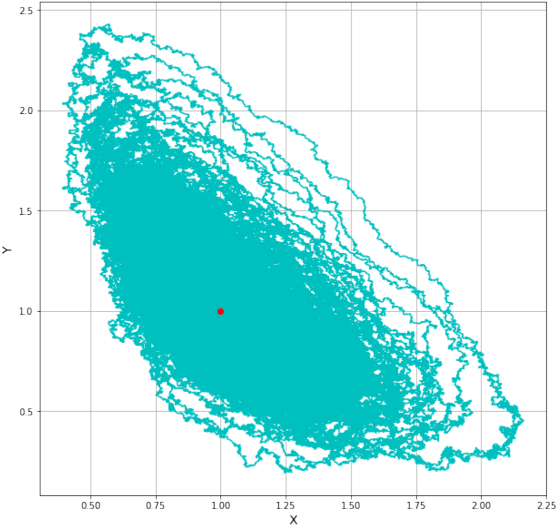
Для дальнейшего исследования свойств модели внесем в её поведение случайные возмущения вида $\varepsilon\sqrt{h}\xi$, где ξ — нормально распределённая случайная величина, h — шаг численного метода, ε — положительное число, коэффициент, регулирующий интенсивность возмущений.

Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя



Возмущенная траектория N=0.1, p=0.2, q=1

Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя

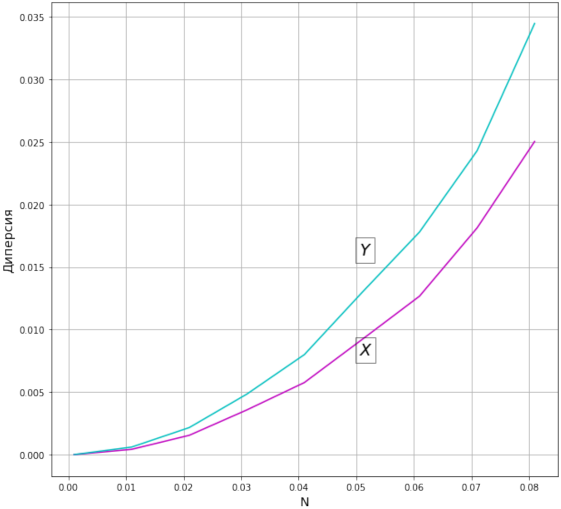


Возмущенная траектория N=0.1, p=1.4, q=1

Дисперсия возмущенной траектории

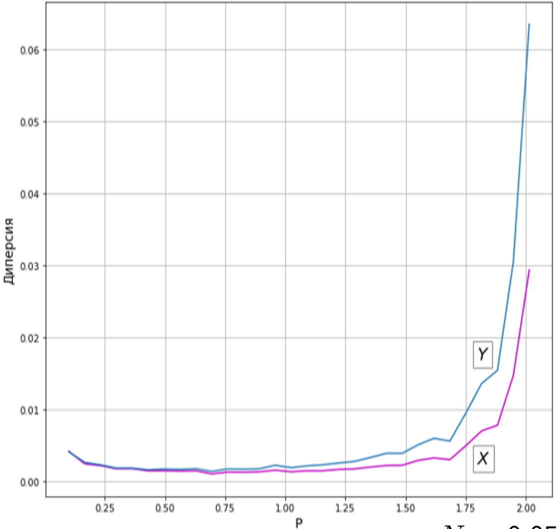
В качестве характеристики поведения возмущённой траектории вблизи устойчивой точки покоя представляет интерес среднеквадратичное отклонение точек траектории от их математического ожидания, которое, заметим, почти совпадает с точкой покоя.

Дисперсия возмущенной траектории



Зависимость дисперсии от интенсивности шума, p=0.2, q=1

Дисперсия возмущенной траектории



Зависимость дисперсии от параметра p, $N = 0.05$, $q = 1$

Функция стохастической чувствительности

Функция стохастической чувствительности, далее ФСЧ, позволяет судить о восприимчивости аттрактора системы к случайным возмущениям. ФСЧ точки покоя представляет собой неотрицательное вещественное число, ФСЧ предельного цикла является периодической функцией времени $W(t)$, период которой T совпадает с периодом решения системы, являющегося предельным циклом.

ФСЧ точки покоя

$$\dot{x} = f(x),$$

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\xi(t),$$

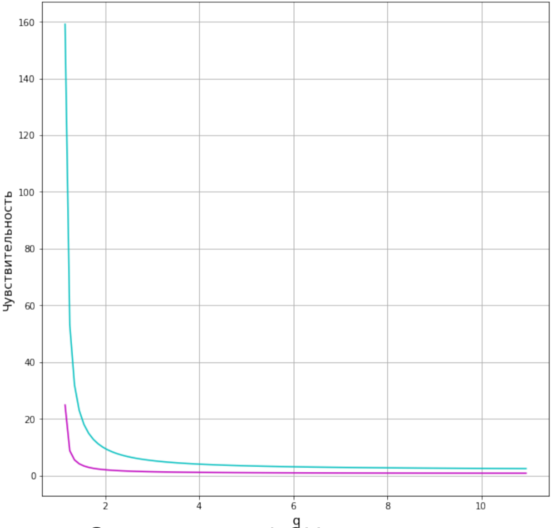
$$FW + WF^{\mathrm{T}} = -S,\ F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}),\ S = GG^{\mathrm{T}},\ G = \sigma(\bar{x}).$$

$$w_{12} = (-p^2 - pq^2 - pq - q^2 - 2q - 1)/(2qp(p - q - 1))$$

$$w_{12} = w_{21} = (p^2 q + p^2 + q^2 + 2q + 1)/(2qp(p - q - 1))$$

$$w_{22} = -((q + 1)(p^2 q + p^2 + pq + q + 1))/(2qp(p - q - 1)).$$

ФСЧ точки покоя



Зависимость ФСЧ от q, p=2.1

ФСЧ предельного цикла

Для случая, когда аттрактором является T-периодическое решение системы, задающее предельный цикл $\gamma(t)$, уравнение для W в условиях нашей системы можно записать как:

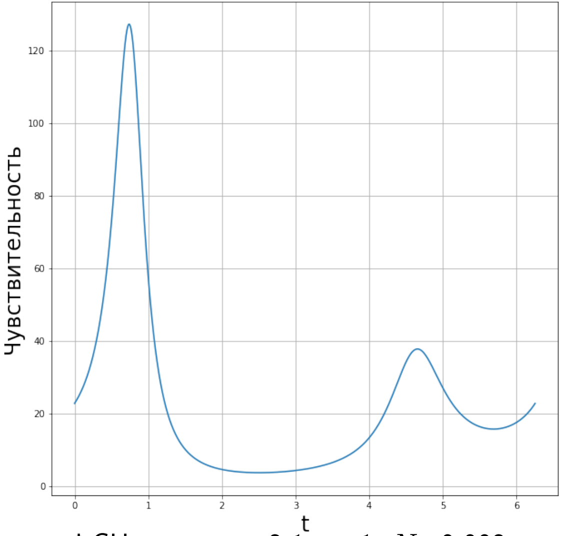
$$W(t) = \mu(t)P(t)$$

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t),\ \mu(0) = \mu(T)$$

$$a(t) = p^{\mathrm{T}}(t)(F^{\mathrm{T}}(t) + F(t))p(t),\ b(t) = p^{\mathrm{T}}(t)S(t)p(t),$$

где $p(t)$ - нормализованный нормальный вектор к $f(\gamma(t))$, а $P(t) = pp^{\mathrm{T}}$.

ФСЧ предельного цикла

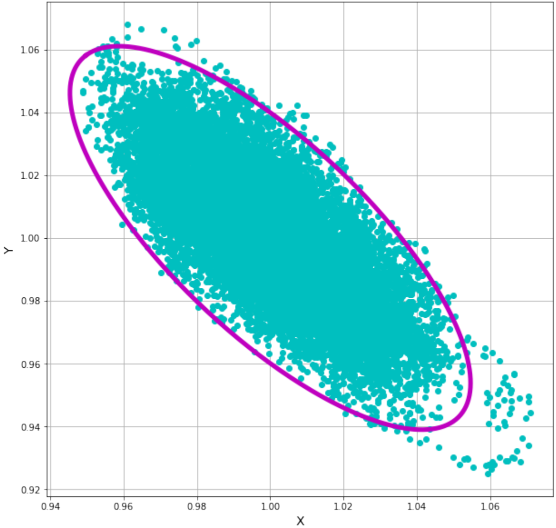


ФСЧ цикла, p=2.1, q=1, N=0.002

Доверительный эллипс и доверительная полоса

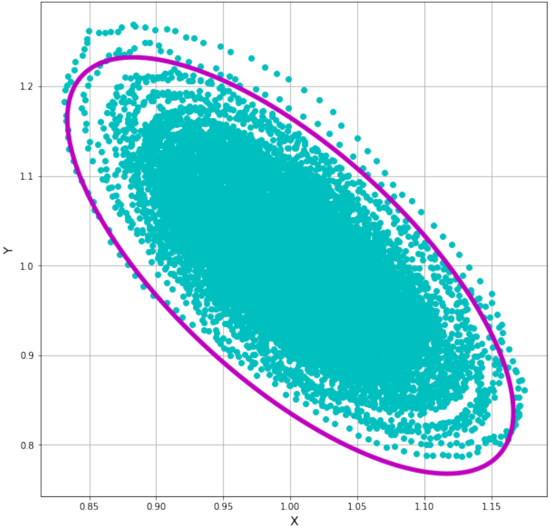
Доверительный эллипс строится для устойчивой точки покоя на основе ФСЧ и позволяет ограничить на фазовой плоскости такую её окрестность U, что точка с траектории с начальными условиями из U будет принадлежать этой окрестности с заданной наперед вероятностью при данном уровне шума. Доверительная полоса - это аналог доверительного эллипса для случая, когда аттрактором системы выступает устойчивый предельный цикл.

Доверительный эллипс



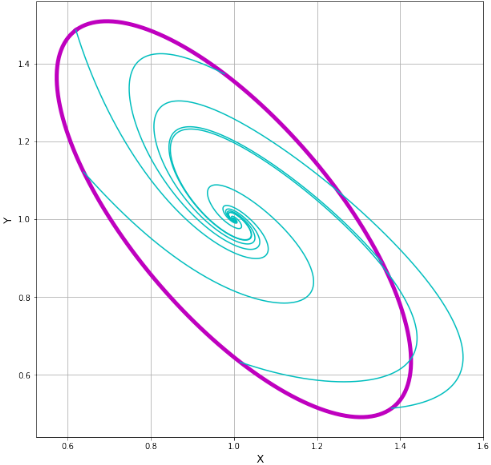
Доверительный эллипс и траектория, p=0.7, q=1, N=0.01

Доверительный эллипс



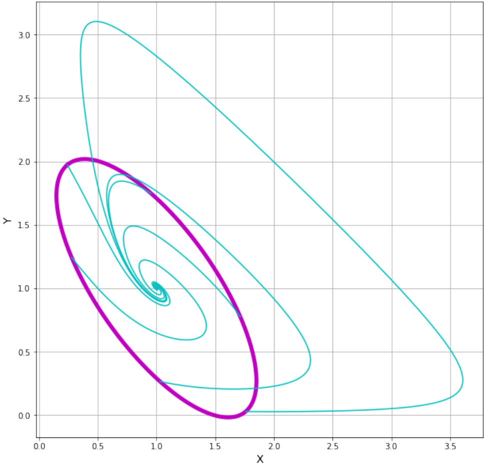
Доверительный эллипс и траектория, p=1.9, q=1, N=0.01

Доверительный эллипс



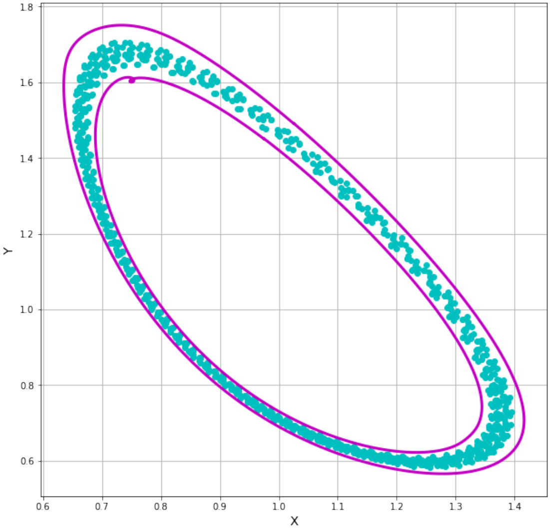
Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p{=}1$, $q{=}1$, $N{=}0.075$

Доверительный эллипс



Доверительный эллипс и детерминированные траектории, p=1, q=1, N=0.15

Доверительная полоса



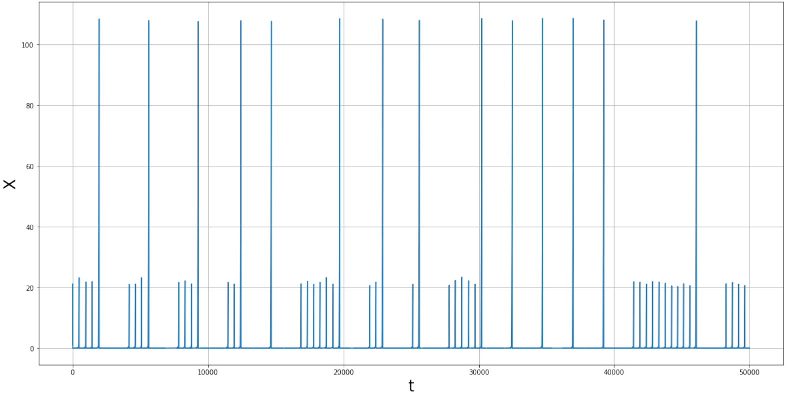
Доверительная полоса и траектория, $p = 2.1$, $q = 1$, $N = 0.002$

Индуцированные шумом осцилляции

При значении параметра p=2.1 и $q \in [0.01, 0.12]$ в поведении системы наблюдаются индуцированные шумом осцилляции.

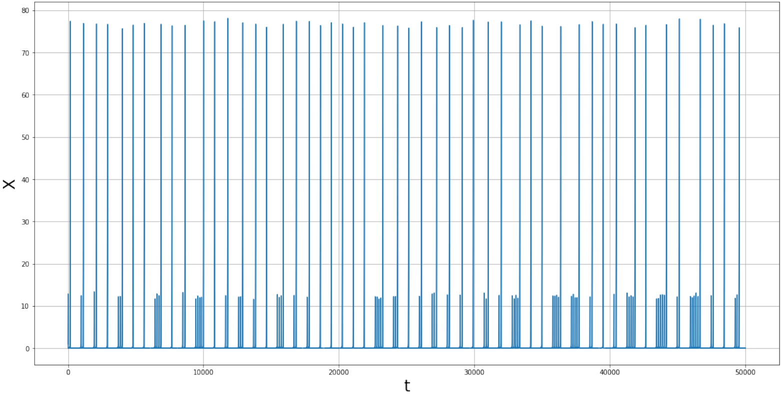
При внесении шума порядка 0.002 помимо осцилляций в окрестности детерминированного цикла для данных значениий параметров, наблюдаются осцилляции по большему циклу, причем отношение количества осцилляций по большому циклу к общему числу осцилляций меняется в зависимости от значения параметра q, увеличиваясь при его увеличении.

Индуцированные шумом осцилляции



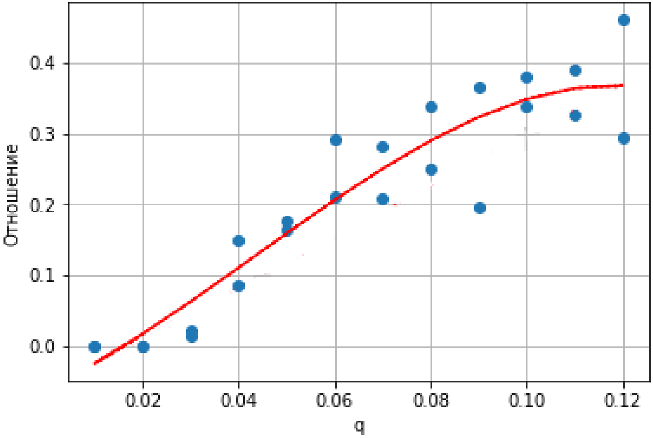
Временной ряд по переменной x, $p = 2.1$, $q = 0.05$, $N = 0.002$

Индуцированные шумом осцилляции



Временной ряд по переменной x, $p = 2.1$, $q = 0.1$, $N = 0.002$

Индуцированные шумом осцилляции

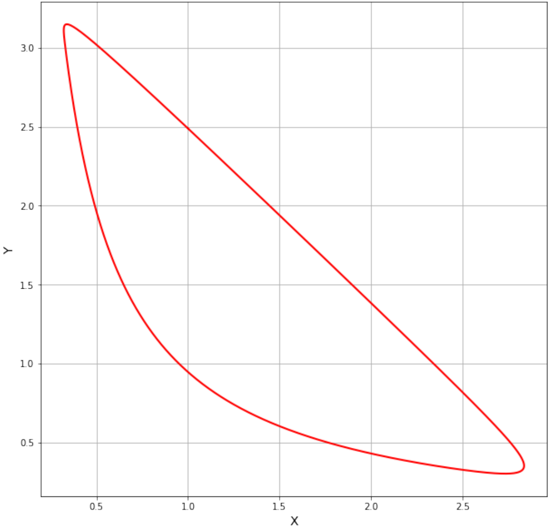


Отношение числа больших осцилляций к числу всех осцилляций $p = 2.1$, $N = 0.002$

Область аномальной стохастической чувствительности

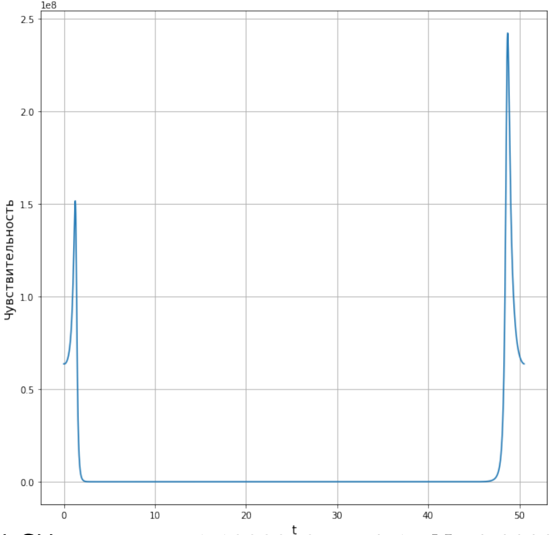
При значении параметра q=0.1 и $p \in [1.1333309, 1.133331]$ наблюдаются большие значения функции стохастической чувствительности и, соответственно, чувствительность к шумам. Так, амплитуды предельных циклов для детерминированных траекторий, построенных при q=0.1, p=1.1333309 и q=0.1, p=1.133331 различаются в четыре раза.

Область аномальной стохастической чувствительности



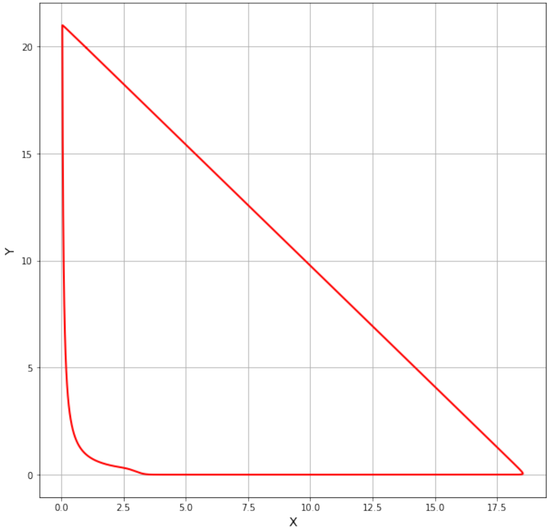
Детерминированный цикл q=0.1, p=1.1333309

Область аномальной стохастической чувствительности



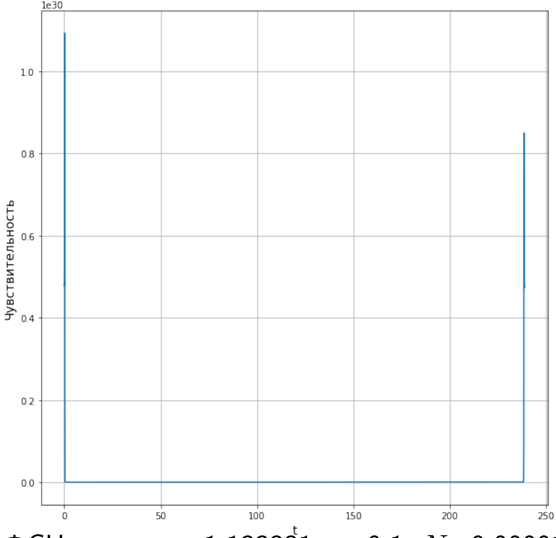
ФСЧ цикла, p=1.1333309, q=0.1, N=0.00001

Область аномальной стохастической чувствительности



Детерминированный цикл q=0.1, p=1.133331

Область аномальной стохастической чувствительности



ФСЧ цикла, p=1.133331, q=0.1, N=0.00001

Спасибо за внимание!