船体運動力学　課題 2-3

地球総合工学科　B3　08C23031　古賀 光一朗

2025 年 11 月 2 日

次式で表される進行波の時空間変位

$$\zeta(x_1, t) = \zeta_a \cos(kx_1 - \omega t)$$

に対して次の支配方程式と境界条件が与えられている。

[L] ラプラス方程式

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$$

[F] 自由表面条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{at } x_3 = 0$$

[B] 水底条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{at } x_3 = h$$

これより、進行波の速度ポテンシャルを求め（導出過程を整理し）、流体内の進行波による変動圧力を数式で示しなさい。なお、記号の意味や座標系は講義資料に従う。

提出期限：2025 年 11 月 10 日 (月) 10:30AM

---

1. 速度ポテンシャル Φ の導出

速度ポテンシャル $\Phi(x_1, x_3, t)$ を変数分離を用いて求め、

$$\Phi(x_1, x_3, t) = Z(x_3)\sin(kx_1 - \omega t)$$

と仮定する。

[L] ラプラス方程式への代入

Φ を [L] に代入すると、$Z(x_3)$ に関する常微分方程式

$$Z''(x_3) - k^2 Z(x_3) = 0$$

が得られる。この一般解は、

$$Z(x_3) = A_3 \exp(-kx_3) + B_3 \exp(kx_3)$$

となる。

[B] 水底条件の適用

[B] $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$ at $x_3 = h$ を適用する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = Z'(x_3) \sin(kx_1 - \omega t)$$

$$Z'(x_3) = -kA_3 \exp(-kx_3) + kB_3 \exp(kx_3)$$

$x_3 = h$ を代入して $Z'(h) = 0$ より、

$$-kA_3 \exp(-kh) + kB_3 \exp(kh) = 0$$

係数 A_3, B_3 の関係式が得られる。

$$\frac{B_3}{A_3} = \frac{\exp(-kh)}{\exp(kh)} = \exp(-2kh) \tag{1}$$

[F] 自由表面条件の適用

[F] $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$ at $x_3 = 0$ を適用する。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = Z(x_3) \cdot [-\omega^2 \sin(kx_1 - \omega t)]$$

これらを [F] に代入し、$x_3 = 0$ とすると、

$$[-\omega^2 Z(0) - gZ'(0)] \sin(kx_1 - \omega t) = 0$$

よって、

$$-\omega^2 Z(0) - gZ'(0) = 0$$

ここで、$Z(0) = A_3 + B_3$、$Z'(0) = k(B_3 - A_3)$ を代入すると、

$$-\omega^2(A_3 + B_3) - gk(B_3 - A_3) = 0$$

$$(-\omega^2 + gk)A_3 + (-\omega^2 - gk)B_3 = 0$$

これも A_3, B_3 の関係式である。

$$(gk - \omega^2)A_3 = (gk + \omega^2)B_3 \tag{2}$$

分散関係式の導出

式 (1) を 式 (2) に代入し、$\frac{B_3}{A_3}$ を消去する。

$$(gk - \omega^2) = (gk + \omega^2)\frac{B_3}{A_3}$$

$$\frac{gk - \omega^2}{gk + \omega^2} = \exp(-2kh) = \frac{\exp(-kh)}{\exp(kh)}$$

$$(gk - \omega^2)\exp(kh) = (gk + \omega^2)\exp(-kh)$$

ω^2 と k の項で整理すると、

$$gk(\exp(kh) - \exp(-kh)) = \omega^2(\exp(kh) + \exp(-kh))$$

$2\sinh(kh) = \exp(kh) - \exp(-kh)$ および $2\cosh(kh) = \exp(kh) + \exp(-kh)$ の関係より、

$$gk(2\sinh(kh)) = \omega^2(2\cosh(kh))$$

したがって、分散関係式が得られる。

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{3}$$

$Z(x_3)$ の整理と A_3 の決定

式 (1) の関係 $B_3 = A_3\exp(-2kh)$ を $Z(x_3)$ の一般解に代入する。

$$\begin{aligned} Z(x_3) &= A_3\exp(-kx_3) + (A_3\exp(-2kh))\exp(kx_3) \\ &= A_3(\exp(-kx_3) + \exp(kx_3 - 2kh)) \\ &= A_3\exp(-kh)(\exp(-kx_3 + kh) + \exp(kx_3 - kh)) \\ &= 2A_3\exp(-kh)\cosh(k(x_3 - h)) \end{aligned}$$

よって、速度ポテンシャルは

$$\Phi(x_1, x_3, t) = 2A_3\exp(-kh)\cosh(k(x_3 - h))\sin(kx_1 - \omega t)$$

と書ける。次に、関係式 $\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{x_3=0}$ と $\zeta(x_1, t) = \zeta_a\cos(kx_1 - \omega t)$ を用いて A_3 を決定する。

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{x_3=0} = -2\omega A_3\exp(-kh)\cosh(-kh)\cos(kx_1 - \omega t)$$

$$\zeta(x_1, t) = -\frac{1}{g}\left[-2\omega A_3\exp(-kh)\cosh(kh)\cos(kx_1 - \omega t)\right]$$

$$\zeta(x_1, t) = \frac{2\omega A_3}{g}\exp(-kh)\cosh(kh)\cos(kx_1 - \omega t)$$

ζ_a と係数を比較して、

$$\zeta_a = \frac{2\omega A_3}{g} \exp(-kh) \cosh(kh)$$

A_3 について解くと、

$$A_3 = \frac{g\zeta_a \exp(kh)}{2\omega \cosh(kh)}$$

これを Φ の式に代入して整理すると、最終的な速度ポテンシャルが得られる。

$$\Phi(x_1, x_3, t) = \frac{g\zeta_a}{\omega} \frac{\cosh(k(x_3 - h))}{\cosh(kh)} \sin(kx_1 - \omega t) \tag{4}$$

2. 流体内の変動圧力 p_d の導出

微小振幅波理論における、線形化されたベルヌーイの式は

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gx_3 = C \quad \text{(C は定数)}$$

である。ここで p はゲージ圧であり、静水圧成分 $p_s = -\rho g x_3$ と変動圧力成分 p_d の和 $p = p_s + p_d$ と表せる（x_3 が下向き正のため静水圧は負号)。

$$\frac{-\rho g x_3 + p_d}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gx_3 = C$$

$$-gx_3 + \frac{p_d}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gx_3 = C$$

変動圧力 p_d は、流れがない状態 ($\Phi = 0$) で $p_d = 0$ となるため、定数 $C = 0$ とおける。

$$p_d = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{5}$$

式 (4) の Φ を時間 t で偏微分する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{g\zeta_a}{\omega} \frac{\cosh(k(x_3 - h))}{\cosh(kh)} \sin(kx_1 - \omega t) \right] \\
&= \frac{g\zeta_a}{\omega} \frac{\cosh(k(x_3 - h))}{\cosh(kh)} \cdot [-\omega \cos(kx_1 - \omega t)] \\
&= -g\zeta_a \frac{\cosh(k(x_3 - h))}{\cosh(kh)} \cos(kx_1 - \omega t)
\end{aligned}$$

これを式 (5) に代入して、変動圧力 p_d を得る。

$$p_d(x_1, x_3, t) = \rho g \zeta_a \frac{\cosh(k(x_3 - h))}{\cosh(kh)} \cos(kx_1 - \omega t) \tag{6}$$