Övningstenta i Linjär algebra

Inga hjälpmedel, endast penna och sudd. Samtliga lösningar görs på separat provskrivningspapper. I samtliga uppgifter krävs fullständig lösning, endast svar ger 0 poäng. För att få godkänt krävs 11 poäng. För att få VG krävs 20 poäng. I uppgifter där det inte explicit står annat, ska **ortonormerat koordinatsystem** användas.

---

1. Skriv följande ekvationssystem på **matrisform** och lös med hjälp av **Gausseliminering**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

(2p)

---

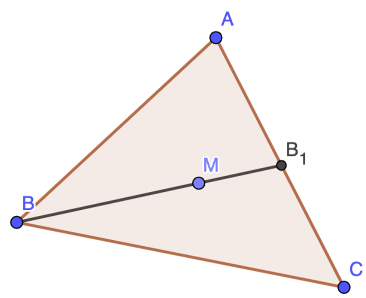
2. ABC är en triangel med medianen BB_1,

   där längden,

   - längden $AC = 2AB_1$
   - längden $BM = \frac{2}{3}BB_1$
   - O är en godtycklig punkt i rummet

   Visa tyngdpunktsformeln:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



(4p)

---

3. Givet vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{u}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestäm a sådant att $\vec{v} \perp \vec{u}$ (ortogonal) (2p)

   (b) Bestäm **minsta** vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{u}$ om $a = 1$. Svara exakt med arccos (2p)

   (c) Visa att $\vec{v}$ och $\vec{u}$ är linjärt oberoende för alla a.

---

4. Givet linjerna ℓ_1 och ℓ_2

$$\ell_1 : \begin{cases} x_1 = & 2 + t \\ x_2 = & 3 + 2t \\ x_3 = & 1 + 3t \end{cases}, \quad \ell_2 : \begin{cases} x_1 = & 3 - t \\ x_2 = & -5 + 3t \\ x_3 = & 2 - 2t \end{cases}$$

   (a) Bestäm **skärningspunkten** mellan ℓ_1 och ℓ_2. (2p)

   (b) Bestäm ekvationen för planet som innehåller båda linjerna på **parameterform**. (2p)

(c) Bestäm ekvationen för planet som innehåller båda linjerna på **affin form**. (2p)

---

5. Rotationsmatrisen R i 2D är en linjär avbildning

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi)$$

(a) Visa att R är en **ortogonal** matris (2p)

(b) Ange **koordinaterna** för vektorn $\vec{v} = (1,2)^T$ som roterats med vinkeln $\dfrac{\pi}{2}$ (2p)

Tips:

- En matris är ortogonal om dess kolonnvektorer är en ortonormerad bas.
- Trigonometriska ettan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

---

6. Glasskiosken Ssalgia märker att glassförsäljningen ökar när temperaturen ökar. De vill använda linjär regression för att beräkna för glassförsäljning givet en viss temperatur och har samlat in datapunkter på temperatur och glassförsäljning.

Temperatur	Kronor
10	2000
20	3000
30	5000

(a) Beräkna regressionskoefficienten $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)^T$ från datapunkterna. (4p)

(b) Givet en ny temperatur 20 grader, beräkna prognosen avrundat till hela kronor för glassförsäljningen. (2p)

Tips:

- Prognos för glassförsälning: $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
- Regressionskoefficient: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y}$
- Låt vektorn för temperaturen vara $\vec{x} = (1, 2, 3)^T$, där varje tal representerar tiotal
- Låt vektorn för kronor vara $\vec{y} = (2, 3, 5)^T$, där varje tal representerar tusental

---

Exakta vinklar

v (grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
v (radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1