1. Vesoljska ladja na poti mimo Zemlje proti Marsu potuje s hitrostjo $v = 0{,}5$ c in ob preletu sinhronizira uro z Zemljo. Na pol poti do Marsa, ki je oddaljen 250 milijonov kilometrov, pošlje na Zemljo podatek o trenutnem času svoje ure. Kdaj bo signal dosegel Zemljo in katero vrednost bodo odčitali? Kolikšen čas bo takrat kazala ura na ladji?

   Rešitev. Ko bo ladja prispela na pol poti, bosta uri na zemlji in ladji kazali

$$t_{1Z} = \frac{L}{2v} = 833 \text{ s}, \qquad t_{1L} = \frac{t_{1Z}}{\gamma} = 722 \text{ s}.$$

   Signal bo do Zemlje prišel ob času

$$t_{2Z} = t_{1Z} + \frac{L}{2c} = 1250 \text{ s}$$

   in odčitan čas ladjine ure na Zemlji bo t_{1Z}. Ko se bo to zgodilo, bo ura na ladji kazala

$$t_{2L} = 1083 \text{ s}.$$

2. Elektron v neskončni potencialni jami širine 0,4 nm ob času $t = 0$ opisuje valovna funkcija $\psi \propto \psi_1 + 2i\psi_2$, ki je linearna kombinacija osnovnega in prvega vzbujenega stanja. Normiraj valovno funkcijo ψ in izračunaj povprečno vrednost energije ter povprečno vrednost koordinate delca $\langle x(t)\rangle$ ob času $t = 0$ ter ob času $t = \pi\hbar/(2E_2 - 2E_1)$, kjer sta E_1 ter E_2 energiji osnovnega in prvega vzbujenega stanja. Namig: $\int_0^\pi x\sin(nx)^2 dx = \pi^2/4$, $\int_0^\pi x\sin(nx)\sin(mx)dx = 2(-1+(-1)^{m+n})mn(m^2-n^2)^{-2}$.

   Rešitev. Valovna funkcija ni normirana, sta pa normirani funkciji ψ_1 ter ψ_2, zato je normirana valovna funkcija

$$\psi = 1/\sqrt{5}\psi_1 + 2i/\sqrt{5}\psi_2.$$

   funkcije $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin n\pi x/a$ so ortogonalne, lastne energije so

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2},$$

   zato je povprečna energija (izračunamo iz $E = \sum_n |c_n|^2 E_n$):

$$E = 1/5E_1 + 4/5E_2 = \frac{17}{40}\frac{h^2}{ma^2} \approx 8\,\text{eV},$$

   popvprečna vrednost x ob času 0 pa je

$$< x(t=0) >= 1/5\int_0^a x|\psi_1|^2dx + 4/5\int_0^a x|\psi_2|^2dx = (1/5+4/5)a/2 = a/2$$

saj se elektron za obe lastni stanji nahaja v povprečju na sredini jame, to je pri $x = a/2$. Ob času $t > 0$ povprečna energija ostane enaka (zakon o ohranitvi energije), spreminja pa se $< x(t) >$, in sicer

$$< x(t) >=< x(t=0) > +2i/5e^{-i\omega t}\int_0^a x\psi_1\psi_2 dx - 2i/5e^{i\omega t}\int_0^a x\psi_1\psi_2 dx$$

kjer je $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$, oziroma

$$< x(t) >= a/2 - 4/5\sin\omega t\int_0^a x\psi_1\psi_2 dx = a/2 + 64a/15\pi^2\sin\omega t$$

Pri času $t = \pi\hbar/(2E_2 - 2E_1)$ je torej

$$< x(t) >= a/2 + 64a/15\pi^2$$

3. Fotoni z energijo 2 eV se comptonsko sipajo na mirujočih elektronih. Sipane fotone zaznavamo s fotoefektom v detektorju, ki se giblje v smeri vpadnega fotonskega curka (glej sliko). V sistemu detektorja jih zaznamo pod kotom $\theta' = 45°$. Izračunaj izstopno delo detektorske snovi ob podatku, da prve izbite elektrone opazimo, ko ima detektor hitrost 0,6 c.

   Rešitev. Začetni fotoni z energijo $E_\gamma = h\nu = 2$ eV se comptonsko sipajo pod kotom θ v fotone s frekvenco ν', ki jih detektor zazna pod kotom θ' in s frekvenco ν''. Iz Dopplerjevega pojava pod kotom velja

$$\nu' = \nu''\gamma\left(1 - \beta\cos\theta'\right), \qquad \nu'\cos\theta = \nu''\gamma\left(\cos\theta' - \beta\right), \qquad \nu'\sin\theta = \nu''\sin\theta'. \qquad (1)$$

   Iz prvih dveh enačb dobimo

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' - \beta}{1 - \beta\cos\theta'} = 0.18, \qquad\qquad \theta = 79°.$$

   Iz comptonskega sipanja sledi zveza med frekvencama

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_c}{c}\left(1 - \cos\theta\right),$$

   in z uporabo tretje enačbe v (1) dobimo izstopno delo

$$A_i = h\nu'' = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{1}{m_e c^2}\left(1 - \cos\theta\right)} = 2{,}8 \text{ eV}.$$

4. Elektron se nahaja v homogenem električnem polju, katerega jakost spreminjamo tako, da se povečuje linearno z lastnim časom τ elektrona $E = E_0\tau/\tau_c$, kjer je $\tau_c = 1\,\mu$s ter $E_0 = 1\,$kV/m. Kolikšna je hitrost delca ob lastnem času τ_c, če je elektron na

začetku (ob času $\tau = 0$) miroval? Kolikšen pa je laboratorijski čas pri tej hitrosti? Računaj relativistično in privzemi $B = 0$.

Rešitev. Za konstantno polje $E = E_0$ smo izračunali na vajah. Smiselo bo delati z lastnim časom in štirihitrostjo. Na vajah smo dobili set enačb (za gibanje delca v z smeri - polje E v z smeri)

$$du_0/d\tau = \alpha_0 u_3$$
$$du_3/d\tau = \alpha_0 u_0$$

kjer je $\alpha_0 = eE_0/mc$, rešitev je:

$$u_0 = c \cosh \alpha_0 \tau = \gamma c$$
$$u_3 = c \sinh \alpha_0 \tau = \gamma v$$

V našem primeru se polje spreminja z lastnim časom, tako da so enačbe, ki opisujejo gibanje:

$$du_0/d\tau = \alpha_0 u_3 \tau/\tau_c$$
$$du_3/d\tau = \alpha_0 u_0 \tau/\tau_c$$

Poskusimo sistem rešit z nastavkom

$$u_0 = c \cosh \alpha\tau$$
$$u_3 = c \sinh \alpha\tau$$

kjer je $\alpha = \alpha(t)$. S tem nastavkom se prva diferencilna enačba prepiše v

$$\sinh(\alpha\tau)\frac{d(\alpha\tau)}{d\tau} = \alpha_0 \frac{\tau}{\tau_c} \sinh(\alpha\tau)$$

iz česar dobim diferencilno enačbo za α, $\alpha + \tau d\alpha/d\tau = \alpha_0\tau/\tau_c$, katere rešitev je $\alpha = \alpha_0\tau/2\tau_c$. Naša štirihitrost je tako

$$u_0 = c \cosh \frac{\alpha_0 \tau^2}{2} = \gamma c$$
$$u_3 = c \sinh \frac{\alpha_0 \tau^2}{2} = \gamma c \beta$$

Hitrost delca pri času $\tau = \tau_c$ je tako

$$\beta = u_3/u_0 = \sinh \frac{\alpha_0 \tau_c^2}{2} \cosh^{-1} \frac{\alpha_0 \tau_c^2}{2} \approx 0,3$$

Laboratorijski bo kazal $t = \int \gamma d\tau = \int_0^\tau \cosh \frac{\alpha_0 \tau^2}{2} d\tau$, ker pa hitrost še zmeraj ni tako velika, lahko cosh razvijemo in dobimo

$$t \approx \int_0^\tau 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_0 \tau^2}{2} \right)^2 d\tau = \tau \left(1 + \frac{\alpha_0^2 \tau^4}{40 \tau_c^2} \right)$$

Ob času $\tau = \tau_c$ je tako laboratorijska ura

$$t = \tau_c \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{40} \tau_c^2 \right)$$