Upogib

Uvod

Palica iz elastične snovi se prožno deformira, če nanjo deluje v vzdolžni smeri par nasprotno enakih sil na nasprotnih koncih palice. Pri nateznih silah se palica podaljša, pri tlačnih pa skrči. Sprememba njene dolžine ΔF v odvisnosti od sile F je podana s *Hookovim zakonom*:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}, \tag{1}$$

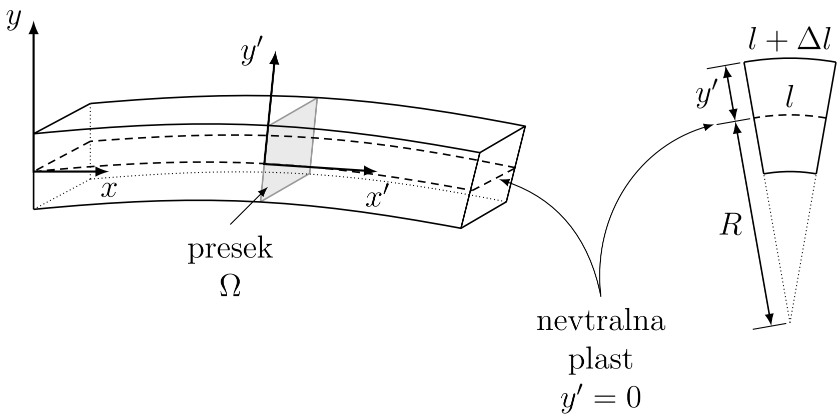
kjer je S presek palice in l njena začetna dolžina. Sorazmernostno konstanto E med relativnim skrčkom/raztegom $\Delta l/l$ in silo F imenujemo prožnostni ali elastični ali Youngov modul snovi in je za kovine reda velikosti 100 GPa, glej tabelo 1. Količnik sile in preseka F/S imenujemo napetost (natezna ali tlačna) in jo označujemo s črko σ. Linearna zveza med napetostjo in relativno spremembo dolžine velja v določenem intervalu obremenitve $[0, \sigma_{\max}]$, t.i. *območju elastičnosti*, kjer je tipično $\Delta l/l$ še precej majhen. Za kovinske palice je $\sigma_{\max} \approx 100$ MPa, pri čemer je relativni raztezek reda nekaj promilov. Pri še večji napetosti se palica trajno deformira ali celo pretrga oz. poči.

Tabela 1: Okvirne meje nateznih trdnosti – koeficientov elastičnosti E za različne vrste jekel po področjih uporabe povzeto po [1] in [3], in določene kovine ter litine. Tipično velja, da večji kot je E večja je $\sigma_{\max}$, in $\sigma_{\max} < E$.

vrsta jekla	E (GPa)	$\sigma_{\max}$ (MPa)	vrsta jekla	E (GPa)	$\sigma_{\max}$ (MPa)
konstruk.	330 – 850	210 – 370	proti obrabi	790 – 1400	350 – 1050
pločevine	210 – 250	240 – 270	T obstojna	450 – 850	300 – 550
žice	300 – 650	/	ventili	800 – 1050	400 – 700
cevi	350 – 620	240 – 360	kem. odporna	500 – 950	190 – 600
vzmetna	1200 – 1700	1050 – 1350	orodna	1100 – 1800	/
baker	110	/	aluminij	70	/
svinec	14	/	medenina	100-125	/

Upogib ravne palice (droga, nosilca ali podobno) obravnavamo v prvem približku tako, kot da bi pri tem ostal prečni presek nespremenjen. Zamislimo si, da je palica razrezana na plasti vzporedne z njeno osjo in pravokotne na smer upogiba, slika 1. Blizu sredine palice poteka *nevtralna ploskev*, ki se pri upogibu palice ne raztegne, ampak le upogne. Pri čistem upogibu gre ta ploskev skozi težišče (geometrijsko središče) preseka, kot je prikazano na sliki 1.

Pri obravnavi se bomo osredotočili na plasti blizu nevtralne. Plasti nad nevtralno ploskvijo se raztegnejo, tiste pod njo pa se stisnejo. Z geometrijskega vidika pa lahko rečemo, da se plasti ukrivijo, oz. dobijo nek lokalni krivinski radij R. Slednje pomeni, da plasti lokalno izgledajo kot del kroga z radijem R. Izberimo si en presek palice Ω pravokotno na nevtralno plast in recimo, da je tam nevtralna ploskev čez razdaljo l ukrivljena z radijem R. Opazujmo plast, ki je od nevtralne oddaljeno za y' v radialni smeri in tako z dolžino loka $l + \Delta l$. Razmerje dolžin lokov plasti $(\Delta l + l)/l$ je enako razmerju radijev $(R + y')/R$. Iz tega sledi, da je deformacija plasti Δl, za y' oddaljene



Slika 1: Geometrija pri opisu upogiba palice

od nevtralne, podana z

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y'}{R}, \tag{2}$$

ki jo sam potrdi. Izrazu $1/R$ rečemo *ukrivljenost*. Zaradi deformacije Δl se pojavi v plasti napetost z vzdolžno komponento

$$\sigma = E\,\frac{\Delta l}{l} = E\,\frac{y'}{R}. \tag{3}$$

Na presek obravnavane plasti s ploščino $\mathrm{d}S$ deluje sila z vzdolžno komponento $\sigma\,\mathrm{d}S$, katerih vsota predstavlja celotno silo pravokotno na presek $\int_\Omega \sigma\,\mathrm{d}S$ z ene strani in je pri čistem upogibu enaka nič. Vsota navorov teh sil z ene strani glede na os v nevtralni ravnini pa je sorazmerna z ukrivljenostjo $1/R$,

$$M = \int_\Omega \sigma y'\;\mathrm{d}S = \frac{EJ}{R}, \qquad J = \int_\Omega y'^2\;\mathrm{d}S, \tag{4}$$

kjer ima y' vlogo ročice navora. Ob tem definiramo *vztrajnostni moment preseka* palice J, ki je pri pravokotnem preseku dimenzij $a \times b$ in $y' \in [-b/2, b/2]$ enak $J = ab^3/12$, pri okroglem preseku z radijem r pa $J = \pi r^4/4$. Izpeljite oba izraza.

Postavimo koordinatni sistem (x, y), kot kaže slika 1, z x osjo vzdolž nevtralne ploskve neobremenjene palice. Želimo pridobiti funkcijo odmika nevtralne ploskve obremenjene palice od prvotne lege $u(x)$. Našo palico le šibko upogibamo ($u'(x) \ll 1$) in zato je ukrivljenost približno

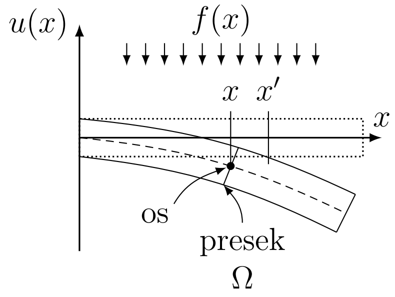
$$\frac{1}{R} = u''(x) \tag{5}$$

in navor se poenostavi v

$$M = EJu''(x)\,, \quad x \in [0, l]\,, \tag{6}$$

kjer je $'$ odvod po spremenljivki x. Enačba (6) predstavlja prvo vez med obremenitvijo – navorom M in geometrijo palice – funkcijo $u(x)$. Oglejmo si, kako lahko izrazimo navor sil na prečni presek z ene strani preseka, $M(x)$, z zunanjimi silami na palico.

Palica naj bo v prečni smeri glede na nevtralno ploskev obremenjena z dolžinsko gostoto sile $f(x)$. Ponovno opazujmo presek Ω na mestu x nevtralne ploskve, tokrat na sliki 2. Osredotočimo se na vpliv leve strani na izbran presek glede na os v točki x. Navor notranjih napetosti $M(x)$ na prečni presek z ene strani mora biti enak navoru zunanjih sil z iste strani. Navor na desni del je v splošnem enak levemu.



Slika 2: Sile na palico

Na dolžino $\mathrm{d}x'$ deluje sila $f(x')\,\mathrm{d}x'$ in tako navor $M(x)$ z zunanjimi silami izrazimo kot

$$M = \int_{x_0}^{x} f(x')(x - x')\ \mathrm{d}x' + M_0, \tag{7}$$

kjer je x_0 začetek palice na levi strani. Pri tem je M_0 zunanji navor, ki deluje na levi konec palice v primeru, če je tam vpeta. Prvi odvod navora je enak strižni sili $F(x)$, s katero desni del deluje na levega na mestu x, in se zapiše kot

$$M' = \int_{x_0}^{x} f(x')\ \mathrm{d}x' = F(x) = EJu'''. \tag{8}$$

Vidimo, da je enak vsoti zunanjih sil, ki delujejo na levi del palice; torej je nasprotno enak strižni sili, s katero desni del deluje na levega na mestu x. Drugi odvod navora pa predstavlja dolžinsko gostoto sile $f(x)$ in s pomočjo enačbe (6) dobimo *osnovno enačbo palice*

$$M'' = f(x) = EJu^{(4)}(x). \tag{9}$$

Enačbo (9) želimo rešiti za naš primer centralno obremenljene palice s silo F_0 in podprte na koncih oddaljenih za dolžino l. Izhodišče x-osi si bomo izbrali na sredini palice. Posledica diskretno porazdeljene sile na sredini palice [2] je nezveznost tretjega odvoda $u'''(x)$, katerega skok vrednosti je enak

$$\Delta u'''(x = 0) = -\frac{F_0}{EJ}. \tag{10}$$

Simetričnost palice okoli $x = 0$ nam omogoča, da problem reduciramo na obravnavo le desne strani $x > 0$. Zaradi odstotnosti sile velja zunaj sredine homogena enačba $u^{(4)}(x) = 0$. Od tod ugotovimo, da je oblika palice opisljiva z nastavkom

$$u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \tag{11}$$

kjer so a, b, c in d konstantni koeficienti. Zaradi simetrije, zveznosti $u'(x)$ in nezveznosti $u'''(x)$ sledi, da je b enak nič in d s spremembo strani obravnave obrne predznak. Nastavek mora izpolniti naslednje pogoje

- $u(l/2) = 0$, ker je palica tam podprta
- $u''(l/2) = 0$, ker konec palice ni vpet in nanj ne deluje noben navor

- $\Delta u'''(0) = -F_0/EJ$ zaradi diskretne sile.

Ko izpolnimo vse pogoje in izračunamo koeficiente, dobimo rešitev za desno stran palice

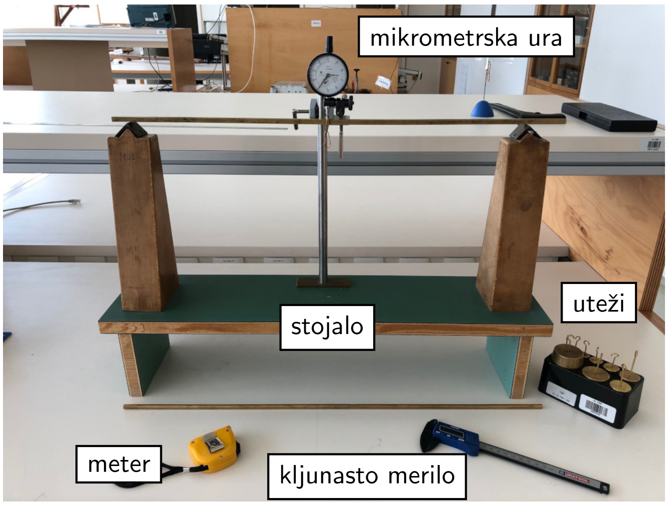
$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}\left[1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]. \tag{12}$$

Na sredini ($x = 0$) se torej palica zniža

$$u(0) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}. \tag{13}$$

Potrebščine

- stojalo, mikrometrska ura
- uteži, tehtnica, kljuka za obešanje uteži
- dve ravni palici okroglega in pravokotnega profila
- kljunasto merilo in meter



Slika 3: Postavitev eksperimenta z vsemi potrebščinami.

Naloga

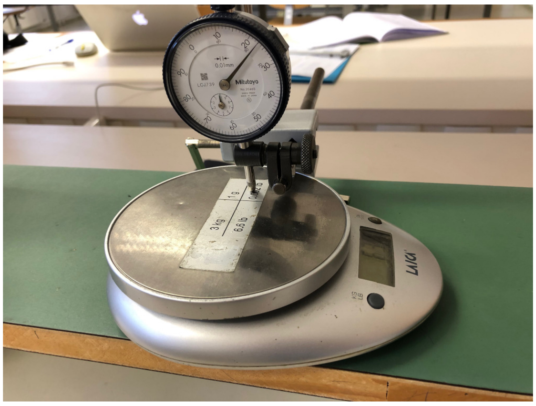
1. Opazuj upogibanje dveh palic različnih presekov v odvisnosti od obremenitve in izračunaj njuna prožnostna modula.
2. Oceni maksimalno obremenitev palic ter za koliko se palici upogneta zaradi lastne teže. Primerjaj tudi gostoti obeh palic.
3. Nariši diagrama spreminjanja strižne sile in navora vzdolž palice za izbrano utež.

Navodilo

Izvedi vse meritve in izračune za obe palici. Izmeri presek vsake palice, njihovo težo in razdaljo med nosilcema na stojalu, ki predstavlja dolžino l uporabljeno v uvodu.

Slika 4: (*levo*) Postavitev eksperimenta pri meritvi upogiba palice s točkasto obremenitvijo v njeni sredini. (*desno*) Notranjost merilne (mikrometrske) ure.

Položi palico na stojalo in na sredino obesi uteži kot kaže slika 4 levo. Z mikrometrsko uro odčitaš poves palice. V mikrometrski uri je zelo šibka vzmet, slika 4 desno, ki skupaj s težo igle predstavlja dodatno breme na palico. S pomočjo tehtnice oceni odvisnost bremena igle na kontaktno površino od odmika na celotnem razponu merila, ki je reda nekaj deset gramov. Dodatno obremenitev oceni s pomočjo tehtnice tako, da mikrometrsko uro spustiš do tehtnice in izmeriš obremenitev (v gramih) v odvisnosti od premika igle mikrometrske ure, slika 5.



Slika 5: Primer meritve obremenitve zaradi merilne (mikrometrske) ure.

Pri meritvi upogiba na palico dodajaj uteži in beleži odmik. Meritev ponovi z odvzemanjem uteži. Nariši diagram odmika na sredini $u(0)$ v odvisnosti od celotnega bremena F_0 (uteži in mikrometrske ure) in pokaži, da je $u(0) \propto F_0$. Izračunaj elastični modul E in ga primerjaj z vrednostmi za različne kovine v tabeli 1. Nariši tudi diagrama za spreminjanje strižne sile, $F(x)$, in navora vzdolž palice, $M(x)$.
Oceni maksimalno obremenitev palice, tako da bo meritev v območju elastičnosti, če privzamemo, da so dovoljene relativne deformacije $\epsilon = \Delta l/l$ pod 0.1 %. Uporabimo

enačbi (2) in (5) in upoštevamo točko z največjim možnim $1/R$ za višino preseka palice D (b ali $2r$) in dobimo oceno za maksimalno obtežitev $F_{\max}$

$$F_{\max} \approx \epsilon \frac{8EJ}{Dl}, \tag{14}$$

ki jo sam preveri. Prepričaj se, da te meje nismo presegli pri meritvah.
Oceni, za koliko se upogne palica zaradi lastne teže. Pri tem privzemi, da teža prijemlje na njeni sredini. Poskušaj izpeljati še natančen izračun z enakomerno porazdelitvijo teže palice. Nazadnje izračunaj gostoti obeh palic. Ali sta iz enakega materiala?

Literatura

[1] Bojan Kraut. *Strojniški priročnik*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.

[2] Ivan Kuščer in Alojz Kodre. „Matematika v fiziki in tehniki“. V: DMFA, 1994. Pogl. 5.9 in 8.2.

[3] Družba SIJ Metal Ravne. *Domača stran*. URL: `https://www.metalravne.com/sl/`.