ランダム海洋現象学 課題4

船舶海洋工学コース　B3　08C23031　古賀 光一朗

2026年1月15日

1　修正 PM スペクトラムのゼロアップクロス波周期

ゼロアップクロス波周期 T_{02} は次式で定義される。

$$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{m_2}}$$

修正 PM スペクトラム $S_{xx}(\omega) = A\omega^{-5}\exp\{-B\omega^{-4}\}$ に対し、変数変換 $t = B\omega^{-4}$ を用いて各モーメントを計算する。

$$m_0 = \int_0^\infty S_{xx}(\omega)d\omega = \frac{A}{4B}$$

$$m_2 = \int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega)d\omega = \frac{A\sqrt{\pi}}{4\sqrt{B}}$$

これらを定義式に代入し整理することで、求める T_{02} が得られる。

$$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{A/4B}{A\sqrt{\pi}/4\sqrt{B}}} = 2\pi^{3/4}B^{-1/4}$$

2　ランダム海洋波の横断問題

2.1　アップクロスの条件

変位 x が閾値 x_c を下から上に横断（アップクロス）する条件は以下の通りである。

$$x = x_c \quad \text{かつ} \quad \dot{x} > 0$$

2.2　単位時間あたりの平均横断回数の導出

同時確率密度関数を $p(x,\dot{x})$ とする。微小時間 Δt の間にアップクロスが生じる条件は、変位が $x_c - \dot{x}\Delta t < x < x_c$（ただし $\dot{x} > 0$）の範囲にあることである。したがって、横断確率 P_1 は次のように近似できる。

$$P_1 \approx \int_0^\infty p(x_c,\dot{x})\dot{x}\Delta t d\dot{x}$$

単位時間あたりの平均回数 $\nu_+(x_c)$ は、P_1 を Δt で除して極限をとることで得られる。

$$\nu_+(x_c) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1}{\Delta t} = \int_0^\infty p(x_c, \dot{x})\dot{x} d\dot{x}$$

3　狭帯域現象の特徴

線形で狭帯域な波の特徴として、課題文の「ひとつのゼロアップクロスに対してひとつのピークが現れる」以外に以下が挙げられる。

- スペクトラムが特定の周波数帯域に集中し、鋭いピークを持つ。
- 瞬時値の確率分布は正規分布、波頂高さ（ピーク値）の確率分布はレーリー分布に従う。

4　波のピーク超過確率の導出

狭帯域波では、単位時間あたりの全ピーク数 N_p はゼロアップクロス回数 $\nu_+(0)$ にほぼ等しい。また、ピーク値 x_p が x_c を超える頻度は、アップクロス回数 $\nu_+(x_c)$ と等価である。ガウス過程における $\nu_+(x_c)$ は次式である。

$$\nu_+(x_c) = \nu_+(0) \exp\left(-\frac{x_c^2}{2m_0}\right)$$

よって、ピーク値の超過確率 $P(x_p > x_c)$ は以下の通りレーリー分布となる。

$$P(x_p > x_c) = \frac{\nu_+(x_c)}{N_p} \approx \frac{\nu_+(x_c)}{\nu_+(0)} = \exp\left(-\frac{x_c^2}{2m_0}\right)$$