

Sklopljena nihajna kroga

Uvod

Vaja je namenjena študiju in ilustraciji zelo pogostih pojavov v naravi, ki so posledica sklopitve enakih oscilatorjev. Sklopitev povzroči, da posameznih oscilatorjev ne moremo več obravnavati ločeno, marveč kot en sistem. V takem sistemu ostane število prostostnih stopenj enako vsoti vseh prostostnih stopenj posameznih oscilatorjev. Sistem, ki je sestavljen iz n enostavnih enakih oscilatorjev, ima n lastnih nihanj, ki jih opišemo z lastnimi frekvencami ω_n in lastnimi vektorji. V primeru dveh fizičnih nihal, sklopljenih s povezovalno vzmetjo, že vemo, da ostane ena frekvenca enaka lastni frekvenci enega samega nihala, obe nihali pa takrat nihata v fazi. Druga lastna frekvenca je večja in to tem bolj, čim močnejša je sklopitev. Nihali takrat nihata v nasprotni fazi.

Idealni električni nihajni krog je sestavljen iz kondenzatorja s kapaciteto C , ki ne prevaja električnega toka, in iz tuljave z induktivnostjo L brez ohmskih izgub. Enkrat vzbujen bi tak krog nihal s konstantno amplitudo pri krožni frekvenci ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za podrobnosti izpeljave in razlago glej [1]. V vsakem nihajnem krogu so električni vodniki, ki običajno niso superprevodni. Pri višjih frekvencah tuljave tudi nezanemarljivo sevajo in s tem povzročajo izgube. Zanimamo se za lastno nihanje v nihajnem krogu, ki ima poleg kondenzatorja C in tuljave L zaporedno s tuljavo vezan upornik z uporom R . Kondenzator priključimo na baterijo in jo potem hitro umaknemo. Krog zaniha in tok I v njem ima naslednjo odvisnost

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega'_0 t,$$

kjer je koeficient dušenja $2\beta = R/L$, lastna krožna frekvenca pa se zmanjša zaradi dušenja in znaša

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Tudi napetost na različnih elementih kroga niha sinusno, faze napetosti glede na tok moramo seveda posebej določiti.

Poglejmo si, kaj se zgodi, ko prvemu nihajnemu krogu dodamo še enega, ki je prvemu identično enak. Povežemo ju s kondenzatorjem C_0 . Shema vezave je na sliki 1, kjer zaenkrat upoštevamo, da je sistem obeh nihajnih krogov izoliran od okolice, to je upornik $R_g = \infty$. En način nihanja lahko takoj uganemo. Če oba kroga hkrati in enako močno vzbudimo, bosta zanihala v fazi in vmesnega sklopitvenega kondenzatorja sploh ne bosta čutila. Ta način nihanja opišemo enako, kot v primeru enega samega kroga. Drugi lastni nihajni način je po analogiji z mehanskimi nihali tak, da kroga nihata v nasprotni fazi. V tem primeru imata napetosti U_1 in U_2 naslednjo odvisnost

$$U_{1,2} = \pm U_0 e^{-\beta t} \cos \omega''_0 t,$$

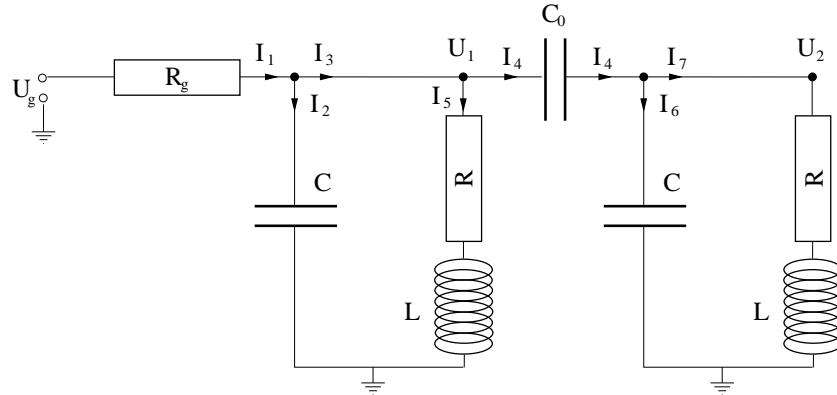
z enakim koeficientom dušenja in z novo lastno krožno frekvenco, ki je dodatno zmanjšana zaradi sklopitve in znaša

$$\omega''_0 = \sqrt{\frac{C}{C + 2C_0} \omega_0^2 - \beta^2}.$$

Kakor že vemo, je v splošnem primeru, kadar krogov ne zanihamo tako lepo simetrično, napetost v posameznem krogu linearna superpozicija obeh lastnih nihanj:

$$U_{1,2} = [U' \cos \omega_0' t \pm U'' \cos(\omega_0'' t + \delta)] e^{-\beta t}. \quad (1)$$

Konstanti U' in U'' in fazni premik δ so določeni z začetnimi pogoji sistema.



Slika 1: Tokovni izvor napaja s tokom I_1 sklopljena nihajna kroga. V našem primeru je sklopitev med nihajnima krogoma izvedena s kondenzatorjem C_0 , ki mu lahko spremojamo kapaciteto. Drugi podatki: $R = 7.5 \Omega$, $R_g = 220 \text{ k}\Omega$, $C = 5.6 \text{ nF}$.

Način vzbujanja s kratkotrajnim priključevanjem baterije seveda ni praktičen. Zanimali se bomo za kontrolirano vzbujanje. Vir znane časovno spremenljive napetosti priključimo na nihajni krog. Način priključka je pomemben. Tukaj obravnavamo le dva skrajna idealizirana primera:

1. Direktni priključek signalnega vira (ki mora imeti notranji upor enak 0) na nihajni krog. Tako dobimo vzbujanje z znano napetostjo.
 2. Priključek vira napetosti preko zelo velike (neskončne) impedance. V tem primeru vzbujamo nihajni krog z znamenim (točno določenim) tokom.

Analogiji z mehanskim nihalom k primeroma vzbujanja sta vzbujanje z določeno silo in z določenim odmikom. Pri vaji bomo vzbujali z določenim tokom. V ta namen bomo uporabili t.i. tokovni generator, to je signalni izvor z dodanim velikim upornikom, tako da se izvor obnaša kot izvor z veliko notranjo impedanco. Prav z relativno visoko impedanco generatorja glede na komponente nihajnega kroga dosežemo, da se celotni tok skozi nihajni krog le malo spreminja. Shemo vezave kaže slika 1. V prvem delu vaje bomo opazovali nihajne načine nemotenega sistema. V drugem delu pa se bomo zanimali za vsiljeno nihanje.

Potrebščine

- digitalni osciloskop (SigLent SDS 1104X-E),
 - funkcionalni generator napetosti (SigLent SGD 1032X), namizni multimeter (SigLent SDM 3065X),
 - nihajna kroga in kabli, USB ključek,
 - prenosnik št. 1 s programom SkNiKr napisan v LabView.

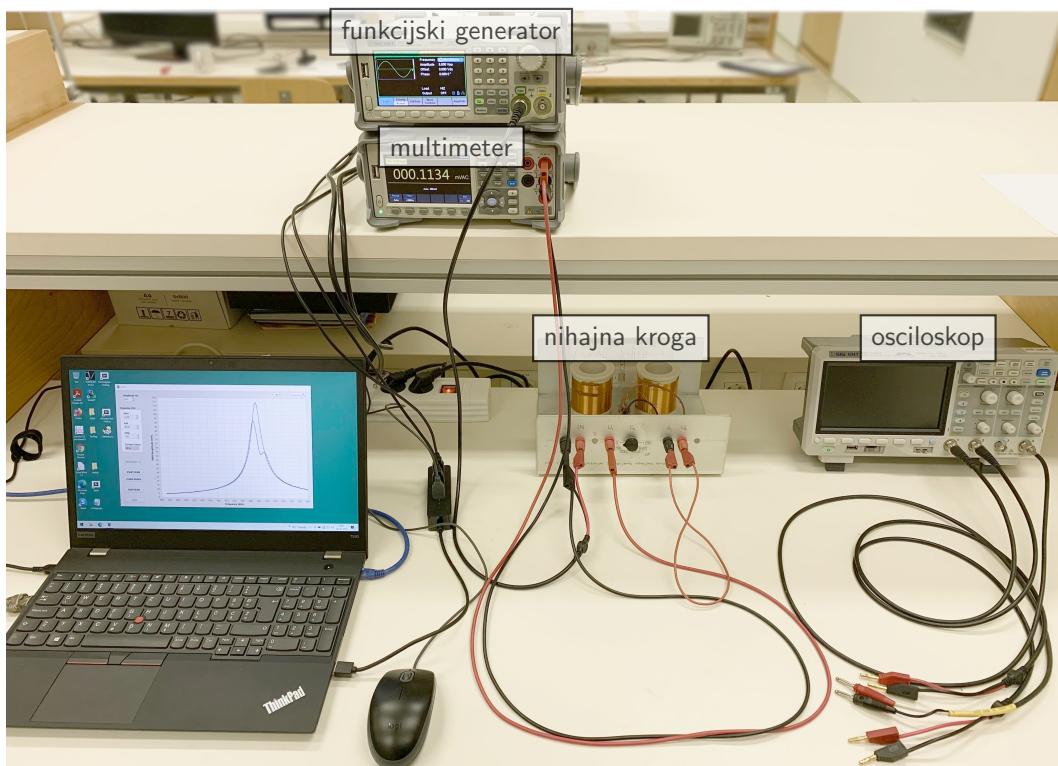
Naloga

1. Izmerite časovni potek napetosti na obeh krogih pri vzbujanju s stopničastim signalom za vse različne sklopitev $C_0 = 0, 150, 330, 560, 820, 1150 \text{ pF}$.
2. Izmerite frekvenčno karakteristiko enega nihajnega kroga in določite dobroto Q .
3. Izmerite frekvenčno karakteristiko sklopljenih nihajnih krogov z meritvijo odziva drugega kroga za vsak C_0 in izmerite razliko lastnih krožnih frekvenc $\Delta\omega$.

Navodilo

Nihajna kroga s spremenljivim sklopitvenim kondenzatrom so pritrjeni v aluminijastem nosilcu. Napetost prvega nihajnega kroga je dosegljiva na izhodu U_1 in drugega kroga na U_2 . Z znakom \perp označimo skupno zemljo. Tekom vaje uporabljate funkcijski generator SigLent SGD 1032X, katerega izhoda Output 1 povežite na vhod IN prvega nihajnega kroga. Ne pozabite vključiti izhod generatorja s pritiskom na gumb Output 1, za aktivacijo izhoda.

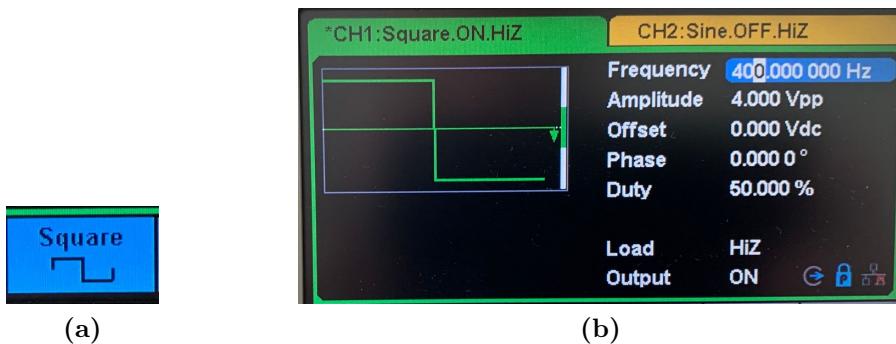
Postavitev vaje je prikazana na sliki 2. Sestavljena iz treh nalog. Pri 1. nalogi uporabljamo kot meritni pripomoček osciloskop, pri 2. in 3. nalogi pa opravljamo meritve z namizni multimetrov SigLent SDM 3065X in s katerega beremo podatke s programom na prenosniku. Multimeter in prenosnik sta povezana z USB kabljom. Na prenosniku se vpišite z uporabniškim imenom **student** in gesлом **praktikum2**. Na namizju najdete programom **SkNiKr**.



Slika 2: Postaviteve vaje sklopljena nihajna kroga na mizi v praktikumu.

1. Odziv obeh nihajnih krogov na napetostno stopnico. Povežite izhod U_1 na kanal 1 osciloskopa, U_2 na kanal 2 in signal iz generatorja, ki ga najdemo na vhodu IN, na kanal 4. Za začetek nastavite $C_0 = 330 \text{ pF}$. Potem prižgite vse naprave.

Na signalnemu generatorju nastavite frekvenco na okoli 400 Hz in ga preko opcije **Waveform** preklopite način kvadratnih valov (angl. square wave, glej 3.a). Druge parametre nastavite na smiselne vrednosti, npr. kot so prikazani na sliki 3.b.



Slika 3: Ikonica za preklop na stopničasti signal (a) in smiselne vrednosti za stopničasti signala pri vaju SkNiKr (b) na ekranu funkcijskega generatorja SigLent SGD 1032X.

Nastavite, da kanal 4 osciloskopa deluje kot proženje preko gumba **Setup** in po potrebi njegovo črto skrijete z opcijo v meniju **Trace visual** na **Hidden**. Vse uporabljene kanale frekvenčno omejite (**BW**) na 20 MHz, kot prikazuje slika 4.a, pri čemer odrežete velik del šuma. Po potrebi lahko na gumbu **Acquire** vklopite povprečenje **Averages**, recimo, preko 16 ali 32 vzorcev, in zmanjšajte število točk v vzorcu **Memory Depth** na 7k, kot je prikazano na sliki 4.b, s čemer režete visokofrekvenčne komponente signala, saj se zmanjša frekvenca vzorčenja, in povečate splošno odzivnost naprave.

Spreminjajte sklopitveni kondenzator in opazujte signale v obeh krogih. Shematično odvisnost napetosti na prvem U_1 in drugem krogu U_2 kaže slika 5 in ustreza funkcijama

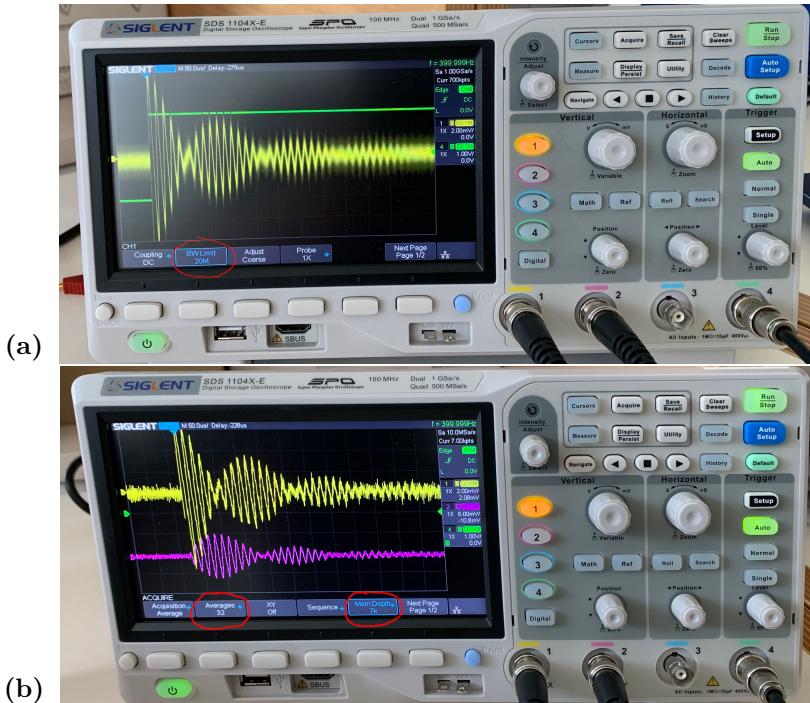
$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = U_0 e^{-\beta t} \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix},$$

kjer v enačbah (1) uganemo, da mora biti $U_0 = U' = U''$ in fazni premik $\delta = 0$. Tako povežemo $\omega = (\omega'_0 + \omega''_0)/2$ in $\Delta\omega = \omega'_0 - \omega''_0$.

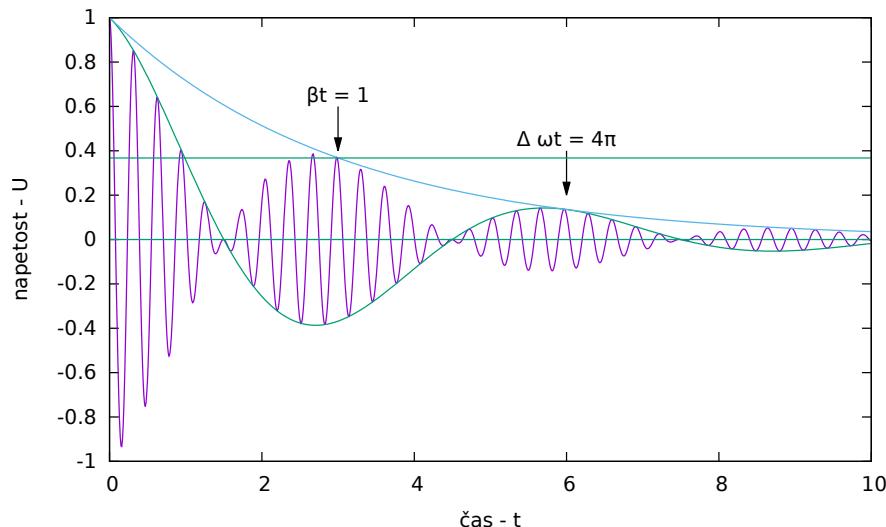
Izmerite najprej lastno krožno frekvenco in dušenje prvega kroga pri $C_0 = 0$. Potem nastavite C_0 na vse vrednosti, ki so na voljo. Pri vsaki vrednosti C_0 dobljeno odvisnost skicirajte v laboratski dnevnik in za podrobno analizo doma shranite slike ali podatke iz kanalov na USB ključek. Za vsako skopitev izračunajte koeficient dušenja β in krožna frekvenco utripanja $\Delta\omega$, ter se prepričajte, da se dušenje s skopitvijo bistveno ne spreminja.

Na osciloskopu si preko funkcije **math** oglejte še seštevek $U_1 + U_2$, pri tem poskrbite, da bosta enote na vertikalne osi obeh kanalov (1 in 2) enako velike.

2. Viljeno nihanje enega nihajnega kroga. Sklopitveni kondenzator C_0 naj bo izkopljen, torej $C_0 = 0$, in kratko sklenimo drugi nihajni krog, takoj da povežemo izhod U_2 in zemljo \perp . Osciloskop naj ostane priključen enako kot prej, funkcijski generator pa preklopimo na sinusni izhod in mu nastavi frekvenco na okoli 50 kHz. Z večanjem



Slika 4: Nastavitev na osciloskopu SigLent SDS 1104X-E: omejitev analogne spekralne širine v meniju kanala 1 (a) in nastavitev zajemanja v meniju pod gumbom **Aquire** na 32x povprečenje pod opcijo **Averages** in velikost vzorca 7k točk (b) pod opcijo **Memory Depth**.



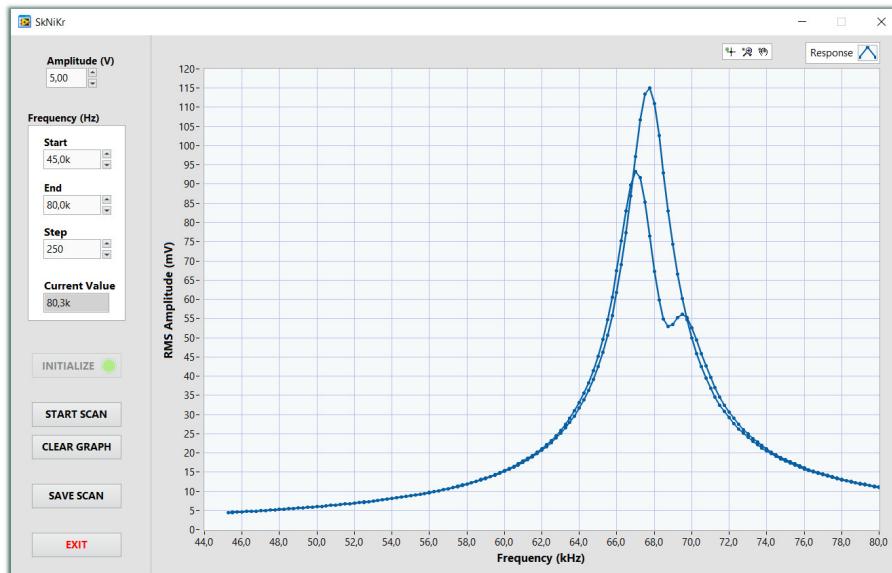
Slika 5: Utripanje napetosti $U_1/U_0 = e^{-\beta t} \cos(\omega t) \cos \frac{\Delta \omega}{2} t$, kakršno vidimo na prvem nihajnem krogu, po vzbuditvi s stopničastim tokom. Narisani sta še odvisnosti $e^{-\beta t} \cos \frac{\Delta \omega}{2} t$ in $e^{-\beta t}$.

frekvence se naprej amplituda nihanja U_1 veča, ima točno v resonanci ($\omega = \omega_0$) maksimum in nato spet pada. Tako otipamo resonančno krivulje enega nihajnjega kroga. V laboratorijski dnevnik si skicirajte opaženo odvisnost amplitude napetosti U_1 od frekvence vzbujanja. Ostrina resonančne krivulje je odvisna od dušenja in je tem ožja, čim manj je krog dušen. Širina resonančnega odziva je podana z $\Delta\omega = 2\beta$, če merimo širino resonančne krivulje med točkama, kjer pada napetost na $\sqrt{1/2} = 0.707$ vrednosti

maksistema. Pogosto namesto dušenja (širine resonance) navajamo dobroto (kvaliteto) nihajnega kroga Q , ki se z ostalimi količinami izraža kot

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

in je tem večja, čim manjše je dušenje.



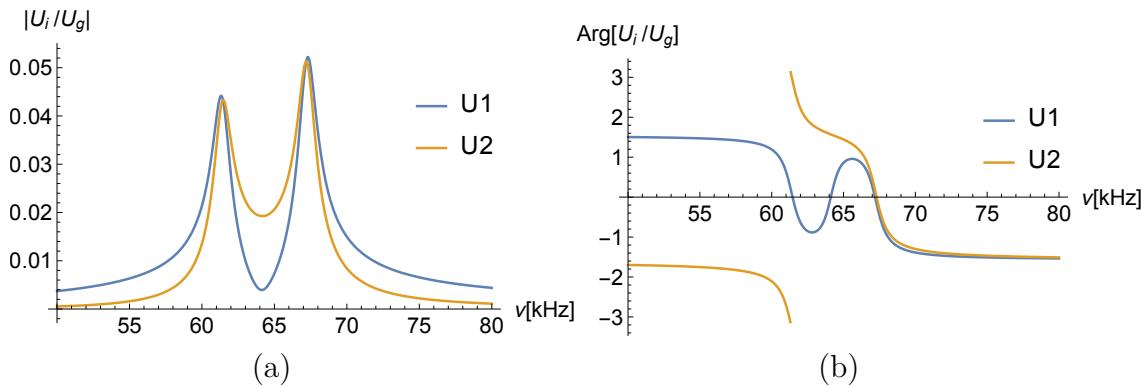
Slika 6: Glavno okno programa **SkNiKr** s prikazanim resonančnim odzivom prvega nihajnega kroga ob ničelnim sklopitvenim kondenzatorjem ($C_0 = 0 \text{ pF}$) v dveh primerih, ko je drugi nihajni krog prost in ko je le-ta kratko sklenjen.

Natančno meritev resonančno krivulje opravimo s pomočjo multimeterja in programa **SkNiKr** (glej sliko 6). Sklopimo in po možnosti odklopimo osciloskop ter povežemo merilni vhod multimeterja z U_1 . Multimeter je nastavljen tako, da pred analizo signalu odreže še nizke frekvence, ki se lahko prikradejo v sistem: tipično režemo vse pod 200 Hz. Program **SkNiKr** omogoča avtomatizirano spreminjanje frekvence na funkcijskem generatorju in branje efektivne napetosti (AC V) izmerjene z namiznim multimetrom. V programu izberite V_{pp} (napetost od vrha do vrha, angl. peak-to-peak voltage) na generatorju, ki naj bo okoli 5 V, in primeren frekvenčni interval, recimo od 45 do 80 kHz, tako da boste otipali celotno resonančno krivuljo. Meritve poženemo s pritiskom na **Start scan**. Po končanju meritev lahko s pritiskom na **Save** zbrane podatke shranite v tekstovno datoteko, kjer so podatkov urejeni dve koloni: v prvi je frekvenca v Hz in v drugi pa efektivna napetost v V. Ponovite meritev resonančne krivulje še brez kratko sklenjenega drugega nihajnega kroga, pri tem dobite rezultat kot je na sliki 6.

Na en graf narišite pridobljeni resonančni krivulji s kratko sklenjenim drugim nihajnim krogom in brez. Iz prve krivulje določite lastno frekvenčno in faktor kvalitete Q nihajnega kroga. Resonančna krivulja brez kratko sklenjenega drugega kroga ima dva resonančna vrhova. Kriva je najbrž induktivna sklopitev. Ali jo lahko oceniš?

Dodatno: Poskušajte dopolniti matematični model nihajnih krogov z medsebojno induktivnostjo med tuljavami in jo iz meritev ocenite.

3. Vsiljeno nihanje sklopljenih nihajnih krogov. Pri vklopljenem skloplitvenem kondenzatorju ($C_0 \neq 0$) lahko opazimo resonančno obnašanje na obeh krogih, vendar je na drugem krogu bolj izrazito. S programom izmerite frekvenčno odvisnost efektivne napetosti na drugem krogu v istem frekvenčnem intervalu kot pri 1. nalogi. Pri močnejših skloplitvah boste opazili dva resonančna vrha. Narišite dobljene odvisnosti v en sam graf za vse možne skloplitve. Priklopite osciloskop nazaj na nihajna kroga in pri največji možni skloplitvi izmerite relativno fazo med U_1 in U_2 v resonančnih vrhovih. Račun, s katerim pojasnimo dobljeno odvisnost, je zamuden in nepregleden. Glavni rezultat so frekvenčne odvisnosti amplitud merjenih napetosti U_1 in U_2 prikazani na sliki 7a.



Slika 7: Frekvenčna odvisnost amplitud napetosti U_1 in U_2 (a) in faze glede na napetost U_g pri skloplitvi $C_0 = 560 \text{ pF}$.

Pri šibki skloplitvi se resonančni odziv prvega kroga skoraj ne spremeni. Na drugem krogu je resonančni odziv ostrejši, saj je njegova oblika podana približno kar s kvadratom odziva prvega kroga. Seveda pa je napetost na drugem krogu bistveno manjša. Pri močni skloplitvi se oblika resonančnega odziva obeh krogov precej bolj spremeni. Pojavita se dva vrhova pri frekvencah, ki smo jih prej izračunali. Meja med šibko in močno skloplitvijo je podana s pogojem $Q = (C/2 + C_0)/C_0$. Tej skloplitvi pravimo kritična in takrat ima frekvenčna karakteristika najširši ravni del.

Omenjene lastnosti so pomembne, kadar načrtujemo filtre, ki naj bi prepuščali določen frekvenčni pas. Pri filtrih je pomembna tudi faza signala in kot lahko vidimo iz slike 7b, se faza v bližini resonance hitro spreminja. Enakomernost faze lahko izboljšamo, če žrtvujemo nekaj enakomernosti v odzivu amplitude. Na tem mestu smo te probleme le omenili, ne bomo pa se ukvarjali z njimi.

Dodatek: Resonančna krivulja sklopljenih nihajnih krogov

Privzeli bomo, da vzbujamo sklopljena nihajna kroga s tokovnim izvirom I_1 z odvisnostjo

$$I_1 = I_0 \cos(\omega t), \quad \text{oz.} \quad I_1^* = I_0 e^{i\omega t},$$

kjer je I_0 realna amplituda toka. Za kompleksno notacijo električnih količin bomo uporabili zvezdico (*) nad simbolom. Pri zapisu enačb se bomo sklicevali na oznake količin navedene na sliki 1. Napišimo enačbe drugega nihajnega kroga

$$I_4 = I_6 + I_7, \quad e_2 = I_6, \quad U_2 = e_2/C = RI_7 + L\dot{I}_7,$$

iz česar dobimo njegovo gibalno enačbo:

$$a\ddot{I}_7 + b\dot{I}_7 + I_7 = I_4. \quad (2)$$

Uvedli smo konstante $a = LC$ in $b = RC$. Poglejmo sedaj še prvi nihajni krog. Ohranjanje toka in napetosti nam dasta enačbe

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_3 = I_5 + I_4, \quad \dot{e}_1 = I_2, \quad U_2 = e_1/C = RI_5 + L\dot{I}_5,$$

ki določujejo gibalno enačbo drugega kroga:

$$a\ddot{I}_5 + b\dot{I}_5 + I_5 = I_1 - I_4. \quad (3)$$

Povezava med obema krogoma je tok I_4 in je podan z enačbo

$$U_2 - U_1 = e_0/C_0, \quad \dot{e}_0 = I_4.$$

Z izrazi za U_1 (3) in U_2 (2) slednjo enačbo preoblikujemo v

$$a'\ddot{I}_7 + b'\dot{I}_7 - (a'\ddot{I}_5 + b'\dot{I}_5) = I_4, \quad (4)$$

pri čemer uvedemo konstanti $a' = C_0L$ in $b' = C_0R$. Iz glavnih enačb problema (3), (2) in (4) sedaj eliminiramo I_4 , ki nam služi za opis sklopitve med obema krogoma in nas v prihodnje ne zanima. Preostali enačbi prepišemo, z uvedbo novih spremenljivk vsote tokov $s = I_5 + I_7$ in njene razlike $d = I_5 - I_7$, v naslednjo obliko

$$a\ddot{s} + b\dot{s} + s = I_1, \quad (2a' + a)\ddot{d} + (2b' + b)\dot{d} + d = I_1. \quad (5)$$

Torej vidimo, da imamo v sistemu dva lastna načina dinamike tokov in sicer simetrični, označen s spremenljivko s , in antisimetrični, s spremenljivko d . Rešitvi teh dveh enačb sta

$$\begin{aligned} s^*(t) &= A(\omega, a, b)e^{i\omega t}, & d^*(t) &= A(\omega, a + 2a', b + 2b')e^{i\omega t}, \\ A(\omega, x, y) &= \frac{I_0}{1 - \omega^2x + i\omega y}, \end{aligned}$$

kjer smo definirali funkcijo tipičnega resonančnega odziva dušenega nihala $A(\omega, a, b)$ z resonančno frekvenco $\omega_0 = a^{-\frac{1}{2}}$ in dušenjem $2\beta = b/a$. Iz zgornjega izraza lahko razberemo, da imata simetrični in asimetrični način različni resonančni frekvenci za neničelno moč sklopitve $b \propto C_0 \neq 0$. Z uporabo rešitev za lastna načina dinamike $s^*(t)$ in $d^*(t)$ lahko izrazimo iskani in merjeni napetosti U_1 in U_2 kot

$$U_1^* = (R + i\omega L)(s^* + d^*) = B_1(\omega)e^{i\omega t}, \quad U_2^* = (R + i\omega L)(s^* - d^*) = B_2(\omega)e^{i\omega t},$$

pri čemer sta B_1 in B_2 kompleksni amplitudi napetosti podani s formulama

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{I_0}{2}(R + i\omega L)(A(\omega, a, b) + A(\omega, a + 2a', b + 2b')) , \\ B_2 &= \frac{I_0}{2}(R + i\omega L)(A(\omega, a, b) - A(\omega, a + 2a', b + 2b')) . \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Janez Strnad. *Fizika, 2. del, Elektrika, Optika*. Ljubljana: DZS, 1978.