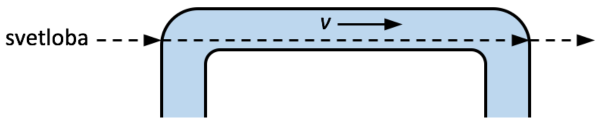
1.a izpit iz Moderne fizike 1

18. december 2020

čas reševanja 90 minut

1. Z natančnim merilcem merimo hitrost svetlobe pri prehodu skozi prozorno tekočino. Ko je tekočina v mirovanju, izmerimo njen lomni količnik $n = 1{,}33$. Nato tekočino po cevi spravimo v gibanje s hitrostjo $v = 2$ m/s v smeri širjenja svetlobe (glej skico). Za koliko se poveča hitrost svetlobe pri potovanju skozi gibajočo se tekočino, merjeno v laboratorijskem sistemu?



Rešitev: V inercialnem sistemu S' gibajoče vode, voda miruje in hitrost svetlobe je $c_\mathrm{s}' = c/n$, kjer je n lomni količnik. Preko Lorentzove transformacije hitrost c_s' prevedemo v laboratorijski sistem S, ki se giblje s hitrostjo $-v$ glede na S' (t.i. obratna Lorentzova transformacija).

$$c_\mathrm{s} = \frac{c_\mathrm{s}' + v}{1 + \dfrac{c_\mathrm{s}' v}{c^2}} \tag{1}$$

$$= \frac{c}{n}\,\frac{1 + n\beta}{1 + \beta/n} \tag{2}$$

kjer je $\beta = v/c$. Razlika v hitrosti svetlobe skozi gibajočo in mirujočo tekočino je enaka

$$\Delta c = c_\mathrm{s} - c_\mathrm{s}' \tag{3}$$

$$= v\,\frac{n^2 - 1}{n^2 + n\beta} \tag{4}$$

$$\approx v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0.87\ \mathrm{m/s} \tag{5}$$

pri čemer smo upoštevali $n\beta \ll n^2$ in ta člen v imenovalcu zanemarili.

Opomba: Uporaba napačne smeri Lorentzove transformacije (v namesto $-v$) v enačbi (1) privede do negativnega rezultata (-0.87 m/s), ki se na nekaj decimalk ujema s pravilnim rezultatom. Naknaden privzetek absolutne vrednosti Δc tako ne šteje k pravilnemu poteku reševanja.

2. V potencialu je ujet delec, katerega stanje opišemo kot superpozicijo osnovnega in prvega vzbujenega stanja:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right) \, .$$

Če označimo z E_1 energijo osnovnega, z E_2 pa energijo prvega vzbujenega stanja, kolikšna je pričakovana vrednost energije $\langle E\rangle$ in kolikšna njena nedoločenost δE? Izračunaj nihajni čas τ pričakovane vrednosti lege delca $\langle x(t)\rangle$ okoli srednje vrednosti.

Rešitev: Zapišemo časovni razvoj funkcije

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \psi_2(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\right] \tag{6}$$

kjer je smo vpeljali $\omega_i = E_i/\hbar$. Od tod sledi

$$\langle E\rangle = \int \Psi^* \hat{H}\Psi \mathrm{d}x = \mathrm{i}\hbar \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}\mathrm{d}x = \sum_i |c_i|^2 E_i = \frac{E_1+E_2}{2} \tag{7}$$

$$\langle E^2\rangle = \int \Psi^* \hat{H}^2\Psi \mathrm{d}x = -\hbar^2 \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}\mathrm{d}x = \sum_i |c_i|^2 E_i^2 = \frac{E_1^2+E_2^2}{2} \tag{8}$$

pri čemer smo s c_i označili koeficiente v razvoju. Nedoločenost energije je tako enaka

$$\begin{aligned} \delta E &= \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} \\ &= \frac{E_2 - E_1}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

Pričakovana vrednost lege sledi kot

$$\begin{aligned} \langle x(t)\rangle &= \int \Psi^* \hat{x}\Psi \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int x\left(\psi_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t} + \psi_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}\right)\left(\psi_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \psi_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int x\left[\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_1\psi_2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int x\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\mathrm{d}x + \left[\int x\psi_1\psi_2\mathrm{d}x\right]\cos(\omega_1-\omega_2)t \end{aligned} \tag{10}$$

Prvi člen je neodvisen od časa in predstavlja srednjo vrednost lege, drugi člen pa predstavlja časovno modulacijo s frekvenco $\omega_1 - \omega_2$. Ustrezni nihajni čas je torej

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{h}{E_2 - E_1} \tag{11}$$

3. Opazujemo razpad K^+ mezona v njegovem mirovnem sistemu. Razpade lahko ali v anti-mion μ^+ in brezmasni nevtrino, $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$, ali v $K^+ \to \pi^+\pi^0$. Določi gibalno količino razpadnih produktov v težiščnem sistemu za oba primera. Kolikšna je energija nevtrina? Kolikšno gibalno količino μ^+ izmeri opazovalec, ki se giblje z $\beta = 0.6$ v smeri μ^+? $m_{K^+,\mu^+,\pi^+,\pi^0} = \{494, 106, 140, 135\}$ MeV/c^2.

Rešitev: Z ohranitvijo gibalne količine v težiščnem sistemu K^+ dobimo

$$\left(m_K c^2, 0\right) = (E_1, pc) + (E_2, -pc)\,, \text{ kjer } E_{1,2}^2 - (pc)^2 = m_{1,2}^2 c^4\,. \tag{12}$$

Zgornjo enačbo preuredimo in kvadriramo, da dobimo

$$m_K c^2 = \sqrt{(pc)^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{(pc)^2 + m_1^2 c^4}\,, \tag{13}$$

$$m_K^2 c^4 - 2m_K c^2 \sqrt{(pc)^2 + m_1^2 c^4} + (pc)^2 + m_1^2 c^4 = (pc)^2 + m_1^2 c^4\,, \tag{14}$$

$$\left(\frac{m_K^2 c^4 + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2m_K c^2}\right)^2 = (pc)^2 + m_1^2 c^4\,, \tag{15}$$

$$\frac{p}{c} = \frac{\sqrt{m_K^4 - 2m_K^2\left(m_1^2 + m_2^2\right) + \left(m_1^2 - m_2^2\right)^2}}{2m_K}\,. \tag{16}$$

Za zgornja dva primera dobimo $p_{\pi^+} = p_{\pi^0} = 205$ MeV/c in $p_{\mu^+} = p_{\nu_\mu} = 236$ MeV/c. Nevtrino je skoraj brezmasen, zato je $E_\nu = pc = 236$ MeV. Gamma faktor podaljšanja razpadnega časa ($\tau' = \gamma\tau$) za pion in anti-mion sta enaka

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{\sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}}{mc^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{mc}\right)^2} = \{1{,}8 \text{ in } 2{,}4\}. \tag{17}$$

Gibalna količina, ki jo izmeri gibajoči se opazovalec je enaka

$$p'c = \gamma\,(pc - \beta E) = \gamma\left(pc - \beta\sqrt{(pc)^2 + m^2c^4}\right) \tag{18}$$

$$= \gamma\, pc\left(1 - \beta\sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{pc}\right)^2}\right) = 101 \text{ MeV}\,. \tag{19}$$

4. Elektronu v neskončni potencialni jami širino jame $[0, a/2]$ hipoma raztegnemo na $[0, a]$. Določi, s kolikšno verjetnostjo je v osnovnem oziroma v prvem vzbujenem stanju raztegnjene jame. Izračunaj povprečno energijo, produkt nedoločenosti lege in gibalne količine ter zapiši časovni razvoj.

$$\int_0^{a/2} \mathrm{d}x\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2a\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi\,(4 - n^2)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - (k + 1/2)^2)^2} = \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + 1/2)^2}{(1 - (k + 1/2)^2)^2}$$

Rešitev: Začetno valovno funkcijo ter lastna stanja lahko zapišemo kot

$$\psi = \sqrt{\frac{4}{a}} \sin\frac{2\pi x}{a}\,, \qquad\qquad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}\,. \tag{20}$$

Koeficiente v razvoju valovne funkcije dobimo z integralom

$$c_n = \int_0^{a/2} \mathrm{d}x\, \psi\psi_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-(n/2)^2}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 2, \end{cases} \tag{21}$$

in 0 za ostale n. Integral za $n = 2$ dobimo trivialno iz normalizacije ψ

$$c_2 = \int_0^{a/2} \mathrm{d}x \sqrt{\frac{8}{a^2}} \sin^2\frac{2\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{a/2} \mathrm{d}x\, \psi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \tag{22}$$

ali z limito in uporabo L'Hospitalovega pravila

$$c_2 = \frac{2\sqrt{2}}{a^2} \lim_{n\to 2} \frac{2a}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{4-n^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \lim_{n\to 2} \frac{\cos(n\pi/2)(\pi/2)}{-2n} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{23}$$

Od tu sledijo verjetnosti za osnovno in vzbujeno stanje $P_{n=1} = |c_1|^2 = 32/(9\pi)^2 = 0{,}36$ in $P_{n=2} = |c_2|^2 = 1/2$. Z nastavkom $n = 2k+1, k = 0, \ldots, \infty$ preverimo normalizacijo

$$c_2^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-(k+1/2)^2)^2} = 1\,. \tag{24}$$

Za lastna stanja velja $E_n = (\hbar n\pi)^2/(2ma^2)$, torej je povprečna energija

$$\langle E\rangle = c_2^2 E_2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2 E_{2k+1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(\frac{1}{2}2^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\,(2k+1)^2\right) \tag{25}$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(2 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1/2)^2}{(1-(k+1/2)^2)^2}\right) = \frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}\,, \tag{26}$$

kar je seveda enako E_1 za potencialno jamo širine $a/2$, $\langle E\rangle = (\hbar\pi)^2/(2m(a/2)^2)$. Povprečna $\langle x\rangle = a/4$, kar vemo iz oblike začetnega stanja, ter $\langle p\rangle = 0$ in $\langle p^2\rangle = 2m\langle E\rangle = (2\hbar\pi/a)^2$. Ostane nam še

$$\langle x^2\rangle = \int_0^{a/2} \mathrm{d}x\, \psi^2 x^2 = \frac{a^2}{24\pi^2}\left(2\pi^2 - 3\right)\,, \qquad\qquad \delta x\delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2}\,. \tag{27}$$

S koeficienti c_n določimo časovni razvoj

$$\psi\,(x,t) = \sum_n c_n\psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \frac{\psi_2}{\sqrt{2}} e^{-iE_2 t/\hbar} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\psi_{2k+1} e^{-iE_{2k+1}t/\hbar}\,. \tag{28}$$