

Реферат

Выпускная квалификационная работа «Стохастическая динамика в модели гликолиза», в работе содержится четыре части, 44 рисунка.

Ключевые слова: гликолиз, бифуркации, стохастическая возбудимость, осцилляции.

Цель работы — исследование детерминированных и стохастических свойств модели гликолитического осциллятора Хиггинса. Работа содержит описание методов проведения численных экспериментов и анализ их результатов.

Содержание

1	Введение	4
2	Основная часть	6
2.1	Постановка задачи работы	6
2.2	Описание модели	7
2.3	Детерминированные свойства модели	7
2.3.1	Свойства системы первого приближения	7
2.3.2	Свойства предельных циклов	10
2.4	Стохастические свойства модели	14
2.4.1	Моделирование случайных возмущений	15
2.4.2	Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя .	15
2.4.3	Функция стохастической чувствительности	17
2.4.4	Возмущения в окрестности предельного цикла	22
2.4.5	Индукцированные шумом осцилляции	23
2.4.6	Область аномальной стохастической чувствительности	27
3	Заключение	30
4	Список использованных источников и литературы	31

1 Введение

Построение и анализ математических моделей являются важными инструментами научного исследования различных явлений, в том числе физических и химических. В настоящее время существует возможность эффективно применять методы исследования моделей, опирающиеся на применение компьютерных технологий для постановки численных экспериментов и обработки их результатов. В частности представляет интерес исследование с помощью таких методов моделей химических процессов, каковой является и гликолитический осциллятор Хиггинса. Эта модель описывает колебательную биохимическую реакцию, в процессе которой осуществляется распад глюкозы и образование новых соединений. Этот процесс имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в различных биологических системах, например в клетках живого организма, потому что в значительной мере он определяет энергетические процессы в клетке. Также гликолиз исследуется с медицинской точки зрения.

Впервые модель гликолиза в том виде, в котором она исследуется в данной работе была предложена Хиггинсом (Higgins) в 1964 году[4]. Для данной модели, как и для любой модели химической реакции, важно учитывать наличие случайных возмущений, так как они неизбежно сопровождают реальный химический процесс и могут существенно влиять на его протекание.

В пункте 2.4 исследуются детерминированные свойства системы: проведен бифуркационный анализ, исследована устойчивость аттракторов системы, построены примеры фазовых портретов. В пункте 2.5 изучаются влияние случайных возмущений на равновесия и циклы системы, как с использованием прямого численного моделирования, так и с помощью аналитического метода функции стохастической чувствительности[2]. Особенный

интерес здесь представляет устойчивость предельных циклов и их чувствительность к малым случайным возмущениям, потому что эти характеристики в значительной мере характеризует протекание процесса, описываемого моделью, в естественной среде.

В работе показана зависимость поведения модели в окрестности точки покоя от параметров, исследованы аттракторы системы и их устойчивость, выявлены индуцированные шумом колебания и область повышенной стохастической чувствительности. Для реализации поставленных задач был разработан программный комплекс, позволяющий вести численные расчёты с нужной степенью точности и визуализировать полученные в ходе эксперимента данные.

2 Основная часть

2.1 Постановка задачи работы

Целью работы является исследование детерминированных и стохастических свойств математической модели гликолитического осциллятора Хиггинса. В работе предполагается проведение бифуркационного анализа детерминированной системы и построение бифуркационной диаграммы, анализ восприимчивости к случайным возмущениям на основе прямого численного моделирования, аппарата функции стохастической чувствительности и метода доверительных областей.

2.2 Описание модели

Модель гликолитического осциллятора Хиггинса описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) \end{cases} \quad (1)$$

В определении системы фигурируют параметры p и q , которые являются положительными вещественными коэффициентами, не зависящими от каких-либо переменных. Ограничения на неотрицательность параметров возникают из физического смысла описываемого моделью процесса.

2.3 Детерминированные свойства модели

2.3.1 Свойства системы первого приближения

Для исследования детерминированных свойств модели воспользуемся теоремой Гробмана-Хартмана, утверждающей, что в окрестности неподвижной точки поведение исследуемой системы совпадает с поведением ее линеаризации. Из этого следует, что в некоторой окрестности неподвижной точки фазовый портрет системы (1) совпадает с портретом линеаризованной системы, в случае, если система (1) имела портрет типа «узел», «фокус» или «седло». Вычислим точку покоя для исследуемой модели из условий равенства нулю производных:

$$\begin{cases} 1 - xy = 0; \\ py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) = 0 \end{cases}$$

При действующих ограничениях на p и q получаем, что единственной точкой покоя является точка $(1,1)$ при любых допустимых значениях p и q . Вычислим также линеаризованную систему в точке покоя:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1) - (y-1) \\ \dot{y} = p(x-1) + p\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)(y-1) \end{cases}$$

Сделав замену $\tilde{x} = x - 1$, $\tilde{y} = y - 1$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{x} - \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = p\tilde{x} + p\left(1 - \frac{q}{1+q}\right)\tilde{y} \end{cases} \quad (2).$$

Тип фазового портрета определяется собственными числами матрицы системы первого приближения. В нашем случае матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p & 1 - \frac{q}{1+q} \end{pmatrix};$$

Её характеристическое уравнение:

$$(-1 - \lambda) \left(p \left(1 - \frac{q}{1+q} \right) - \lambda \right) + p = 0.$$

Его корни, собственные числа матрицы системы (2), соответственно, имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \left(\left(p - 1 - p \frac{q}{1+q} \right) \pm \sqrt{\left(1 - p + p \frac{q}{1+q} \right)^2 - 4p \frac{q}{1+q}} \right) / 2.$$

Так как собственные числа явно зависят от p и q , найдем зависимость типа фазового портрета от значений параметров p и q , больших нуля, и отобразим результат на бифуркационной диаграмме (см. рисунок 2.1).

Нумерованные области между кривыми, изображенными на рисунке 2.1 соответствуют определенным типам фазовых портретов при значения p и q таких, что точка (p, q) принадлежит данной области. Примеры каждого типа фазовых портретов системы приведены ниже (см. рисунки 2.2—2.5).

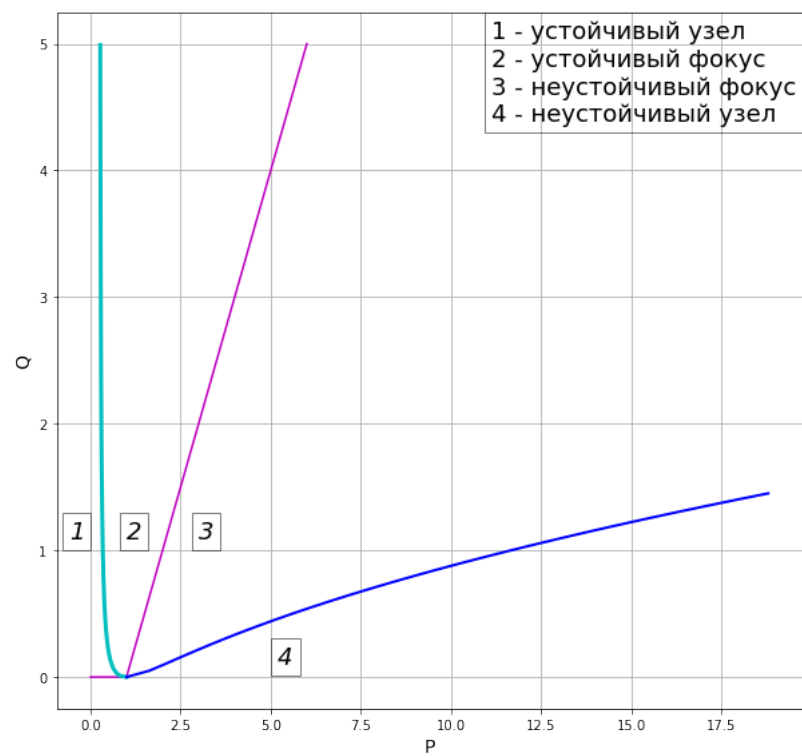


Рисунок 2.1 — бифуркационная диаграмма

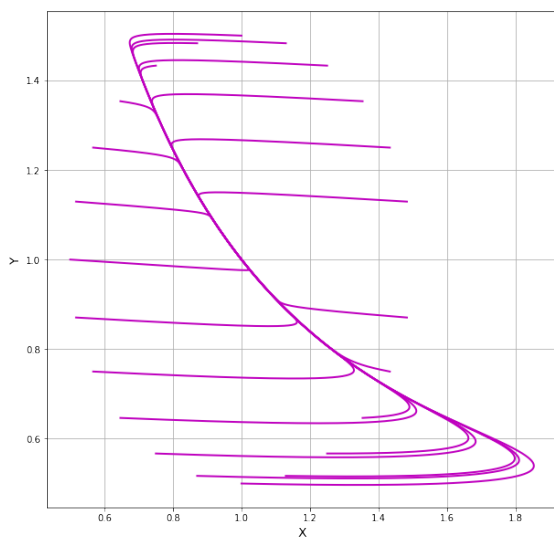


Рисунок 2.2 — устойчивый узел,
 $p=0.05$, $q=1$

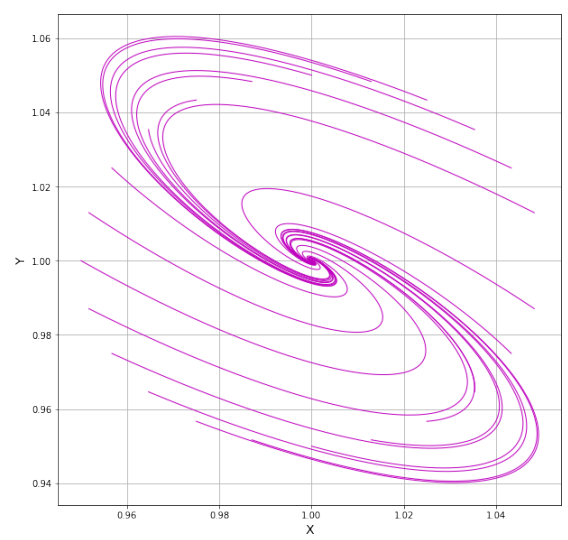


Рисунок 2.3 — устойчивый фокус,
 $p=0.7$, $q=1$

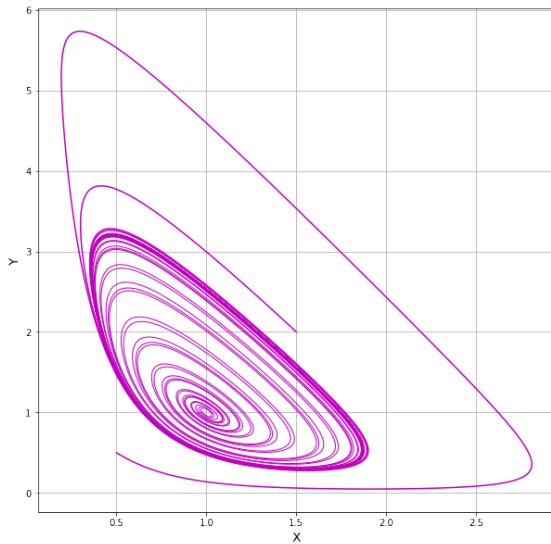


Рисунок 2.4 — неустойчивый фокус, $p=2.5$, $q=1$

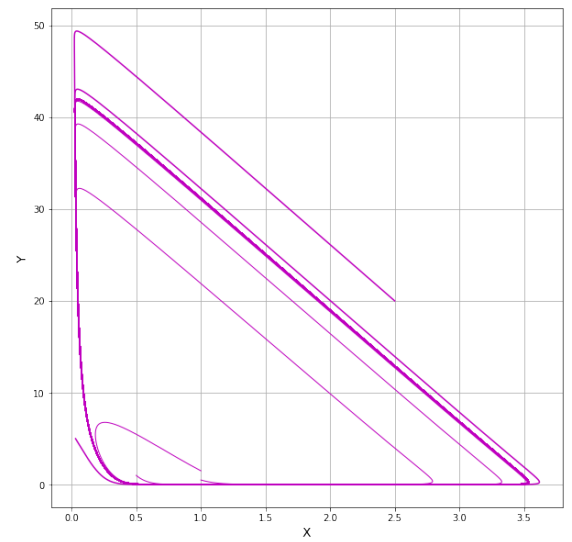


Рисунок 2.5 — неустойчивый узел, $p=12.5$, $q=1$

2.3.2 Свойства предельных циклов

Точка \tilde{x} фазовой плоскости называется предельной точкой траектории $X = \varphi(t)$, если существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, либо $t_n \rightarrow -\infty$ такая, что $\varphi(t_n) \rightarrow \tilde{x}$. Предельным множеством траектории называется множество всех её предельных точек. Предельный цикл - это замкнутое (периодическое) решение системы, представляющее собой предельное множество некоторой её траектории. Для случая фазовой плоскости известно (по т. Пуанкаре – Бендиксона), что предельное множество любой траектории представляет собой либо точку покоя, либо предельный цикл, либо предельный полицикл. В нашем случае предельный полицикл невозможен ввиду единственности точки покоя. В случае, когда точка покоя системы (2) неустойчива, на фазовой плоскости присутствуют предельные циклы, что видно уже из рисунков 2.4 и 2.5.

Для численного поиска предельных циклов с заданной степенью точности применим следующий алгоритм. Рассмотрим на фазовой плоскости луч, проходящий через точку покоя параллельно, без ограничения общности, оси OY . Рассмотрим траекторию, выходящую из какой-либо точки,

принадлежащей малой окрестности точки покоя. В силу вышесказанного, при наличии предельного цикла эта траектория будет стремиться к нему либо в прямом, либо в обратном времени, а значит, в силу того, что точка покоя находится внутри цикла (по т. Пуанкаре-Бендиксона) траектория бесконечное число раз пересечет луч. Траектория системы, не являющаяся предельным циклом или точкой покоя, не имеет самопересечений, значит, начиная с некоторого момента, каждое следующее пересечение траекторией луча будет ближе к предельному циклу чем предыдущее. Когда расстояние между соседними (по времени) пересечениями становится меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε , мы говорим, что часть траектории, заключённая между этими двумя точками, представляет собой предельный цикл с точностью ε . Предельные циклы, найденные с точностью 0.0001 при $q=1$ представлены на рисунках 2.6–2.9. Соответствующие им временные ряды для переменных x и y представлены на рисунках 2.10 и 2.11.

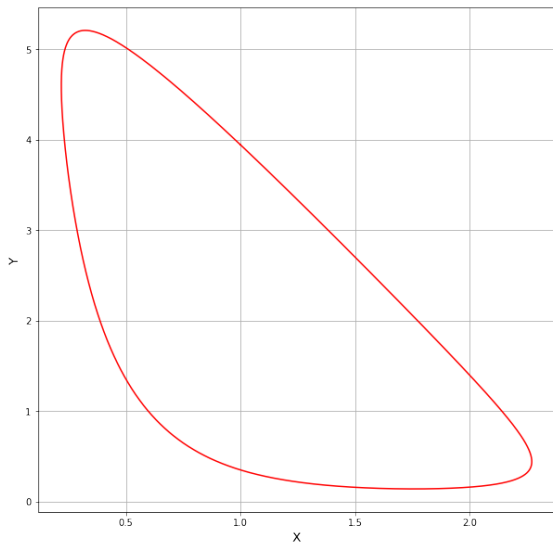


Рисунок 2.6 — предельный цикл,
 $p=3, q=1$

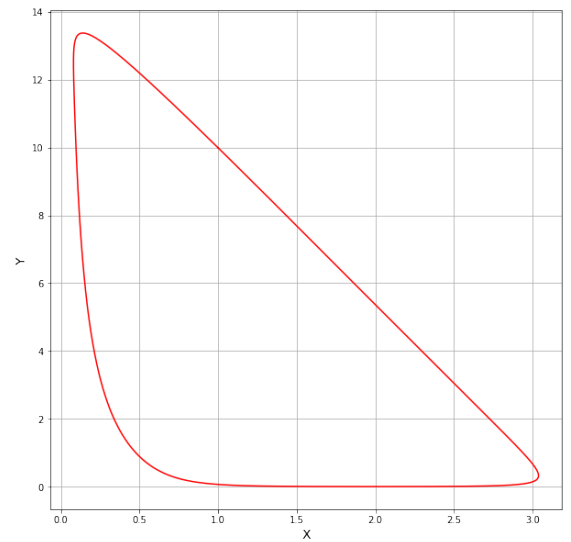


Рисунок 2.7 — предельный цикл,
 $p=5, q=1$

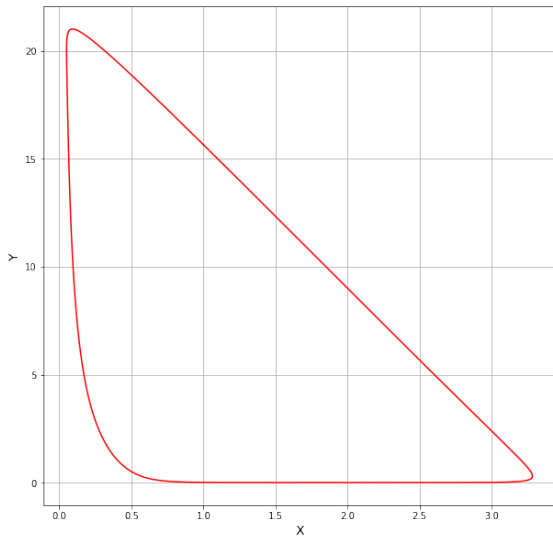


Рисунок 2.8 — предельный цикл,
 $p=7, q=1$

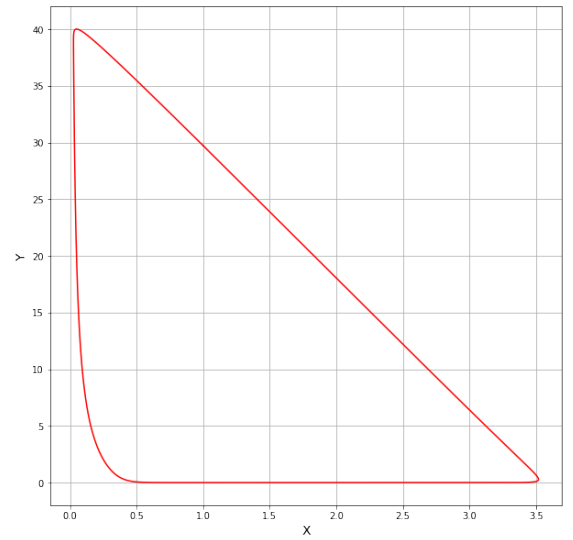


Рисунок 2.9 — предельный цикл,
 $p=12, q=1$

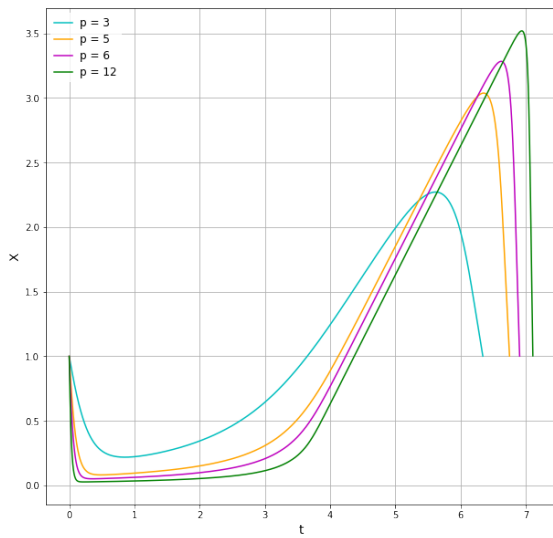


Рисунок 2.10 — временные ряды
для $x, q=1$

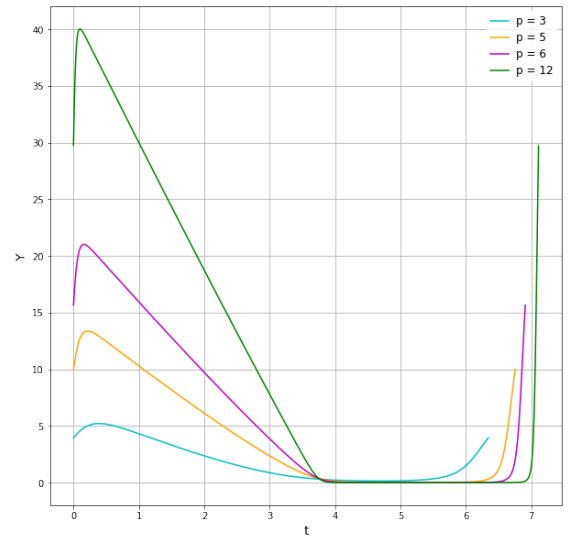


Рисунок 2.11 — временные ряды
для $y, q=1$

Как видно из рисунков 2.6 – 2.11, размер и форма предельного цикла значительно меняются, в зависимости от параметра p , с его ростом увеличивается амплитуда колебаний по обоим переменным, появляются почти вертикальные и горизонтальные участки. Пусть Γ - предельный цикл системы (1), а $x(t)$ - некоторое её решение. Рассмотрим в некоторой окрестности U цикла Γ функцию $\gamma(x) = \arg\min_{y \in \Gamma} \|y - x\|$. Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задаёт отклонение точки x от цикла Γ . Решение $\xi(t)$, в

нашем случае соответствующее предельному циклу, называют экспоненциально орбитально устойчивым (далее - устойчивым), если $\exists a > 0, \exists K > 0$ такие, что $\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-at}\|\Delta(x_0)\|$ для любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$, где U - некоторая окрестность решения $\xi(t)$.

Вопрос об устойчивости предельных циклов весьма важен с точки зрения описания поведения моделируемого объекта. Для исследования устойчивости предельных циклов построим матрицу монодромии. Это, в случае системы (2), квадратная матрица размера 2×2 , составленная из двух вектор-столбцов, представляющих собой фундаментальную систему решений векторного уравнения системы первого приближения:

$$\dot{z} = Fz,$$

где F - матрица Якоби системы (1). F периодична на предельном цикле с некоторым периодом T , так как предельный цикл есть замкнутая траектория. Указанную задачу можно решить численно, найдя цикл с некоторой точностью и решая, также численно, систему первого приближения вдоль него одношаговым методом, взяв в качестве начальных условий линейно независимые векторы $[0,1]$ и $[1,0]$.

Оценим корректность полученного решения, а также устойчивость предельного цикла с помощью теоремы Андронова – Хопфа. Она говорит, что одно из собственных чисел матрицы монодромии должно быть равно единице, а второе число λ , называемое мультипликатором, определяет устойчивость цикла. В случае, если второе число по модулю меньше 1, цикл устойчив.

В результате решения системы первого приближения методом Эйлера, для различных значений параметра p , при $q = 1$, первое собственное число матрицы монодромии равнялось 1 с точностью до 0.01 для любого p .

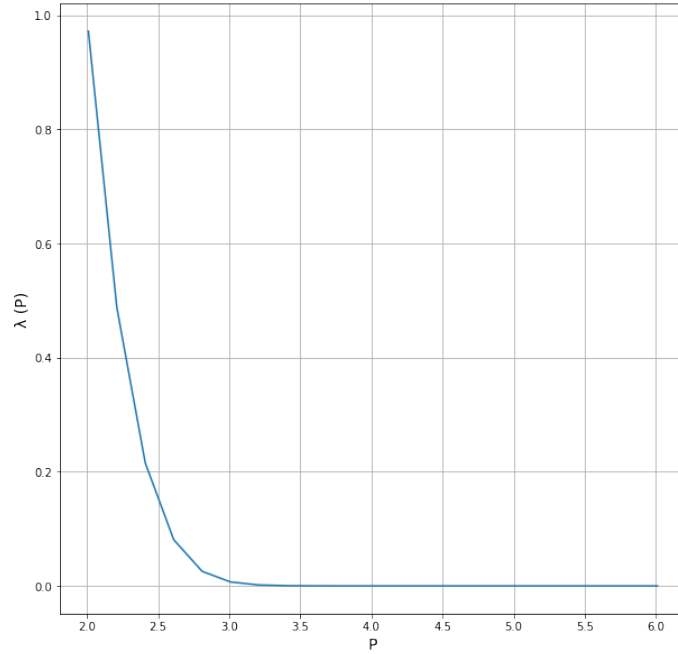


Рисунок 2.12 — график мультипликатора $\lambda(p)$

Динамика изменения мультипликатора (см. рисунок 2.12) говорит о том, что предельные циклы устойчивы, причем при удалении параметра p от значения, для которого характерен фазовый портрет типа «центр» циклы становятся все более устойчивыми.

2.4 Стохастические свойства модели

Рассмотрим модель гликолитического осциллятора Хиггинса под воздействием случайных возмущений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy + \varepsilon\xi_1 \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) + \varepsilon\xi_2 \end{cases} \quad (1).$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — случайные величины, распределённые по нормальному закону, ε — интенсивность шума.

2.4.1 Моделирование случайных возмущений

Для дальнейшего исследования свойств системы (1) внесем в её поведение случайные возмущения. Для этого, при построении траекторий системы, на каждом шаге метода численного интегрирования Рунге – Кутты 4 порядка будем добавлять к результату метода некоторую случайную добавку вида $\varepsilon\sqrt{h}\xi$, где ξ — нормально распределённая случайная величина, h — шаг численного метода, ε — положительное число, коэффициент, регулирующий интенсивность возмущений.

2.4.2 Возмущения в окрестности устойчивой точки покоя

При внесении возмущений в траектории, стартующие в окрестности устойчивой точки покоя, траектории остаются в окрестности точки покоя при достаточно сильных шумах (рис. 2.13, 2.14).

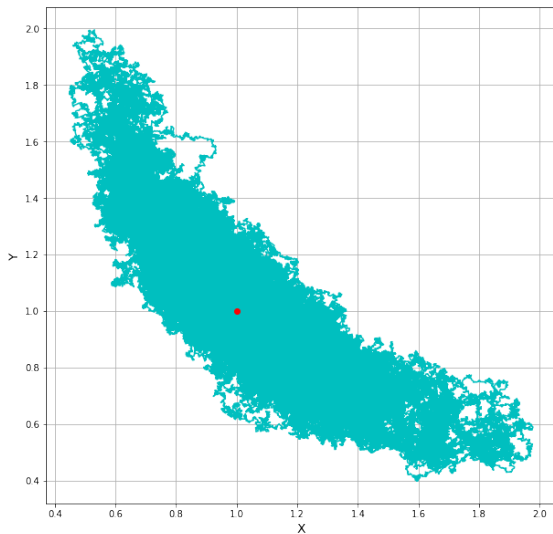


Рисунок 2.13 — $\varepsilon=0.1$, $p=0.2$, $q=1$

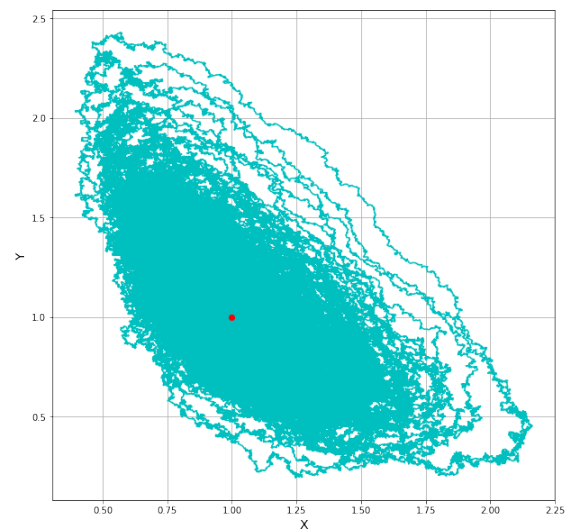


Рисунок 2.14 — $\varepsilon=0.1$, $p=1.4$, $q=1$

Рассмотрим зависимость дисперсии точек такой траектории от интенсивности шума и от значений параметров p и q , при некоторой фиксированной интенсивности шума. Дисперсию оценим как среднеквадратичное отклонение точек траектории от их математического ожидания, которое, заметим, почти совпадает с точкой покоя в силу способа построения траектории. График зависимости дисперсии каждой координаты от интенсив-

ности шума представлен на рисунках 2.15, 2.16. Зависимость дисперсии от параметра p при $\varepsilon = 0.01$ представлена на рисунках 2.17, 2.18.

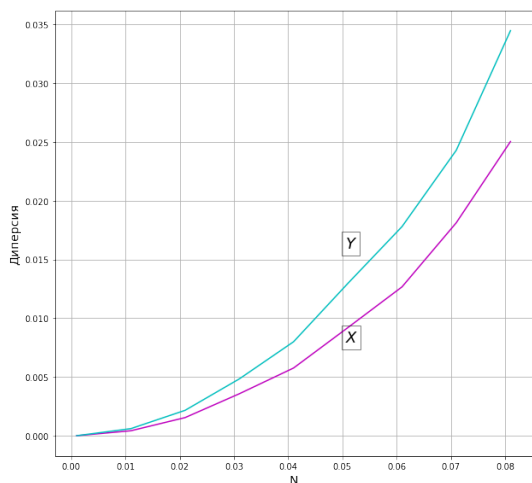


Рисунок 2.15 — Зависимость дисперсии от интенсивности шума, $p=0.2$, $q=1$

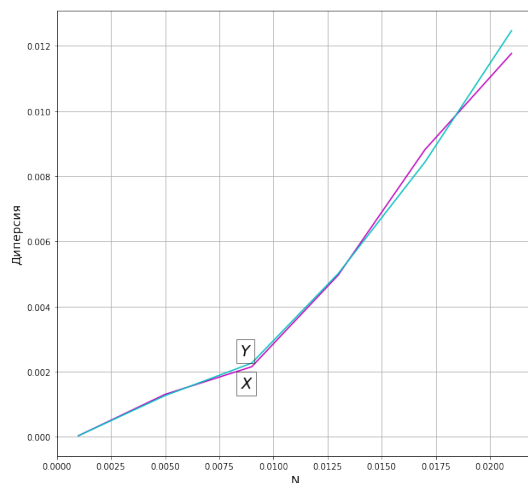


Рисунок 2.16 — Зависимость дисперсии от интенсивности шума, $p=0.2$, $q=0.1$

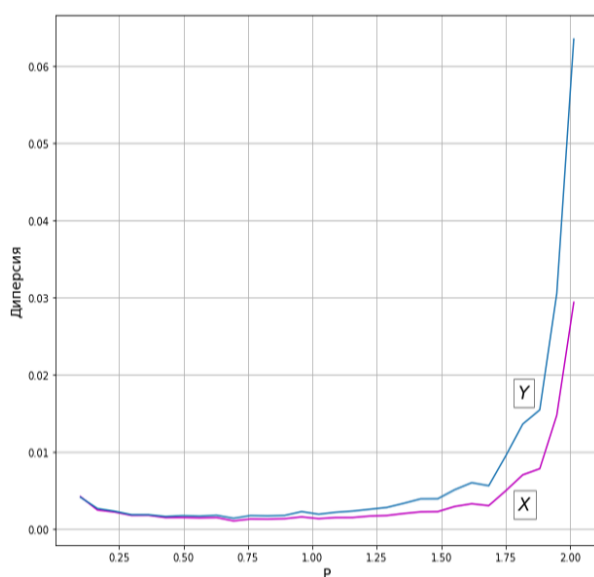


Рисунок 2.17 — Зависимость дисперсии от параметра p , $\varepsilon = 0.05$, $q = 1$

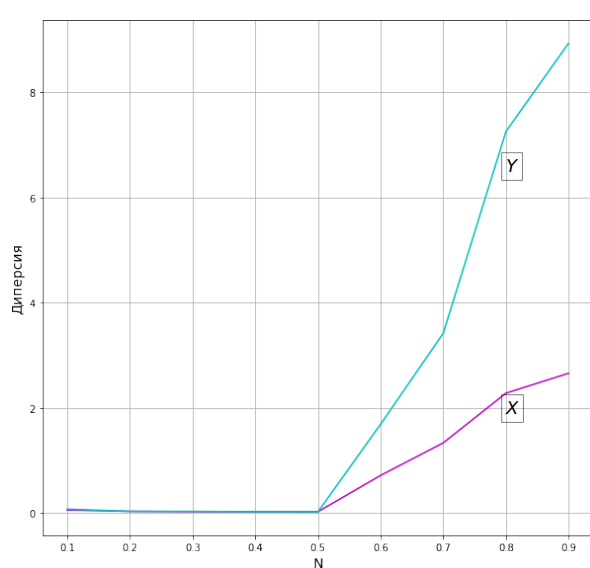


Рисунок 2.18 — Зависимость дисперсии от параметра p , $\varepsilon = 0.05$, $q = 0.1$

Из рисунков 2.15 – 2.18 видно, что при $q = 0.1$ система становится более жёсткой, чем при $q = 1$.

2.4.3 Функция стохастической чувствительности

Судить об устойчивости поведения системы при наличии возмущений позволяет функция стохастической чувствительности, далее ФСЧ[2]. ФСЧ W задаёт асимптотику дисперсии D :

$$W \approx \frac{D}{\varepsilon^2}.$$

Чем более велико значение ФСЧ, тем меньшую интенсивность шума способна выдержать траектория, не уходя при этом из некоторой окрестности аттрактора. Чтобы ввести понятие функции стохастической чувствительности перейдем от нашей системы:

$$\dot{x} = f(x),$$

к системе:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - это стандартный Гауссовский процесс, $\sigma(x)$ - достаточно гладкая матричная функция, а ε - некоторое число, большее нуля. В случае, когда аттрактором системы выступает устойчивая точка покоя \bar{x} , ФСЧ W является решением уравнения:

$$FW + WF^T = -S, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^T, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

В условиях нашей системы S — единичная диагональная матрица, и матрица W для единственной точки покоя выражается через коэффициенты p и q как:

$$w_{12} = (-p^2 - pq^2 - pq - q^2 - 2q - 1)/(2qp(p - q - 1))$$

$$w_{12} = w_{21} = (p^2q + p^2 + q^2 + 2q + 1)/(2qp(p - q - 1))$$

$$w_{22} = -((q + 1)(p^2q + p^2 + pq + q + 1))/(2qp(p - q - 1)).$$

Собственные числа W определяют стохастическую чувствительность системы и в дальнейшем будут использованы, чтобы получить наглядное представление о местоположении возмущенных траекторий (доверитель-

ный эллипс). Зависимость ФСЧ от параметров системы представлена на рисунках 2.19 и 2.20.

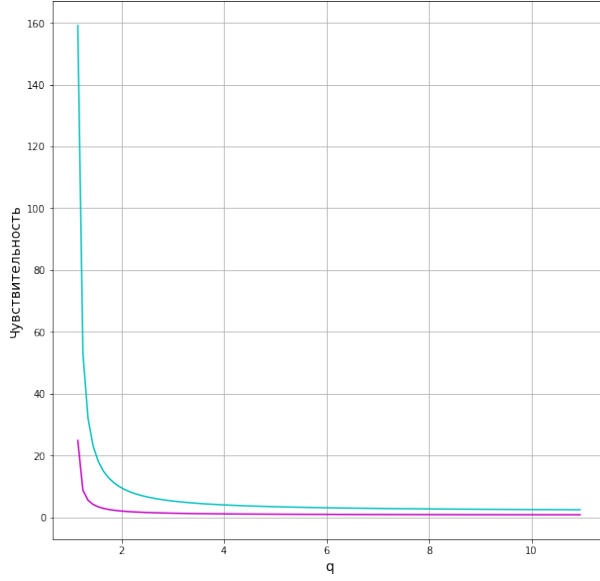


Рисунок 2.19 — Зависимость стохастической чувствительности от q , $p=2.1$

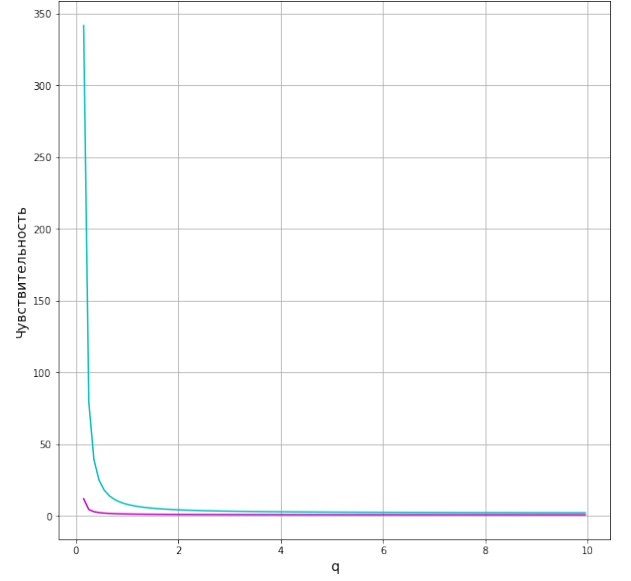


Рисунок 2.20 — Зависимость стохастической чувствительности от q , $p=1.1$

Для случая, когда аттрактором является T -периодическое решение системы, задающее предельный цикл $\gamma(t)$, уравнение для W в условиях нашей системы можно записать как[2]:

$$W(t) = \mu(t)P(t),$$

где $\mu(t)$ - функция, являющаяся решением краевой задачи:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T) \\ a(t) &= p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^T(t)S(t)p(t), \end{aligned}$$

где $p(t)$ - нормализованный нормальный вектор к $f(\gamma(t))$, а $P(t) = pp^T$. Заметим, что в данном случае ФСЧ будет зависеть от t , то есть в каждой конкретной точке цикла эта характеристика будет принимать своё значение. ФСЧ для предельных циклов при некоторых значениях p и q показана на рисунках 2.21, 2.22.

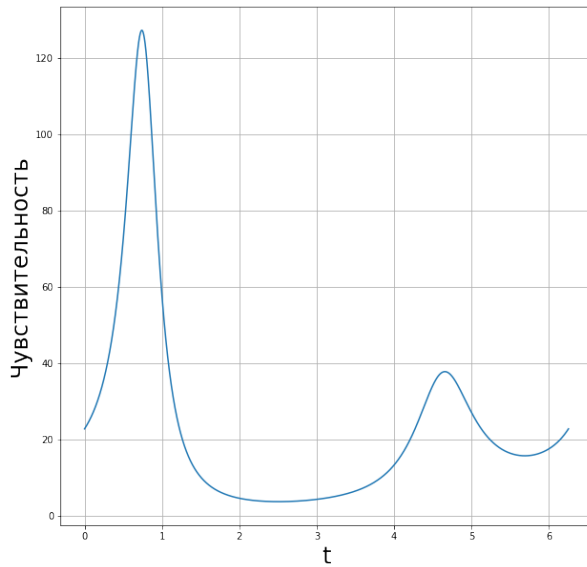


Рисунок 2.21 — ФСЧ цикла, $p=2.1$, $q=1$, $\varepsilon=0.002$

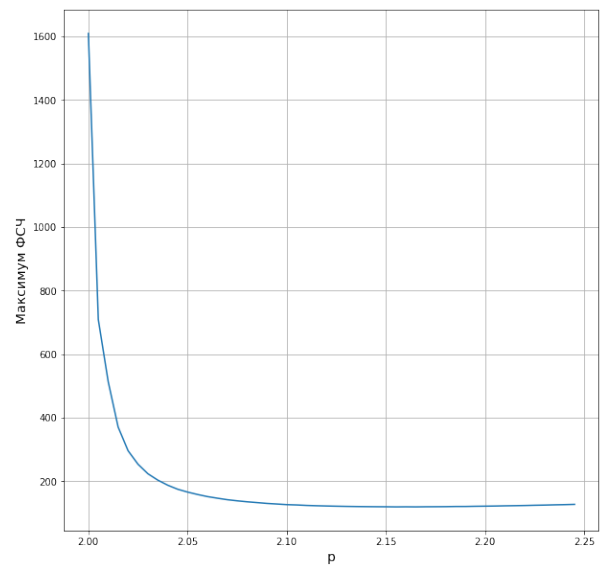


Рисунок 2.22 — Зависимость максимума ФСЧ цикла от p , $q=1$, $\varepsilon=0.001$

Как видно из рис. 2.22, ФСЧ быстро растет при приближении к точке бифуркации $q = p - 1$. Однако, аппарат ФСЧ позволяет не только судить непосредственно о чувствительности аттрактора, с его помощью можно также ограничить на фазовой плоскости область, в которой траектория будет лежать с некоторой заданной наперед вероятностью, при заданной наперед интенсивности шума и при условии, что её начальные условия принадлежат этой области. В случае точки покоя такая область называется доверительным эллипсом, примеры доверительных эллипсов, построенных так, чтобы охватывать 99% траектории приведены на рисунках 2.23 – 2.26. Для большей наглядности траектории нарисованы не непрерывно, а в виде отдельных точек.

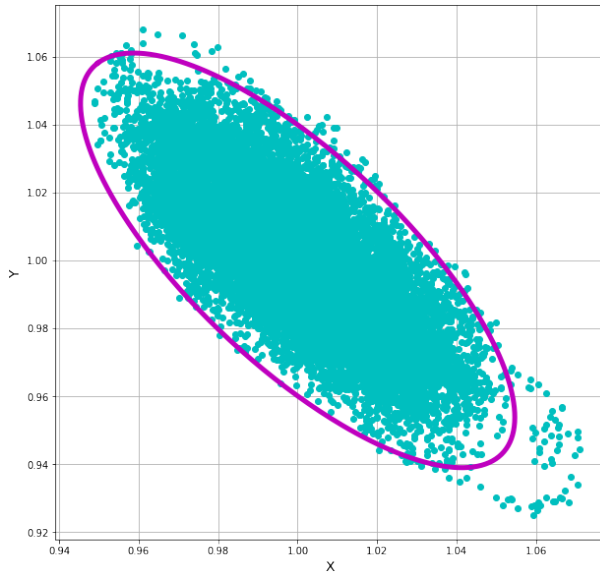


Рисунок 2.23 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.7$, $q=1$, $\varepsilon=0.01$

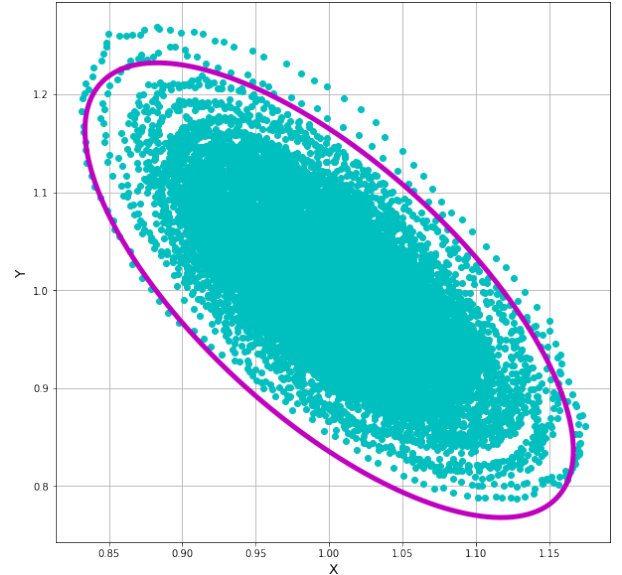


Рисунок 2.24 — Доверительный эллипс и траектория, $p=1.9$, $q=1$, $\varepsilon=0.01$

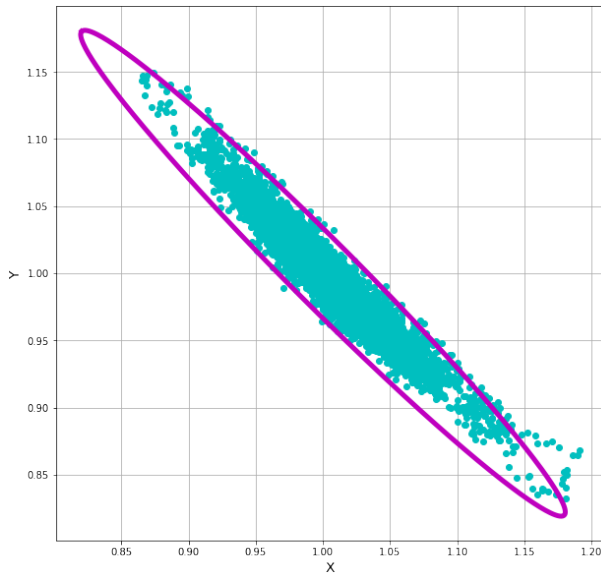


Рисунок 2.25 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.2$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.01$

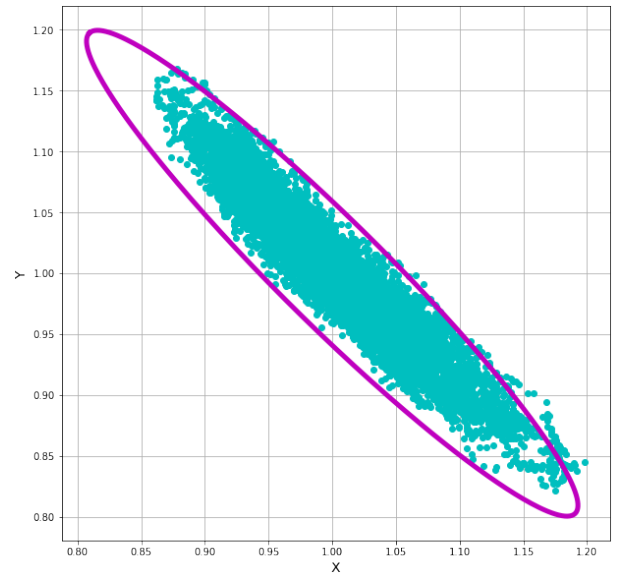


Рисунок 2.26 — Доверительный эллипс и траектория, $p=0.8$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.01$

Доверительный эллипс хорошо характеризует стохастическое поведение системы в окрестности точки покоя в том случае, если детерминированные траектории с начальными условиями из области, ограниченной эллипсом,

не выходят из этой области(см. рис. 2.27). Но возможна и противоположная ситуация, когда для системы характерны длинноамплитудные заходы в положение равновесия(см. рис. 2.28).

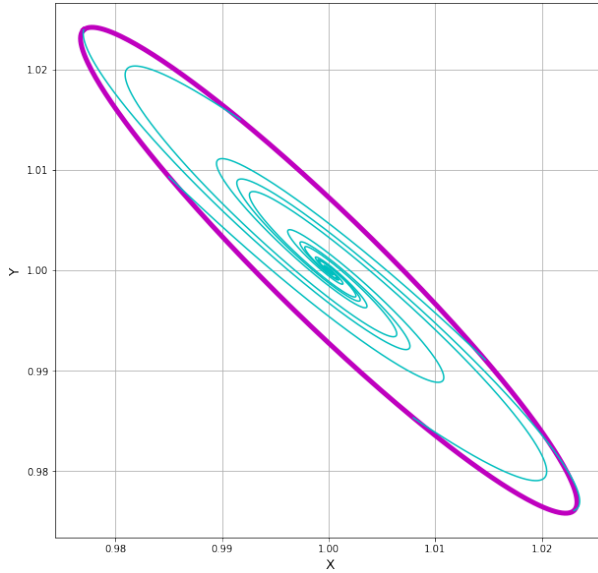


Рисунок 2.27 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.001$

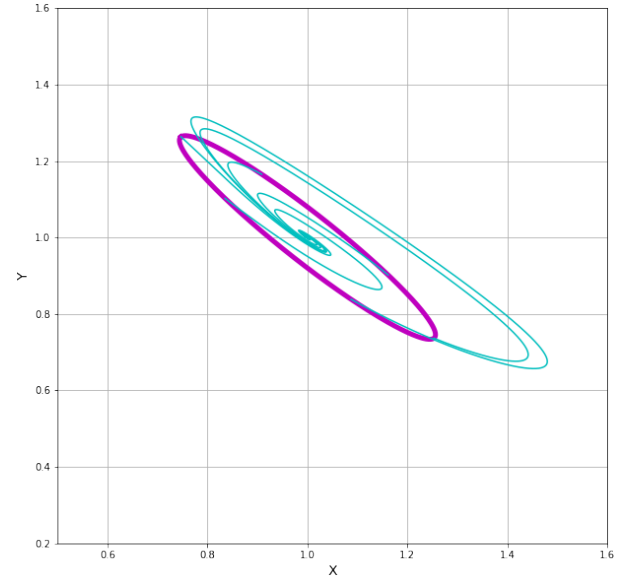


Рисунок 2.28 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.01$

При значениях параметров $p=0.9$, $q=0.1$ выход детерминированных траекторий за пределы эллипса характерен для шумов, интенсивность которых превышает 0.005 (рисунки 2.29, 2.30), так как интенсивность шума, хотя и не влияет на конкретные детерминированные траектории, но определяет форму и размер эллипса, то есть допустимые начальные данные. При $p=1$, $q=1$, этот показатель равен 0.075 (рисунки 2.31, 2.32).

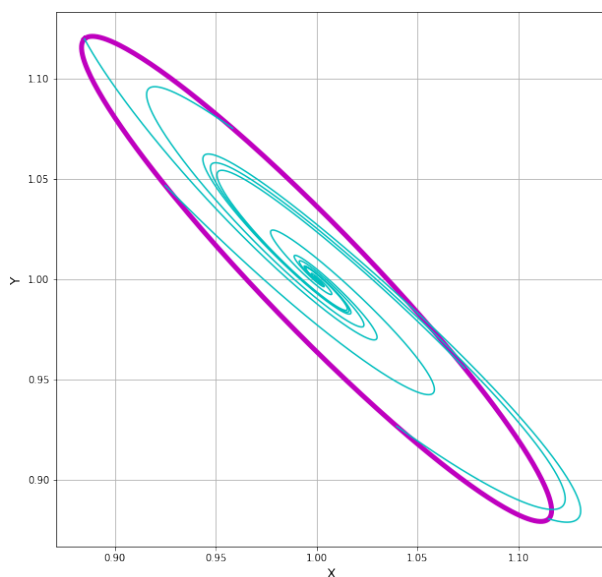


Рисунок 2.29 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.005$

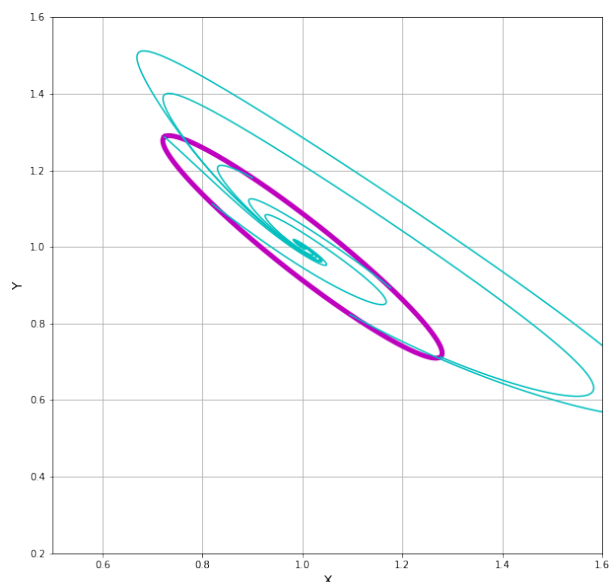


Рисунок 2.30 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=0.9$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.012$

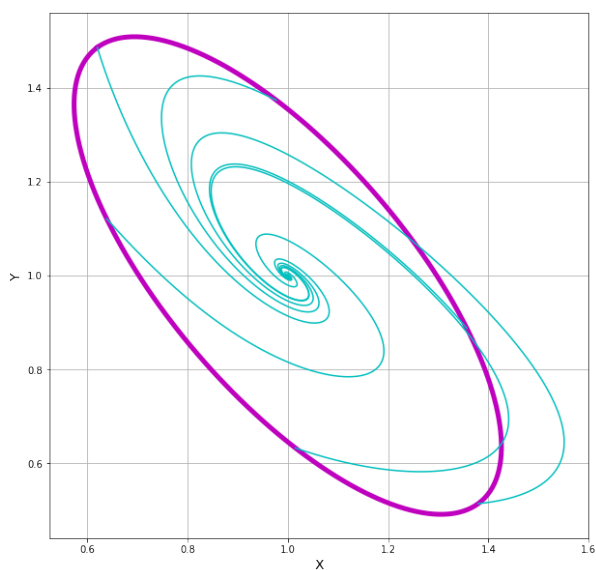


Рисунок 2.31 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=1$, $q=1$, $\varepsilon=0.075$

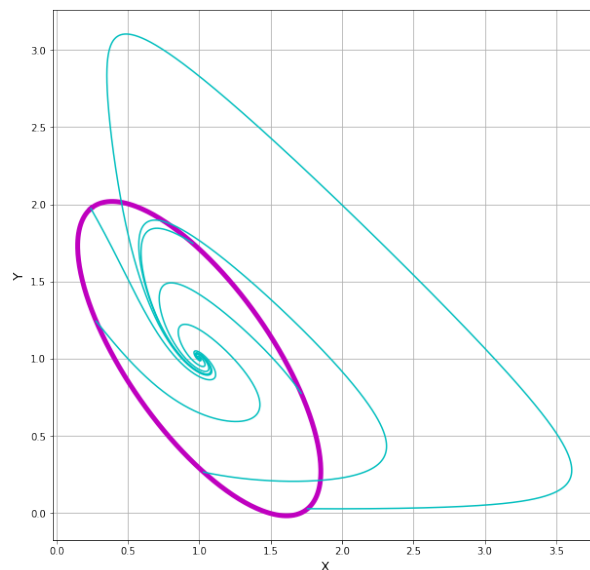


Рисунок 2.32 — Доверительный эллипс и детерминированные траектории, $p=1$, $q=1$, $\varepsilon=0.15$

2.4.4 Возмущения в окрестности предельного цикла

Исследование поведения системы при возмущениях в окрестности предельного цикла важно, так как такое поведение отражает динамику про-

цесса в неидеальных условиях реального эксперимента. Для описания применим схожий с доверительными эллипсами аппарат - доверительные полосы[1]. Суть метода остается прежней, мы ограничиваем на фазовой плоскости область, в которой траектория будет лежать с некоторой заданной наперед вероятностью, при заданной наперед интенсивности шума и при условии, что её начальные условия принадлежат этой области, но в данном случае эта область представляет собой полосу, содержащую предельный цикл, так как его поведение нас интересует. Доверительные полосы для некоторых значений параметров представлены на рисунках 2.33 – 2.34. Для большей наглядности траектории нарисованы не непрерывно, а в виде отдельных точек.

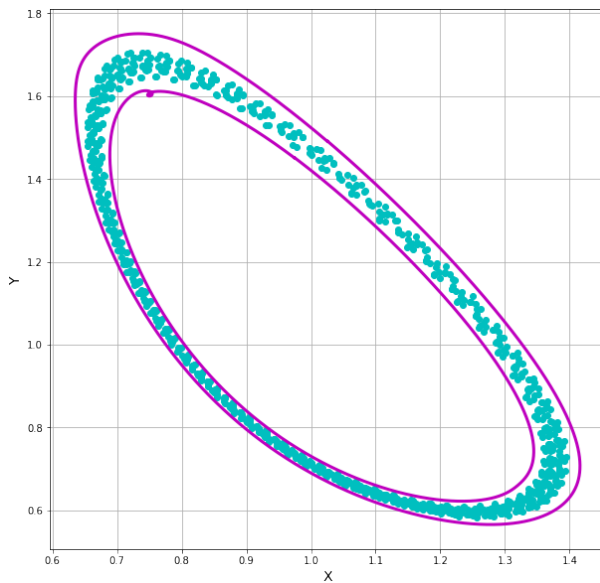


Рисунок 2.33 — Доверительная полоса и траектория, $p = 2.1$, $q = 1$, $\varepsilon = 0.002$

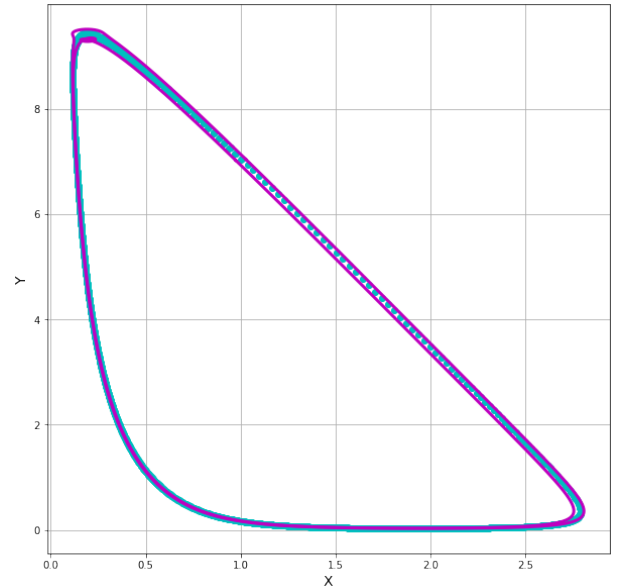


Рисунок 2.34 — Доверительная полоса и траектория, $p = 4$, $q = 1$, $\varepsilon = 0.0008$

2.4.5 Индуцированные шумом осцилляции

При значении параметра $p=2.1$ и $q \in [0.01, 0.12]$ в поведении системы наблюдаются индуцированные шумом осцилляции. При внесении шума порядка 0.002 помимо осцилляций в окрестности детерминированного цикла

для данных значений параметров, наблюдаются осцилляции по большому циклу, причем отношение количества осцилляций по большому циклу к общему числу осцилляций меняется в зависимости от значения параметра q , увеличиваясь при его увеличении. При этом, с увеличением параметра q увеличивается также амплитуда «больших» осцилляций и уменьшается амплитуда «маленьких». Иллюстрирующие это явление временные ряды по переменной x приведены на рисунках 2.35-2.38. График, иллюстрирующий изменение отношение числа больших осцилляций к общему их числу приведен на рисунке 2.39, изображены результаты эксперимента и их полиномиальная аппроксимация, заметно, что с ростом q это значение этого отношения подходит к 0.4.

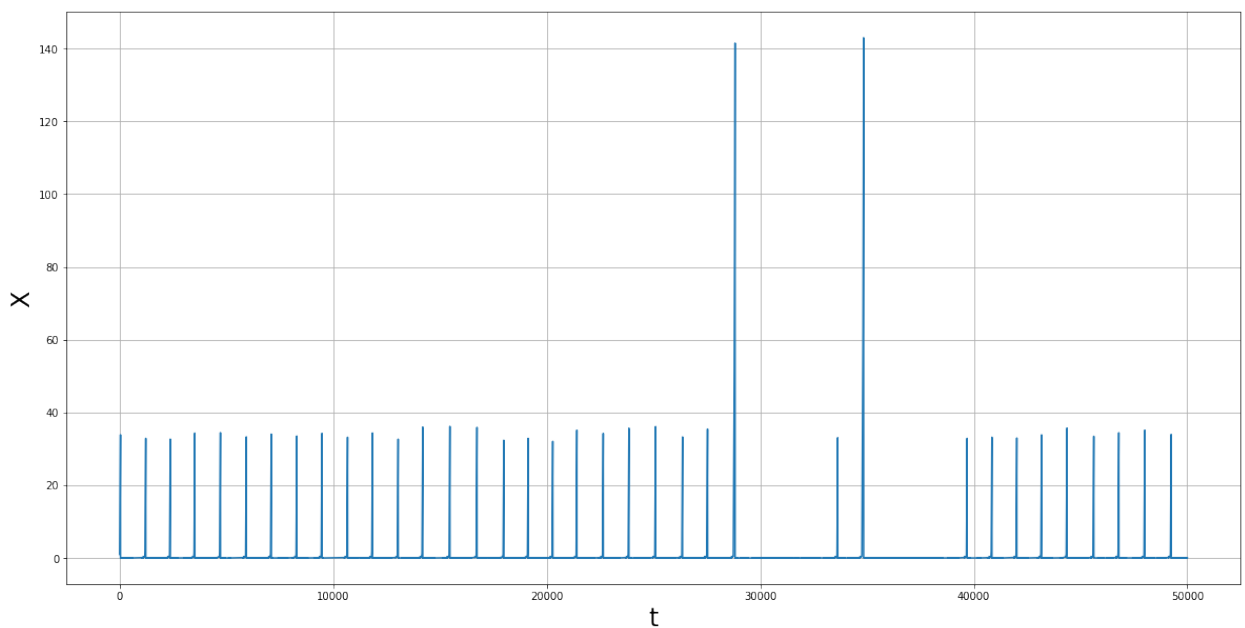


Рисунок 2.35 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.03$, $\varepsilon = 0.002$

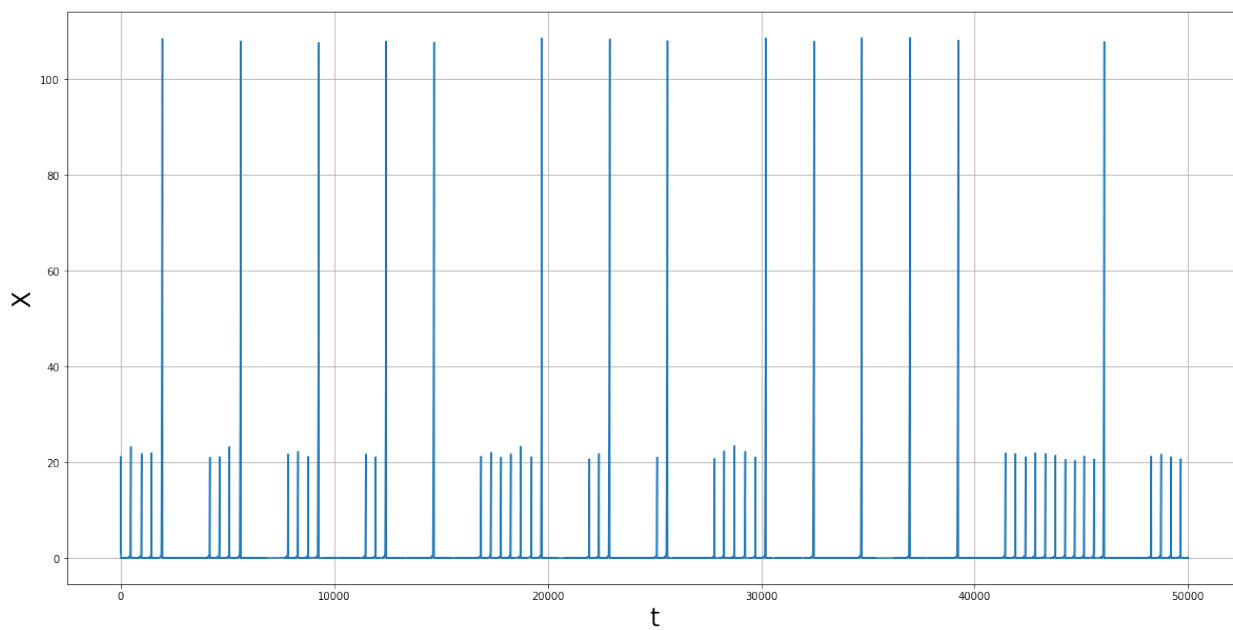


Рисунок 2.36 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.05$, $\varepsilon = 0.002$

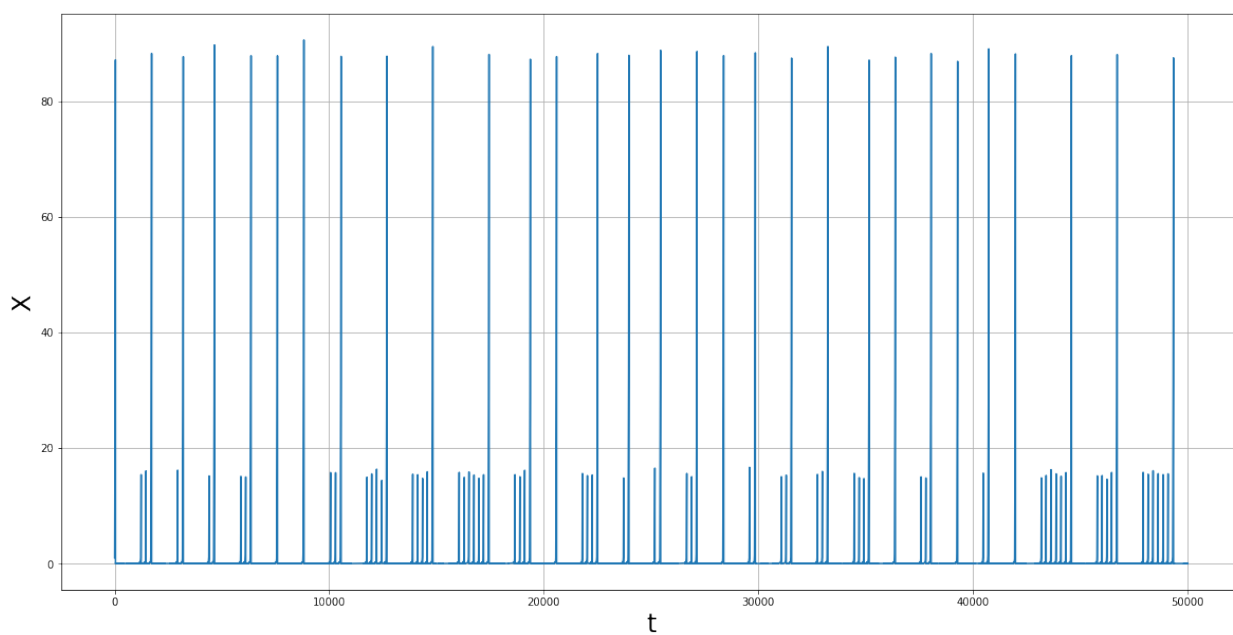


Рисунок 2.37 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.075$, $\varepsilon = 0.002$

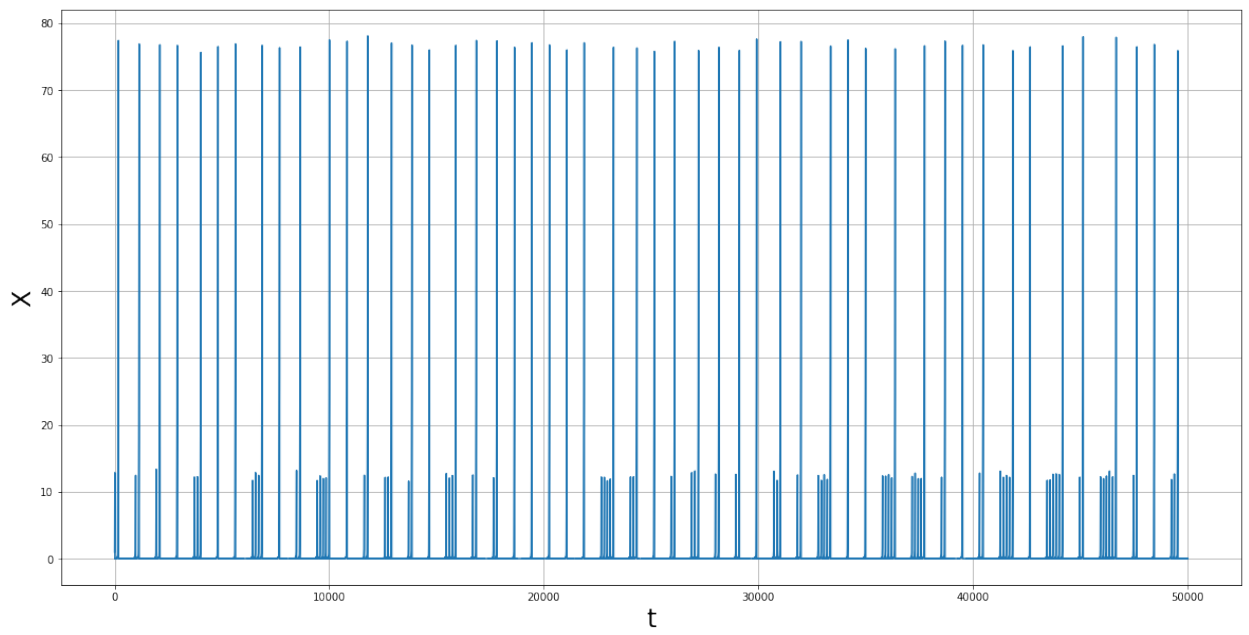


Рисунок 2.38 — Временной ряд по переменной x , $p = 2.1$, $q = 0.1$, $\varepsilon = 0.002$

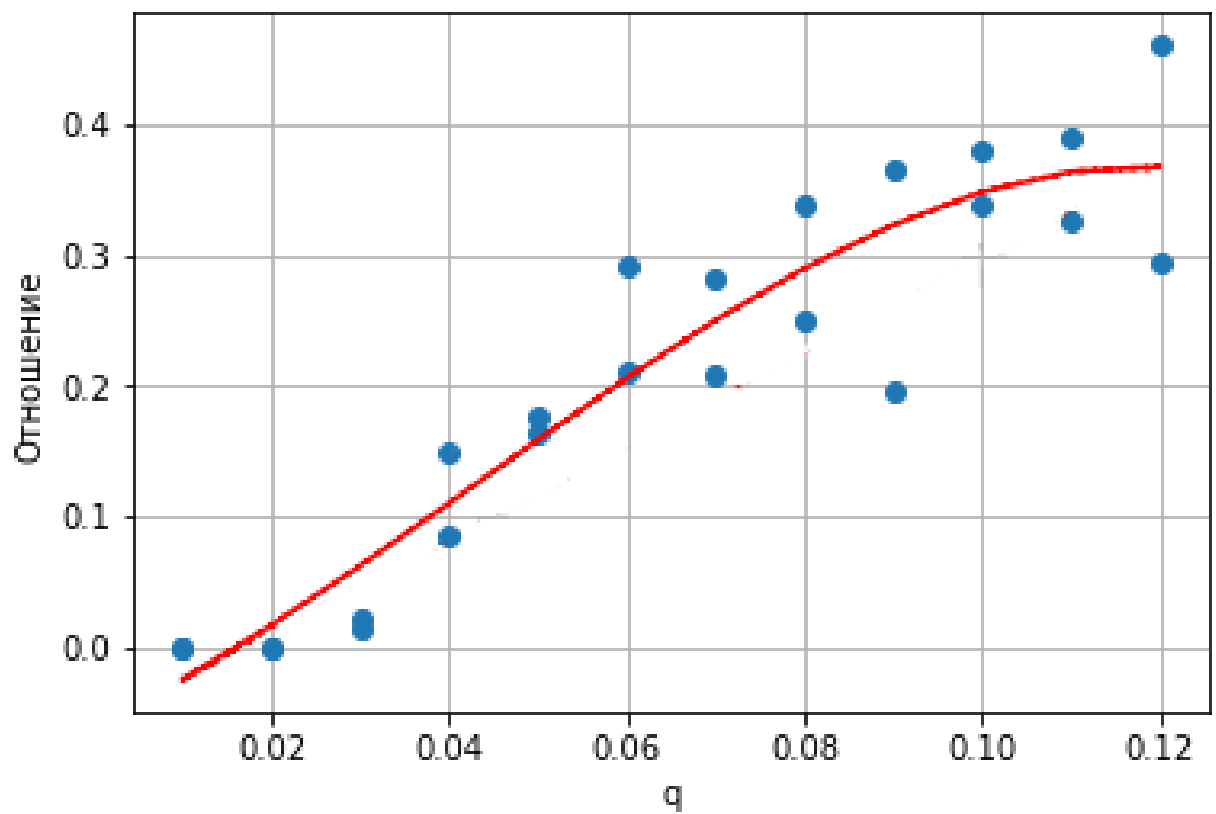


Рисунок 2.39 — Отношение числа больших осцилляций к числу всех осцилляций $p = 2.1$, $\varepsilon = 0.002$

2.4.6 Область аномальной стохастической чувствительности

Численные эксперименты показали, что при значении параметра $q=0.1$ и $p \in [1.1333309, 1.133331]$ наблюдаются большие значения функции стохастической чувствительности и, соответственно, чувствительность к шумам. Так, амплитуды предельных циклов для детерминированных траекторий, построенных при $q=0.1$, $p=1.1333309$ и $q=0.1$, $p=1.133331$ различаются в четыре раза. Вид этих циклов и графики функции стохастической чувствительности для них приведены на рисунках 2.40 – 2.43. Для локализации этих эффектов потребовалась довольно высокая точность, вышеописанные результаты были получены с использованием метода численного интегрирования Рунге-Кутты четвертого порядка с мелкостью шага 0.00001.

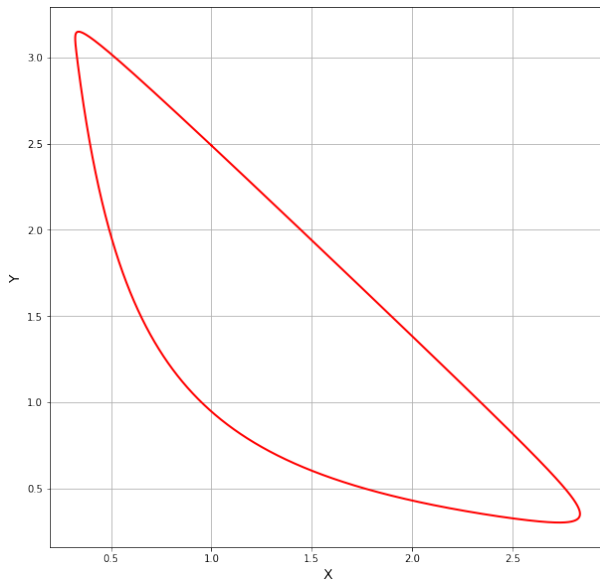


Рисунок 2.40 — Детерминированный цикл $q=0.1$, $p=1.1333309$

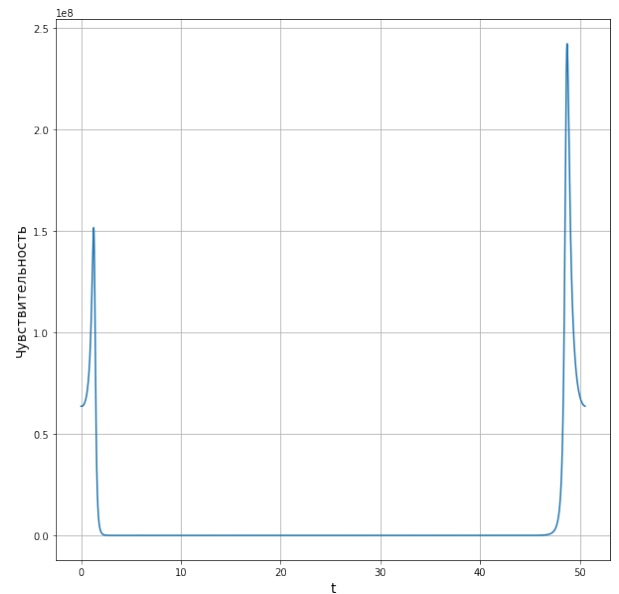


Рисунок 2.41 — ФСЧ цикла, $p=1.1333309$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.00001$

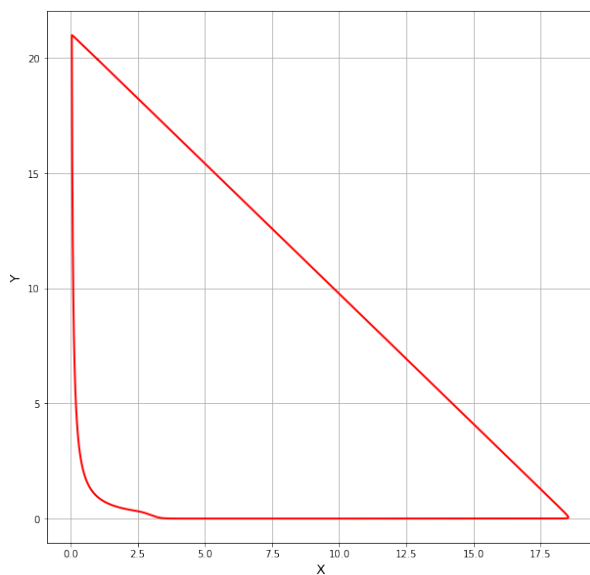


Рисунок 2.42 — Детерминированный цикл $q=0.1$, $p=1.133331$

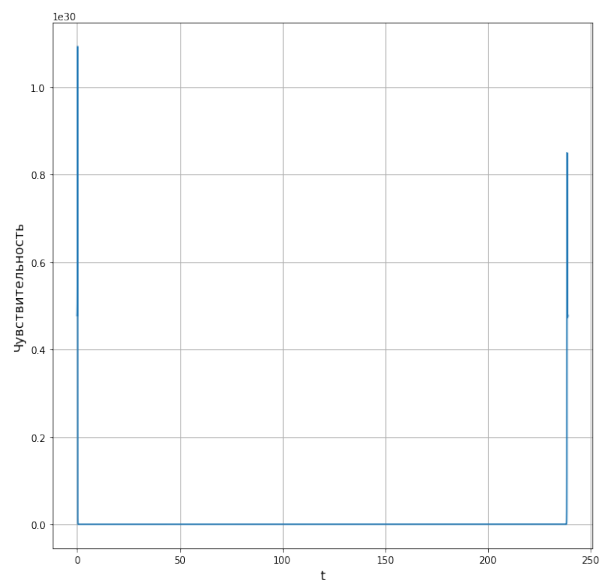


Рисунок 2.43 — ФСЧ цикла, $p=1.133331$, $q=0.1$, $\varepsilon=0.00001$

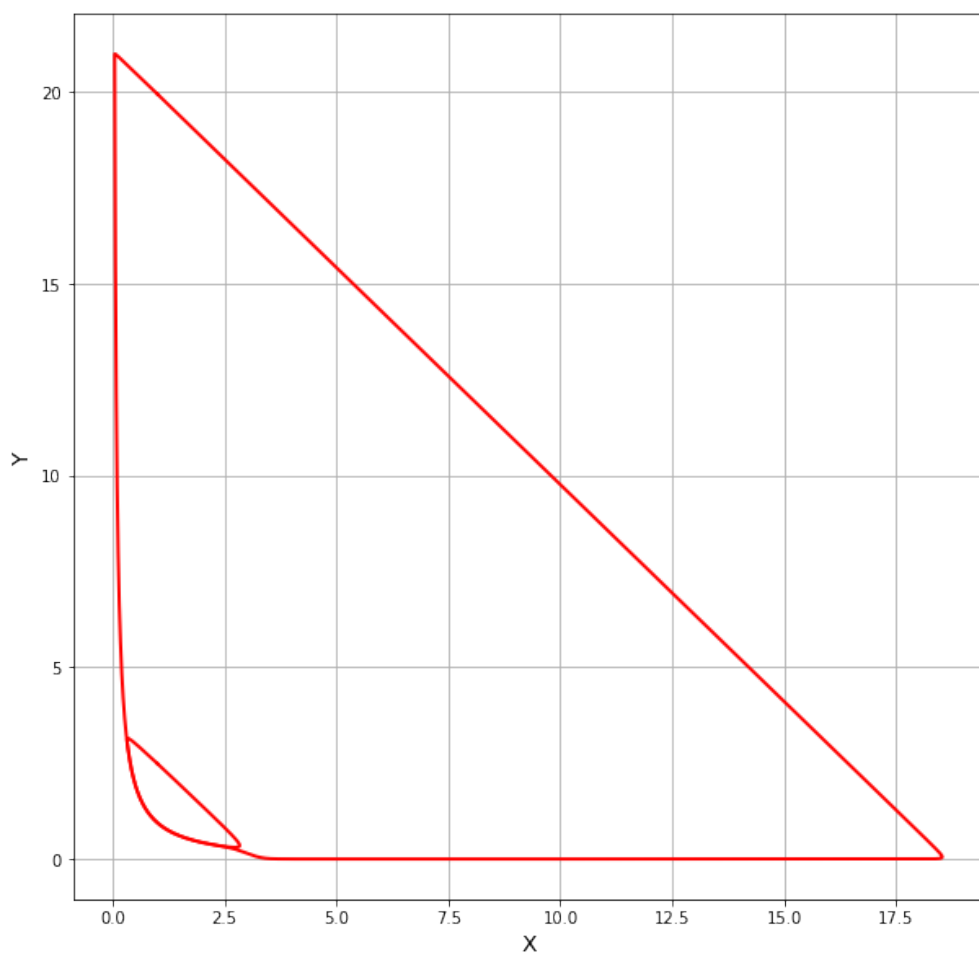


Рисунок 2.44 — Два предельных цикла, при $p=1.1333309$ и $p=1.133331$

Как видно из рис. 2.44, детерминированные свойства системы могут сильно изменяться даже при очень малых изменениях параметров, например, в данном случае, один из параметров был изменен в б знаке после запятой, и это привело к изменению амплитуды колебаний системы в четыре раза. Также это изменение сопровождалось высокой чувствительностью к шуму и большими значениями ФСЧ.

3 Заключение

В процессе работы были изучены аттракторы системы, и рассмотрена их устойчивость; было показано, что единственной точкой покоя системы является точка $(1, 1)$, независимо от значений параметров. С помощью теории Флоке были исследованы предельные циклы и показана их устойчивость. Проведены исследования чувствительности аттракторов к малым случайным возмущениям при помощи ФСЧ и аппарата доверительных областей, обнаружены индуцированные шумом осцилляции и область повышенной стохастической чувствительности. В совокупности эти результаты позволяют судить о поведении системы и её траекторий, а также показывают, что при изменении значений параметров свойства нелинейных систем вообще и осциллятора Хиггинса в частности могут значительно изменяться, возможно даже появление новых эффектов, аналогично тому, как появились, например, индуцированные шумом осцилляции при переходе от $q = 1$ к $q = 0.1$.

Обнаруженная область высокой стохастической чувствительности означает, что, несмотря на то, что предельный цикл устойчив, даже весьма малые шумы, при некоторых значениях параметров системы, могут привести к тому, что траектория системы покинет окрестность аттрактора, при том, что в большинстве случаев рассматриваемая система выдерживает шумы на несколько порядков большие. При этом, подобное поведение системы сопровождалось большими значениями ФСЧ, порядка 10^{30} , это указывает на то, что помимо инструмента описания системы, ФСЧ является может быть успешно использована для исследования и предсказания её поведения.

4 Список использованных источников и литературы

- [1] Васин В.В., Ряшко Л.Б. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. Екатеринбург. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006
- [2] Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos, 2011, V.21, p. 047514
- [3] Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. Математическое моделирование в биофизике. Москва. Издательство «Наука», 1975
- [4] Higgins, J. 1964. A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 51, 989-994.
- [5] Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя – цикл. // Автоматика и телемеханика. 2007. №10. С.53-69
- [6] Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва. Издательство «Наука», 1978
- [7] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва. Издательство «Наука», 1974
- [8] Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003
- [9] NumPy Reference [Электронный ресурс] / The Scipy community – режим доступа: <https://docs.scipy.org/doc/numpy-1.12.0/reference/>