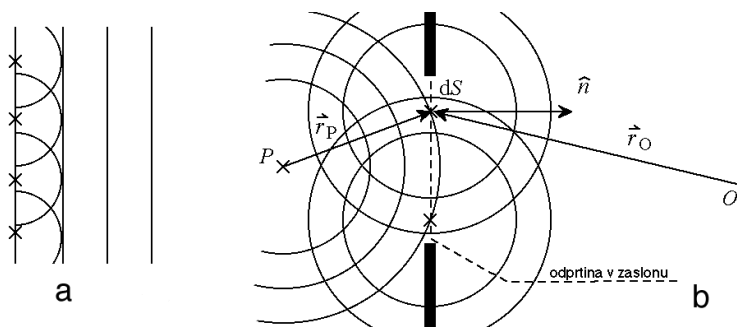


Uklon svetlobe

Uvod

Valovna narava svetlobe se dobro pokaže pri razširjanju svetlobe za ovirami ali odprtinami v neprozornih zaslonih, ki imajo tipične dimenzije primerljive z valovno dolžino svetlobe. *Geometrijska optika*, v kateri pričakujemo premo razširjanje svetlobe, ne velja več in svetloba se lahko širi tudi v geometrijsko senco. Temu pojavu pravimo uklon. Pri obravnavi uklona si lahko pomagamo z razumevanjem interference svetlobe in s *Huygensovim principom* (C. Huygens 1678), ki pravi, da lahko vsako točko, do katere je svetloba že prišla, obravnavamo kot izvor novega krogelnega valovanja, kar prikazuje slika 1. Pri obravnavi uklona izberemo točke (izvore) znotraj odprtine v zaslonu in izračunamo svetlobno polje za zaslonom s seštevanjem (integriranjem) prispevkov vseh krogelnih valov. Pri tem moramo pravilno upoštevati amplitude in faze posameznih krogelnih valov, ker ta krogelna valovanja interferirajo med seboj. Uporaba tega principa vsebuje eno nezaželeno posledico in sicer dobimo poleg valovanja naprej še en val, ki se širi nazaj. To pomanjkljivost teorije sta odpravila A. J. Fresnel (1818) in kasneje G. Kirchhoff (1882). Za detajle glejte v [1]. Njuna formula za amplitudo valovanja v



Slika 1: (a) V ravnem valu si lahko predstavljamo vsak del valovne fronte kot izvor krogelnega vala. Vsota teh krogelnih valov je ponovno ravna valovna fronta (b). Točkast izvor P oddaja krogelni val. Vse točke znotraj odprtine v zaslonu so izvori novih krogelnih valov. Uklonsko sliko dobimo s seštevanjem amplitud teh krogelnih valov, kar opisuje Fresnel-Kirchhoffova formula.

točki O je

$$u_O = \frac{Ak}{4\pi i} \int_{\text{odprtina}} dS \frac{\exp(i k(r_P + r_O))}{r_P r_O} \left[\frac{\vec{r}_P \hat{n}}{r_P} - \frac{\vec{r}_O \hat{n}}{r_O} \right], \quad (1)$$

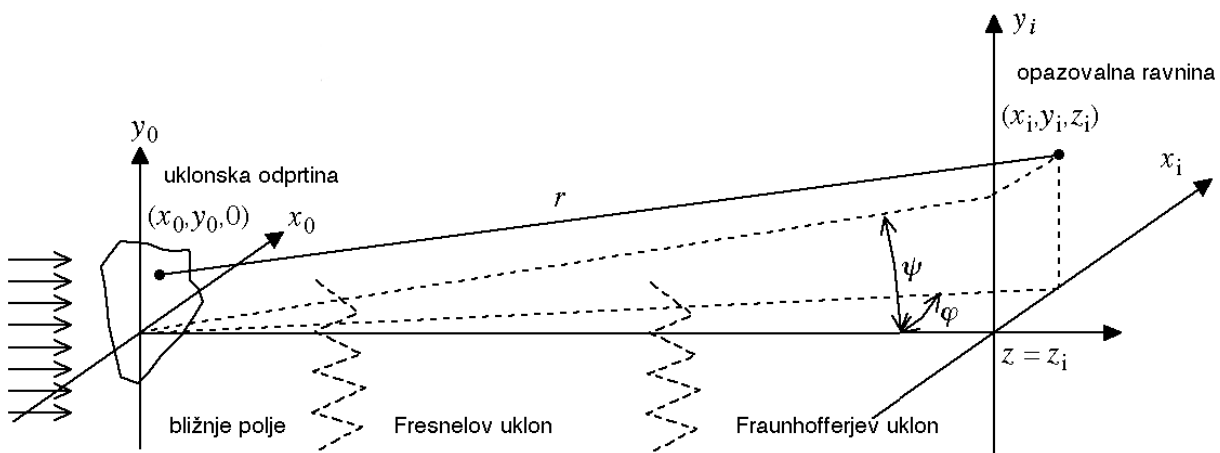
kjer je A konstanta, ki meri jakost izvora, k je valovni vektor svetlobe, r_P je vektor od izvora do točke v odprtini zaslona, r_O označuje vektor od točke v zaslonu do opazovalne točke O. Zadnji člen formule, ki vsebuje skalarne produkte vektorjev r_P in r_O z normalo na odprtino \hat{n} , je tisti popravek, ki nam določa smer razširjanja uklonjenega valovanja. Formulo (1) lahko v mnogih primerih poenostavimo. Kadar sta oba vektorja r_P in r_O približno vzporedna z normalo na odprtino \hat{n} , aproksimiramo faktor v oglatem oklepaju z 2 in zapišemo uklonsko amplitudo kot

$$u_O = \frac{k}{2\pi i} \int_{\text{odprtina}} dS u_A \frac{e^{i k r_O}}{r_O}, \quad (2)$$

kjer je u_A amplituda valovanja na delu odprtine, ki ga določa vektor \vec{r}_O . V primeru točkastega izvora je amplituda enaka

$$u_A = A \frac{e^{ikr_P}}{r_P}, \quad (3)$$

v primeru ravnega vala, ki vпада pravokotno na odprtino, pa je u_A konstantna. Huygensov princip izražen z enačbo (3) nam omogoča, da iz poznane valovanja v eni ravnini – valovanje ne sme biti preveč divergentno ali konvergentno – izračunamo valovanje v poljubni oddaljenosti od te ravnine v smeri razširjanja valovanja v bližini osi razširjanja. Zvezo med amplitudo valovanja v dveh ravninah bomo zdaj zapisali v pravokotnem koordinatnem sistemu, kakršnega kaže slika 2.



Slika 2: Prikazani so koordinatni sistem (x_0, y_0) uklonske odprtine, v katerem je amplituda vpadlega valovanja podana z $u_A = g(x_0, y_0)$, koordinatni sistem v opazovalni ravnini (x_i, y_i) , ki je za z_i oddaljena od prve ravnine in daljica r med točkama v odprtini in opazovalni ravnini. V odvisnosti od razmerja med oddaljenostjo opazovalne ravnine z_i in prečnih dimenzij odprtine v zaslonu uporabimo pri računu uklona različne približke, ki jih običajno imenujemo Fresnelov in Fraunhoferjev uklon.

Imejmo poznano amplitudo $u_A = g(x_0, y_0)$, ki je v splošnem kompleksna funkcija, v ravnini (x_0, y_0) . Iščejo amplitudo valovanja $u(x_i, y_i, z_i)$ v ravnini (x_i, y_i) , ki je za z_i oddaljena od prve ravnine. Formulo (2) zapišemo kot

$$u(x_i, y_i, z_i) = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0, y_0) \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 dy_0, \quad (4)$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko r , ki ustreza prejšnji r_O . Razdalja r med ustreznima točkama na zaslonu in v opazovalni ravnini je enaka

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}. \quad (5)$$

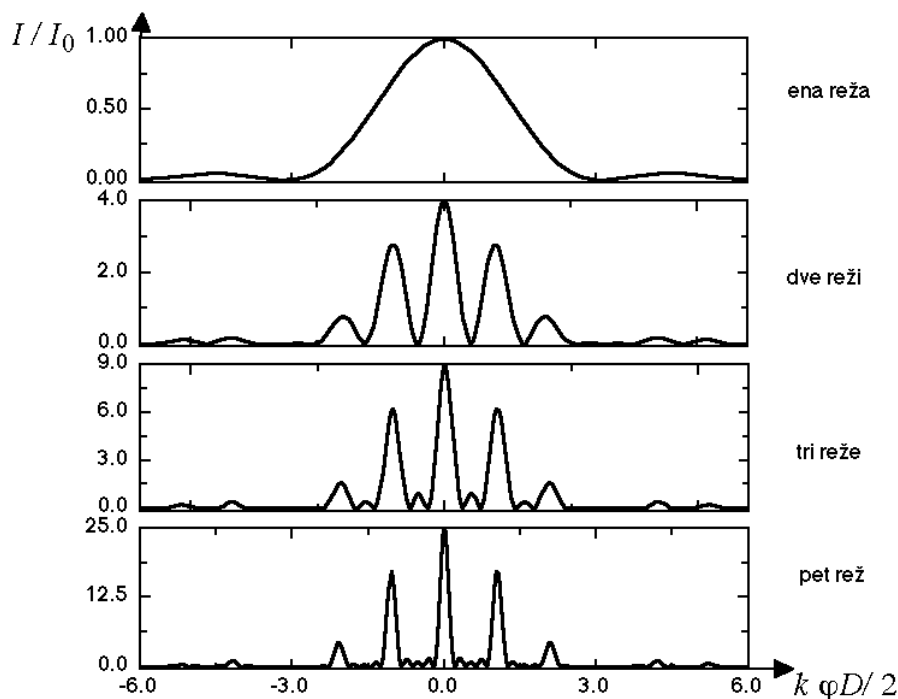
Prejšnje enačbe izgledajo preprosto, kljub temu pa je le malo primerov, v katerih lahko analitično izračunamo uklonsko sliko, oziroma je analitična rešitev praktična. Običajno se zatečemo v dodatne približke in najpogostejši je primer, ko je razdalja z_i dosti večja

od prečnih razsežnosti valovanja. Takrat razvijemo izraz pod korenem izraza (5) v vrsto in zadržimo le najnižje člene, kar nam da

$$r = z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i} - \frac{x_i x_0 + y_i y_0}{z_i} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}. \quad (6)$$

S tem približkom postane integral v enačbi (4) bolj obvladljiv. V imenovalcu integrala (4) nadomestimo r z z_i , v eksponentu pa dobimo poleg konstantnega prispevka k fazi, ki je odvisen od $z_i + (x_i^2 + y_i^2)/2z_i$ še prispevke, ki so linearno in kvadratno odvisni od koordinat v prvi ravnini (x_0, y_0) , po kateri integriramo. Ostane nam še vprašanje, kako pohlevna mora biti funkcija $u_A = g(x_0, y_0)$, da lahko integral izračunamo. Zaenkrat se omejimo na najenostavnejši primer, ko vpada na odprtino ravni val in je $g(x_0, y_0) = \text{konst.}$

Kadar moramo pri računu upoštevati vse člene v približku (6), pravimo takemu uklonu *Fresnelov uklon*. Pri še večjih oddaljenostih z_i pa lahko kvadratno odvisnost faze zane-marimo in račun nam da tako imenovani *Fraunhoferjev uklon*. Obe področji sta shematično prikazani na sliki 2. Kot vidimo na sliki in iz enačbe (6), postane uklonska slika v področju Fraunhoferjevega uklona odvisna le še od razmerij $\phi = x_i/z_i$ in $\psi = y_i/z_i$, ki označujeta kota opazovanja glede na optično os. Idealne razmere za opazovanje Fraunhoferjevega uklona lahko dosežemo tako, da za uklonsko odprtino postavimo zbiralno lečo in opazujemo sliko v njeni goriščni ravnini.



Slika 3: Enodimenzionalni Fraunhoferjev uklon na zaslonih z ekvidistantnimi režami. Raz-merje d/D med razdaljami med režami proti širini posamezne reže je 3. Prva slika prikazuje uklon na eni sami reži. Ta slika hkrati določa obliko ovojnice uklonskih slik z več enakimi režami. Intenzitete glavnih uklonskih maksimumov naračajo s kvadratom števila rež.

Tukaj se bomo ukvarjali najprej z enodimenzionalnim Fraunhoferjevim uklonom. Opa-zujemo ravni val (kolimiran laserski snop), ki vpada na tanko režo s širino D vzdolž

osi x_0 . Uklonska slika je odvisna le od kota ϕ in sicer je jakost svetlobnega toka v opazovalni ravnini enaka

$$I(\phi) = |u(x_i, z_i)|^2 = I_O \left(\frac{\sin k\phi D/2}{k\phi D/2} \right)^2, \quad (7)$$

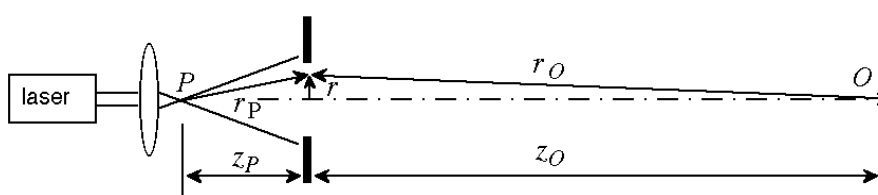
kjer je I_O konstanta, ki je odvisna od intenzitete laserskega žarka, od širine reže in od oddaljenosti zaslona. Funkcijska odvisnost intenzitete (7) je prikazana na sliki 3. Prvi minimum dobimo pri pogoju $k\phi D/2 = \pi$, oziroma $\phi = \lambda/D$.

Uklonska slika N enako širokih rež kot prej, katerih simetrane so razmaknjene za d , je podana z izrazom

$$I(\phi) = |u(x_i, z_i)|^2 = I_O \left(\frac{\sin(k\phi D/2)}{k\phi D/2} \right)^2 \left(\frac{\sin(Nk\phi d/2)}{\sin(k\phi d/2)} \right)^2. \quad (8)$$

Veljati mora seveda $d > D$. Kot vidimo, je uklonska slika produkt dveh neodvisnih faktorjev. Prvi del je enak kot prej in ga lahko tolmačimo kot obliko ovojnice uklonske slike. Drugi faktor hitreje modulira uklonsko sliko in tako dobimo prvi minimum pri kotu $\phi = \lambda/Nd$, v svojih maksimumih pa doseže vrednosti N^2 . Vidimo, da je v tem primeru centralni maksimum ožji, čim večje je število rež. Ožji so tudi vsi drugi uklonski vrhovi. Prvi stranski uklonski maksimum, katerega intenziteta je sorazmerna z N^2 , dobimo takrat, ko je imenovalc drugega faktorja v (8) enak 0. Iz tega pogoja dobimo $\phi_1 = \lambda/d$, kar pa je pri manjšem številu rež le približek za položaj prvega uklonskega vrha zaradi množenja z ovojnicco v (8), ki se lahko v okolici kota ϕ_1 hitro spreminja in nam s tem premakne položaj maksimuma celotnega izraza (8). Na sliki 3 vidimo izračunano uklonsko sliko za 1, 2, 3 in 5 rež.

Naslednji primer, ki ga bomo opazovali in obravnavali pri tej vaji, je uklon na okrogli odprtini v Fresnelovem približku. Imejmo točkast izvor, ki ga bomo simulirali s fokusiranim laserskim snopom. Ko se snop širi stran od gorišča so njegove valovne fronte dovolj dober približek krogelnega valovanja. Amplitudo valovanja znotraj odprtine nam opisuje enačba (3). Sedaj delamo v cilindričnih koordinatah in ustrezna spremenljivka pri računanju uklona bo r , to je oddaljenost točke v odprtini od osi, kar kaže slika 4. Tukaj govorimo o Fresnelovem uklonu, saj je izvor valovanja na končni razdalji od



Slika 4: Uklon na okrogli odprtini. Fokusiran laserski snop se iz gorišča leče širi kot krogelni val. Izvor P in točka opazovanja O ležita na osi okrogle odprtine.

odprtine. Zato pri korektni diskusiji splošne formule (1) uporabimo vse zapisane rede razvoja (6) in dobimo izraz za amplitudo v odprtini

$$u_A(r) = \frac{\exp(i k z_P)}{z_P} \exp\left(\frac{i k r^2}{2 z_P}\right).$$

Razdalji izvora do odprtine z_P in ekrana do odprtine z_O razumemo kot pozitivni količini. V naslednjem koraku uporabimo enačbo (4) za izračun uklona, tako da jo zapišemo v cilindričnih koordinatah. Račun je enostavno izvedljiv le za opazovalne točke na z osi. Odprtino razdelimo na tanke kolobarje in integriramo po r . Tako dobimo

$$u_O = C \int_0^R \exp\left(\frac{ikr^2}{2z_P} + \frac{ikr^2}{2z_O}\right) 2\pi r dr \propto \exp\left(\frac{ikR^2}{2\zeta}\right) - 1 \propto \sin\left(\frac{kR^2}{4\zeta}\right), \quad (9)$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $\zeta^{-1} = z_P^{-1} + z_O^{-1}$. Intenziteta uklonjenega valovanja na osi je sorazmerna s kvadratom amplitude $I_O = |u_O|^2 \propto \sin^2(kR^2/4\zeta)$ in ta rezultat nam kaže, da intenziteta izmenično narašča in pada, če spreminjamo velikost zaslonke R ali pa njeno oddaljenost od izvora ali opazovališča. Izračunano odvisnost od R lahko razložimo z uporabo koncepta t.i. *Fresnelovih con*. To so kolobarji, na katere razdelimo okroglo odprtino, meje kolobarjev R_n pa so določene z maksimumi (lih n) in minimumi intenzitete I_O (sod n) uklonjenega valovanja na osi:

$$\frac{kR_n^2}{4\zeta} = n \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Svetloba, ki potuje od izvora P do opazovališča O skozi eno samo Fresnelovo cono ima podobno fazo in zato konstruktivno interferira. Svetloba dveh sosednjih Fresnelovih con pa ima nasprotno fazo in zato interferira destruktivno. S povečevanjem premera zaslonke odpiramo zaporedoma nove Fresnelove cone in zato nam intenziteta na osi oscilira. (Če bi nam bilo pri tej vaji tudi mogoče izmenično odpiranje območij zaslonke, bi lahko z odprtimi lihimi ali sodimi kolobarji dosegli na osi ostrejši in močnejši uklonski vrh, tako kot pri vaji "Uklonska leča").

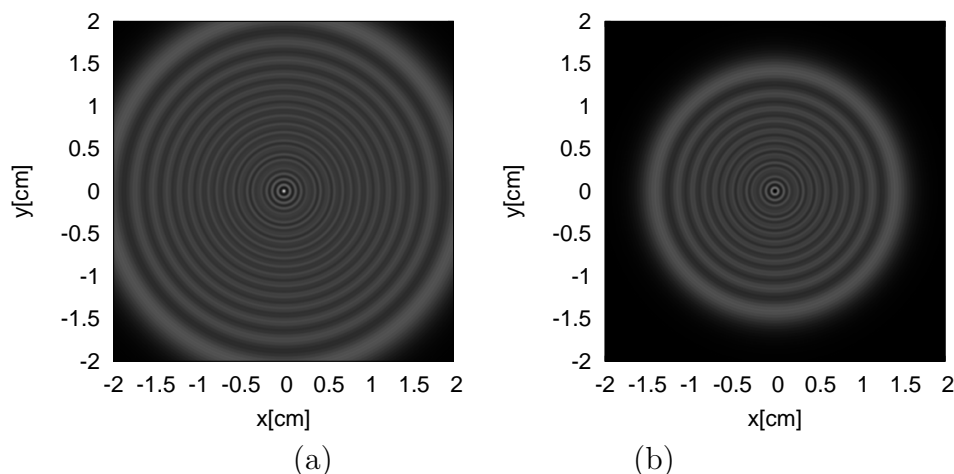
Nekoliko daljša izpeljava, kjer uporabimo formulo (1) in vse zapisane rede razvoja (6), pokaže, da je intenziteta uklonjenega valovanja v smeri pod kotom θ glede na z os podana z

$$I_O(\theta) \propto \frac{(\cos \theta + 1)^2}{(z_O z_P k)^2} \left| \int_0^{kR} dx x \exp\left(i \frac{x^2}{2k\zeta}\right) J_0(x \sin \theta) \right|^2, \quad (11)$$

kjer je $J_0(x)$ Besselova funkcija prve vrste in ničtega reda. Takoj opazimo, da zgornji izraz z upoštevanjem $J_0(0) = 1$ pri $\theta = 0$ preide v že znanega (9). S pomočjo formule (11) izračunamo uklonski sliki za dve različni razdalji izvora od odprtine, ki pripadata sosednjemu maksimumu in minimumu vzdolž z osi in sta prikazana na sliki 5. V prikazanih primerih opazimo, da imamo zraven ekstrema (minimum ali maksimum) v centru, tudi dobro vidne stranske kolobarje ojačitev intenzitete, ki jih lahko eksperimentalno verificiramo.

Naloga

1. Izmeri uklonsko sliko svetlobe za zaslone z režami. Uporabi zaslone z 1, 2, 3, 5 in 10 režami. Določi relativne intenzitete uklonskih slik. Določi širino rež D in razdalje med njimi d .
2. Opazuj uklon na okrogli odprtini. Določi premer odprtine $2R$.



Slika 5: Intenziteta uklonskih slik na ekranu, postavljenem pri $z_O = 1$ m za dve različni oddaljenosti izvora $z_P = 4.35$ cm (a) in $z_P = 6.29$ cm (b) od odprtine radija $R = 1$ mm. Valovna dolžina valovanja je 650 nm. Skala intenzitet je enaka v obeh primerih.

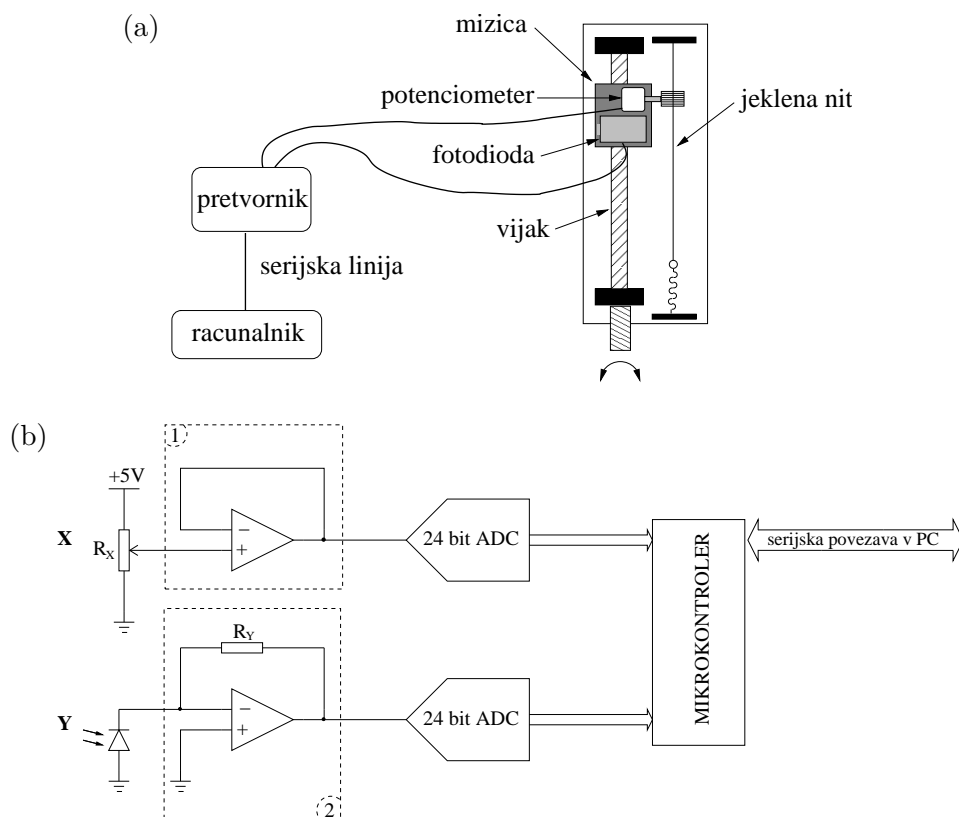
Potrebščine

- HeNe laser z valovno dolžino 633 nm, nosilna plošča za laser in translator za zaslone,
- par prizem v nosilcu za razširitev žarka,
- zasloni z odprtinami, leča z nosilcem, ravno ogledalo z nosilcem,
- x translator z montiranim fotodetektorjem in pretvornik signalov,
- prenosnik št. 2 s programom UklSve napisan v LabView.

Navodilo

1. Uklonsko sliko merimo s pripravo skicirano na sliki 6a. Na premično mizico je pritrjena škatlica s fotodiodo in potenciometrom. Potenciometer je povezan z vpeto jekleno vrvico. Fotodioda, z aktivno površino približno 1 mm^2 , je vezana na baterijo v zaporni smeri in generira tok sorazmeren z intenziteto vpadle svetlobe. Padec napetosti na potenciometeru pa nam služi za določanje horizontalne lege fotodiode. Izhode fotodiode in potenciometra vodimo na pretvornik, ki pretvarja tok fotodiode v napetost U_Y in nemoteče bere padec napetosti na potenciometru U_X . Dodatno pa obe napetosti U_Y in U_X pretvori iz analogne vrednosti v digitalno preko AD (Analog-Digital) pretvornika in s pomočjo mikrokontrolerja obe digitalni vrednosti pošlje po serijski povezavi (RS 232) v prenosnik preko RS 232-USB pretvornika. Shema opisane vezave je narisana na sliki 6b. **Pretvornik ima stikalo, ki ga pred začetkom meritev vklopi in po končanih meritvah izklopi.**

Preveri, da je laser trdno pritrjen na nosilno ploščo. Potem s premikanjem celotne nosilne plošče nameri žarek proti fotodetektorju, ko je ta v srednjem položaju med obema skrajnima legama pomika. Nosilna plošča se dotika mize v treh točkah, od katerih sta dve točki konca medeninastih vijakov, tako da z njima spreminjamo naklon



Slika 6: Skica priprave za merjenje uklonske slike (a) in shema vezave pretvornika (b). Na slednji je z (1) označen sledilnik napetosti in z (2) pretvornik toka v napetost.

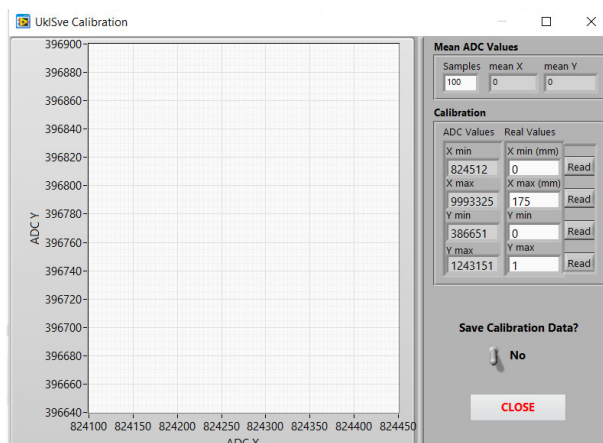
plošče. S premikanjem ustreznega vijaka nastavi višino žarka tako, da zadene sredino fotodiode.

Laserski snop ima premer približno 0.7 mm, kar je premalo, da bi bile vse reže v zaslonih enakomerno osvetljene. Zato v laserski snop postavimo par prizem, ki snop razširi v eni dimenziji, pri čemer ostanejo vsi žarki v snopu vzporedni. (Običajna uporaba teh prizem pa je obratna, iz eliptičnega snopa, kakršnega dobimo iz laserskih polprevodniških diod, naredimo snop s krožnim presekom.) Pazimo, da gre snop lepo skozi obe prizmi in da zadene isto točko na detektorju kot prej. Prizmi morata biti obrnjeni tako, da se snop v horizontalni smeri razširi in ne skrči.

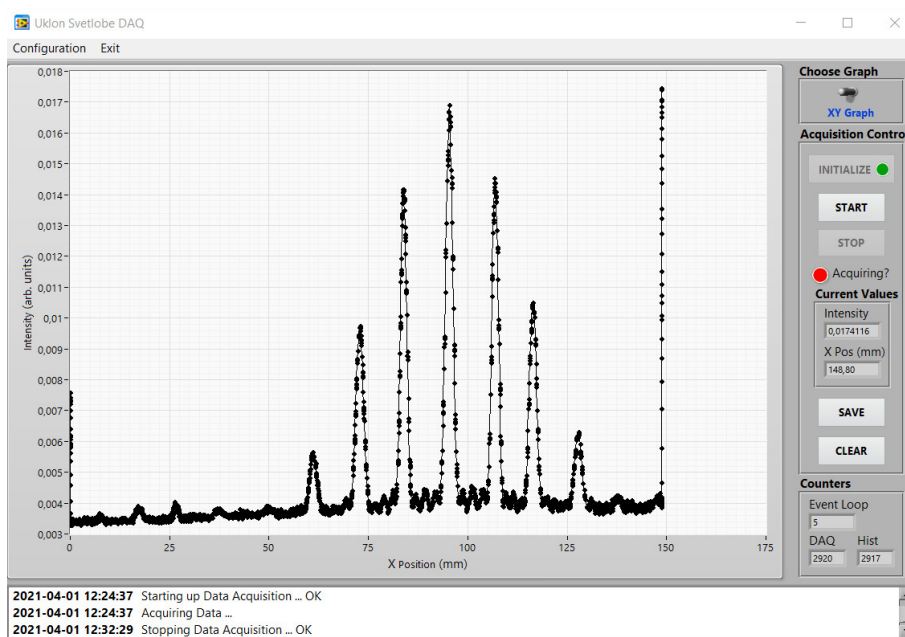
Nato v okvir vstavi zaslon s 5 režami, s katerim dobimo najostrejšo uklonsko sliko. Preveri, da vpada snop na sredino zaslona z režami in po potrebi naravnaj. Preveri vzporednost uklonske slike in poti fotodetektorja. Pri tem si lahko pomagamo z oznakami na steni. Po potrebi naravnaj nagib nosilne plošče ali pa zaslona z režami, da dosežeš vzporednost, kar pomeni, da pada uklonska slika med translatiranjem fotodetektorja ves čas v sredino fotodiode.



Na prenosniku se vpišite v uporabniški račun z imenom **student** in geslom **praktikum2**. Na namizju najdete programom **UklSve**, s katerim zajemamo podatke s pretvornika. Če opazimo kakšno anomalno komunikacijo med programom in pretvornikom, pretvornik resetiramo in sicer z izklopom in ponovnim vklopom. Glavno okno programa je prikazano na sliki 7.b. S pritiskom na **Initialize** vzpostavimo komunikacijo med programom in pretvornikom. Po potrebi izvedite nastavitve programa v konfiguracijskem oknu (sl. 7.a), ki ga najdemo pod menijem **Configuration**.



(a)



(b)

Slika 7: Konfiguracijsko (a) in glavno (b) okno programa UklSve.

V konfiguracijskem oknu lahko opravimo naslednje nastavitve:

- Določimo število predalčkov (samples) vzdolž x osi, ki se uporablja pri prikazovanju sprejetih podatkov preko povprečja v predalčkih (angl. binned statistics).
- Kalibracijo osi grafa v glavnem oknu programa izvedemo, tako da k vrednostim iz AD pretvornika (ADC values) priredimo relativne intenzitete (Real values) za ekstremne točke: maksimalna in minimalna vrednost horizontalne pozicije (X_{\min} , X_{\max}) in jakosti svetlobe (Y_{\min} , Y_{\max}). Vrednost iz AD pretvornika pridobimo za dano pozicijo fotodiode s pritiskom na gumb Read. Kalibracijo potrdimo in shranimo s pritiskom na gumb Save Calibration data?.

V glavnem oknu programa način prikaza meritev izbiramo v sekciji Choose graph. Privzet je prikaz surovih meritev, kar je v programu označeno z XY graph. Ker pa so

surove meritve so pogosto precej poskakajoče in posledično moteče lahko preklopimo na prikaz povprečij v predalčkih **Binned data**.

Za samo merjenje uklonske slike je nadvse enostavno: sprožimo zajem podatkov s pritiskom na **Start** in vrtimo vijaka pomikamo mizico s fotodiodo iz ene v drugo skrajno lego. Zajem podatkov prekinemo s pritiskom na **Stop**. Nato zbrane podatke shranimo s pritiskom na **Save**, pri čemer izberemo začetek imena, recimo **meritev**, in program pa naredi dve tekstovni datoteki, **meritev.dat** in **meritev_hist.dat**: v prvi so shranjene surove meritve, v drugi pa njihova povprečja v predalčkih. Podatki v obeh datotekah so podatki organizirani v dve koloni: pozicija v mm in relativna intenziteta.



Pozor: Numerični podatki v datotekah so v znanstveni notaciji in uporabljajo piko "." kot decimalni separator. Svoje podatke shranjujte v mapo **UklSve** na namizju in jih zbršite po končani vaji! Kalibracija osi je nujno potrebna le pri bistvenih spremembah, kot so novo napenjanje jeklene žičke, zamenjava laserja ali menjava baterije v škatlici fotodiode.

Posnemi uklonsko sliko z zaslonom s 5, 3, 2 in le 1 režo. Uklonski profil izriši tako, da bosta po dve uklonski sliki na istem grafu v sledečih kombinacijah: 5 rež + 3 reže, 3 reže + 2 reži in 2 reži + 1 reža.

Določi širino rež D in razdalje med njimi d . Iz meritev določi relativne intenzitete centralnega uklonskega maksimuma, ki bi morale biti v razmerju števila rež na kvadrat, če so bile vse reže enakomerno osvetljene.

2. Odstrani uklonski zaslon z režo in vstavi uklonski zaslon z okroglo odprtino. Poravnaj ga v sredino laserskega žarka in če je vse dobro naravnano, ostane odprtina v sredi žarka tudi med premikanjem translatorja. Sedaj postavi takoj za laserjem v snop lečo in nastavi njen položaj tako, da je divergentni laserski snop še vedno centriran na zaslonki. Za lažje opazovanje slike med premikanjem zaslonke postavi v snop za zaslonko ogledalo in usmeri svetlobo na steno za laserjem. Celotna pot svetlobe od zaslonke do zaslona (stene) naj bo približno 1.5 m. Na zaslonu dobiš sedaj uklonsko sliko, to so koncentrični temni in svetli kolobarji. Zanima nas predvsem sredina vzorca. S premikanjem okrogle zaslonke dobimo na osi izmenično svetlo in temno polje. V položajih, kjer se to zgodi – ko je center najbolj svetel (liho število con) in najbolj temen (sodo število con) – zaporedoma izmeri medsebojne lege izvora P , zaslonke in točke opazovanja O , se pravi razdalji z_P in z_O , kakor so označene na sliki 4. Za te položaje je značilno, da je polmer odprtine enak n -ti meji Fresnelove cone $R_n = \sqrt{n\lambda\zeta}$, in sicer dobimo svetlo polje, če je n lih in temno, če je sod. Enačbo (10) z upoštevanjem $k = 2\pi/\lambda$ lahko prepišemo v obliko

$$n = \frac{R_n^2}{\lambda} \frac{1}{\zeta}.$$

Naša meritev nam dá vrednost n , nedoločeno za neko konstanto n_0 . Nariši graf $n - n_0$ kot funkcijo ζ^{-1} . Iz naklonskega kota premice določi velikost okrogle uklonske odprtine, iz presečišča z 0 pa vrednost n_0 .

Literatura

- [1] Max Born in sod. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7. izd. Cambridge University Press, 1999. DOI: [10.1017/CB09781139644181](https://doi.org/10.1017/CB09781139644181).