個数版点カバー問題に対する近似アルゴリズム

頂点被覆問題

無向グラフ$G=(V,E)$について（V,Eはそれぞれ頂点(vertex)の集合, 辺(edge)の集合を表す.）ここで頂点の部分集合$V'\subseteq V$がGのどの辺に対しても少なくとも一方の端点を含むとき, V'は点カバーであると呼ばれる. 各頂点にコスト(重み)が与えられたとき,最小コストの点カバーのことを最小頂点被覆ということにする.

これを決定問題(yesかnoで答えられる問題)にするにはコストがk以下となる頂点被覆は存在するかという問題にすればよく, この問題を頂点被覆問題ということにする.

個数版点カバー問題(cardinality vertex cover problem)

各頂点のコストがどれも1であるとき,最小頂点被覆を求める問題を個数版点カバー問題という.

マッチング

グラフ$G=(V,E)$の辺の部分集合$E'\subseteq E$について, E'のどの辺も他の辺と端点を共有しないとする. このときE'をマッチングという. ランダムに一つの辺aを選び, 選んだ辺aの両端点を端点とする他の辺を除き, それ以外の辺から再び一つの辺bを選びという手順を繰り返し, 選ぶことのできる辺がなくなるまで繰り返したときに得られる辺の集合はマッチングであり, 極大マッチングということにする. 極大マッチングを一つ求める計算は明らかに多項式時間で求めることができる.

個数版点カバー問題の近似アルゴリズム

以下の事実を利用し近似率2の個数版点カバー問題に対する近似アルゴリズムを作ることができる.

事実

Gの極大マッチングMをつくり, Mの辺の端点からなる集合を個数版点カバー問題の近似解とすると, この近似解のコストは最適解のコストの 2 倍以下である.

証明: Mの辺の端点からなる集合Fは点カバーである. なぜならば, Fが点カバーでないならば, Fに含まれる点以外を両端点とする辺が存在することになる.　しかしMが極大マッチングであることに反する.(そのMはその辺を選ぶことができてしまうから) ここで,最適な点カバーのコスト(点の個数)OPTは極大マッチングMの辺の数$|M|$以上である. ゆえに$|M|\leq OPT$である.　一方でMの辺の端点からなる集合Fの個数は$2|M|$である. したがって点カバーFのコストは$2|M|$で, これは最適解の 2 倍以下である.(証明終了)