船体運動力学　課題 2-5

地球総合工学科　B3　08C23031　古賀 光一朗

2025 年 11 月 17 日

　グリーンの公式を用いれば、下記の通りにディフラクションポテンシャル ϕ_4 による圧力積分は、ラディエイションポテンシャル ϕ_2 による圧力積分に置き換えられることを説明しなさい

$$\Delta f_{y(d)} = Re\left[\rho g \zeta_a e^{i\omega t} \iint_S e_2 \cdot \phi_4 n dS\right] = -Re\left[\frac{\rho g \zeta_a}{v_a} e^{i\omega t} \iint_S \phi_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS\right]$$

<u>提出期限：2025 年 11 月 17 日（月）10:30AM</u>

　グリーンの公式

$$\iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS = \iiint_V \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) dV$$

ここで、ϕ_2（ラディエイションポテンシャル）と ϕ_4（ディフラクションポテンシャル）は、物体表面 S_H 以外（自由表面 S_F、水底 S_B、無限遠方 S_∞）において同じ境界条件を満たすため、これらの面状での積分は互いにキャンセルされ 0 となる。したがって、積分領域は物体表面 S_H のみとなり、

$$\iint_{S_H} \left(\phi_4 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_4}{\partial n}\right) dS = 0$$

これを移項すると、以下の関係式が得られる。

$$\iint_{S_H} \phi_4 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS = \iint_{S_H} \phi_2 \frac{\partial \phi_4}{\partial n} dS$$

　次に、課題のディフラクション力 $\Delta f_{y(d)}$ の計算式を考える。

$$\Delta f_{y(d)} = Re\left[\rho g \zeta_a e^{i\omega t} \iint_{S_H} \phi_4 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) dS\right]$$

(課題の式では積分領域が S となっているが、ここでは物体表面 S_H とする。また $e_2 \cdot \phi_4 n dS$ を $\phi_4(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})dS$ と解釈した)

　ここで、ラディエイション問題（ヒーブ運動）における物体表面 S_H での境界条件を考える。ヒーブ方向（y 軸、$\mathbf{e}_2$ 方向）の速度ベクトルを $\mathbf{v} = v_a \mathbf{e}_2$ とすると、物体表面の法線方向速度 v_n は、

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (v_a \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} = v_a (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})$$

一方、ラディエイションポテンシャル ϕ_2 の定義より、

$$v_n = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

したがって、

$$v_a(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

が成り立ち、これを変形すると

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{v_a}\frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

となる。

これをディフラクション力の式の積分項に代入すると、

$$\iint_{S_H} \phi_4(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})dS = \iint_{S_H} \phi_4\left(\frac{1}{v_a}\frac{\partial \phi_2}{\partial n}\right)dS = \frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_4\frac{\partial \phi_2}{\partial n}dS$$

先に導出したグリーンの公式による関係式 $\iint_{S_H} \phi_4\frac{\partial \phi_2}{\partial n}dS = \iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_4}{\partial n}dS$ を用いて、上式を書き換えると、

$$\frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_4\frac{\partial \phi_2}{\partial n}dS = \frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_4}{\partial n}dS$$

となる。

ここで、ディフラクション問題において、入射波ポテンシャル ϕ_0 とディフラクションポテンシャル ϕ_4 の物体表面での境界条件は、

$$\frac{\partial(\phi_0 + \phi_4)}{\partial n} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n}$$

であるため、これを代入すると、

$$\frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_4}{\partial n}dS = \frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\left(-\frac{\partial \phi_0}{\partial n}\right)dS = -\frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_0}{\partial n}dS$$

以上をまとめると、

$$\iint_{S_H} \phi_4(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})dS = -\frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_0}{\partial n}dS$$

が導かれる。

これを元のディフラクション力の式に代入すれば、

$$\begin{aligned}\Delta f_{y(d)} &= Re\left[\rho g \zeta_a e^{i\omega t}\iint_{S_H} \phi_4(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n})dS\right] \\ &= Re\left[\rho g \zeta_a e^{i\omega t}\left(-\frac{1}{v_a}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_0}{\partial n}dS\right)\right] \\ &= -Re\left[\frac{\rho g \zeta_a}{v_a}e^{i\omega t}\iint_{S_H} \phi_2\frac{\partial \phi_0}{\partial n}dS\right]\end{aligned}$$

となり、課題の式（積分領域を S_H とし、S と表記）が示された。