

Vrtavka

Uvod

V splošni obliki predstavlja gibanje vrtavke eno najtežjih nalog mehanike. Vendar se dajo bistvene lastnosti vrtavke prikazati na primeru rotacijsko simetrične vrtavke. Vrtavko imenujemo rotirajoče telo, katerega os lahko spreminja smer v prostoru in je vpeta (podprta) le v eni točki. Pri analizi gibanja vrtavke je potrebno definirati tri različne osi:

- A Geometrijska os vrtavke \vec{z} . Vrtavka je v našem primeru rotacijsko simetrično telo, ki ima eno glavno os tenzorja vztrajnostnega momenta J_{33} v smeri simetrijske osi, drugi dve glavni osi pa sta pravokotni nanjo. Vztrajnostna momenta okrog teh dveh osi sta enaka ($J_{11} = J_{22}$). Ostale komponente tenzorja so enake 0.
- B Vektor kotne hitrosti $\vec{\omega}$ določa trenutno smer osi vrtenja.
- C Tretjo os določa vektor vrtilne količine $\vec{\Gamma} = (\Gamma_i)$, ki je s kotno hitrostjo $\vec{\omega} = (\omega_i)$ povezan preko vztrajnostnega tenzorja J_{ij} z enačbo $\Gamma_i = J_{ij}\omega_j$. Izbrati si je treba še primeren koordinatni sistem. Gibanje opazujemo v laboratorijskem sistemu x', y' in z' . Os z' ima smer navpičnice, enačbe gibanja pa najlažje zapišemo v lastnem sistemu telesa x, y in z . Koordinatne osi so vezane na togo telo in imajo smeri glavnih osi tenzorja vztrajnostnega momenta. V tem sistemu ima torej ta tenzor diagonalno obliko in vrtilna količina je:

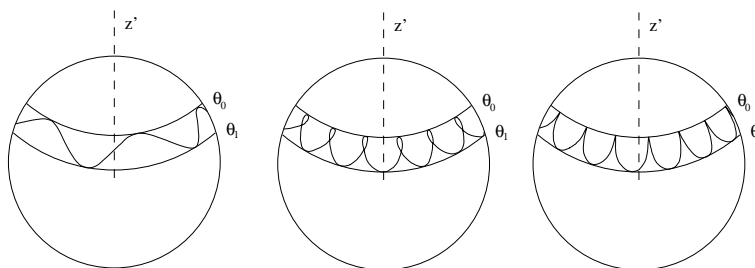
$$\Gamma_x = J_{11}\omega_x, \quad \Gamma_y = J_{22}\omega_y, \quad \Gamma_z = J_{33}\omega_z. \quad (1)$$

Za simetrično vrtavko velja, da vsi trije vektorji \vec{z} , $\vec{\omega}$ in $\vec{\Gamma}$ vedno ležijo v eni ravnini, ki jo npr. določata $\vec{\omega}$ in \vec{z} .

Na vrtavko, ki ni podprta v težišču, deluje zaradi sile težnosti navor: $M = mgl \sin \theta$, kjer je m masa vrtavke, g težnosti pospešek, l razdalja med težiščem in oporno točko osi (l je ročica navora), in θ kot med osjo vrtavke in vertikalo. Za simetrično vrtavko pod vplivom težnosti je še mogoče dobiti točne rešitve Eulerjevih enačb, to je enačb, ki opisujejo gibanje vrtavke. Gibanje je precej zapleteno in ga opišemo s tem, kako se os vrtavke giblje v prostoru (določena je s kotoma θ in ϕ). Vektor $\vec{\Gamma}$ ni več konstanten, ohranja pa se energija in tudi ω_z je konstanta gibanja, saj okoli vzdolžne osi vrtavke ni navora.

Enostavneje se da gibanje opisati približno za primer tako imenovane "hitre vrtavke", torej pri pogoju, da je kinetična energija mnogo večja od potencialne ($1/2 J\omega_z^2 \gg 2mgl$). ($2mgl$ je razlika potencialne energije med stanjema s $\theta = 0$ in $\theta = \pi$) Gibanje osi vrtavke ponazorimo na naslednji način. Določena točka na osi opisuje neko trajektorijo na kroglu s središčem v točki, kjer je os fiksirana. Slika 1 kaže tri možne primere, ki nastopajo pri različnih začetnih pogojih. Slika 1.1 c kaže primer, če hitro vrtečo vrtavko nagnemo iz navpičnice za kot θ_0 in jo spustimo. Naklonski kot θ se spreminja med θ_0 in θ_1 in v tem približku hitre vrtavke dobimo

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} \sin^2 \theta_0. \quad (2)$$



Slika 1: Gibanje osi simetrične vrtavke pri različnih začetnih pogojih.

Način gibanja kota θ je seveda odvisen od začetnih pogojev in od dušenja. Vrtavka niha med skrajnima vrednostma kota θ z nutacijsko kotno hitrostjo ω_N :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_z, \quad (3)$$

in se obenem giblje okrog osi z' (navpičnice v prostoru) s precesijsko kotno hitrostjo ω_{pr} :

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}. \quad (4)$$

Na splošno dobimo obe vrsti gibanja osi: nutacijo in precesijo. Frekvenca nutacije (3) bo v našem primeru primerljiva s frekvenco vrtenja vrtavke in se zmanjšuje pri večjih oddaljenostih uteži od težišča. Čim hitreje se vrti vrtavka, tem težje je vzbuditi nutacijo in je tudi bolj dušena. Nutacija je dušena zaradi trenja. Kaj pa precesija?

Pri enostavni obravnavi vrtavke nutacijo običajno izpustimo. S tem pridemo v težave v prej obravnavanem primeru, saj naj bi se precesija začela s konstantno precesijsko frekvenco takoj, ko vrtavko spustimo iz mirovanja. (Za preskok iz mirovanja v enakomerno precesijo bi potrebovali neskončen navor.) Ko vrtavko spustimo, v resnici začne padati zaradi sile teže. To se zelo dobro vidi pri počasnejši vrtavki. Zaradi navora sila teže začne vrtavka s precesijo. Začetno padanje se nadaljuje v nutacijo. Hitrejša kot je vrtavka, manj je začetnega padca in s tem manjša začetna amplituda nutacije (2). Nutacija je poleg tega hitrejša, saj je sorazmerna hitrosti vrtenja vrtavke (3) in bolj dušena, zato je skoraj ne opazimo več. Za podrobnejšo obravnavo vrtavke glejte [2], str. 62-69, in [1], str. 213-225.

Naloga

Izmeri precesijsko (ω_{pr}) in nutacijsko kotno hitrost (ω_N) v odvisnosti od kotne hitrosti (ω_z) vrtavke. Izvedi meritev pri vsaj treh frekvencah $\nu_z = \omega_z/(2\pi)$. Na primer pri približno 600, 500 in 400 obratov na minuto (kratica rpm – angl. rotations per minute). Gornjo meritev izvedi pri naslednjih nastavitvah vrtavke:

- vrtavka z utežjo blizu krogle
- utež na sredini palice
- utež na koncu palice (pusti si prostor za oprijem)

Meritve z različnimi nastavitvami vrtavke izvedi pri podobnih frekvencah ν_z kot prej, da so rezultati lažje primerljivi. Izmerjene vrednosti ω_{pr} in ω_N primerjaj z izračunanimi iz (4) in (3) in naredi tabelo.

Potreščine

- krogla s podnožjem in priborom (palica, utež in ploščica z vzorcem)
- kompresor pod mizo
- stroboskop
- štoparica

Navodilo

Postavitev vaje je prikaza na sliki 2. Vrtavka je sestavljena iz kovinske krogle, ki ima zvrtno luknjo z navojem. Vanjo je privita aluminijasta palica s snemljivo in premakljivo utežjo, glej sliko 3. Na palico pa je še fiksno pritrjena ploščica z močno kontrastnim vzorcem. Z opazovanjem slednjega pod svetlobo stroboskopa določimo frekvenco rotacije okoli lastne osi vrtavke ν_z . Po navodilih proizvajalca je stroboskop namenjen le krajšim meritvam. Po 10 minutah delovanja ga morate vsaj za 5 minut izključiti. Zato naj deluje le med meritvami in ga med pospeševanjem vrtavke izključite. Premikanje uteži omogoča spreminjanje vztrajnostnega momenta (predvsem J_{11}) in navora sile teže. Krogla se vrti na zračni blazini v posebnem podnožju. Zračni pritisk ustvarja majhen kompresor. Stisnjen zrak uporabimo tudi za vrtenje krogle in sicer imamo v podnožju ob strani ležišča šobo. Ta piha zrak pretežno v tangencialni smeri. Z regulacijo pretoka zraka skozi to šobo lahko dosežemo enakomerno vrtenje pri različnih kotnih hitrostih.

Vključi kompresor in ventilator, ki ga hladi. S prsti zavrti vrtavko v navpičnem položaju in počakaj, da jo zračni curek dodatno zavrti. Ob krogli je na palici montirala okrogla ploščica z vzorcem, ki nam pomaga pri merjenju frekvence ν s stroboskopom. Meritev frekvence začnemo tako, da stroboskop nastavimo na frekvenco, ki je višja od pričakovanega rezultata meritve, potem pa frekvenco stroboskopa nižamo. Opazujemo vzorec na vrtavki. Ko ta obmiruje, sta frekvenci svetlobnih bliskov in vrtavke enaki. S tem, da začnemo pri visokih frekvencah, se izognemo napaki, da bi se vrtavka med bliski večkrat zavrtela.

Z regulacijo pretoka zraka skozi šobo poskrbi, da bo vrtenje pri izbrani frekvenci enakomerno. S tem, da na palico vrtavke za trenutek prisloniš (npr.) svinčnik,



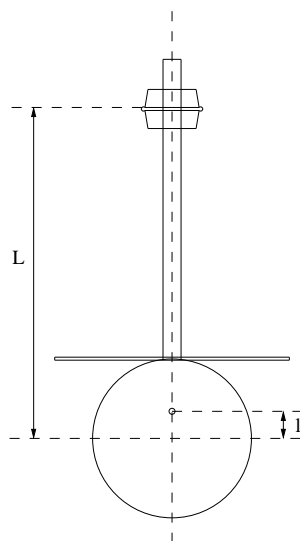
Slika 2: Postavitev vaje diskusije vrtavke.

izmakneš os iz navpičnice. Vrtavka začne s precesijo.

Večkrat izmeri čas precesije in preveri, da je neodvisen od naklona osi.

Vrni os vrtavke v bližino navpičnice in jo s kratkim udarcem po palici spravi v nutacijo. (Nutacija je potrebno kasneje še večkrat vzbuditi.) Pri vklopljenem stroboskopu opazuj vrh palice in nastavi frekvenco stroboskopa tako, da bo enaka frekvenci nutacije. Nutacija takrat navidezno izgine, saj osvetlimo vrh palice vedno pri istem nutacijskem kotu. S tem izmerimo frekvenco nutacije.

Na vrtavko, katere shema je prikazana na sliki 3. gledamo z določenimi geometričnimi poenostavitvami in privzamemo, da so palica, okrogla ploščica in utež oblike valja z nekim radijem in dolžino (višino, debelino). Podatki o vrtavki so:



Slika 3: Shema vrtavke s katero delamo v nalogi.

del vrtavke	masa	geometrijski parametri
krogla	$m_k = 515 \text{ g}$	premer $2r_k = 50.8 \text{ mm}$
obroč	$m_o = 15 \text{ g}$	premer $2r_o = 51 \text{ mm}$, debelina $h_o = 1.1 \text{ mm}$
ploščica	$m_p = 27 \text{ g}$	premer $2r_p = 6.5 \text{ mm}$, dolžina $h_p = 100.5 \text{ mm}$
utež	$m_u = 18 \text{ g}$	premer $2r_u = 20 \text{ mm}$, dolžina $h_u = 25.2 \text{ mm}$

Vztrajnostni moment krogle mase m in radija r pri vrtenju okoli njenega težišča je

$$J_{\text{krogla}} = \frac{2}{5}mr^2.$$

Imamo valj mase m , radija r in višine h in postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v težišču tako, da je z os vzdolž geometrijske osi valja. Potem je vztrajnostni moment valja pri vrtenju okoli z osi

$$J_{\text{valja},z} = \frac{1}{2}mr^2,$$

in pri vrtenju okoli x in y osi (pravokotno na geometrijsko os)

$$J_{\text{valja},x} = J_{\text{valja},y} = m\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}h^2\right).$$

Z uporabo Steinerjevega izreka in zgornjih formul izračunajte vztrajnostna momenta J_{33} in J_{11} ter lego težišča vrtavke l glede na os vrtenja (središče krogle) za različne oddaljenosti uteži od centra krogle L . Tako dobimo izraze

brez uteži	z utežjo
$J_{33} = 1379.69 \text{ g cm}^2$	$J_{33} = 1389.64 \text{ g cm}^2$
$J_{11} = 3265.8 \text{ g cm}^2$	$J_{11} = 3280.3 \text{ g cm}^2 + L^2 18 \text{ g}$
$l = 0.435 \text{ cm}$	$l = 0.426 \text{ cm} + 0.031 L$

ki jih preverite sami! Preučite pomembnost prispevkov različnih delov vrtavke k vrednostim J_{33} , J_{11} in l in jih uporabite v kombinaciji z izmerjeno frekvenco ν_z za izračun precesijske in nutacijske kotne hitrosti oz. frekvence.

Literatura

- [1] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [2] Sergej Pahor. *Uvod v analitično mehaniko*. Ljubljana: DMFA, 1995.