

問題 9. 抵抗値 R 、長さ l 、直径 d を測定して、円柱状導体の抵抗率 ρ を間接測定する。誤差伝搬の法則を導出しなさい。

抵抗 R は、長さ l 、直径 d 、抵抗率 ρ の円柱状導体のとき

$$R = \rho \times \frac{l}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (1)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \rho &= R \times \frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{l} \\ &= \frac{\pi R d^2}{4l} \\ &= \frac{\pi}{4} R^1 d^2 l^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

講義資料 1(p.26) より、誤差率の一般的な関数は、

$$|\Delta y| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \Delta x_3 \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right| \quad (3)$$

となる。したがって、式 (2), (3) より、

$$\begin{aligned} |\Delta \rho| &\leq \left| \frac{\partial \rho}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial l} \Delta l \right| \\ &\leq \left| \frac{\pi d^2}{4l} \Delta R \right| + \left| \frac{2\pi R d}{4l} \Delta d \right| + \left| \frac{-\pi R d^2}{4l^2} \Delta l \right| \\ \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| &\leq \left| \frac{\frac{\pi d^2}{4l}}{\frac{\pi R d^2}{4l}} \Delta R \right| + \left| \frac{\frac{2\pi R d}{4l}}{\frac{\pi R d^2}{4l}} \Delta d \right| + \left| \frac{\frac{-\pi R d^2}{4l^2}}{\frac{\pi R d^2}{4l}} \Delta l \right| \\ &\leq \left| \frac{\Delta R}{R} \right| + 2 \left| \frac{\Delta d}{d} \right| - \left| \frac{\Delta l}{l} \right| \end{aligned} \quad (4)$$

となり、題意における誤差伝搬の法則は式 (4) となる。