船体運動力学課題 2-4

地球総合工学科　船舶海洋工学科目　08C23031　古賀光一朗

2025 年 11 月 29 日

提出期限：2025 年 11 月 10 日（月）10:30AM

課題

浮体の後方から規則波が入射する際の、浮体に作用するフルード・クリロフ力を前後方向 (x_1)、上下方向 (x_3)、縦回転方向 (x_2 軸まわり) について数式で示す。なお、波による速度ポテンシャル $\Phi(x, t)$ は次式で与えられる。

$$\Phi(x, t) = -\zeta_a \frac{g}{\omega} e^{-kx_3} \sin(kx_1 - \omega t)$$

また、波変動圧 p はベルヌーイの定理（線形項のみ）より次式で表される。

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho g \zeta_a e^{-kx_3} \cos(kx_1 - \omega t) = \mathrm{Re}\left[-\rho g \zeta_a e^{-kx_3} e^{ikx_1} e^{-i\omega t}\right]$$

以下の計算では、複素数表示を用いて積分を行い、最後に実部をとるものとする。

(a) 面積分による f_{FK3} (上下方向力) の計算

水圧は浮体表面の法線方向に作用する。底面 ($x_3 = d$) において、法線ベクトルは下向き ($n_3 = 1$) であるが、圧力は面を押す方向に働くため、上向き (x_3 負方向) の力となる。したがって、底面での面積分は次のように計算できる。

$$f_{FK3} = -\iint_S e_3 \cdot p\boldsymbol{n} dS = -\int_{-l}^{l} 2b_0 p \, dx_1$$

これに圧力を代入して計算する。

$$\begin{aligned}
f_{FK3} &= \int_{-l}^{l} 2b_0 \rho g \zeta_a e^{-kd} e^{ikx_1} e^{-i\omega t} dx_1 \\
&= 2b_0 \rho g \zeta_a e^{-kd} e^{-i\omega t} \int_{-l}^{l} e^{ikx_1} dx_1 \\
&= 2b_0 \rho g \zeta_a e^{-kd} e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{ikx_1}}{ik}\right]_{-l}^{l} \\
&= 2b_0 \rho g \zeta_a e^{-kd} e^{-i\omega t} \frac{e^{ikl} - e^{-ikl}}{ik} \\
&= 2b_0 \rho g \zeta_a e^{-kd} e^{-i\omega t} \frac{2i \sin kl}{ik} \\
&= 4b_0 \rho g \zeta_a \frac{e^{-kd}}{k} e^{-i\omega t} \sin kl
\end{aligned}$$

最後に実部をとって解とする。

$$f_{FK3} = 4b_0\rho g\zeta_a \frac{e^{-kd}}{k}\cos\omega t \sin kl$$

(b) 体積積分による f_{FK1} (前後方向力) の計算

x_1 方向の力は、浮体側面に作用する圧力の積分であるが、ガウスの発散定理を用いることで体積積分に変換して計算できる。

$$f_{FK1} = -\iint_S e_1 \cdot p\boldsymbol{n}dS = -\iint_V \frac{\partial p}{\partial x_1}dV$$

ここで、

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho g\zeta_a(ik)e^{-kx_3}e^{ikx_1}e^{-i\omega t}$$

であるから、これを体積積分する。

$$\begin{aligned}
f_{FK1} &= \iint_V \rho g\zeta_a(ik)e^{-kx_3}e^{ikx_1}e^{-i\omega t}dV \\
&= \int_{-l}^{l}\int_{-b_0}^{b_0}\int_{\zeta(x_1,t)}^{d} \rho g\zeta_a(ik)e^{-kx_3}e^{ikx_1}e^{-i\omega t}dx_3dx_2dx_1 \\
&= 2b_0\rho g\zeta_a(ik)e^{-i\omega t}\int_{-l}^{l}\left(\int_{\zeta(x_1,t)}^{d} e^{-kx_3}dx_3\right)e^{ikx_1}dx_1
\end{aligned}$$

x_3 に関する積分を行う。

$$\int_{\zeta}^{d} e^{-kx_3}dx_3 = \left[\frac{e^{-kx_3}}{-k}\right]_{\zeta}^{d} = \frac{e^{-kd}}{-k} - \frac{e^{-k\zeta}}{-k}$$

ここで自由表面条件より、波面上 ($x_3 = \zeta$) での波変動圧の寄与はゼロ（高次項として無視）とすると、

$$\begin{aligned}
f_{FK1} &= 2b_0\rho g\zeta_a(ik)e^{-i\omega t}\int_{-l}^{l}\frac{e^{-kd}}{-k}e^{ikx_1}dx_1 \\
&= -2ib_0\rho g\zeta_a e^{-kd}e^{-i\omega t}\int_{-l}^{l}e^{ikx_1}dx_1 \\
&= -2ib_0\rho g\zeta_a e^{-kd}e^{-i\omega t}\frac{2\sin kl}{k} \\
&= -i4b_0\rho g\zeta_a\frac{e^{-kd}}{k}e^{-i\omega t}\sin kl
\end{aligned}$$

実部をとる（$-ie^{-i\omega t} = -i(\cos\omega t - i\sin\omega t) = -\sin\omega t - i\cos\omega t$ の実部は $-\sin\omega t$）。

$$f_{FK1} = -4b_0\rho g\zeta_a\frac{e^{-kd}}{k}\sin kl\sin\omega t$$

(c) 体積積分による f_{FK5} (縦回転モーメント) の計算

原点周りのモーメントは次式で定義される。

$$f_{FK5} = -\iint_S \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{x} \times p\boldsymbol{n})dS = -\iint_V \mathrm{div}(p\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{x})dV$$

被積分関数の発散 (div) は以下のようになる。

$$\mathrm{div}(p\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{x}) = \frac{\partial p}{\partial x_1}x_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3}x_1 = -\rho g\zeta_a\{(ik)x_3 + kx_1\}e^{-kx_3}e^{ikx_1}e^{-i\omega t}$$

これを体積積分する。

$$f_{FK5} = \iint_V \rho g \zeta_a \{(ik)x_3 + kx_1\} e^{-kx_3} e^{ikx_1} e^{-i\omega t} dV$$
$$= 2b_0 \rho g \zeta_a k e^{-i\omega t} \int_{-l}^{l} \left(\int_{\zeta}^{d} (ix_3 + x_1) e^{-kx_3} dx_3 \right) e^{ikx_1} dx_1$$

x_3 に関する積分を部分積分を用いて計算し、表面項を無視して整理すると以下のようになる。

$$\int_{\zeta}^{d} (ix_3 + x_1) e^{-kx_3} dx_3 \approx \frac{(id + x_1)e^{-kd}}{-k} - \frac{ie^{-kd}}{k^2}$$

これを代入して x_1 で積分する。

$$f_{FK5} = 2b_0 \rho g \zeta_a k e^{-i\omega t} \int_{-l}^{l} \left\{ \frac{-ikd - kx_1 - i}{k^2} e^{-kd} \right\} e^{ikx_1} dx_1$$
$$= -2b_0 \rho g \zeta_a \frac{e^{-kd}}{k} e^{-i\omega t} \int_{-l}^{l} \{i(kd + 1) + kx_1\} e^{ikx_1} dx_1$$

ここで、$\int_{-l}^{l} x_1 e^{ikx_1} dx_1 = \frac{2l}{ik} \cos kl - \frac{2i}{k^2} \sin kl$ などの公式を用いて整理すると、

$$f_{FK5} = -4b_0 \rho g \zeta_a \frac{e^{-kd}}{k} e^{-i\omega t} \{i(d \sin kl - l \cos kl)\}$$

となる。最後に実部をとって解を得る。

$$f_{FK5} = -4b_0 \rho g \zeta_a \frac{e^{-kd}}{k} (d \sin kl - l \cos kl) \sin \omega t$$