2. izpit iz Moderne fizike 1

14. maj 2021

čas reševanja 90 minut

1. Stanje delca v 3D opišemo z valovno funkcijo $\psi(r) = N\mathrm{e}^{-\alpha r}$, kjer je r radialna razdalja, N normalizacijska konstanta in α znan parameter.
   (a) Izračunaj N.
   (b) Izračunaj pričakovane vrednosti $\langle \vec{r} \rangle$, $\langle r \rangle$ in $\langle r^2 \rangle$ v tem stanju.
   (c) Kolikšni sta nedoločenosti $(\Delta \vec{r})^2$ in $(\Delta r)^2$?

   Rešitev:
   (a)
$$1 = \int \mathrm{d}\vec{r}^3 |\psi(r)|^2 = \int_0^\infty 4\pi r^2 \, N^2 \mathrm{e}^{-2\alpha r} \mathrm{d}r = \frac{\pi N^2}{\alpha^3} \tag{1}$$

   Od tod sledi
$$N = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \quad [1/4] \tag{2}$$

   Pri tem smo uporabili integral
$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, x^n \mathrm{e}^{-n} = \Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

   (b) Pričakovana vrednost $\langle \vec{r} \rangle = 0$ je nič zaradi sferične simetrije. Lahko se prepričamo po komponentah x, y, z:

$$\langle x \rangle = N^2 \int \mathrm{d}\vec{r}^3 x \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} = N^2 \int_0^\infty r^3 \mathrm{d}r \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} \int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta) \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos\varphi = 0 \tag{4}$$
$$\langle y \rangle = N^2 \int \mathrm{d}\vec{r}^3 y \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} = N^2 \int_0^\infty r^3 \mathrm{d}r \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} \int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta) \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\varphi = 0 \tag{5}$$
$$\langle z \rangle = N^2 \int \mathrm{d}\vec{r}^3 z \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} = N^2 \int_0^\infty r^3 \mathrm{d}r \, \mathrm{e}^{-2\alpha r} \int_{-1}^1 \mathrm{d}(\cos\theta) \cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 0 \tag{6}$$

   [1/4]

   Pričakovana vrednost radialne razdalje je
$$\langle r \rangle = \int_0^\infty 4\pi r^3 \, N^2 \mathrm{e}^{-2\alpha r} \mathrm{d}r = \frac{3}{2\alpha} \quad [1/8] \tag{7}$$

Pričakovana vrednost kvadrata radialne razdalje je

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty 4\pi r^4 \, N^2 \mathrm{e}^{-2\alpha r} \mathrm{d}r = \frac{3}{\alpha^2} \quad [1/8] \tag{8}$$

(c) Nedoločenosti izračunamo kot

$$(\Delta \vec{r})^2 = \left\langle r^2 \right\rangle - \langle \vec{r} \rangle^2 = \left\langle r^2 \right\rangle = \frac{3}{\alpha^2} \quad [1/8] \tag{9}$$

$$(\Delta r)^2 = \left\langle r^2 \right\rangle - \langle r \rangle^2 = \left\langle \vec{r}^2 \right\rangle = \frac{3}{\alpha^2} - \left(\frac{3}{2\alpha} \right)^2 = \frac{3}{4\alpha^2} \quad [1/8] \tag{10}$$

2. Na mirujočo protonsko tarčo usmerimo curek elektronov s spremenljivo kinetično energijo.
(a) Določi vrednost energije, pri kateri poleg začetnih delcev v končnem stanju, ustvarimo delec X z maso 4 GeV: $e^- p \to e^- pX$!
(b) Energijo vpadnega elektrona nastavimo na precej višjo vrednost in opazujemo dogodke, kjer vsi trije končni delci odletijo vzdolž smeri vpadnega curka in kjer sta gibalni količini cp_e in cp_p precej večji od mirovnih mas delcev, kar pa ne velja za delec X. Izračunaj E_X za tak primer!

Rešitev: Iz ohranitve invariante četverca gibalne količine dobimo

$$\begin{aligned} \left((E, E) + \left(m_p c^2, 0\right)\right)^2 &= E^2 + 2E m_p c^2 + m_p^2 c^4 - E^2 \\ &= m_p c^2 \left(m_p c^2 + 2E\right) = \left(m_p c^2 + m_X c^2\right)^2 \,, [1/4] \end{aligned}$$

kjer smo zanemarili $m_e \ll m_p$ in $m_e c^2 < p_e c$. Od tod sledi

$$E = m_p c^2 \frac{m_X}{m_p} \left(1 + \frac{m_X}{2m_p} \right) = 4 \text{ GeV} \left(1 + \frac{4}{2} \right) = 12 \text{ GeV} \, . [1/8]$$

Tokrat rešujemo v laboratorijskem sistemu in sicer z $E_e = p_e c, E_p = p_p c,$ [1/8]

$$\begin{aligned} E_0 + m_p c^2 &= E_e + E_p + E_X \,, \\ p_e c = E_0 &= (p_e' + p_c + p_X)\, c = E_e + E_p + p_X c \,, \end{aligned}$$

od koder sledi $m_p c^2 = E_X - p_X c$, oziroma z $E_X^2 - p_X^2 c^2 = m_X^2 c^4$ [1/4]

$$\begin{aligned} \left(m_p c^2 - E_X\right)^2 &= p_X^2 c^2 = E_X^2 - m_X^2 c^4 \,, \\ m_p^2 c^4 - 2 m_p c^2 E_X &= -m_X^2 c^4 \,, \\ E_X &= \frac{1 + (m_X/m_p)^2}{2} m_p c^2 = 9 \text{ GeV} \, . [1/4] \end{aligned}$$

3. Molekulo vodika H_2 opišemo kot rotator, sestavljen iz dveh atomov vodika na razdalji $r_0 = 0.074$ nm.
(a) Koliko znašajo energije prvih treh vzbujenih stanj rotacije, če privzamemo, da je H_2 toga molekula?
(b) Pri natančnejšem računu upoštevamo, da molekula ni toga, pač pa je potencialna energija med atomoma enaka $U(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$, kjer je $k = 3200$ eV nm^{-2}. Koliko odstotkov znašajo popravki k energijam iz točke (a) zaradi centrifugalne distorzije? Namig: privzemi, da so popravki majhni.

Rešitev:
a) Vztrajnostni moment nedeformirane molekule znaša $J_0 = mr_0^2/2$. Rotacijska kinetična energija pa je

$$W_\mathrm{r} = \frac{\langle L^2 \rangle}{2J_0} = \frac{\hbar^2}{mr_0^2} l(l+1) = \begin{cases} 15 \text{ meV} & \text{za } l = 1, \\ 45 \text{ meV} & \text{za } l = 2, \\ 90 \text{ meV} & \text{za } l = 3. \end{cases} \quad [1/4] \tag{11}$$

b) Pri rotaciji sta medatomska in centrifugalna sila izenačeni

$$m\langle \omega^2 \rangle \frac{r_0}{2} = U'(r) \tag{12}$$
$$= k\Delta r \quad [1/8] \tag{13}$$

pri čemer je ω kotna hitrost, $\Delta r = r - r_0$ pa raztezek medatomske vezi zaradi vrtenja molekule.

Vpliv raztezka Δr na rotacijsko kinetično energijo lahko za majhne spremembe izrazimo kot

$$\Delta W_\mathrm{r} = \frac{\partial W_\mathrm{r}}{\partial r_0} \Delta r \quad [1/8] \tag{14}$$

Iz enačbe (11) sledi

$$\frac{\partial W_\mathrm{r}}{\partial r_0} = -2\frac{W_\mathrm{r}}{r_0} \quad [1/8] \tag{15}$$

Ko to vstavimo v enačbo (14), dobimo

$$\frac{\Delta W_\mathrm{r}}{W_\mathrm{r}} = -2W_\mathrm{r}\frac{\Delta r}{r_0} \quad [1/8] \tag{16}$$
$$= -\frac{mr_0\langle \omega^2 \rangle}{k} \tag{17}$$

Tu smo v drugi vrstici upoštevali izraz (13) za Δr .

Sedaj izrazimo kvadrat kotne hitrosti preko vrtilne količine $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1) = J_0^2 \langle \omega^2 \rangle$

ter ga vstavimo v zgornjo enačbo,

$$\frac{\Delta W_{\mathrm{r}}}{W_{\mathrm{r}}} = -\frac{m}{k}\frac{\hbar^2 l(l+1)}{J_0^2} \tag{18}$$

$$= -\frac{4(\hbar c)^2}{mc^2\,k\,r_0^4}\,l(l+1) \tag{19}$$

$$= \begin{cases} -0.0034 & \text{za } l=1, \\ -0.010 & \text{za } l=2, \\ -0.021 & \text{za } l=3. \end{cases} \quad [1/4] \tag{20}$$

4. Atom vodika pripravimo v stanju z $n=2, l=1$ in $\langle s_z\rangle = -\hbar/2$. Z dipolnim sevalnim prehodom ga vzbudimo v stanje z $n=3$, ki je linearna kombinacija lastnih stanj, ortogonalnih na $\psi_{3,0}$ in $\psi_{3,2,\pm 1}$. Prav tako pri vseh meritvah l_z na vzbujenem stanju vedno izmerimo le dve različni vrednosti, z nasprotnim predznakom. Določi linarno superzicijo možnih stanj ter $\langle l^2\rangle$. Sedaj vključimo močno magnetno polje 10 T, ter izmerimo, da se povprečna energija vzbujenega stanja poveča za 0.3 meV. Določi razmerja intenzitet opaženih spektralnih črt.

   Rešitev: Vzbujeno stanje sestavljajo lastne funckije z $l=2$, $m_l = 0, \pm 2$ in $m_s = -1/2$, dipolni prehod namreč zahteva $\Delta l = 1$, $\Delta m_l = \pm 1, 0$ ter $\Delta m_s = 0$, torej

$$\psi_{3,2,m_s=-1/2} = c_0\,|m_l = 0\rangle + c_1\,|2\rangle + c_2\,|-2\rangle\ .[1/8]$$

   Ne glede na vrednost koeficientov c_i, velja

$$\langle l^2\rangle = \hbar^2 l(l+1)\left(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2\right) = 2\cdot 3\hbar^2 = 6\hbar^2\,.[1/8]$$

   Pri meritvi l_z izmerimo eno izmed treh možnih lastnih vrednosti $m_l = 0, \pm 2$ in ker dobimo zgolj dva različna rezultata z nasprotnim predznakom, velja $c_0 = 0$, oziroma

$$\psi = c_1\,|2\rangle + c_2\,|-2\rangle\,,[1/8] \qquad\qquad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1\,.[1/8]$$

   Ko postavimo atom v močno magnetno polje, bo spremenjena energija

$$\Delta E = \mu_B B\,\langle l_z + 2s_z\rangle = \mu_B B\left(2\left(|c_1|^2 - |c_2|^2\right) - 2\frac{1}{2}\left(|c_1|^2 + |c_2|^2\right)\right)\ [1/8]$$

$$= \mu_B B\left(2\left(2\,|c_1|^2 - 1\right) - 2\frac{1}{2}\right) = \mu_B B\left(4\,|c_1|^2 - 3\right) = 0.6\text{ meV}\left(4\,|c_1|^2 - 3\right)\ .[1/8]$$

   Tu smo uporabili

$$\mu_B B = \frac{e\hbar}{2m_e}\times 10\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \simeq \frac{0.2\text{ keV nm}\times 3\times 10^8\text{m/s}}{2\times 500\text{ keV}}\,10\frac{\text{eV s}}{\mathrm{m}^2} = 0.6\text{ meV}\,.$$

Iz meritve $\Delta E = 0.3$ meV, lahko določimo absolutno vrednost koeficienta c_1

$$|c_1|^2 = \frac{0.3\ \text{meV}}{4\mu_B B} + \frac{3}{4} \simeq \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}\,, \qquad\qquad |c_2|^2 = \frac{1}{8}\,.\text{[1/8]}$$

Razmerje intenzitete dveh črt dobimo iz zastopanosti stanj

$$\frac{|c_1|^2}{|c_2|^2} \simeq 7\,.\text{[1/8]}$$