1.b izpit iz Moderne fizike 1

28. januar 2019

čas reševanja 90 minut

1. Curek elektronov z energijo $E = 4\,\mathrm{eV}$ prehaja iz območja s potencialom $V = 0$ v območje s potencialom $V = -12\,\mathrm{eV}$. Kolikšna je prepustnost potencialne stopnice?

   Rešitev: Prepustnost potencialnega skoka smo izračunali na vajah/predavanjih:

   $$T = \frac{4k_2k_1}{(k_2 + k_1)^2} = \frac{8}{9},$$

   kjer je $k_2 = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$ ter $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, kjer je $V_0 = 12\,\mathrm{eV}$.

2. Izračunaj $\langle r^i \rangle$, kjer je i celo število, ter produkt nedoločenosti $\delta p \delta r$ za atom vodika v stanju $n = 3$, $l = 2$ in $m_l = 0$. Namig: uporabi virialni teorem ter upoštevaj, da je valovna funkcija

   $$\psi_{320} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi} r_B^{3/2}} \left(\frac{r}{r_B}\right)^2 \left(3\cos^2\theta - 1\right) e^{-r/(3r_B)}, \qquad r_B = \frac{\hbar c}{\alpha m_e c^2}.$$

   Rešitev: Radialni del valovne funckije preberem iz tabel, ali pointegriram kotni del, da dobim

   $$R_{32} = \frac{2^{3/2}}{27\sqrt{5} r_B^{3/2}} \left(\frac{r}{r_B}\right)^2 e^{-r/(3r_B)},$$

   Povprečna vrednosts $\langle r^i \rangle$ je tako:

   $$\langle r^i \rangle = \int R_{32}^2 r^i r^2 dr = \left(\frac{3r_B}{2}\right)^i \frac{(6+i)!}{6!},$$

   iz česar dobim nedoločenost $\delta r = 3\sqrt{7} r_B/2$. Ker je elektron vezan, je povprečna vrednost operatorja gibalne količine 0. Za izračun nedoločenosti gibalne količine potrebujem zgolj povprečno vrednost kvadrata gibalne količine. Uporabim virialni teorem, ki se za elektrostatski potencial glasi $2\langle T \rangle = \langle p^2/m \rangle = -\langle V \rangle$, iz česar sledi

$$\delta p^2 = \langle p^2\rangle = \hbar^2/r_B\langle r^{-1}\rangle = \frac{\hbar^2}{9r_B^2},$$

oziroma $\delta p\delta r = \sqrt{7}\hbar/2$.

3. V rotacijskem spektru molekul $\mathrm{Na}^+\mathrm{Cl}^-$ opazimo tri črte. Intenziteti prve in zadnje črte z $l = 0$ in $l = 2$ sta enaki ter za polovico manjši od sredinske z $l = 1$. Določi ravnovesno razdaljo r_0 med atomoma molekule, če je rotacijski prispevek k povprečni energiji 39 μeV. Za masi Na in Cl vzemi $m_{\mathrm{Na}} = 23\, m_p$ in $m_{\mathrm{Cl}} = 35\, m_p$. Privzemi, da je intenziteta črte l sorazmerna z verjetnostjo, da je molekula v stanju l.

   Rešitev: Iz intenzitet določimo $c_0^2 = \frac{1}{2}c_1^2 = c_2^2$ in iz normalizacije

$$c_0^2 + 2c_0^2 + c_0^2 = 4c_0^2 = 1, \qquad c_0^2 = \frac{1}{4}, \qquad c_1^2 = \frac{1}{2}, \qquad c_2^2 = \frac{1}{4},$$

   oziroma $\psi = \frac{1}{2}\psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2$, torej bo popravek k povprečni energiji

$$\langle E_{rot}\rangle = \frac{\hbar^2}{2m_r r_0^2}\left(0\, c_0^2 + 2\, c_1^2 + 6c_2^2\right) = \frac{5}{4}\frac{\hbar^2 c^2}{m_r c^2 r_0^2} = 39\,\mu\mathrm{eV}, \quad m_r = \frac{23\times 35}{23+35}m_p \simeq 14\ \mathrm{GeV}.$$

   Od tod dobimo, da je ravnovesna lega $r_0 =$ 0,3 nm.

4. Določi velikost popravka ls sklopitve k energiji iona helija He^+ v stanju $n = 3$ in $l = 2$ ter poljubnim m_l. Upoštevaj, da je $\langle\frac{1}{r^3}\rangle$ neodvisen od m_l. Skiciraj razcep energijskih nivojev za $B = 0$ in določi število stanj (degeneracijo) v posameznih vejah. Skiciraj še, kako se stanja razcepijo v šibkem B.

   Rešitev: Popravek k energiji zaradi ls sklopitve je

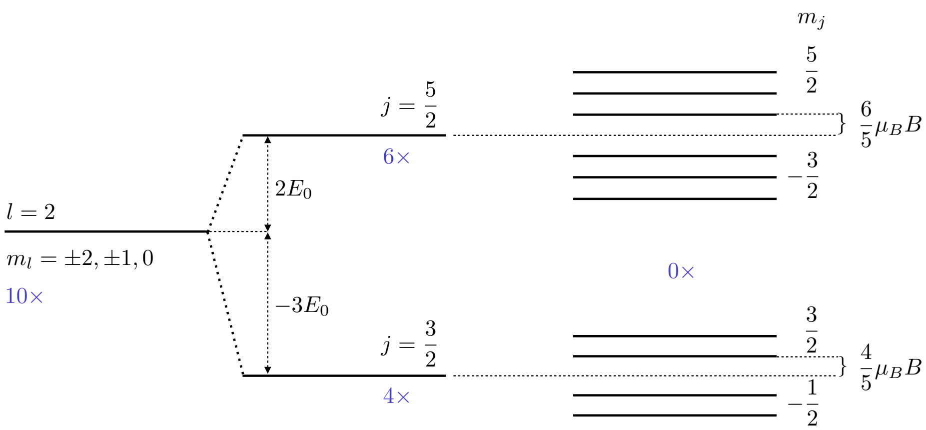
$$\Delta E_{ls} = \frac{Z\alpha\hbar c}{2m_e^2c^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\langle ls\rangle, \qquad \langle ls\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right).$$

   Število stanj v $n = 3, l = 2$ je $(2s+1)(2l+1) = 2\times 5 = 10$ in za njih velja

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle &= \frac{2\pi Z^3}{81^2\, 6\pi\, r_B^3}\int_0^\infty\left(\frac{r}{r_B}\right)^2 e^{-2r/(3r_B)}\frac{r^2}{r}\mathrm{d}r\int_{-1}^1\left(3\cos^2\theta - 1\right)^2\mathrm{d}(\cos\theta)\\ &= \frac{Z^3}{405 r_B^3}.\end{aligned}$$

   Pri seštevanju vrtilnih količin imamo dve možnosti $j = 3/2$ in $j = 5/2$, tako da je

$$\langle ls\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\begin{cases}2, & j = \frac{5}{2},\\ -3, & j = \frac{3}{2}.\end{cases}$$



Slika 1: Skica razcepa stanj zaradi ls sklopitve in v šibkem magnetnem polju, degeneracija je označena z modro.

V zgornji veji je $2j+1 = 6$ stanj, v spodnji pa 4, skupaj torej 10. Velikost razcepa je

$$\Delta E_{ls} = \frac{Z^4 \alpha \hbar^3 c^3}{810 (m_e c^2)^2 r_B^3} \frac{\langle ls \rangle}{\hbar^2} = \frac{Z^4 \alpha^4}{810} m_e c^2 \frac{\langle ls \rangle}{\hbar^2}. = 0{,}014 \text{ meV} \begin{cases} 2, & j = \frac{5}{2}, \\ -3, & j = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

V šibkem zunanjem magnetnem polju je energijski razcep

$$\Delta E_B = \mu_B g_{lsj} m_j B, \qquad g_{lsj} = \frac{3}{2} - \frac{l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} = \begin{cases} \frac{6}{5}, & j = \frac{5}{2}, \\ \frac{4}{5}, & j = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

skica energijskih nivojev pa je razvidna iz Slike 1.