

Реферат

В работе было рассматривается математическая модель гликолитического осциллятора Хиггинса, показаны некоторые детерминированные и стохастические свойства. Были выявлены значения параметров системы, для которых характерны индуцированные шумом смешанные осцилляции, в результате последовательности экспериментов сделаны выводы о поведении осцилляций, обнаружена область больших значений функции стохастической чувствительности, в которой система чувствительна к малым шумам, проведено исследование стохастической устойчивости траекторий системы. Работа содержит описание методов проведения численных экспериментов, и анализ их результатов.

Содержание

1	Обозначения и сокращения	3
2	Введение	4
3	Основная часть	6
3.1	Обзор литературы	6
3.2	Постановка задачи работы	7
3.3	Исследование математической модели	8
3.3.1	Описание модели	8
3.3.2	Детерминированные свойства модели	8
3.3.3	Стохастические свойства модели	15
3.4	Результаты и их обсуждение	26
4	Заключение	27

1 Обозначения и сокращения

а

2 Введение

Построение и анализ математических моделей являются важными инструментами научного исследования различных явлений, в том числе физических и химических. В настоящее время существует возможность эффективно применять методы исследования моделей, опирающиеся на применение компьютерных технологий для постановки численных экспериментов и обработки их результатов. В частности представляет интерес исследование с помощью таких методов моделей химических процессов, каковой является и гликолитический осциллятор Хиггинса. Эта модель описывает колебательную биохимическую реакцию, в процессе которой осуществляется распад глюкозы и образование новых соединений.[ПОЧТИ ЦИТАТА <http://library.biophys.msu.ru/LectMB/lect08.htm> Г.Ю.Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии] Этот процесс имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в различных биологических системах, например в клетках живого организма, потому что в значительной мере он определяет энергетические процессы в клетке. Также гликолиз исследуется с медицинской точки зрения, так как по энергопотреблению клеток организма можно делать выводы о здоровье или патологических изменениях этих клеток.

Впервые модель гликолиза в том виде, в котором она исследуется в данной работе была предложена Хиггинсом (Higgins) в 1964 году. В пункте ПУНКТ исследуются детерминированные свойства системы. В пункте ПУНКТ изучаются стохастические свойства, особенный интерес здесь представляет устойчивость предельных циклов и их чувствительность к малым случайным возмущениям, потому что эти характеристики в значительной мере характеризует протекание процесса, описываемого моделью, в естественной среде. ЧТО-ТО ПРО СМЕШАННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ. ЧТО-ТО ПРО ФСЧ

КАКАЯ-ТО СВЯЗЬ С ПРЕДЫДУЩИМИ ИССЛЕДОВАНИЯМИ

3 Основная часть

3.1 Обзор литературы

нет

3.2 Постановка задачи работы

СЛОЖНО

3.3 Исследование математической модели

3.3.1 Описание модели

Модель гликолитического осциллятора Хиггинса описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) \end{cases} \quad (1)$$

В определении системы фигурируют параметры p и q , которые являются положительными вещественными коэффициентами, не зависящими от каких-либо переменных. Ограничения на неотрицательность параметров возникают из физического смысла описываемого моделью процесса.

3.3.2 Детерминированные свойства модели

Свойства системы первого приближения

Для исследования детерминированных свойств модели воспользуемся теоремой Гробмана-Хартмана, утверждающей, что в окрестности неподвижной точки поведение исследуемой системы совпадает с поведением ее линеаризации. Из этого следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки фазовый портрет системы (1) совпадает с портретом линеаризованной системы, в случае, если система (1) имела портрет типа «узел», «фокус» или «седло». Вычислим точку покоя для исследуемой модели из условий равенства нулю производных:

$$\begin{cases} 1 - xy = 0; \\ py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) = 0 \end{cases}$$

При действующих ограничениях на p и q получаем, что единственной точкой покоя является точка $(1,1)$ при любых допустимых значениях p и q . Вычислим также линеаризованную систему в точке покоя:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1) - (y-1) \\ \dot{y} = p(x-1) + p\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)(y-1) \end{cases}$$

Сделав замену $\tilde{x} = x - 1$, $\tilde{y} = y - 1$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{x} - \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = p\tilde{x} + p\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)\tilde{y} \end{cases} \quad (2)$$

Тип фазового портрета определяется собственными числами матрицы системы первого приближения. В нашем случае матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p & 1 - \frac{q}{1+q} \end{pmatrix};$$

Её характеристическое уравнение:

$$(-1 - \lambda) \left(p \left(1 - \frac{q}{1+q} \right) - \lambda \right) + p = 0.$$

Его корни, собственные числа матрицы системы (2), соответственно, имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \left(\left(p - 1 - p \frac{q}{1+q} \right) \pm \sqrt{\left(1 - p + p \frac{q}{1+q} \right)^2 - 4p \frac{q}{1+q}} \right) / 2$$

Так как собственные числа явно зависят от p и q , найдем зависимость типа фазового портрета от значений параметров p и q , больших нуля, и отобразим результат на бифуркационной диаграмме (см. рисунок 3.1).

Нумерованные области между кривыми, изображенными на рисунке 3.1 соответствуют определенным типам фазовых портретов при значения p и q таких, что точка (p, q) принадлежит данной области. Примеры каждого типа фазовых портретов системы приведены ниже (см. рисунки 3.2—3.5).

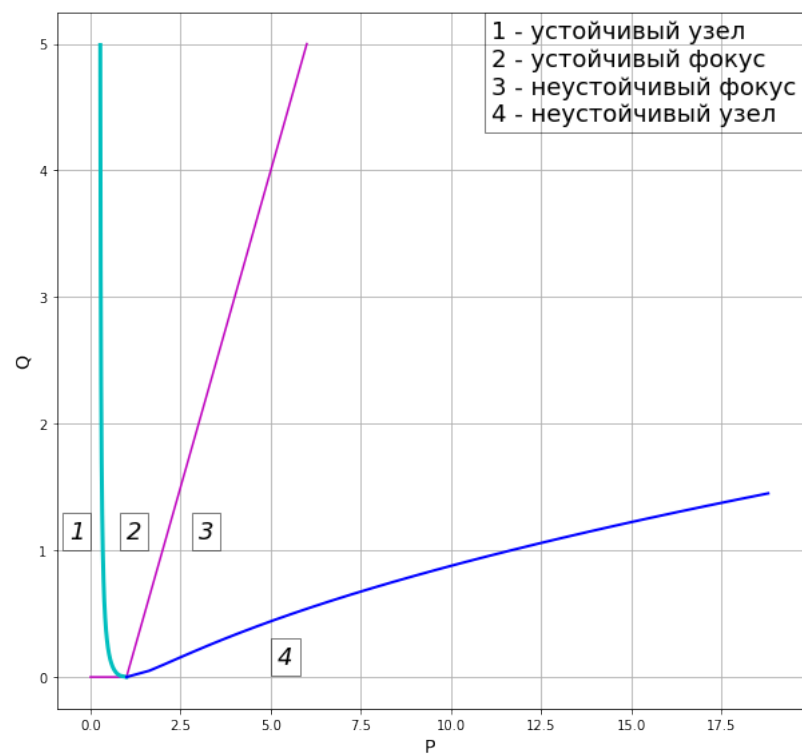


Рисунок 3.1 — бифуркационная диаграмма

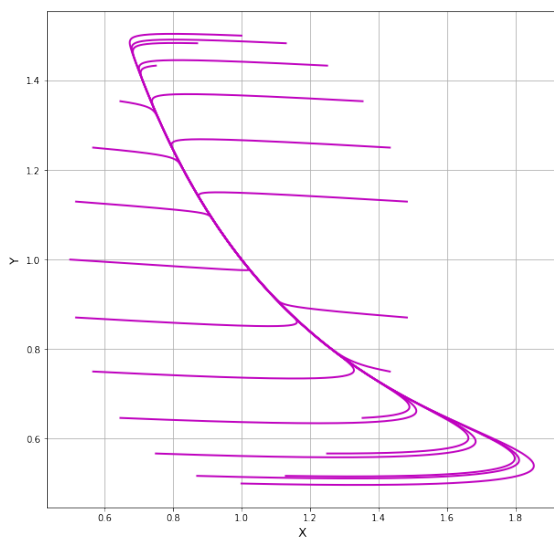


Рисунок 3.2 — устойчивый узел,
 $p=0.05$, $q=1$

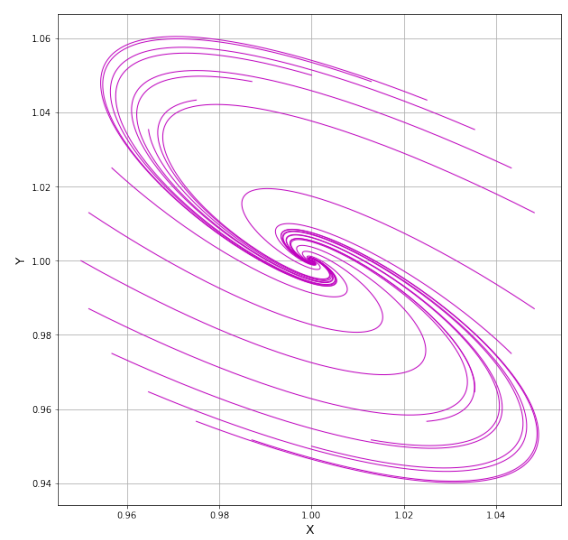


Рисунок 3.3 — устойчивый фокус,
 $p=0.7$, $q=1$

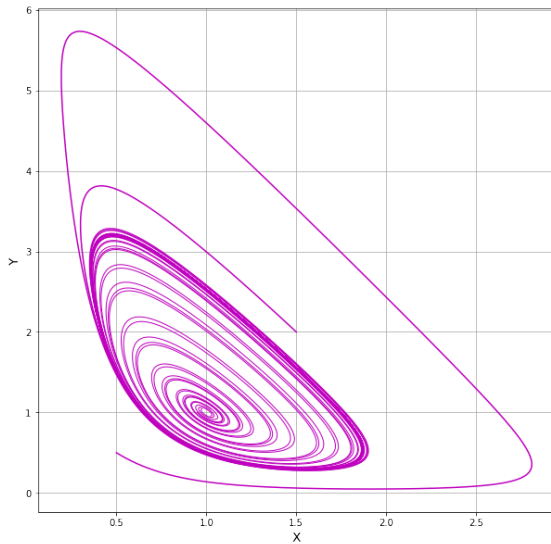


Рисунок 3.4 — неустойчивый фокус, $p=2.5$, $q=1$

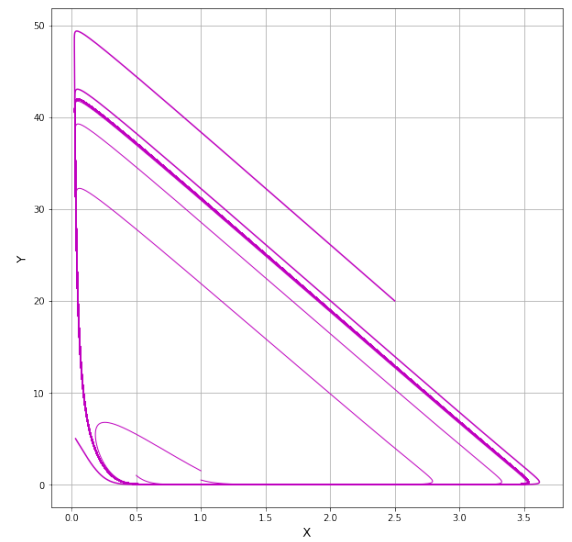


Рисунок 3.5 — неустойчивый узел, $p=12.5$, $q=1$

Свойства предельных циклов

Точка \tilde{x} фазовой плоскости называется предельной точкой траектории $X = \varphi(t)$, если существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, либо $t_n \rightarrow -\infty$ такая, что $\varphi(t_n) \rightarrow \tilde{x}$. Предельным множеством траектории называется множество всех её предельных точек. Предельный цикл - это замкнутое (периодическое) решение системы, представляющее собой предельное множество некоторой её траектории. Для случая фазовой плоскости известно (по т. Пуанкаре – Бендиксона), что предельное множество любой траектории представляет собой либо точку покоя, либо предельный цикл, либо предельный полицикл. В нашем случае предельный полицикл невозможен ввиду единственности точки покоя. В случае, когда фазовый портрет системы (2) неустойчив, на фазовой плоскости присутствуют предельные циклы, что видно уже из рисунков 3.4 и 3.5.

Для численного поиска предельных циклов с заданной степенью точности применим следующий алгоритм. Рассмотрим на фазовой плоскости луч, проходящий через точку покоя параллельно, без ограничения общности, оси OY . Рассмотрим траекторию, выходящую из какой-либо точки,

принадлежащей малой окрестности точки покоя. В силу вышесказанного, при наличии предельного цикла эта траектория будет стремиться к нему либо в прямом, либо в обратном времени, а значит, в силу того, что точка покоя находится внутри цикла (по т. Пуанкаре-Бендиксона) траектория бесконечное число раз пересечет луч. Траектория системы, не являющаяся предельным циклом или точкой покоя, не имеет самопересечений, значит, начиная с некоторого момента, каждое следующее пересечение траекторией луча будет ближе к предельному циклу чем предыдущее. Когда расстояние между соседними (по времени) пересечениями становится меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε , мы говорим, что часть траектории, заключённая между этими двумя точками, представляет собой предельный цикл с точностью ε . Предельные циклы, найденные с точностью 0.0001 при $q=1$ представлены на рисунках 3.6–3.9. Соответствующие им временные ряды для переменных x и y представлены на рисунках 3.10 и 3.11.

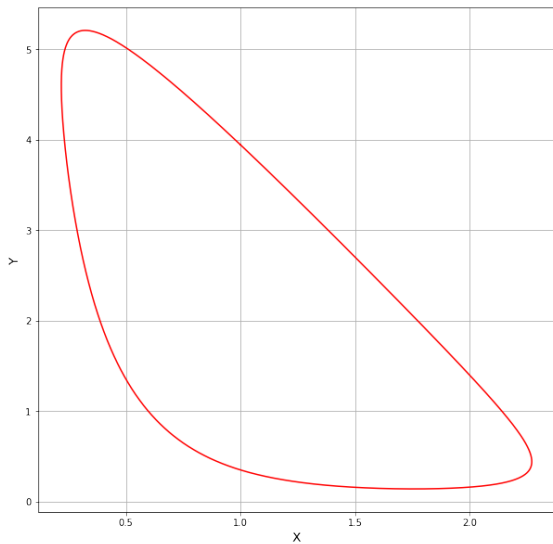


Рисунок 3.6 — предельный цикл,
 $p=3$, $q=1$

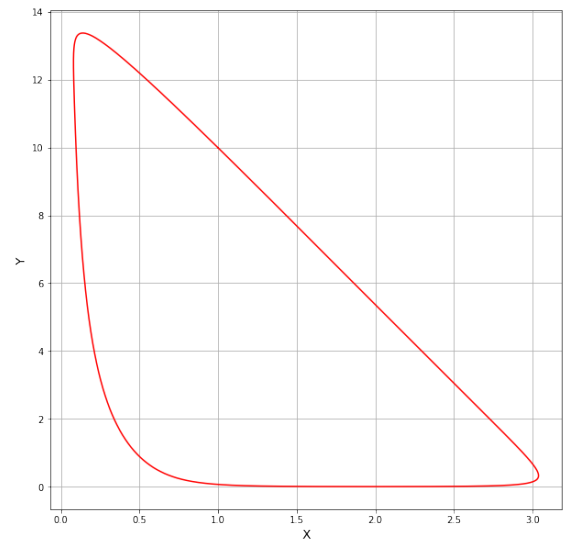


Рисунок 3.7 — предельный цикл,
 $p=5$, $q=1$

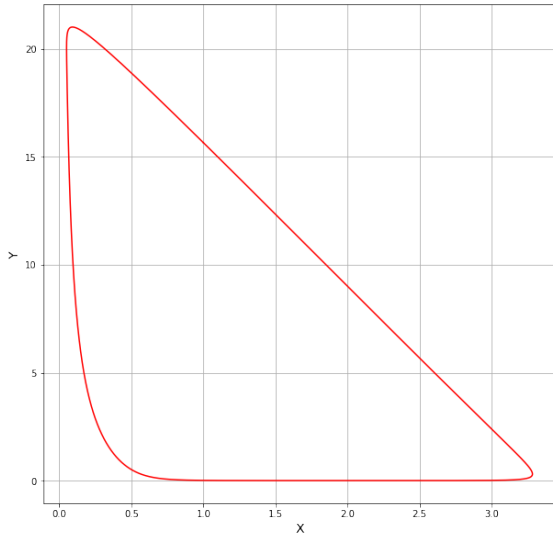


Рисунок 3.8 — предельный цикл,
 $p=7, q=1$

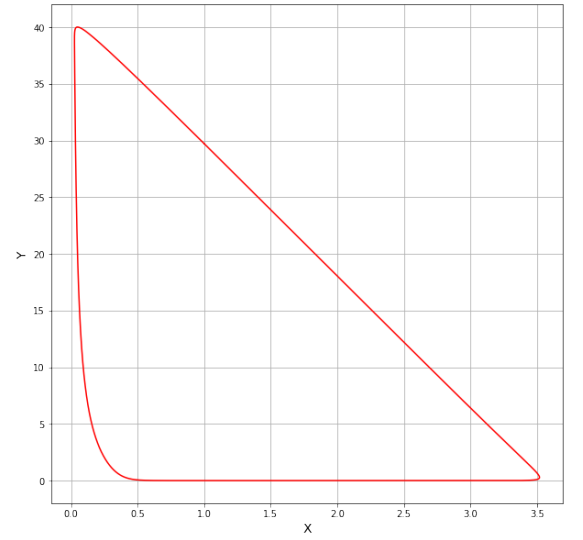


Рисунок 3.9 — предельный цикл,
 $p=12, q=1$

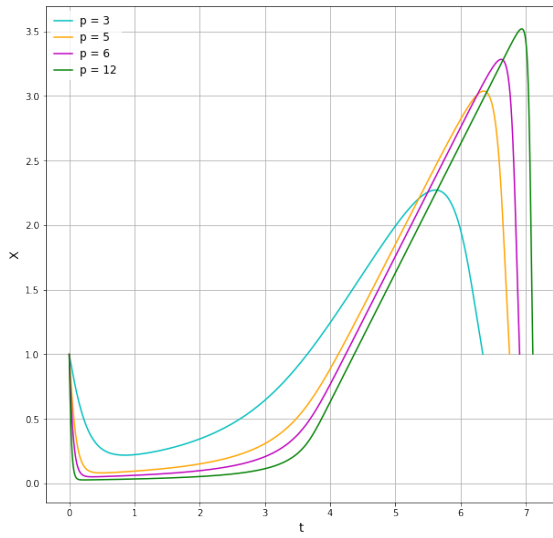


Рисунок 3.10 — временные ряды
для $x, q=1$

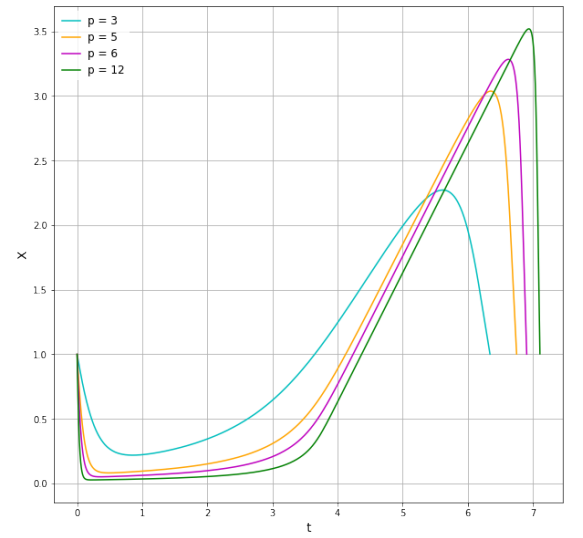


Рисунок 3.11 — временные ряды
для $y, q=1$

Как видно из рисунков 3.6 – 3.11, размер и форма предельного цикла значительно меняются, в зависимости от параметра p , с его ростом увеличивается амплитуда колебаний по обоим переменным, появляются почти вертикальные и горизонтальные участки. Пусть Γ - предельный цикл системы (1), а $x(t)$ - некоторое её решение. Рассмотрим в некоторой окрестности U цикла Γ функцию $\gamma(x) = \arg\min_{y \in \Gamma} \|y - x\|$. Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задаёт отклонение точки x от цикла Γ . Решение $\xi(t)$, в

нашем случае соответствующее предельному циклу, называют экспотенциально орбитально устойчивым (далее - устойчивым), если $\exists a > 0, \exists K > 0$ такие, что $\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-at} \|\Delta(x_0)\|$ для любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$, где U - некоторая окрестность решения $\xi(t)$.

Вопрос об устойчивости предельных циклов весьма важен с точки зрения описания поведения моделируемого объекта. Для исследования устойчивости предельных циклов построим матрицу монодромии. Это, в случае системы (2), квадратная матрица размера 2, составленная из двух вектор-столбцов, представляющих собой фундаментальную систему решений векторного уравнения системы первого приближения:

$$\dot{z} = Fz,$$

где F - матрица Якоби системы (1). F периодична на предельном цикле с некоторым периодом T , так как предельный цикл есть замкнутая траектория. Указанную задачу можно решить численно, найдя цикл с некоторой точностью и решая, также численно, систему первого приближения вдоль него одношаговым методом, взяв в качестве начальных условий линейно независимые векторы $[0,1]$ и $[1,0]$.

Оценим корректность полученного решения, а также устойчивость предельного цикла с помощью теоремы Андронова – Хопфа. Она говорит, что одно из собственных чисел матрицы монодромии должно быть равно единице, а второе число, называемое мультипликатором, определяет устойчивость цикла. В случае, если второе число по модулю меньше 1, цикл устойчив.

В результате решения системы первого приближения методом Эйлера, для различных значений параметра p , при $q = 1$, первое собственное число матрицы монодромии равнялось 1 с точностью до 0.01 для любого p . Динамика изменения мультипликатора говорит о том, что предельные циклы устойчивы, причем при удалении параметра p от значения, для которо-

го характерен фазовый портрет типа «центр» циклы становятся все более устойчивыми (см. рисунок 3.12).

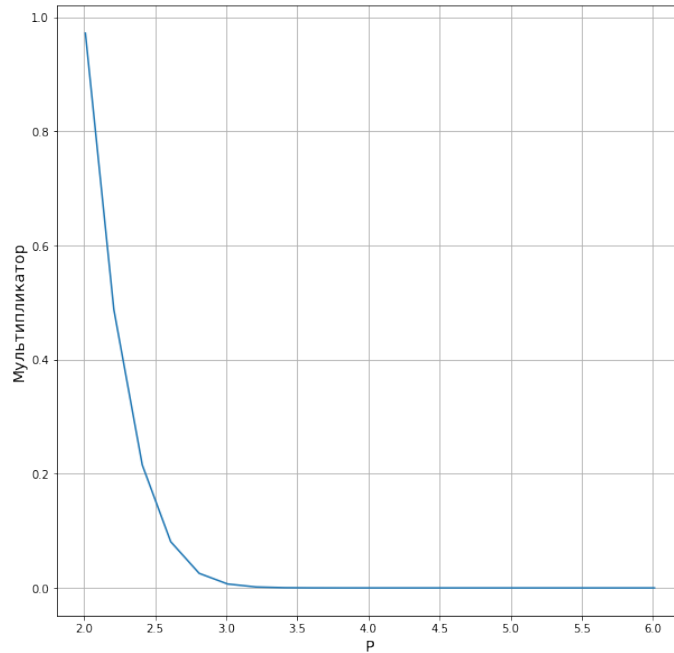


Рисунок 3.12 — график мультипликатора

3.3.3 Стохастические свойства модели

Описание случайных возмущений

Для дальнейшего исследования свойств системы (1) внесем в её поведение случайные возмущения. Для этого, при построении траекторий системы, на каждом шаге метода численного интегрирования Рунге – Кутты 4 порядка будем добавлять к результату метода некоторую случайную добавку вида $n\xi\sqrt{t}$, где ξ — нормально распределённая случайная величина, t — шаг численного метода, n — положительное число, коэффициент, регулирующий интенсивность возмущений.

Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя

При внесении возмущений в траектории, проходящие в окрестности устойчивой точки покоя, траектории остаются в окрестности точки покоя при достаточно сильных шумах (рис. 3.13, 3.14).

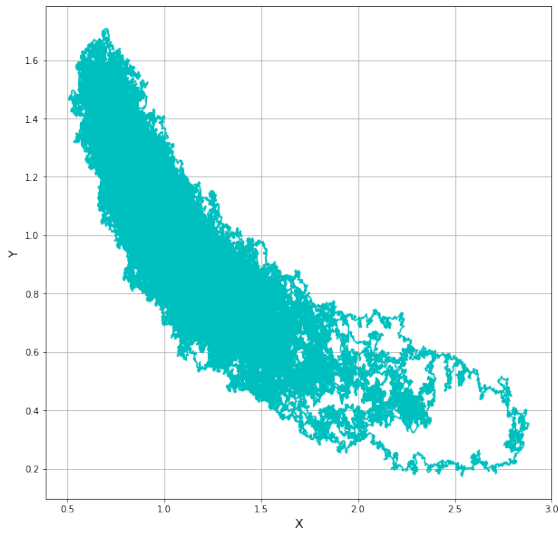


Рисунок 3.13 — $N=0.1, p=0.2, q=1$

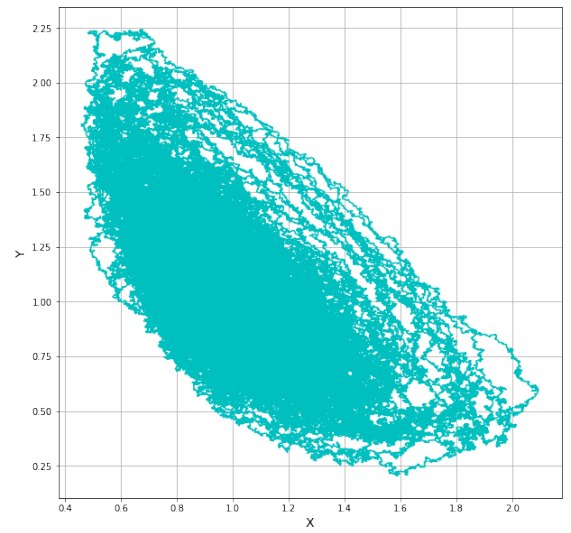


Рисунок 3.14 — $N=0.1, p=1.4, q=1$

Рассмотрим зависимость дисперсии точек такой траектории от интенсивности шума и от значений параметров p и q , при некоторой фиксированной интенсивности шума. Дисперсию оценим как среднеквадратичное отклонение точек траектории от их математического ожидания, которое, заметим, почти совпадает с точкой покоя в силу способа построения траектории. График зависимости дисперсии каждой координаты от интенсивности шума представлен на рисунках 3.15, 3.16. Зависимость дисперсии от параметра p при $N = 0.01$ представлена на рисунках 3.17, 3.18.

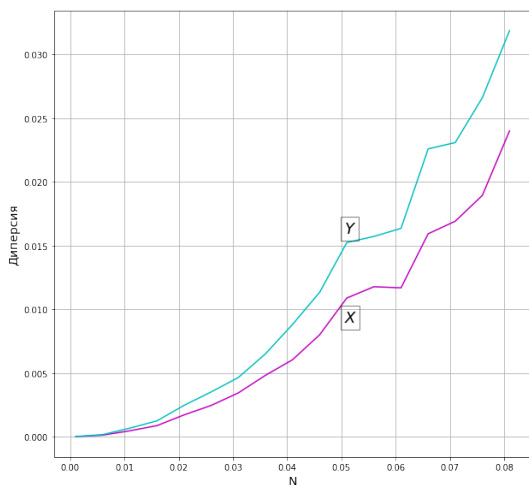


Рисунок 3.15 — Зависимость дисперсии от интенсивности шума, $p=0.2, q=1$

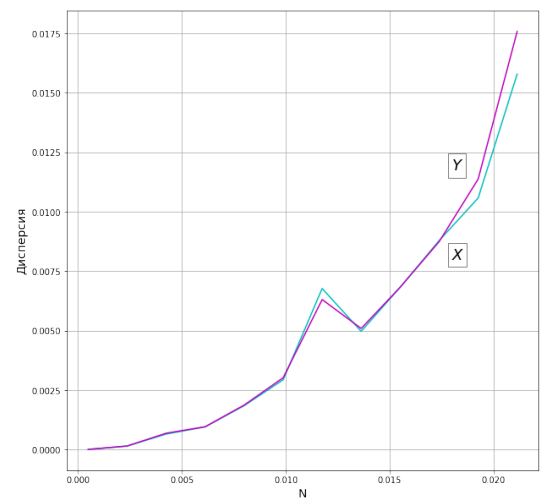


Рисунок 3.16 — Зависимость дисперсии от интенсивности шума, $p=0.2, q=0.1$

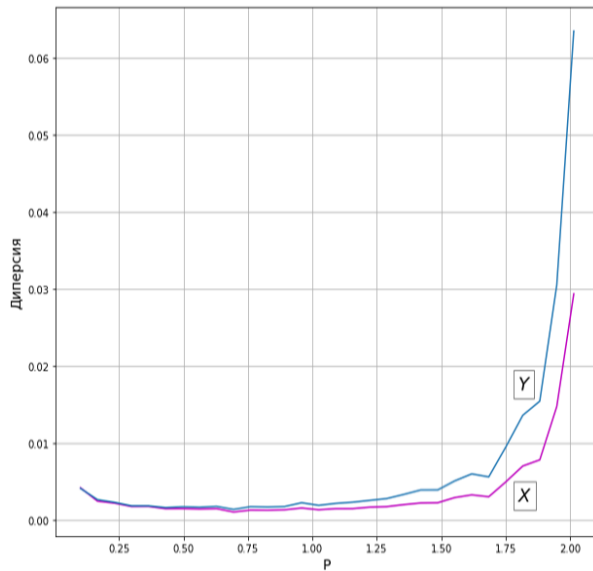


Рисунок 3.17 — Зависимость дисперсии от параметра p , $N = 0.05$, $q = 1$

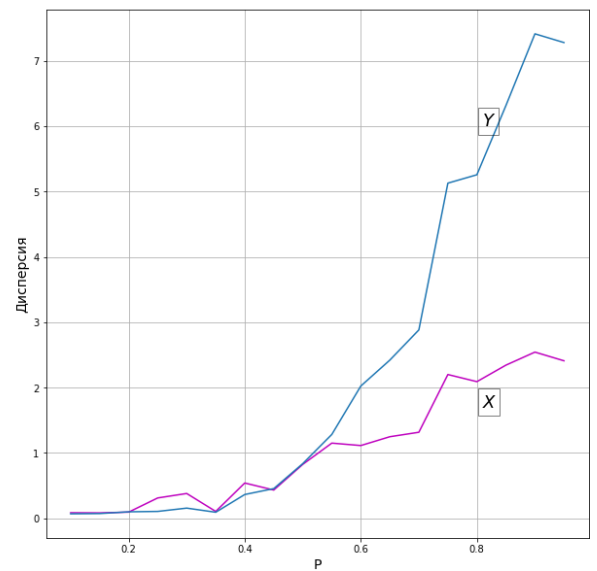


Рисунок 3.18 — Зависимость дисперсии от параметра p , $N = 0.05$, $q = 0.1$

Из рисунков 3.15 – 3.18 видно, что при $q = 0.1$ система становится более жёсткой, чем при $q = 1$. Для дальнейшего описания стохастического поведения системы воспользуемся аппаратом доверительных эллипсов[1]. Доверительный эллипс позволяет ограничить на фазовой плоскости область, в которой траектория будет лежать с некоторой заданной наперед вероятностью, при заданной наперед интенсивности шума и при условии, что её начальные условия принадлежат этой области. Примеры доверительных эллипсов, построенных так, чтобы охватывать 99% траектории приведены на рисунках 3.19 – 3.22. Для большей наглядности траектории нарисованы не непрерывно, а в виде отдельных точек.

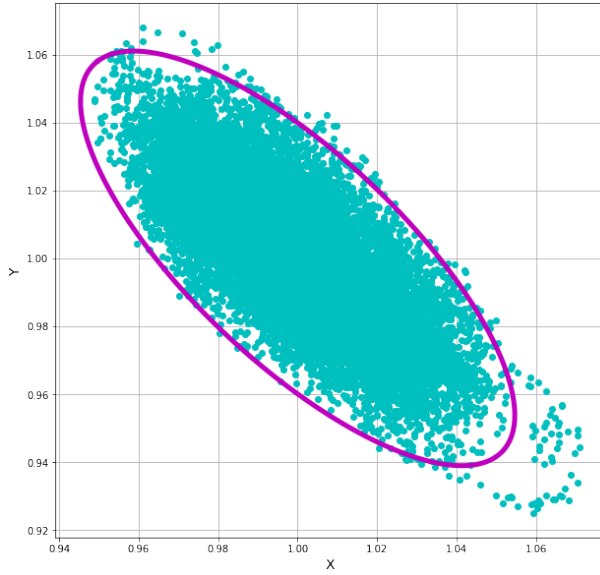


Рисунок 3.19 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.7$, $q=1$, $N=0.01$

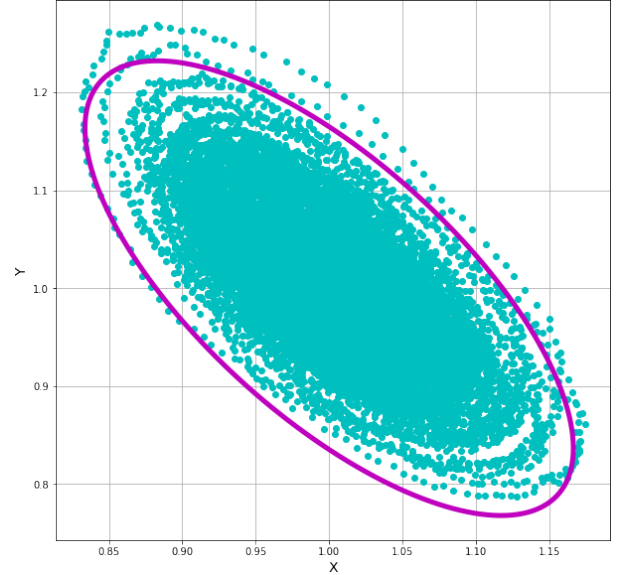


Рисунок 3.20 — Доверительный эллипс и траектория, $p=1.9$, $q=1$, $N=0.01$

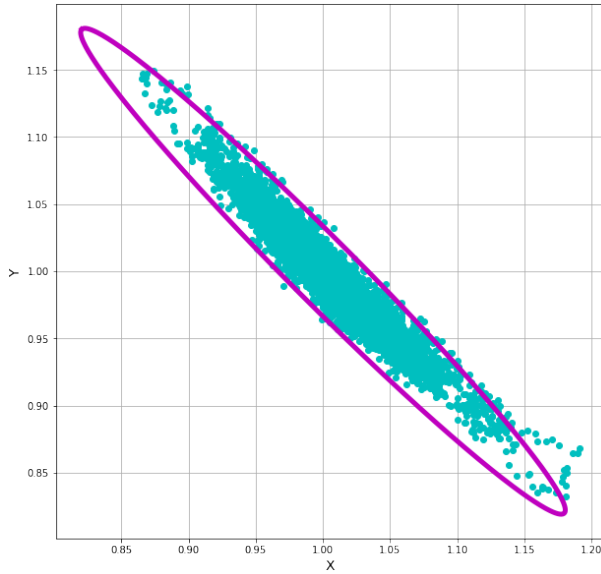


Рисунок 3.21 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.2$, $q=0.1$, $N=0.01$

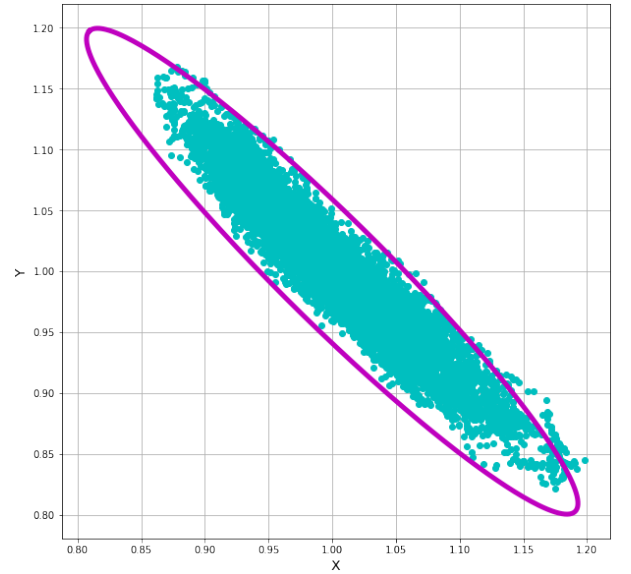


Рисунок 3.22 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.8$, $q=0.1$, $N=0.01$

Доверительный эллипс хорошо характеризует стохастическое поведение системы в окрестности точки покоя в том случае, если детерминированные траектории с начальными условиями из области, ограниченной эллипсом,

не выходят из этой области(см. рис. 3.23). Но возможна и противоположная ситуация, когда для системы характерны длинноамплитудные заходы в положение равновесия(см. рис. 3.24).

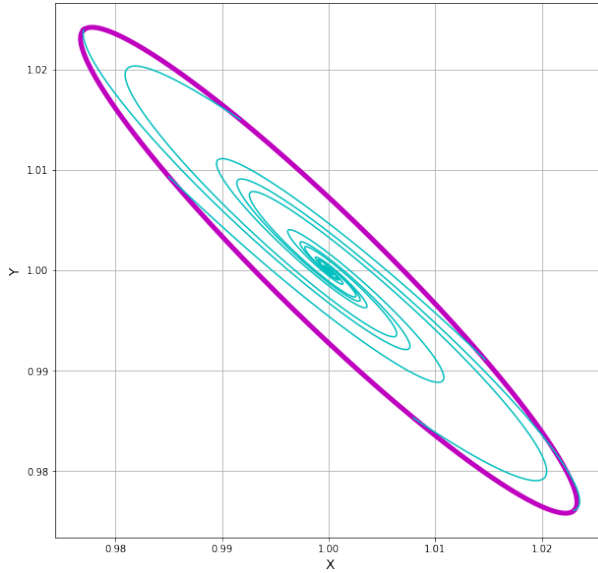


Рисунок 3.23 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $N=0.001$

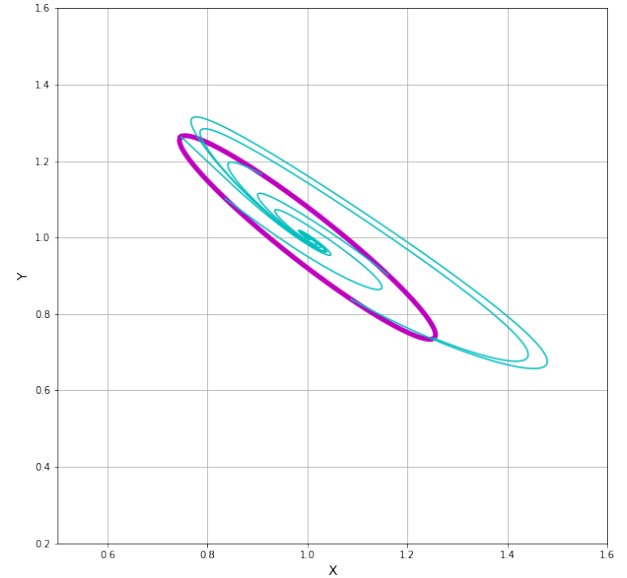


Рисунок 3.24 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $N=0.01$

При значениях параметров $p=0.9$, $q=0.1$ выход детерминированных траекторий за пределы эллипса характерен для шумов, интенсивность которых превышает 0.005 (рисунки 3.25, 3.26), так как интенсивность шума, хотя и не влияет на конкретные детерминированные траектории, но определяет форму и размер эллипса, то есть допустимые начальные данные. При $p=1$, $q=1$, этот показатель равен 0.075 (рисунки 3.27, 3.28).

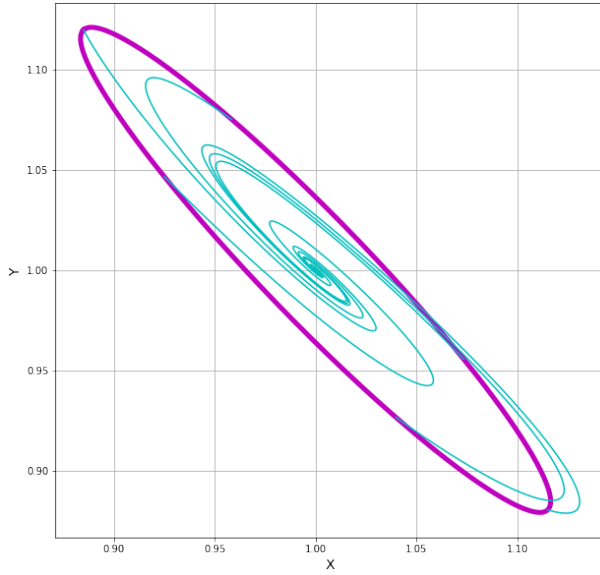


Рисунок 3.25 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $N=0.005$

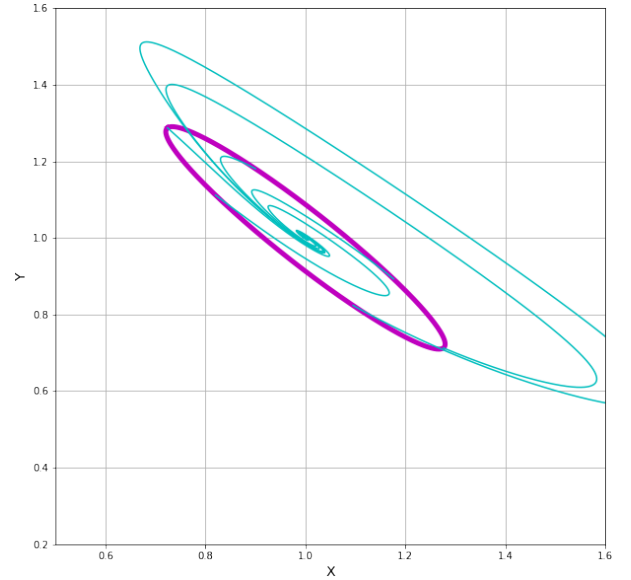


Рисунок 3.26 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $N=0.012$

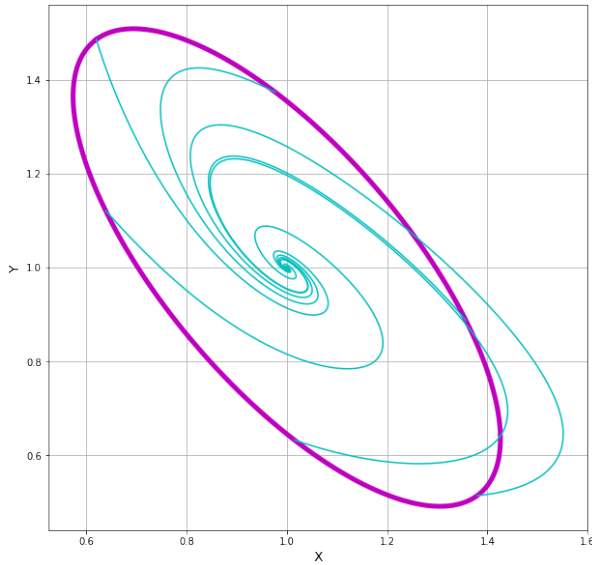


Рисунок 3.27 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=1$, $q=1$, $N=0.075$

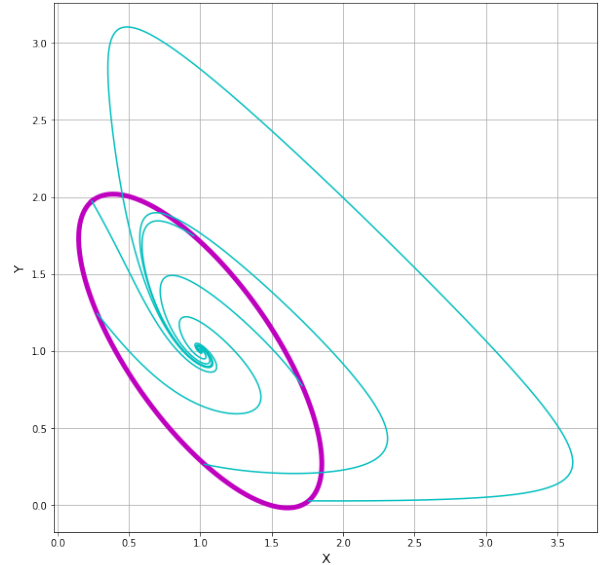


Рисунок 3.28 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=1$, $q=1$, $N=0.15$

Возмущения в окрестности предельного цикла

Исследование поведения системы при возмущениях в окрестности предельного цикла важно, так как такое поведение отражает динамику про-

цесса в неидеальных условиях реального эксперимента. Для описания применим схожий с доверительными эллипсами аппарат - доверительные полосы[1]. Суть метода остается прежней, мы ограничиваем на фазовой плоскости область, в которой траектория будет лежать с некоторой заданной наперед вероятностью, при заданной наперед интенсивности шума и при условии, что её начальные условия принадлежат этой области, но в данном случае эта область представляет собой полосу, содержащую предельный цикл, так как его поведение нас интересует. Доверительные полосы для некоторых значений параметров представлены на рисунках 3.29 – 3.32. Для большей наглядности траектории нарисованы не непрерывно, а в виде отдельных точек.

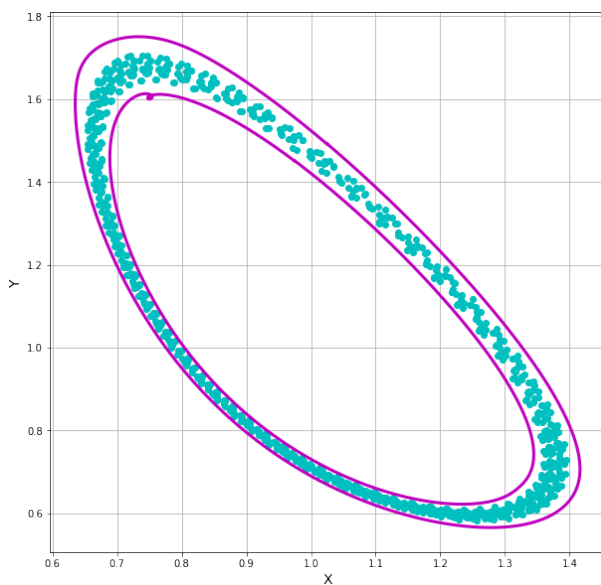


Рисунок 3.29 — Доверительная полоса и траектория, $p = 2.1$, $q = 1$, $N = 0.002$

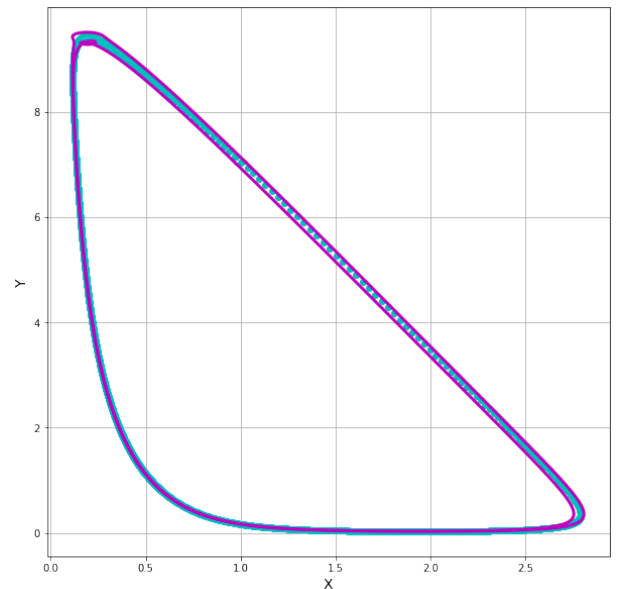


Рисунок 3.30 — Доверительная полоса и траектория, $p = 4$, $q = 1$, $N = 0.0008$

Функция стохастической чувствительности

Судить об устойчивости поведения системы к возмущениям также позволяет функция стохастической чувствительности[1]. Неявно она уже была использована при построении доверительных эллипсов и доверительных полос, но она также самоценна и безотносительно этих построений. Чем бо-

лее велико значение функции стохастической чувствительности, тем меньшую интенсивность шума способна выдержать траектория, не уходя при этом от положения равновесия. Функция стохастической чувствительности для устойчивой точки покоя и для устойчивого предельного цикла выглядит по-разному. Так, для точки покоя при данных значениях параметров и интенсивности шума, значением функции является некоторая пара неотрицательных вещественных чисел — собственные числа матрицы стохастической чувствительности[1], тогда как в случае цикла, также с фиксированными параметрами, функция в каждой точке цикла принимает некоторое, вообще говоря, новое неотрицательное вещественное значение, это отражает тот факт, что различные части предельного цикла по-разному реагируют на одно и то же возмущение.

КАРТИНКИ 3.31-3.34

Индукцированные шумом осцилляции

При значении параметра $p=2.1$ и $q \in [0.01, 0.12]$ в поведении системы наблюдаются индуцированные шумом осцилляции. При внесении шума порядка 0.002 помимо осцилляций в окрестности детерминированного цикла для данных значений параметров, наблюдаются осцилляции по большому циклу, причем отношение количества осцилляций по большому циклу к общему числу осцилляций меняется в зависимости от значения параметра q , увеличиваясь при его увеличении. При этом, с увеличением параметра q увеличивается также амплитуда «больших» осцилляций и уменьшается амплитуда «маленьких». Иллюстрирующие это явление временные ряды по переменной x приведены на рисунках 3.35-3.38. График, иллюстрирующий изменение отношения числа больших осцилляций к общему их числу приведен на рисунке 3.39, изображены результаты эксперимента и их линейная и полиномиальная аппроксимация.

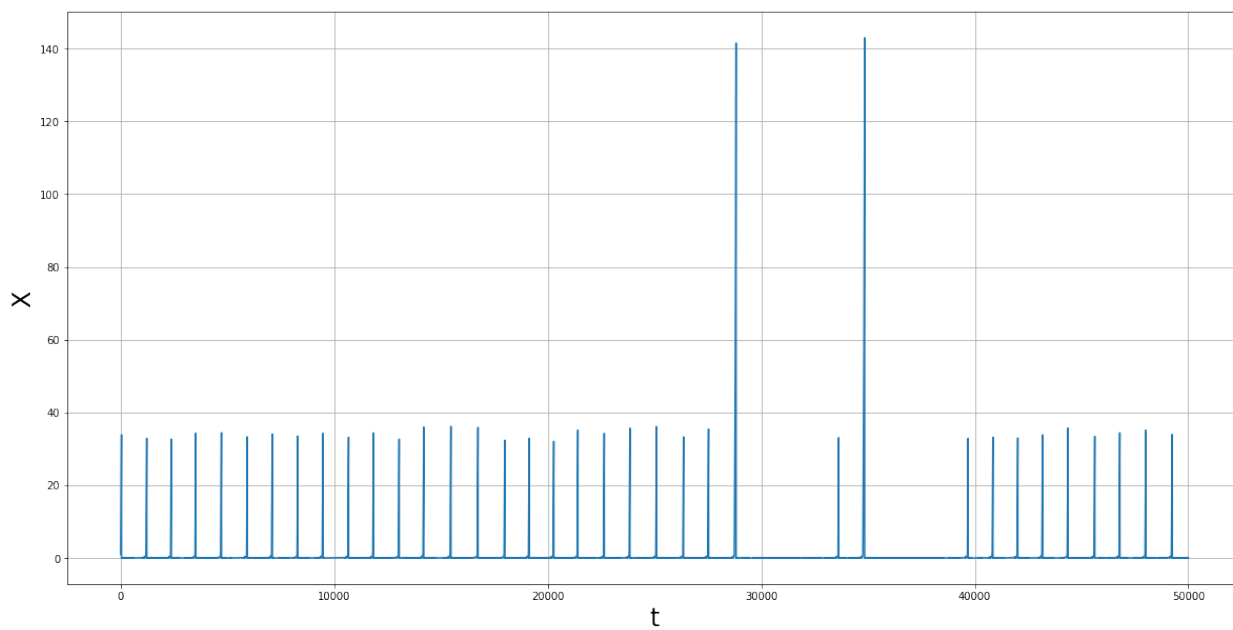


Рисунок 3.35 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.03$, $N = 0.002$

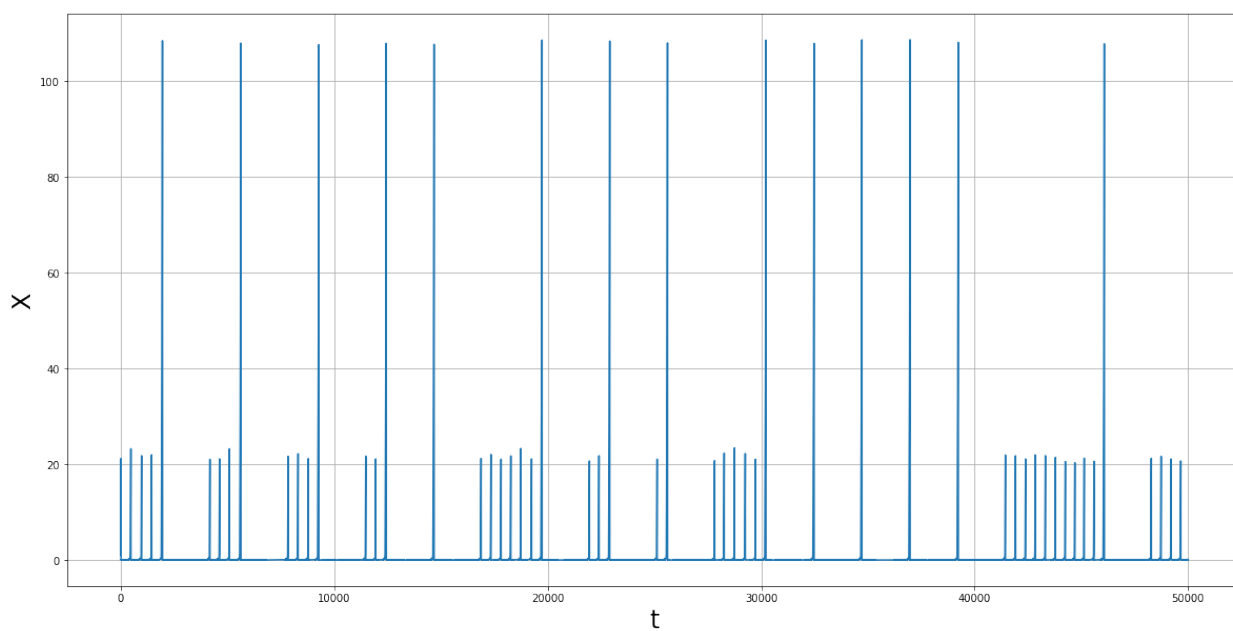


Рисунок 3.36 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.05$, $N = 0.002$

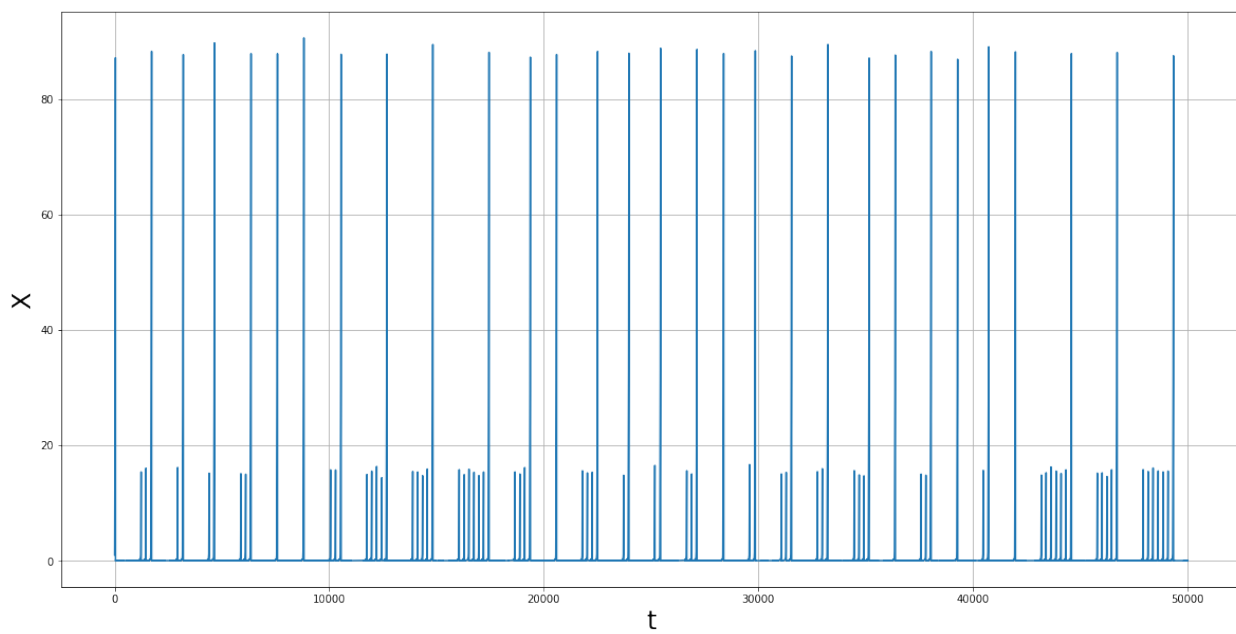


Рисунок 3.37 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.075$, $N = 0.002$

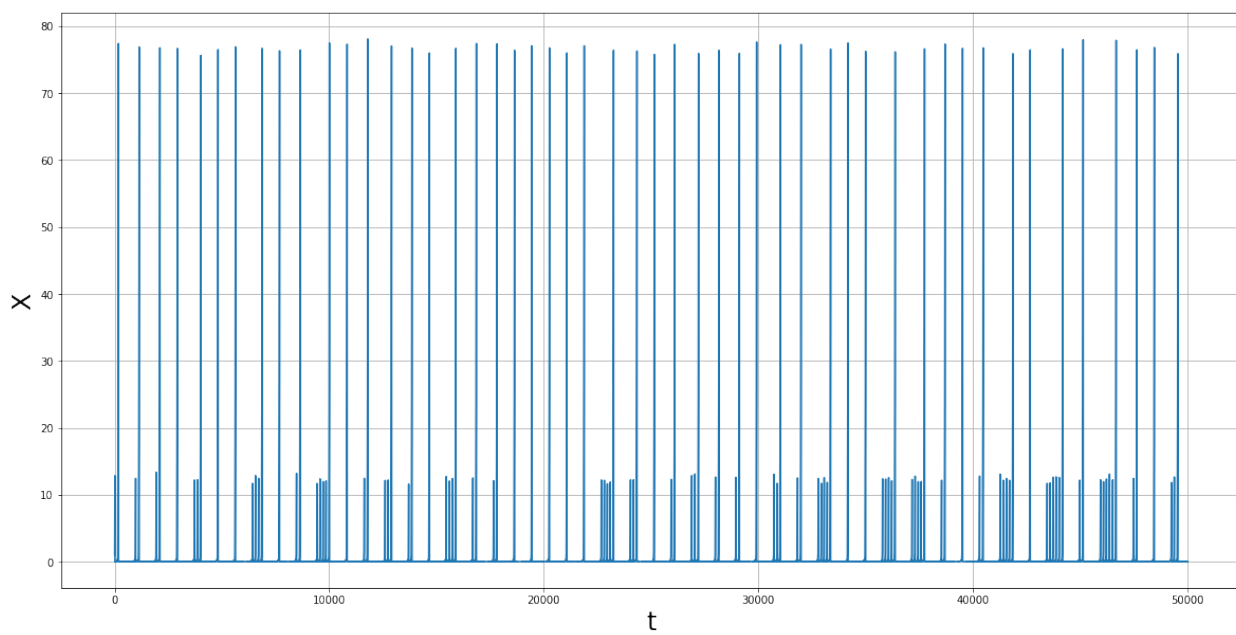


Рисунок 3.38 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.1$, $N = 0.002$

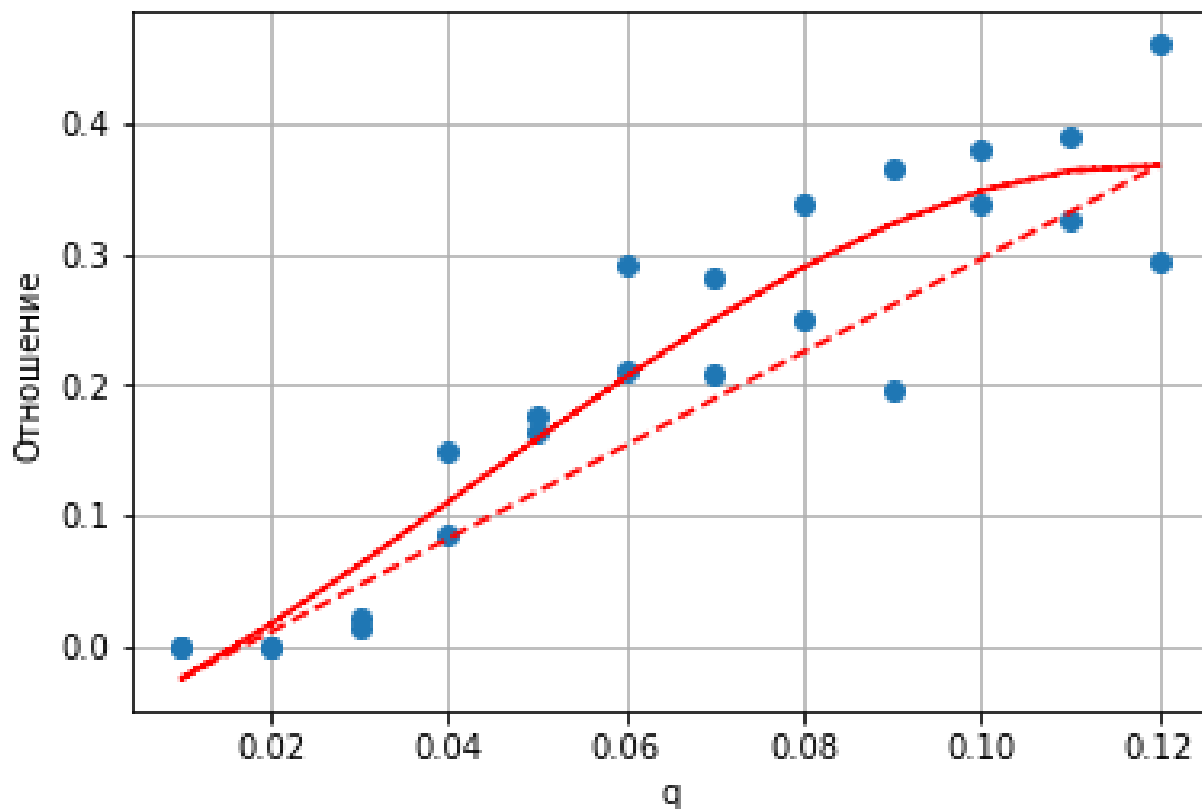


Рисунок 3.39 — Отношение числа больших осцилляций к числу всех осцилляций $p = 2.1$, $N = 0.002$

Область аномальной стохастической чувствительности

При значении параметра $q=0.1$ и $p \in [1.1333309, 1.133331]$ наблюдаются большие значения функции стохастической чувствительности и, соответственно, чувствительность к шумам. Так, амплитуды предельных циклов для детерминированных траекторий, построенных при $q=0.1$, $p=1.1333309$ и $q=0.1$, $p=1.133331$ различаются в четыре раза. Вид этих циклов и графики функции стохастической чувствительности для них приведены на рисунках 3.40 – 3.43.

3.4 Результаты и их обсуждение

4 Заключение