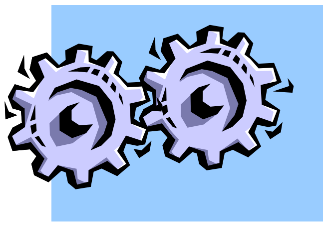
Univerza v *Ljubljani*
Fakulteta *za elektrotehniko*
Laboratorij *za metrologijo in kakovost*

Gregor Geršak

Merilna negotovost za začetnike



julij 2008
ver4.0

KAZALO

Uvod

Merilna negotovost za začetnike ni učbenik, ampak samo skupek napotkov za lažje razumevanje merilne negotovosti, kot enega izmed pomembnih poglavij meroslovja, vede o merjenju. In to v zelo poenostavljeni obliki.
Sistemi enot, merilni rezultat, merilna negotovost, točnost, ponovljivost so pojmi, s katerimi se ukvarjata knjiga profesorja Berglja, *Meritve 1. del* in študijska skripta *Metrologija*. Če boste med branjem *Merilne negotovosti za začetnike* kdaj v dvomih, sta to prava vira.
In, če se izrazim v stilu metrološke piramide in metroloških pravih vrednosti, še najbolj prava vira ali najvišja etalona sta *Mednarodni slovar osnovnih in splošnih izrazov s področja meroslovja* in ISO vodilo *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*.

Meritev

Kaj je meritev?

Merjenje je skupek dejavnosti, s katerimi opravimo meritev lastnosti nečesa. Meritev pove, kako dolg je naš merjenec, kako težak je ali kako je vroč.
Rezultat merjenja je število - izmerjena vrednost.

Meritev se izvaja s pomočjo merilnih inštrumentov. Šolska ravnila, tehtnice, voltmetri, laserski interferometri in termometri so merilni inštrumenti.

Rezultat merjenja ponavadi zapišemo v obliki dveh delov – izmerjene vrednosti in enote, na primer: 2 metra, 5 kilogramov, 6 voltov ali 42 stopinj Celzija.

Merilna negotovost

Kaj je merilna negotovost?

Merilna negotovost je številski podatek, ki nam pove, kako kakovostno smo meritev izvedli.

Merilna negotovost je kvantitativno merilo, ki opisuje, kako močno dvomimo v izmerjeni rezultat. Izmerjeni rezultat je seveda močno odvisen od kakovosti uporabljenega merilnega inštrumenta. Vedno pa velja, da lahko dvomimo v prav vsako merjenje – od najpreprostejših do najbolj vrhunskih in najboljših merjenj.
V vsakdanjem življenju negotovost pogosto uporabljamo v obliki »težak sem okoli 70 kg«, pri čemer *okoli* ponavadi pomeni kakšen kilogram gor, kakšen kilogram dol.

Točnost, ali bolje netočnost meritve ne pomeni isto kot negotovost meritve. Točnost je kvalitativni pojem ("meritev je zelo točna"), negotovost pa je kvantitativen pojem ("negotovost meritve znaša 1 kg").

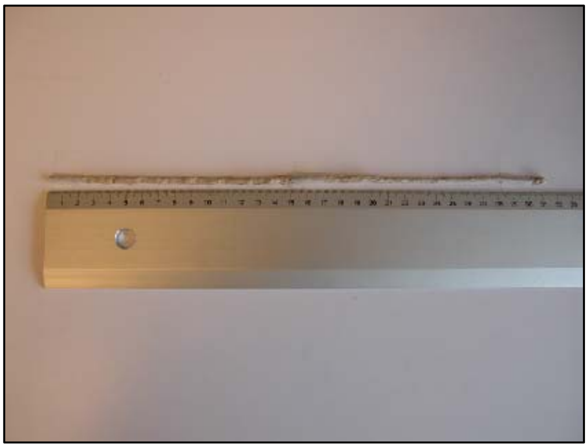
```
izmerjena vrednost = 80,5212 kg

merilna negotovost = 0,0012 kg

točnost = "dobro izmerjena masa" ali "dobra tehtnica"
```

Kako zapišemo merilno negotovost?

Za vsak izmerjeni rezultat, v katerega dvomimo, moramo pojasniti dve stvari – kakšno odstopanje od naše izmerjene vrednosti pričakujemo in kako močno dvomimo v to izmerjeno vrednost.
Lahko zaključimo, da za določevanje merilna negotovosti potrebujemo dve števili. Prva je širina odstopanja od izmerjene vrednosti ali **interval zaupanja**, druga je **nivo zaupanja**, ki pove, kako zelo smo prepričani, da se prava vrednost meritve nahaja znotraj pričakovane širine odstopanja od izmerjene vrednosti.

Lahko bi dejali, da je dolžina vrvi, ki jo merimo, 20 cm plus ali minus 1 centimeter pri nivoju zaupanja 95 procentov. Rezultat meritve zapišemo kot 20 cm ± 1 cm, pri nivoju zaupanja 95 %.

Pravzaprav smo s tem z eno vrstico zapisali, da smo v 95 % prepričani, da bo prava dolžina vrvi med 19 cm in 21 cm.



Negotovost ali pogrešek?

Negotovosti ne smemo zamenjevati s pogreškom.
Pogrešek je razlika med izmerjeno vrednostjo in pravo vrednostjo merjenca. Negotovost pa je kvantitativno merilo za dvom v merilni rezultat.
Če je le mogoče, poskušamo izmerjeni vrednosti dodati korekcijo, ki jo dobimo v kalibracijskih certifikatih. Na ta način izločimo znane pogreške. Vsi ostali neznani pogreški pa so vir negotovosti.

Zakaj je merilna negotovost pomembna?

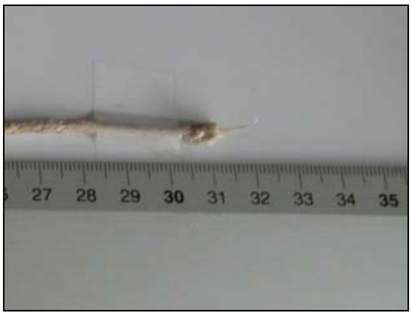
Merilno negotovost želimo poznati, kadar želimo izvajati kvalitetne meritve in dobro poznati rezultat. Obstojijo pa še drugi primeri, pri katerih merilna negotovost igra pomembno vlogo.

- Če izvajamo meritve v okviru umerjanja (s tujko kalibracije), kjer moramo merilno negotovost pripisati rezultatu.

- Če izvajamo meritve v okviru preskušanja (s tujko testinga), kjer potrebujemo vrednost merilne negotovosti, da ugotovimo, ali je merjenec ustreza zahtevam ali ne.
- Če izvajamo meritve, ki morajo biti v okviru predpisanih toleranc.
- Če hočemo razumeti kalibracijski certifikat ali prebrati specifikacije določenega inštrumenta ali preskusa.


Kolikšna je dolžina vrvi?
pol metra, če jo merimo z negotovostjo parih centimetrov


31 cm, če jo merimo z negotovostjo centimetra



31,1 cm, če jo merimo z negotovostjo pod centimetrom

Osnovna statistika niza števil

Pomeri trikrat, odreži enkrat

S kratkim razmišljanjem lahko ugotovimo, da je ponavljanje meritev dobra ideja.
Če naredimo samo eno meritev, se hitro lahko zgodi, da ne bomo opazili morebitne napake. Če naredimo dve meritvi in dobimo dva različna rezultata, se težko odločimo, katera meritev je pravilna. Pri treh meritvah, pri katerih imata le dve meritvi enak rezultat, tretja meritev hitro postane sumljiva, da je pri njej prišlo do napake.

Lahko zaključimo, da je v izogib večjim napakam pametno meritev večkrat ponoviti.

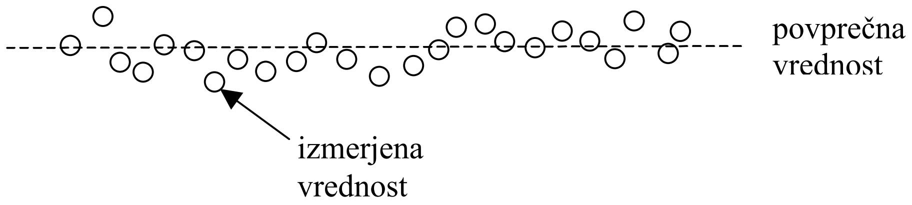
Osnovni statistični izračuni

Z uporabo statističnih metod lahko iz niza meritev ugotovimo še dodatne lastnosti našega merjenca. Najbolj pomembna statistična parametra za niz meritev sta aritmetična srednja vrednost (imenovana tudi povprečna vrednost) in standardni odklon (imenovan tudi standardni odmik ali standardna deviacija).

Kako dobiti najboljši približek vrednosti merjenca?

Najboljši približek vrednosti merjenca lahko najbolje opišemo s povprečjem večjega števila meritev. Večkrat se zgodi, da ponavljanje meritve ne prinese vedno enakega rezultata. To ponavadi ne pomeni, da delamo napako pri merjenju. Običajno gre za naravno nestabilnost merjenca ali pa za nestabilnost merilnega inštrumenta. Lastnosti merjenca se lahko s časom spreminjajo, recimo, če merimo temperaturo zraka, lahko hitro ugotovimo, da je časovno odvisna. Tudi najboljši in najdražji merilni inštrumenti so odvisni od zunanjih dejavnikov, recimo pri merjenju dolžine s tračnim merilom v puščavi ali v zasneženih Alpah lahko hitro ugotovimo, da se rezultat meritve spreminja tudi s temperaturo okolice.

Kadar zaznamo rahlo spreminjanje merilnega rezultata, je najbolje, da za izmerjene rezultate izračunamo povprečno vrednost. Povprečna vrednost je seveda le približek prave vrednosti in jo izračunamo tako, da seštejemo rezultate vseh meritev in seštevek delimo s številom meritev.



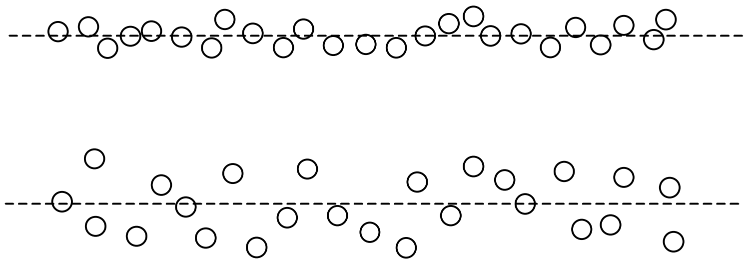
Niz izmerjenih vrednosti in njihova povprečna vrednost.

Koliko meritev potrebujemo, da lahko izračunamo povprečje?

V splošnem velja, da več meritev pomeni, da bi se njihovo povprečje bolj približalo pravi vrednosti merjenca. Toda zavedati se je treba, da je večje število meritev tudi bolj zamudno in se ne izplača vedno. 20 meritev nam da boljši rezultat kot deset meritev. Povprečje 50 meritev pa je le malenkost bližje pravi vrednosti. Običajno v praksi izvajamo od 4 do 15 meritev.

Raztros meritev

Če je rezultat meritev nestabilen, je zanimivo vedeti, kako široko so izmerjene vrednosti razpršene okoli povprečne vrednosti. Raztros meritev nam da informacijo o negotovosti meritve.



Prikaz dveh nizov izmerjenih vrednosti, ki sta različno razpršena.

Za oceno raztrosa je včasih dovolj že, da poznamo razpon, to je razliko med največjo in najmanjšo izmerjeno vrednostjo. Pri majhnem številu meritev nam razpon ne da zadosti informacij, saj lahko že ena sama (napačna) izmerjena vrednost povzročil veliko spremembo razpona.

Kadar imamo veliko število izmerjenih vrednosti je običajni način za kvantitativno oceno raztrosa meritev standardni odklon. Standardni odklon niza meritev nam pove, koliko je povprečje razlik posameznih izmerjenih vrednosti od povprečne vrednosti celotnega niza.
V najbolj preprostem primeru bo okoli dve tretjini izmerjenih vrednosti padlo v interval med povprečno vrednostjo minus standardni odklon in povprečno vrednostjo plus standardni odklon. Približno 95% vseh meritev bo v intervalu dveh standardnih odklonov od povprečne vrednosti.

Standardni odklon je vrednost, ki jo teoretično dobimo le iz ogromnega števila meritev (neskončno meritev). V praksi lahko izračunamo približek standardnega odklona, ki ga označimo s *s*.

Izračunavanje približka standardnega odklona

Standardnega odklona v praksi ne računamo (več) ročno, ampak uporabljamo matematično in statistično programsko opremo. Poleg uporabe računalnikov lahko že z običajnim statističnim kalkulatorjem, v katerega vnesemo izmerjene vrednosti, izračunamo približek standardnega odklona s funkcijsko tipko *s* ali σ_{n-1}.

Matematično lahko izraz za približek standardnega odklona zapišemo kot

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

kjer je s približek standardnega odklona, x_i je i-ta izmerjena vrednost, $\bar{x}$ je aritmetična sredina n meritev. Več meritev naredimo, večji bo niz izmerjenih vrednosti in bolj se bo približek približal standardnemu odklonu. Običajno zadostuje 10 meritev.

Odkod pridejo pogreški (napake) in negotovosti?

Vplivnih veličin, ki vplivajo na meritev, je veliko. Njihov vpliv na izmerjeni rezultat je lahko velik ali pa ne. V praksi meritve niso izvedene v idealnih pogojih, zato nastopijo pogreški in negotovosti. Najobičajnejši viri pogreškov so:

merilni inštrument
Inštrumenti so podvrženi pogreškom zaradi staranja, obrabe, različnih lezenj, problematičnega odčitavanja, šuma, padcev po tleh in drugih problemov.

merjenec
Objekt, ki ga merimo, je lahko nestabilen. Merjenje velikosti ledene kocke v vroči sobi zna biti precej nestabilno (in negotovo).

proces merjenja
Sam proces merjenja je včasih zelo težaven. Ugotavljanje mase živahnih malih živali zna biti precej zabavno.

znane negotovosti
Negotovosti kalibriranih inštrumentov, ki jih uporabljamo v meritvi, se prištevajo k negotovosti naše meritve. Z netočnimi inštrumenti ne bomo naredili točne meritve.

usposobljenost izvajalca meritev
Nekatere meritve so odvisne od subjektivnih odločitev izvajalca meritev. Take so odčitavanje analogne skale, reakcijski čas pri merjenju časa s štoparico in podobno.

vzorčevanje
V procesu merjenja je pomembno, da je niz meritev (vzorec) res reprezentativen predstavnik merjene veličine. Tako merjenje temperature neposredno ob klimatski napravi ne bo predstavljalo dobrega približka temperature prostora.

okolje
Na merilni inštrument vplivajo tudi pogoji okolja - temperatura, zračni tlak, vlažnost, vsebost prašnih delcev, vibracije, itd.

Če sta velikost in smer pogreška znana, ga lahko uporabimo kot popravek ali korekcijo izmerjene vrednosti. Korekcija je aritmetično enaka nasprotni vrednosti pogreška. Včasih lahko (nepomembno majhno) korekcijo vključimo v merilno negotovost in tako predstavlja le en del celotne merilne negotovosti izmerjene veličine.

Oblike porazdelitev merjenih veličin

Naključno ali sistematično

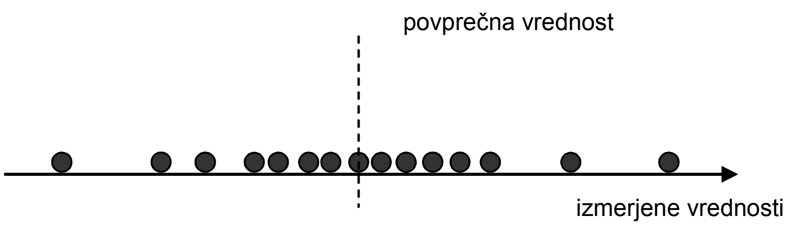
Vplivi na meritev so lahko naključnega ali sistematičnega značaja. Naključni vplivi nastopijo takrat, ko je rezultat ponovljenih meritev drugačen rezultat. Čim večje število meritev naredimo, boljši je približek aritmetične sredine pravi vrednosti. Sistematični vpliv se pojavi, ko isti vplivni parameter enako vpliva na vsako izmerjeno vrednost. Povečevanje števila meritev ne prinese nobenega izboljšanja.

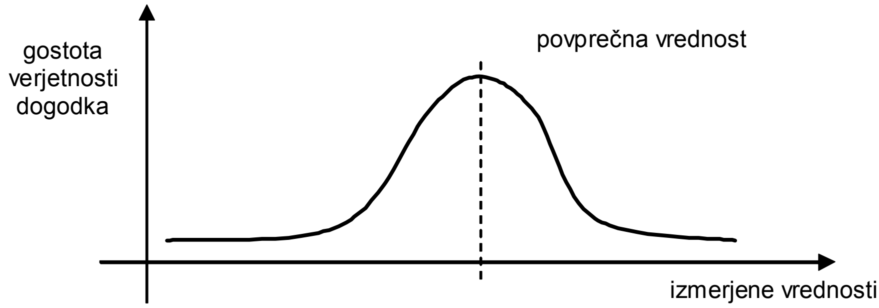
Porazdelitev – oblika napake

Izmerjene vrednosti so lahko različno razpršene. Rečemo, da imajo različno porazdeljeno gostoto verjetnosti.

Normalna porazdelitev

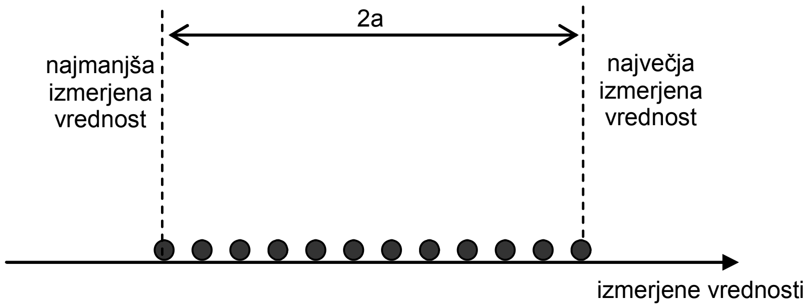
Običajno obstoji velika verjetnost, da ima največje število meritev vrednost okoli povprečne vrednosti. Verjetnost, da je meritev zelo oddaljena od povprečja, pa je manjša. Tako porazdelitev imenujemo normalna ali Gaussova porazdelitev.

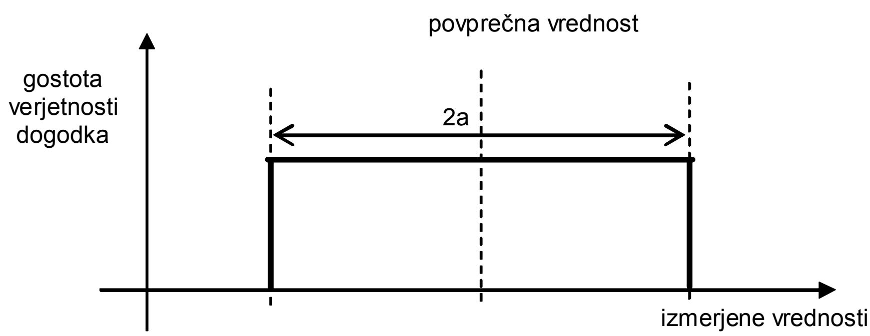




Pravokotna porazdelitev

O enakomerni ali pravokotni porazdelitvi govorimo, ko so izmerjene vrednosti enakomerno razporejene med najmanjšo in največjo izmerjeno vrednostjo. Tipični primer (diskretne) pravokotne porazdelitve je met igralne kocke. Za vsako številko imamo enako verjetnost, da jo vržemo. Velikokrat ne poznamo dovolj dobro procesa, ki ga merimo, zato predpostavimo pravokotno porazdelitev.





Druge oblike porazdelitve

Redkeje uporabljamo tudi druge porazdelitve, kot so trikotne, trapezne, U, Poissonove in druge porazdelitve.

Kako izračunati negotovost meritve?

Za izračun negotovosti meritve moramo najprej določiti vse vplivne veličine, vse izvore negotovosti v meritvi. Nato je potrebno oceniti velikosti posameznih negotovosti. Na koncu se vplivi posameznih negotovosti seštejejo v skupno vrednost.

Jasnih in enotnih pravil in metod za določevanje in ocenjevanje velikosti posameznih negotovosti ni. Priporočila pa najdemo v GUM.

Dva načina za določevanje negotovosti

Ne glede na izvor negotovosti lahko negotovosti razdelimo v dve skupini – tip A in tip B negotovosti. Običajno v meritvah nastopajo negotovosti obeh tipov.

Negotovosti tipa A – te negotovosti ocenjujemo s pomočjo statističnih orodij, ki jih uporabimo na podatkih, pridobljenih s ponavljanjem meritev.

Negotovosti tipa B – te negotovosti ocenjujemo s pomočjo drugih virov, ki so običajno podatki proizvajalca merilnega inštrumenta, znanje iz izkušenj s podobnimi predhodnimi meritvami, podatki iz kalibracijskih certifikatov, izračunov, podatki iz objavljenih virov (znanstveni članki) in po zdravi pameti.

Ne drži vedno, da so negotovosti tipa A naključne, tipa B pa sistematične.

Osem korakov za ovrednotenje negotovosti

1. Odločitev, kaj želimo izvedeti iz naših meritev. Odločiti se je potrebno, kakšne bodo dejanske meritve za dosego tega cilja in kakšni izračuni bodo pri tem potrebni.

2. Izvedba potrebnih meritev.

3. Določevanje negotovost vsake fizikalne veličine, ki vpliva na merilni rezultat. Te veličine imenujemo vhodne veličine. Posamezne negotovosti je potrebno izraziti na podoben način.

4. Ugotavljanje, ali so pogreški vhodnih veličin neodvisni med seboj. Če niso, so potrebni dodatni izračuni, ki bodo to korelacijo upoštevali.

5. Izračun merilnega rezultata, pri čemer upoštevamo vse znane korekcije. Korekcije običajno dobimo v kalibracijskih certifikatih meril.

6. Ocenjevanje celotne standardne negotovosti.

7. Zapis razširjene negotovost s pomočjo faktorja razširitve k, velikosti intervala negotovosti in stopnje zaupanja rezultata.

8. Zapis merilnega rezultata in negotovost ter opis, na kakšen način sta bila izračunana.

Ostalo, kar je treba poznati, preden začnemo določevati negotovost

Posamezni prispevki negotovosti morajo biti izraženi v enaki obliki, da jih lahko združimo. Zato morajo imeti enake enote in enako stopnjo zaupanja.

Dolžino vrvi izmerimo s kovinskim tračnim merilom in izmerimo 100 cm. Negotovost določanja dolžine vrvi bo seveda izražena v enotah za dolžino.

Ena od vplivnih veličin je temperatura, saj se dolžina vrvi spreminja tudi zaradi temperature. In čeprav je izvor negotovosti temperatura, se njen učinek izrazi s spremembo dolžine vrvi. Zato ga je potrebno izraziti v enotah za dolžino.

Če poznamo razteznostni koeficient vrvi, (recimo da vemo, da se vrv raztegne za 1 odstotek na vsako stopinjo temperature), lahko izračunamo spremembo dolžine vrvi. Negotovost merjenja okoliške temperature ± 2 °C bo tako vzrok za negotovost merjenja dolžine ± 2 cm pri 100 cm dolgi vrvi.

Standardna negotovost

Ker morajo biti posamezni prispevki negotovosti podani z enako stopnjo zaupanja, jih spremenimo v standardne negotovosti. Standardna negotovost predstavlja mejo, ki jo lahko določimo kot "plus minus en standardni odklon". Predstavlja merilo za negotovost povprečne vrednosti meritev (in ne govori samo o raztrosu teh meritev). Običajno jo zapišemo z *u* (uncertainty), oziroma *u*(*y*), pri čemer je *y* fizikalna veličina, ki jo merimo.
Tako je na primer absolutna standardna negotovost merjenja frekvence *f* označena z *u*(*f*), relativna pa z *w*(*f*).

Izračun standardne negotovosti iz negotovosti tipa A

Za ovrednotenje negotovosti tipa A naredimo serijo n meritev.
Iz izmerjenih vrednosti lahko določimo povprečno vrednost $\overline{x}$ in standardni odklon s. Oba podatka lahko uporabimo za izračun negotovosti. Oceno standardne negotovosti povprečne vrednosti izračunamo s pomočjo spodnje enačbe.

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Standardna negotovost povprečne vrednosti je včasih imenovana tudi standardni odklon povprečja ali standardni pogrešek povprečja.

Izračun standardne negotovosti iz negotovosti tipa B

Podatki, potrebni za oceno negotovosti tipa B, so ponavadi precej skopi. Običajno poznamo le spodnjo in zgornjo mejo negotovosti, oziroma razliko med obema (recimo $2\mathrm{a}$). Zato predpostavimo, da bo izmerjena vrednost enako verjetna kjerkoli med obema mejama; predpostavimo pravokotno porazdelitev verjetnosti. Standardna negotovost pravokotne porazdelitve se izračuna s pomočjo spodnje enačbe.

$$u = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{3}}$$

Pravokotna porazdelitev se zelo pogosto uporablja, vendar je bolje uporabiti primernejšo porazdelitev, če jo poznamo. Tako lahko ponavadi predpostavimo, da so negotovosti iz kalibracijskih certifikatov normalno porazdeljene.

Skupna (kombinirana) merilna negotovosti

Računanje skupne (kombinirane) negotovosti u_c

V splošnem merilni rezultat y dobimo s splošno matematično funkcijo f. Lahko zapišemo $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, kjer so x_i vhodne vplivne fizikalne veličine, s pomočjo katerih izračunamo y.

Kombinirana standardna negotovost y je definirana z enačbo

$$u_c^{\ 2}(y) = \sum_{i=1}^{N} [u_i]^2 \ ,$$

kjer je $u_i = |c_i|\, u(x_i)$ in je c_i občutljivostni koeficient vplivne veličine x_i. $u(x_i)$ pa so negotovosti posameznih vplivnih veličin.

Daljše zapisano velja

$$u_c^2(y) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_N^2} \ ,$$

Občutljivostni koeficient pove, kako močno je merjena veličina odvisna od posameznih vplivnih veličin. Matematično predstavlja parcialni odvod funkcije f od x_i

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_1 = x_1 .. X_N = x_N}$$

Načelno nam parcialni odvodi niso zelo simpatični, zato si skušamo pomagati s poenostavitvami.

Primer

Kot primer bomo uporabili splošno matematično funkcijo za izračun merilne negotovosti merjenja temperature s termistorjem.
Termistor je uporovni termometer, za katerega velja, da je njegova električna upornost R sorazmerna njegovi temperaturi T.
Velja

$$T = \mathrm{k}\, R$$

Kombinirano absolutno negotovost merjenja temperature izračunamo s splošno formulo

$$u_c^{\ 2}(T) = \sum_{i=1}^{N} \left[|c_i|\, u_i(x_i) \right]^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial R} u(R) \right)^2 = \left(\mathrm{k}\, u(R) \right)^2$$

$$u_c(T) = \mathrm{k}\, u(R)$$

V relativni obliki sta negotovosti enaki.

$$w_c(T) = w(R)$$

Poenostavitve računanja skupne negotovosti

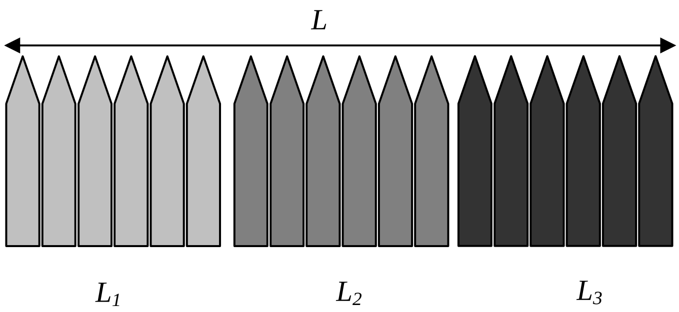
Poenostavitve

Če funkcija f iz prejšnjega poglavja predstavlja enostavne operacije, kot so seštevanje, odštevanje, množenje ali deljenje, se računanje skupne merilne negotovosti močno poenostavi.

Skupna negotovost pri seštevanju ali odštevanju

Če je rezultat meritve izračunan s seštevanjem ali odštevanjem več izmerjenih meritev, lahko kombinirano standardna negotovost u_c izračunamo z geometrijskim seštevanjem negotovosti teh meritev.

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_i^2 + \ldots}, \quad c_i = 1$$



Če hočemo izračunati skupno negotovost dolžine ograje $L = L_1 + L_2 + L_3$, pri čemer poznamo negotovosti posameznih delov, uporabimo enačbo

$$u_c(L) = \sqrt{u_1^2(L_1) + u_2^2(L_2) + u_3^2(L_3)}$$

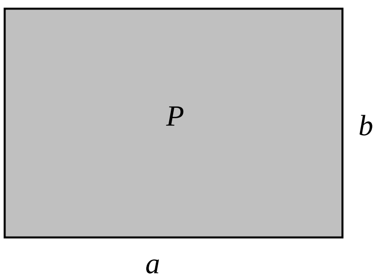
Skupna negotovost pri množenju ali deljenju

Če je rezultat meritve y izračunan z množenjem ali deljenjem več izmerjenih veličin $(A, B, C\ldots)$, lahko kombinirano standardna negotovost u_c izračunamo z geometrijskim seštevanjem relativnih negotovosti teh meritev.

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(A)}{A}\right)^2 + \left(\frac{u(B)}{B}\right)^2 + \left(\frac{u(C)}{C}\right)^2 + \ldots}$$

ali zapisano krajše

$$w_c = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \ldots + w_i^2 + \ldots}$$



Želimo izmeriti površino pravokotnika $P = a\ b$. Zato moramo izmeriti dolžini obeh stranic. Če hočemo izračunati skupno negotovost površine, moramo poznati negotovosti merjenj posamične stranice. Velja

$$\frac{u_c(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

Če bi na primer v enačbi za y računali zmnožek ali količnik sedmih veličin, bi v enačbi za negotovost $u_c(y)$ nastopalo sedem členov.

Korelacija

Vse enačbe v prejšnjem poglavju veljajo le v enem primeru. Posamezni prispevki negotovosti k merilnemu rezultatu morajo biti med seboj neodvisni, nekorelirani. V praksi se moramo vedno vprašati, ali kakšna od vhodnih vplivnih veličin ne vpliva na drugo vhodno veličino. (Obe seveda vplivata tudi na merilni rezultat).
Če obstaja korelacija, jo moramo ovrednotiti in izračunati po enačbah iz GUM.

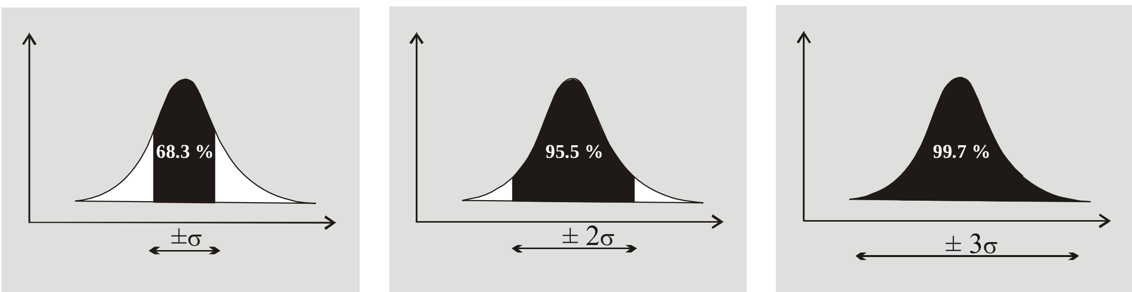
Faktor razširitve k

Faktor razširitve k je konstanta, s katero pomnožimo standardno negotovost u_c, da dobimo razširjeno merilno negotovost $U_{95\%}$.

$$U_{95\%} = k\, u_c$$

V splošnem je za standardno negotovost značilno, da predstavlja interval, v katerega pade 68,3 % vseh meritev. Ali drugače povedano - obstoji 68,3 % verjetnost, da bo izvedena meritev v intervalu [povprečna vrednost ± standardni odklon]. Pravimo, da je raven zaupanja 68,3 %.

Če želimo, da je procent verjetnosti višji, pomnožimo standardno negotovost z razširitvenim faktorjem. Tako v splošnem velja (za normalno porazdelitev), da k = 1 predstavlja raven zaupanja 68,3 %, k = 2 in k = 3 pa raven zaupanja 95,5 % in 99,7 %.



Normalna ali Gaussova porazdelitev. Merilna negotovost se izraža s standardnim odklonom σ. Širina intervala zaupanja enega standardnega odklona pri normalni porazdelitvi ustreza verjetnosti 68,3% (črno polje), da bo prava vrednost v tem intervalu, širina dveh standardnih odklonov ustreza verjetnosti 95,5%, treh pa 99,73%, itd.

Po obratni poti lahko tako iz kalibracijskih certifikatov, kjer je podan faktor razširitve, izračunamo standardne negotovosti, ki jih nato lahko uporabimo za izračun kombinirane negotovosti naše meritve.

Kako zapišemo merilni rezultat?

Zapis merilnega rezultata mora vključevati vsaj:

1. izmerjeno vrednost
2. merilno negotovost z navedbo faktorja razširitve in ravni zaupanja
3. tekst v obliki "razširjena negotovost je določena kot standardna negotovost, pomnožena s faktorjem razširitve k = 2, ki pri normalni porazdelitvi ustreza ravni zaupanja približno 95 %"

Primer merilnega rezultata:

```
masa = izmerjena vrednost ± merilna negotovost

m = 80,52 kg ± 0,12 kg

Razširjena negotovost je bila določena kot
standardna negotovost, pomnožena s faktorjem
razširitve k = 2, ki pri normalni porazdelitvi
ustreza ravni zaupanja približno 95 %.
```

Zaokroževanje števil, pomembne cifre

Popolni merilni rezultat navajamo v obliki intervala, tako da navedemo izmerjeno vrednost in merilno negotovost v absolutni ali relativni obliki. Pri navajanju merilnega rezultata moramo zaokrožiti tako negotovost kot izmerjeno vrednost. Pogosto so namesto izjave o negotovosti napisane samo tiste cifre, ki jih lahko upoštevamo in ki so smiselne ter pomembne. Te cifre imenujemo pomembne cifre.

GUM priporoča, da pri zapisu merilne negotovosti upoštevamo največ **dve pomembni cifri**. Število pomembnih cifer dobimo, če od prve od nič različne cifre naprej preštejemo vse cifre, ki sestavljajo negotovost.

Primeri določanja števila pomembnih cifer:

u = 0,01214 kg	⇒	4 pomembne cifre
u = 0,0000012 A	⇒	2 pomembni cifri
w = 10,012 m	⇒	5 pomembnih cifer
u = 0,040 s	⇒	2 pomembni cifri

Pri vmesnih izračunih merilne negotovosti nikoli ne zaokrožamo, temveč obdržimo več dodatnih cifer. Negotovost podajamo z največ dvema pomembnima ciframa. Zaokrožamo jo vedno **navzgor**. Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 1 do 9, zaokrožimo navzgor, če je 0, pa navzdol.

Primeri zaokroževanja negotovosti na dve pomembni cifri:

u = 0,01214 kg	⇒	u = 0,013 kg
u = 0,01203 A	⇒	u = 0,012 A
w = 0,04567	⇒	w = 0,046
w = 0,04506	⇒	w = 0,045

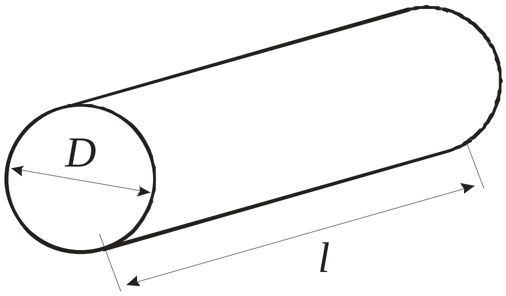
Izmerjeno vrednost zaokrožimo šele, ko smo zaokrožili negotovost. Zaokrožimo jo na decimalnem mestu, ki ga določa zaokrožena negotovost. Zaokrožujemo klasično. Če je desno od mesta zaokrožitve ena od cifer 0 do 4, zaokrožimo navzdol. Če pa je desno od zaokrožitve cifra 5 do 9, zaokrožimo navzgor.

Primer računanja merilne negotovosti v osmih korakih

Primer računanja specifične upornosti

Kot primer računanja merilne negotovosti v osmih korakih bomo pokazali primer računanja specifične upornosti. Specifična upornost materiala je snovna lastnost, ki opisuje električno upornost materiala glede na njegove dimenzije.

1. korak: Najprej se je treba odločiti, kaj želimo izvedeti iz naših meritev. Odločiti se je potrebno, kakšne bodo dejanske meritve za dosego tega cilja in kakšni izračuni bodo pri tem potrebni.



Specifična upornost žice ρ je definirana kot snovna lastnost, ki opisuje električno upornost žice glede na njeno dimenzijo. Osnovna enačba za žico okroglega preseka je

$$\rho = \frac{RA}{l},$$

kjer je R upornost žice, A presek žice in l dolžina žice.

Sama meritev praktično poteka tako, da izmerimo upornost in dolžino žice. Preseka pa ne merimo, ampak ga izračunamo iz izmerjenega premera žice.

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Za meritev specifične upornosti torej potrebujemo merilnik električne upornosti (za merjenje R), s katerim bomo izmerili upornost kosa okrogle žice. Dimenzije žice bomo izmerili z metrom (za merjenje l) in kljunastim merilom za merjenje premera žice D.
Lahko zapišemo

$$\rho = \frac{\pi}{4}\frac{RD^2}{l}$$

2. korak: Izvajanje potrebnih meritev

Če meritev ponovimo večkrat zapored, je dobljeni rezultat bolj zanesljiv.

Meritev upornosti je bila desetkrat ponovljena pri istih pogojih (n = 10). Pogoji so bili zabeleženi – temperatura okolice, relativna vlaga okolice, izvajalec meritve, serijske številke uporabljenega multimetra, podrobnosti meritev (vezalna shema, priključitev žice…). Ti podatki so pomembni, posebno če bo kasneje treba meritev ponoviti.

3. korak: Določiti negotovost vsake fizikalne veličine, ki vpliva na merilni rezultat. Te veličine imenujemo vhodne veličine. Posamezne negotovosti je potrebno izraziti na podoben način.

Upornost žice (R)
Električno upornost merimo štirižilno z digitalnim multimetrom, ki je bil kalibriran v akreditiranem laboratoriju. Ima veljaven certifikat, v katerem sta za merjenje v danem območju podana korekcija 4 $\mu\Omega$ in razširjena merilna negotovost 2 $\mu\Omega$ (k=2, normalna porazdelitev). V tabeli negotovosti vedno upoštevamo standardne negotovosti, torej enojno negotovost $u(R)$ = 1 $\mu\Omega$. Gre za tip B negotovost.

Premer okrogle žice (D)
Premer žice je bil določen z meritvijo s pomočjo kljunastega merila in je znašal 4,15 mm. Za kljunasto merilo je njegov proizvajalec podal relativno mejo pogreška m_D = 10^{-4}. Ker ne poznamo porazdelitve negotovosti, predvidevamo, da gre za pravokotno porazdelitev s širino $a = m_D D$, oziroma 4,15.10^{-4} mm. V tabeli negotovosti upoštevamo negotovost merjenja premera žice $u(D) = a/\sqrt{3} =$ 4,15.10^{-4}mm/$\sqrt{3}$ $=$ 2,4.10^{-4} mm. Gre za tip B negotovost.

Dolžina okrogle žice (l)
Dolžina žice je bila s tračnim merilom izmerjena kot 999,12 mm. Tračno merilo je bilo opremljeno z neakreditiranim certifikatom proizvajalca. Meritve bi bile najbolj zanesljive, če bi tračno merilo poslali v umerjanje v akreditiran laboratorij za dolžino. Če pa za to nimamo časa in/ali denarja lahko uporabimo absolutno mejo pogreška, ki jo poda proizvajalec. Iz proizvajalčevega neakreditiranega certifikata, ki je bil priložen merilu, odčitamo mejo pogreška M_l = 0,01 mm. Ker ne poznamo porazdelitve negotovosti, predvidevamo, da gre za pravokotno porazdelitev s širino $a = M_l$. V tabeli negotovosti upoštevamo negotovost merjenja dolžine žice $u(D) = a/\sqrt{3} = 0{,}01$ mm/$\sqrt{3}$ $= 0{,}0058$ mm. Gre za tip B negotovost.

Pogrešek zaradi ponovljivosti meritve
Srednja vrednost vseh desetih meritev je bila 2,119 mΩ, njihov standardni odklon pa $s(R)$ = 0,011 mΩ. Negotovost meritve zaradi ponovljivosti meritev lahko ocenimo s standardnim odklonom takole:

$$u(R) = s(\overline{R}) = \frac{s(R)}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}011\ \mathrm{m}\Omega}{\sqrt{10}} = 3{,}5\ \mu\Omega$$

Ker je bila negotovost zaradi ponovljivosti izračunana s statističnimi metodami, jo označimo kot negotovost tipa A.

4. korak: Odločiti se, ali so pogreški vhodnih veličin neodvisni med seboj. Če so med seboj odvisni, so potrebni dodatni izračuni, ki bodo to korelacijo upoštevali.

Poenostavimo in rečemo, da so premer, dolžina žice in njena upornost med seboj neodvisni, nekorelirani parametri.

5. korak: Izračunati merilni rezultat, pri čemer upoštevamo vse znane korekcije. Korekcije običajno dobimo v kalibracijskih certifikatih meril.

Izračunamo specifično upornost žice ρ. Upoštevamo še korekcijo multimetra, ki nam jo je izačunal akreditirani laboratorij v multimetrovem certifikatu, tako da velja $\overline{R}$ = 2,119m$\Omega + 4\ \mu\Omega =$ 2,123 mΩ.

$$\rho = \frac{\pi}{4}\frac{RD^2}{l}$$

$$\rho = \frac{\pi}{4}\frac{2{,}123\,\mathrm{m\Omega}\,(4{,}15\mathrm{mm})^2}{999{,}12\mathrm{mm}}$$

ρ = 28,7420 nΩ mm

Rezultat ρ je še v nezaokroženi obliki! Zaokrožimo ga kasneje na podlagi izračunane merilne negotovosti $u(\rho)$, torej šele po analizi in izračunu te negotovosti!

6. korak: Ugotoviti celotno standardno negotovost.

Občutljivostni koeficient pove, kako močno je merjena veličina odvisna od posameznih vhodnih veličin. Ali v našem primeru, kako močno je ρ odvisen od upornosti, dolžine in premera žice.

Občutljivostni koeficienti za naš primer znašajo:

$$c_1 = c_i(R) = \frac{\partial\rho}{\partial R} = \frac{\pi D^2}{4l} = \frac{\pi(4{,}15\mathrm{mm})^2}{4\cdot 999{,}12\mathrm{mm}} = 0{,}0125\,\mathrm{mm}$$

$$c_2 = c_i(D) = \frac{\partial\rho}{\partial D} = \frac{\pi RD}{2l} = \frac{\pi\cdot 2{,}123\,\mathrm{m\Omega}\cdot 4{,}15\mathrm{mm}}{2\cdot 999{,}12\mathrm{mm}} = 0{,}0139\,\mathrm{m\Omega}$$

$$c_3 = c_i(l) = \frac{\partial\rho}{\partial l} = -\frac{\pi RD^2}{4l^2} = \frac{\pi\cdot 2{,}123\,\mathrm{m\Omega}\cdot(4{,}15\mathrm{mm})^2}{4\cdot(999{,}12\mathrm{mm})^2} = 0{,}0288\,\mu\Omega$$

Tabela prispevkov negotovosti

veličina X_i	približek x_i	standardna negotovost $u(x_i)$	verjetnostna porazdelitev	občutljivostni koeficient c_i	prispevek negotovosti $u_i(y)= c_i\, u(x_i)$
R	2,123 mΩ	1 μΩ	normalna	0,0125 mm	$1{,}25.10^{-5}$ mΩ mm
ponovljivost	0 mΩ	3,5 μΩ	normalna	0	0 mΩ mm
D	4,15 mm	$2{,}4.10^{-4}$ mm	pravokotna	0,0139 mΩ	$3{,}34.10^{-6}$ mΩ mm
l	999,12 mm	0,0058 mm	pravokotna	0,0288 μΩ	$1{,}67.10^{-7}$ mΩ mm
ρ	0,028742 mΩ mm				$u_c(\rho) = 1{,}3.10^{-5}$ mΩ mm

Celotno merilna negotovost smo ocenili in zaokrožili na $1{,}3.10^{-5}$ mΩ mm. Zato lahko zaokrožimo tudi izmerjeno vrednost ρ in zapišemo merilni rezultat.

7. korak: Izraziti negotovost s pomočjo faktorja razširitve *k*, velikosti intervala negotovosti in stopnjo zaupanja rezultata.

Razširjena negotovost je $U_{95\%} = k \times u(\rho) = 2 \times 1{,}3.10^{-5}$ mΩ mm = $2{,}6.10^{-5}$ mΩ mm**.**

8. korak: Zapisati merilni rezultat in negotovost ter opisati, na kakšen način sta bila izračunana.

```
Specifična upornost okrogle žice znaša
ρ = 0,028742 mΩ mm ±  2,6.10^-5 mΩ mm.

Razširjena negotovost je bila določena kot
standardna negotovost, pomnožena s faktorjem
razširitve k = 2, ki pri normalni porazdelitvi
ustreza ravni zaupanja približno 95 %.
```

Razširjena negotovost je bila določena kot standardna negotovost, pomnožena s faktorjem razširitve *k* = 2, kar pri normalni porazdelitvi ustreza ravni zaupanja približno 95 %.
Specifična upornost okrogle žice znaša torej ρ = 0,028742 mΩ mm ± $2{,}6.10^{-5}$ mΩ mm = (0,028742 ± $2{,}6.10^{-5}$) mΩ mm ali v relativni obliki ρ = 0,028742 (1 ± $9{,}0.10^{-4}$) mΩ mm.
Seveda jo lahko zapišemo tudi v drugih enotah (običajno Ω mm^2/m) in na druge načine (ρ = 28,742 μΩ mm ± $2{,}6.10^{-5}$ mΩ mm = ($0{,}28742.10^{-4}$ ± $2{,}6.10^{-8}$) Ωmm in podobno).

Kako zmanjšati merilno negotovost?

Nekatere prispevke negotovosti lahko zmanjšamo, nekatere kompenziramo, nekatere izločimo, nekatere pa kljub vsemu ostanejo v izračunu in jih je potrebno upoštevati. Navedemo pa lahko nekaj napotkov za zmanjševanje negotovosti:

- uporabljajte kalibrirane inštrumente (ti imajo podano merilno negotovost in vrednost korekcije)
- izvajajte popravke, ki lahko kompenzirajo vse znane pogreške
- naredite svoje meritve sledljive na nacionalne etalone (uporabljajte kalibrirane inštrumente iz akreditiranih laboratorijev, saj je stopnja zaupanja v take meritve veliko večja kot pri neakreditiranih laboratorijih)
- uporabljajte bolj točne merilne inštrumente, oziroma opravljajte meritev v bolj stabilnih pogojih okolice in pri pogojih, ki jih zahtevajo specifikacije merilnega inštrumenta
- preverjajte meritve s ponavljanjem ali občasno prosite neko drugo osebo, naj jih ponovi namesto vas, rezultate je pametno preverjati tudi z drugo merilno metodo
- preverite matematične izračune, preverite tudi, če ste prav prepisali vmesne rezultate
- s pomočjo tabele prispevkov negotovosti poiščite največji prispevek merilni negotovosti in ga poskušajte zmanjšati
- pazite, da vrednost negotovosti v verigi kalibracij vedno raste (točnost merilnega rezultata mora biti vedno slabša od točnosti posameznih uporabljenih merilnih inštrumentov)
- validirajte programsko opremo, če jo uporabljate v meritvah
- pri računanju standardnega odklona s kalkulatorjem uporabljajte funkciji σ_{n-1} ali *s*, ker ti izračunata odklon populacije, (σ_n izračuna le standardni odklon vzorca in ni uporabna za običajno nizko število meritev)
- ne zaokrožajte vmesnih rezultatov, temveč le končnega
- zabeležite si meritve in jih shranjujte, kajti pri kasnejših preverjanjih včasih pridejo prav

Žepni slovarček izrazov

Navedenih je nekaj običajnih pojmov in izrazov. Podane definicije so splošne in poljudne. Točne definicije in razlage posameznih izrazov so navedene v VIM slovarju.

digit – ločljivost inštrumenta z digitalnim prikazovalnikom – sprememba za 1 vrednost zadnje cifre na prikazovalniku, tudi *LSD, LSB, count, quant*

enakomerna porazdelitev (rectangular distribution) – pravokotna porazdelitev

faktor pokritja *k* – faktor razširitve

faktor razširitve k (coverage factor) – vrednost, s katero množimo celotno (kombinirano) standardno negotovost za izračun razširjene negotovosti, ki ustreza določenem nivoju zaupanja

Gaussova porazdelitev - normalna porazdelitev

interval zaupanja – območje, v katerem lahko z določeno verjetnostjo (nivojem zaupanja) trdimo, da se nahaja izmerjena vrednost

kalibracija – umerjanje

korekcija (correction) – vrednost, ki se prišteje prikazani vrednosti na merilnem inštrumentu, da je skupni rezultat enak pravi vrednosti (lahko zapisana tudi v obliki faktorja, ki se pomnoži ali zdeli s prikazano vrednostjo)

korelacija – povezava, medsebojna odvisnost med merjenimi veličinami

ločljivost inštrumenta (resolution) – najmanjša razlika v prikazu inštrumenta, ki jo še lahko smiselno razločimo (glej tudi digit)

merilna negotovost (measuring uncertainties) – kvantitativna oblika dvoma v merilni rezultat

merjenec – objekt, ki mu z meritvijo določamo lastnosti, oz. merimo njegove značilnosti

naključni pogrešek – pogrešek, katerega posledice so naključne

negotovost tipa A – ocenjevanje negotovosti s pomočjo statističnih metod

negotovost tipa B – ocenjevanje negotovosti s pomočjo nestatističnih metod

nivo zaupanja – vrednost, ki opisuje stopnjo zaupanja v zapisani rezultat (npr. 95 %)

normalna porazdelitev (normal distribution) – porazdelitev izmerjenih vrednosti, za katero je značilna zvonasta oblika gostote verjetnosti - verjetnost, da bo izmerjena vrednosti blizu povprečne vrednosti, je največja, z odmikanjem od povprečja pa pada

občutljivost (sensitivity) – razmerje izmerjene vrednosti in vplivnega parametra – sprememba merjenja inštrumenta deljena s pripadajočo spremembo parametra, ki vpliva na meritev

obnovljivost (rezultata, inštrumenta) (reproducibility) – podobnost izmerjenih vrednosti pri ponovljenih meritvah pod spremenjenimi pogoji (drug izvajalec meritev, druga merilna metoda, čas meritve…)

ocena standardnega odklona – ocena standardnega odklona populacije, ki jo dobimo iz standardnih odklonov končnega števila vzorcev

odčitek – izmerjena in zabeležena vrednost med meritvijo

pogrešek (error) – (napaka) razlika izmerjene in prave vrednosti

ponovljivost (rezultata, inštrumenta) (repeatability) – podobnost izmerjenih vrednosti pri ponovljenih meritvah pod istimi pogoji

povprečna vrednost – aritmetična sredina več meritev

prava vrednost (true value) – vrednost, ki bi jo dobili pri popolnoma idealni meritvi brez napak

pravokotna porazdelitev - porazdelitev izmerjenih vrednosti, za katero je značilna pravokotna oblika gostote verjetnosti - pove, da obstoji enaka verjetnost, da bo izmerjena vrednost kjerkoli med mejama intervala

preskušanje – po Slovarju standardizacije in z njo povezanimi dejavnostmi (SIST EN 45020, USM, 1999) je preskušanje izvajanje enega ali več preskusov. Preskus je tehnična operacija, s katero se po specificiranem postopku določi ena ali več značilnosti danega proizvoda, procesa ali storitve

razširjena negotovost (expanded uncertainty) – standardna negotovost ali celotna (kombinirana) standardna negotovost, pomnožena s faktorjem razširitve k, da opiše določeni nivo zaupanja

standardna negotovost (standard uncertainty) – negotovost meritve, ki je izražena v obliki intervala, ki je širok dva standardna odklona (± en standardni odklon)

standardni odklon (standard deviation) – merilo raztrosa izmerjenih vrednosti, ki opisuje tipično odstopanje izmerjenih vrednosti od povprečne vrednosti vseh meritev. Podatek velja za neskončno število meritev. V praksi imamo končno število meritev, zato uporabljamo oceno standardnega odklona.

točnost (accuracy) - je kvalitativni pojem in pomeni bližino izmerjene vrednosti od prave vrednosti

testing - preskušanje

umerjanje (calibration) - postopek primerjave inštrumenta z referenčnim inštrumentom (etalonom), pri čimer se kvantitativno določi odstopanje

Literatura

GUM - *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, 1993

VIM - *Mednarodni slovar osnovnih in splošnih izrazov s področja meroslovja* - (Vocabulaire International des Termes Fondamentaux et Généraux de Métrologie), 1999

EA-4/02 - *Expressions of the Uncertainty of Measurements in Calibration*, www.european-accreditation.org/pdf/EA-4-02ny.pdf, 1999

S. Bell, *A beginner's guide to uncertainty of measurement*, NPL, www.npl.co.uk, 1999

J. Drnovšek, J. Bojkovski, G. Geršak, I. Pušnik, *Metrologija*, študijska skripta, LMK, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2004

F. Bergelj, D. Agrež, D. Hudoklin, G. Begeš, V. Batagelj, G. Geršak, *Meritve, Laboratorijske vaje,* Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2005

F. Bergelj, *Meritve 1. del,* Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2002