

Akustični resonator

Uvod

Gibanje zvočnih valov v zaprtem prostoru končnih dimenzij se od gibanja v neomejenem prostoru bistveno razlikuje. V obeh primerih velja seveda valovna enačba, v prvem primeru pa je treba dodati še robne pogoje, ki morajo biti izpolnjeni na površini trdnih sten prostora. V omejenem prostoru končnega volumna so možne proste oscilacije samo pri točno določenih frekvencah, ki jih imenujemo lastne frekvence, načine nihanja pa imenujemo lastna nihanja. Lastni načini in njihove frekvence so odvisni od dimenzij in oblike prostora. Za dodatna pojasnila pri izpeljavi glej [1].

Opis nihanja v plinu začnemo z Newtonovim zakonom za kontinuum

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\text{grad } p, \quad (1)$$

kjer je ρ gostota plina, $\partial^2 \vec{u} / \partial t^2$ pospešek in $\text{grad } p = (\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z})$ gradient tlaka p . Nadaljnjo povezavo med odmiki delov plina \vec{u} in gostoto dobimo iz kontinuitetne enačbe

$$\delta \rho = -\rho_0 \text{div } \vec{u}, \quad (2)$$

kjer smo z $\delta \rho$ označili odmik gostote od ravnovesne vrednosti. Potrebujemo pa še enačbo stanja, in sicer lahko privzamemo, da je prevajanje toplote zanemarljivo in zato uporabimo adiabatno stisljivost

$$\frac{\delta p}{p_0} = \kappa \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (3)$$

kjer je κ razmerje specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in konstantnem volumnu. Enačbe (1), (2) in (3) premečemo in po želji lahko zapišemo valovne enačbe za tlak, hitrosti, odmike ali gostoto. S pomočjo hitrosti zvoka c , ki je enaka

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}, \quad (4)$$

navedimo naslednjo obliko

$$\nabla^2 \delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Ob trdni steni ni odmikov pravokotno na steno v smeri \vec{n} , prav tako ni normalne komponente hitrosti ali pospeška. Ta pogoj se prevede v robni pogoj za nihanje tlaka kot

$$\vec{n} \text{grad } p = 0. \quad (6)$$

Za zaprt prostor v obliki kvadra z robovi A , B in C je najprimerneje izbrati koordinatno izhodišče v enem od vogalov in osi x , y , in z vzporedne robovom kvadra. Tako lahko zapišemo rešitev valovne enačbe pri frekvenci ω kot produkt kosinusov, da v izhodišču takoj izpolnimo robne pogoje. Nastavek za valovanje z neko amplitudo p_0 je

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= p(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi) \\ p(\vec{r}) &= p_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z), \quad \vec{r} = (x, y, z) \end{aligned} \quad (7)$$

kjer je $p(\vec{r})$ krajevna odvisnost stoječega valovanja, ω njena kotna hitrost in ϕ nek začetni fazni zamik. Z uporabo tega nastavka v valovni enačbi (5) dobimo zvezo med kotno frekvenco ω in valovnim vektorjem $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ enako

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (8)$$

Z upoštevanjem robnih pogojev na stenah (6) v nastavku (7) sledi, da so komponente valovnega vektorja

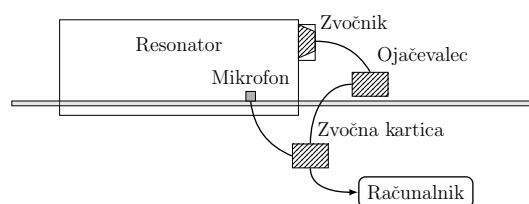
$$k_x = n_x \frac{\pi}{A}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{B}, \quad k_z = n_z \frac{\pi}{C}, \quad (9)$$

kjer so n_x , n_y in n_z pozitivna cela števila ali 0. S tem smo določili kotne frekvence lastnih valovanj kot

$$\omega = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{C}\right)^2}. \quad (10)$$

Potreščine

- akustični resonator - zaboj iz vezanih in ivernih plošč z debelimi dušenimi stenami, notranje dimenzije so $56.7 \text{ cm} \times 38.5 \text{ cm} \times 24.0 \text{ cm}$ (nedoločenost $\pm 0.1 \text{ cm}$) z odstranljivim pokrovom
- prenosnik opremljen s programom AkRes in zunanjo zvočno kartico, ki podpira 44.1 kHz Mono-Duplex način predvajanja in sprejemanja zvoka
- zvočnik, pritrjen na steno resonatorja blizu vogala in povezan preko ojačevalca na izhod zunanje zvočne kartice
- premični mikrofonski povezan na vhod zunanje zvočne kartice



Slika 1: Akustični resonator (*levo*) ter shema postavitve naloge (*desno*).

Naloga

1. Izračunaj najnižje resonančne frekvence akustičnega resonatorja za n_i od 0 do 3 in dobljene frekvence (manjše od 1000 Hz) v tabeli razvrsti po velikosti skupaj s pripadajočimi vrednostmi n_i . V tabeli pusti še dva prazna stolpca za izmerjene frekvence in amplitude.
2. Izmeri resonančni odziv akustičnega resonatorja v območju od 200 do 1000 Hz in ga nariši v ustrezen graf.
3. Izmeri odvisnost signala od položaja mikrofona v škatli za osnovno in še nekatere višje resonance. Izberi si take frekvence, da bodo odvisnosti $p(\vec{r})$ različne (recimo za n_x od 0 do 3).
4. Primerjaj izmerjene in izračunane frekvence in na ta način določi, kateremu nihajnemu načinu pripadajo izmerjene resonance. Frekvence maksimumov in ustrezne amplitude vnesi v pripravljeno tabelo.
5. Iz prvih treh resonanc izračunaj hitrost zvoka.
6. Oцени razpolovno širino prvih treh resonančnih črt in še katere, ki je dovolj ločena od ostalih.

Načini meritev¹

Meritev lahko opravimo na dva načina. Pri prvem načinu merimo zvočno jakost v resonatorju z mikrofonom, pri čemer vzbujaemo valovanje z zvočnikom, na katerega priključimo izvor s konstantno amplitudo napetosti ali toka. Ta meritev je pojmovno in eksperimentalno enostavnejša, zahteva pa več opreme, oziroma poseganja v resonator, saj potrebujemo oboje: zvočnik in mikrofona.

Druga možnost je meritev impedance zvočnika, ki ga uporabljamo za vzbujaenje valovanja. Na zvočnik v tem primeru priključimo izvor konstantnega toka, kar pomeni da je zaporedno z zvočnikom priključen še večji ohmski upor, npr. 1000 Ω , in nato merimo napetost na zvočniku. Ta meritev je bolj zapletena, saj poleg resonanc akustičnega resonatorja kot signal dobimo tudi zvočnikove mehanske resonance. Pri dobrih zvočnikih so sicer te resonance močno dušene in zaradi tega široke. Vseeno je priporočljivo po tej metodi najprej izmeriti resonančni odziv zvočnika v odprtem resonatorju in šele nato v zaprtem in tako določiti lastne resonance zvočnika samega. Kljub malo večji zapletenosti postopka je ta metoda pomembna za razumevanje mnogih drugih meritev, kjer hočemo resonator zmotiti čim manj oziroma nimamo na voljo detektorjev, tako da merimo odziv resonatorja preko učinkovitosti sklopitve z vzbujevalnim elementom.

Navodilo

Na prenosniku obstaja račun za študentsko uporabo:



username: **student**
password: **praktikum2**

¹pri tej vaji izvedemo meritve po prvem načinu

Vaja je postavljena za meritev po prvi metodi, to je z uporabo zvočnika in mikrofona. Slednja sta vezana na zunanjo zvočno kartico priklopljeno na USB vhod prenosnika, kot je opisano v poglavju **Potreščine** in shematsko prikazano na sliki 1.

S programom **AkRes** kontroliramo sprejemanje in oddajanje zvoka preko zvočne kartice. V prvem primeru gre za generiranje sinusne napetosti na izhodu, v drugem pa za zajemanje napetosti na vhodu. Oba priključka delata v nekem napetostnem intervalu. V programu sta vhodni in izhodni signal navedena kot brezdimenzijski količini $U(t)$, ki predstavlja "napetost" vhoda oz. izhoda zvočne kartice. Med fluktuacijami tlaka in uvedeno napetostjo je linearna zveza, ki je posledica principov delovanja mikrofонов oz. zvočnikov:

$$\delta p = k U(t), \quad (11)$$

kjer je konstanta k odvisna od karakteristike zvočnika in (strojnih in programskih) ojačevalcev. Konstanta k nas ne bo zanimala, saj bomo pri analizi zvoka raje operirali z nevtralno količino $U(t)$.

Na vhodnem signalu $U(t)$ dolžine časa T program naredi dve statistiki z informacijo o jakosti in regularnosti odziva resonatorja. To sta maksimalni odziv oz. maksimalna amplituda signala (v programu označen z **Amplitude** ali **Amp**)

$$U_{\text{amp}} = \frac{1}{2} \left(\max_{t \in [0, T]} U(t) - \min_{t \in [0, T]} U(t) \right), \quad (12)$$

in efektivni odziv oz. standardna deviacija signala (v programu označen s **StdDev**)

$$U_{\text{dev}} = \sqrt{\langle U(t)^2 \rangle - \langle U(t) \rangle^2}, \quad \langle a(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt. \quad (13)$$

Če privzamemo, da je povprečje signala $\langle U(t) \rangle$ enako nič, potem je U_{dev} povprečen kvadrat (angl. root mean square — RMS) napetosti, ki je bolj standardna količina pri meritvah. Maksimalni odziv U_{amp} je podvržen motnjam iz okolice, saj meri ekstreme signala, za razliko od povprečnega odziva U_{dev} , ki povzema povprečne lastnosti signala preko časovnega intervala $t \in [0, T]$. Napaka meritve U_{dev} zato pada kot $1/\sqrt{T}$.

Dodatno: Poleg omenjenih statistik, program izračuna amplitudo odziva s pomočjo t.i. sinhronne detekcije (angl. *lock-in detection*). V splošnem lahko periodični vhodni signal $U(t)$ zapišemo kot vsoto harmoničnih komponent s frekvencami ν_k z različnimi amplitudami A_k in faznimi zamiki θ_k

$$U(t) = \sum_k A_k \sin(2\pi\nu_k t + \theta_k). \quad (14)$$

Nas zanima amplituda komponente pri točno določeni frekvenci ν_r , tj. vzbujevalni frekvenci resonatorja, zato izračunamo povprečje produkta vhodnega signala $U(t)$ ter referenčnega harmoničnega signala s frekvenco ν_r

$$U_0(\varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi\nu_r t + \varphi) U(t) dt. \quad (15)$$

Tukaj je T čas trajanja signala, ki mora biti bistveno večji od periode signala, φ pa nastavljen fazni zamik referenčnega signala. Zgornji integral bo neničeln samo v primeru

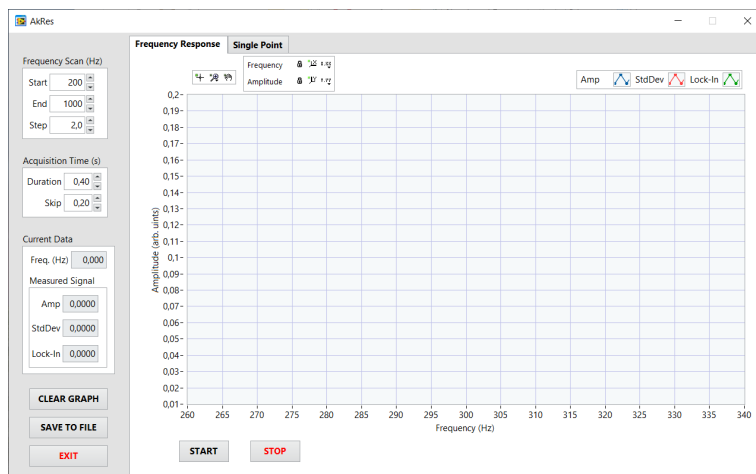
$\nu_k = \nu_r$ in bo za $\varphi = 0$ enak $U_0(0) = \frac{1}{2}A_r \cos \theta_r$, za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pa bo enak $U_0(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}A_r \sin \theta_r$, kjer je θ_r fazni zamik med referenčnim signalom z $\varphi = 0$ in odzivom s frekvenco ν_r . Iskano amplitudo signala potem izračunamo kot

$$A_r = 2\sqrt{U_0(0)^2 + U_0\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad (= U_{\text{lock}}). \quad (16)$$

Napaka izračuna amplitude A_r pada kot $1/T$.

Meritev resonančnega odziva na frekvenčnem intervalu

Jeziček **Frequency Response**, prikazan na sliki 2, omogoča pregled odziva resonatorja na izbranem frekvenčnem intervalu, pri čemer je izhodni signal maksimalen. V ta namen mikrofonsko premaknemo v eno izmed skrajnih leg (zakaj?), najbolje tisto na nasprotni strani zvočnika, slika 3 levo.



Slika 2: Okno programa za meritev frekvenčnega odziva resonatorja na izbranem frekvenčnem intervalu.

Za opravljanje meritev nastavimo naslednje vrednosti:

- frekvenčni interval ($[Start, End]$)
- velikost koraka (**Step**)
- dolžino uporabljenega signala pri neki frekvenci ($Duration < 6\text{ s}$)
- dolžino od začetka pri analizi zavrženega signala ($Skip < 1\text{ s}$)

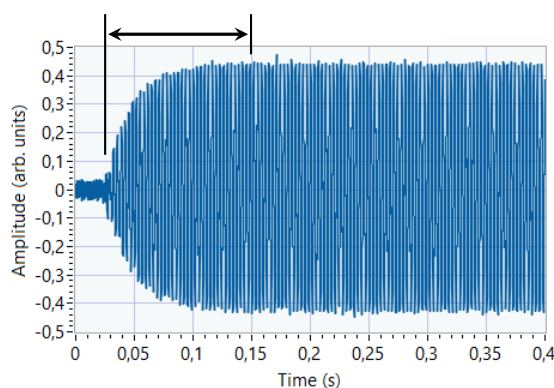
V okencu **Current Data** vidimo trenutno frekvenco ter izmerjene amplitude signala. Vse izmerjene vrednosti pri dani frekvenci se bodo sproti izrisale na grafu. Pričetek meritve poženemo s pritiskom na gumb **Start**, meritev v teku lahko prekinemo s pritiskom na gumb **Stop**. Ko program doseže končno vrednost frekvence se meritev avtomatično zaključi. Meritve shranimo v datoteko s pritiskom na **Save to File**. Format zapisa je podoben kot prej, le da se tokrat v prvi stolpec zapiše tudi frekvenca signala (**<Freq>** **<U_amp>** **<U_dev>** **<U_lock>**). Privzeta mapa za shranjevanje meritev se nahaja na namizju prenosnika in se imenuje **AkRes**.

Enako meritev ponovimo z dodanim absorberjem (blago) v resonatorju, slika (3) desno. Kaj se zgodi z resonančnim odzivom? Primerjaj amplitude, širine in lege resonanc resonančnega odziva resonatorja z in brez absorberja.



Slika 3: (*levo*) Odprt akustični resonator s postavitvijo mikrofona v skrajni legi pri meritvi resonančnega odziva. (*desno*) V resonator dodamo absorber (črno blago) in ponovimo meritev.

Eden izmed parametrov pri meritvah je tudi **Skip**, ki določa dolžino začetnega dela signala na mikrofону (v sekundah), ki ga pri določitvi amplitude zanemarimo. Območje na začetku signala, kjer sistem še ni dosegel končnega (stacionarnega) odziva, slika (4), imenujemo *prehodni pojav*.



Slika 4: Izmerjen odziv mikrofona z označenim prehodnim pojavom.

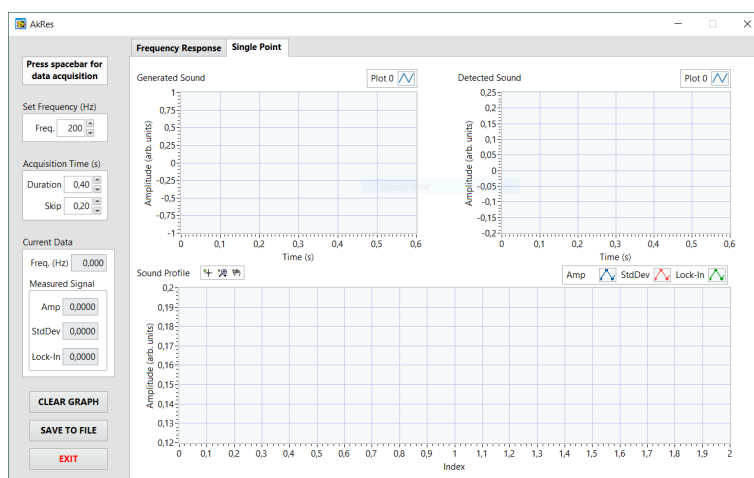
Merjenje zvočnega profila v resonatorju

Pri nalogi 3 najprej s pomočjo enačbe za lastne frekvence resonatorja izračunamo štiri najnižje lastne frekvence pri katerih je parameter $n_x = (0, \dots, 3)$, za hitrost zvoka vzamemo približek $c = 340 \text{ m s}^{-1}$. Nato iz izmerjenega resonančnega odziva iz prejšnje naloge poiščemo izmerjene frekvence resonanc, ki so najbližje izračunanim ter jih uporabimo pri tej nalogi.

V jeziku **Single Point** (glej sliko 5) lahko merimo odziv resonatorja pri vzbujaanju z neko specifično frekvenco. Za izvedbo meritve je potrebno nastaviti naslednje vrednosti:

- frekvenco (Freq.)

- dolžino predvajanja in zajemanja signala (**Duration**, $T < 6\text{ s}$)
- koliko začetnega signala pri analizi zavržemo (**Skip** $< 1\text{ s}$)



Slika 5: Okno programa za meritev frekvenčnega odziva resonatorja pri izbrani frekvenci.

Ob vsakem pritisku na preslednico (spacebar) bo program generiral zvok z izbrano frekvenco ter zajel odziv in izračunal amplitudo signala. Na grafih zgoraj (**Generated Sound** in **Detected Sound**) sta prikazana generiran signal na zvočniku ter zaznani signal na mikrofону. Na spodnjem grafu se bodo izrisale izmerjene amplitude pri trenutni legi mikrofona v resonatorju. Lege mikrofona si zapisuj v svoj dnevnik, ker jih avtomatično ne merimo s programom. Celotna dolžina signala je **Duration+Skip**. Omejitve v času so le simbolične in imajo predvsem praktičen namen. Opravljeno meritev lahko shranimo s pritiskom na gumb **Save to File** - v tekstovno datoteko se zapišejo vsi izmerjeni podatki (format: `<U_amp> <U_dev> <U_lock>`). V primeru, da datoteka že obstaja, se zapisi prepišejo. Privzeta mapa za shranjevanje meritev se nahaja na namizju prenosnika in se imenuje **AkRes**. Z gumbom **Clear Graph** izbrišemo vse meritve prikazane na grafih.

Literatura

- [1] Ivan Kuščer in Alojz Kodre. „Matematika v fiziki in tehniki“. V: DMFA, 1994. Pogl. 5.9 in 8.2.