3. izpit iz Moderne fizike 1

19. avgust 2020

čas reševanja 90 minut

1. Curek elektronov z energijo $E = 4\,\mathrm{eV}$ prehaja iz območja s potencialom $V = 0$ v območje s potencialom $V = -12\,\mathrm{eV}$. Kolikšna je prepustnost potencialne stopnice?

   Rešitev: Prepustnost potencialnega skoka smo izračunali na vajah/predavanjih. Dobimo:

$$T = \frac{4k_2k_1}{(k_2+k_1)^2} = \frac{8}{9}\,,$$

   kjer je $k_2 = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$ ter $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, kjer je $V_0 = 12$ eV.

2. Na atome vodika v osnovnem stanju svetimo z laserjem valovne dolžine 302 nm. Določi hitrost in smer premikanja atoma vodika, pri kateri bo prišlo do ionizacije. Predpostavimo, da vodik miruje, a se lahko atomi nahajajo tudi v vzbujenih stanjih. Določi najnižji sosednji stanji med katerima laser povzroči sevalni prehod.

   Rešitev: Zaradi Dopplerjevega pojava pride do zamika frekvence, oz. valovne dolžine laserske svetlobe, ki mora biti v mirovnem sistemu vodika enaka vezavni energiji, da pride do ionizacije. Tako dobimo

$$E_{\mathrm{Ry}} = \frac{hc}{\lambda_H} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\frac{hc}{\lambda_l}\,, \qquad \beta = \frac{\lambda_l^2 - \lambda_H^2}{\lambda_l^2 + \lambda_H^2} = 0,99\,.$$

   Do sevalnih prehodov bo prišlo, ko bo razlika med energijami vzbujenih stanj manjša od energije laserja, oziroma

$$\frac{hc}{\lambda_l} \gtrsim \frac{hc}{\lambda_H}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\,.$$

   Meja je ravno prehod med $n = 2$ in $n = 3$, kjer je

$$\frac{36}{5}\lambda_H = 656\ \mathrm{nm} \gtrsim \lambda_l\,.$$

3. Kolikšne so: povprečna vrednost energije, operatorja kvadrata vrtilne količine, in projekcije vrtilne količine na z os atoma vodika v stanju $\psi \propto R_{21}\left(\sqrt{2}Y_{1,0} - iY_{1,-1} + iY_{1,1}\right)$, kjer je $R_{21} \propto \frac{r}{r_B}e^{-r/2r_B}$ radialni del valovne funkcije, $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_{1,\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta e^{\pm i\phi}$? Kje v prostoru ($r$,$\theta$, ϕ) je verjetnostna gostota za nahajanje elektrona največja?

   Rešitev: Normirana valovna funkcija je sestavljena iz radialnega dela in kotnega dela $\psi = R_{2,1}Y$, kjer je

$$Y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}Y_{1,0} - iY_{1,-1} + iY_{1,1}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi\right).$$

   Energija tega stanje je $E = -13.6/2^2\,\mathrm{eV} = -3.4\,\mathrm{eV}$, saj je glavno kvantno število $n = 2$, kvadrat vrtilne količine je $< L^2 >= 2\hbar$, saj so vse tri lastne funkcije z $l = 1$, projekcija vrtilne količine pa $< L_z >= 0$, saj sta absolutni vrednosti koeficientov pred funkcijama $Y_{1,-1}$ ter $Y_{1,1}$ enaki. Gostota verjetnosti v radialni smeri je podana s funkcijo $R_{2,1}^2$, ta bo dosegla maksimum pri vrednosti $r = 2r_B$, medtem ko je kotni del podan z $|Y|^2$ in nam predstavlja gostoto verjetnosti da najdemo (pri danem radiju) elektron v izbranem delu prostorskega kota. Ta verjetnost je največja tam, kjer ima funkcija $|Y|^2$ maksimum, kar lahko z "bistrim pogledom" kar uganemo

$$\phi = \pm\pi/2,$$

   saj bo pri tej vrednosti koeficient pred $\sin\theta$ največji, kar nam bo omogočilo največjo vrednost funkcije Y. Maksimum pa bo pri $(\theta,\phi) = (3\pi/4, \pi/2)$, ter $(\theta,\phi) = (\pi/4, -\pi/2)$ V splošnem rešitev poiščemo z gradientom. Maksimum funkcije $|Y|^2$ bo tam, kjer bo maksimum (oz minimum) funkcije Y.

$$\frac{d}{d\phi}Y = 0 = (-\sin\theta\cos\phi)\,,$$

   iz česar dobimo rešitev $\phi = \pm\pi/2$.

$$\frac{d}{d\theta}Y = 0 = (-\sin\theta - \cos\theta\sin\phi)\,,$$

   iz česar dobimo rešitev $(\theta,\phi) = (3\pi/4, \pi/2)$, ter $(\theta,\phi) = (\pi/4, -\pi/2)$

4. Elektron postavimo v periodičen potencial $V = \Lambda(1 - \cos kx)$, kjer sta $\Lambda =$ keV in $1/k = 10$ nm. S pomočjo načela nedoločenosti oceni osnovno energijo vezanega stanja. Predpostavi $k\delta x \ll 1$ in določi vrednost k, do katere je približek še upravičen.

   Rešitev: Potencial razvijemo do drugega reda in dobimo približno kvadratično obliko

$$\langle E\rangle \simeq \frac{\delta p^2}{2m} + \Lambda\left(1 - 1 + \frac{(k\delta x)^2}{2}\right)$$

Z uporabo $\delta x \delta p > \hbar/2$ in odvajanjem po δp^2 dobimo

$$\frac{d\langle E\rangle}{d\delta p^2} = \frac{1}{2m} - \frac{\Lambda \hbar^2 k^2}{4(\delta p^2)^2} = 0\,, \qquad (\delta p c)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda m c^2}\hbar c k\,,$$

od koder sledi

$$\langle E\rangle \simeq \sqrt{\frac{\Lambda}{mc^2}\frac{\hbar c k}{2}} = 0.45\ \mathrm{eV}\,. \tag{1}$$

Približek je upravičen dokler $k\delta x < 1$, oziroma

$$k\delta x = \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\sqrt{\Lambda m c^2}}} < 1\,, \qquad k < \frac{2\sqrt{\Lambda m c^2}}{\hbar c} = 223\ \mathrm{nm}^{-1}\,.$$