1. Na trkalniku LHC s trki protonov nastajajo bozoni Z z maso 91 GeV, ki razpadejo v $Z \to \tau^+\tau^-$, kjer sta $m_\tau c^2 = 1{,}8$ GeV in lastni razpadni čas $\tau_\tau = 3 \times 10^{-13}$ s. Kolikšni sta energija in gibalna količina delcev τ v GeV pri dogodkih, kjer bozon Z miruje v laboratorijskem sistemu? Izvrednoti faktor γ in določi hitrost delcev τ. Izračunaj povprečno prosto pot, ki jo opravijo v detektorju.

   Rešitev: Pri dvodelčnem razpadu $Z \to \tau^+\tau^-$ sledi iz ohranitve gibalne količine

$$
\begin{aligned}
(M_Z, 0) &= (2E, p-p)\ , \text{[1/4 točke]} \\
E &= \frac{M_Z}{2} = 45{,}5\ \text{GeV}\,, \text{[1/8 točke]} \\
cp &= \sqrt{E^2 - m^2} \simeq 45{,}5\ \text{GeV}\,. \text{[1/8 točke]}
\end{aligned}
$$

   Z energijo in gibalno količino dobimo faktorja γ in hitrost $v = \beta c$, kjer sta

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{E}{m} = \frac{M_Z}{2m} = \frac{90\ \text{GeV}}{2 \times 1{,}8\ \text{GeV}} = 25{,}3\,, \text{[1/8 točke]} \\
\beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} = 0.9992\,. \text{[1/8 točke]}
\end{aligned}
$$

   Povprečna prosta pot je enaka produktu hitrosti in podaljšanega razpadnega časa

$$
l = \beta c\, \gamma\, \tau_\tau \simeq 1 \times 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 25 \times 10^{-12}\ \text{s} = 0{,}2\ \text{cm}\,. \text{[1/4 točke]}
$$

2. Zanima nas produkt nedoločenosti $\delta p \delta r$ za elektron v atomu vodika v vzbujenem stanju $n = 3$ in $l = 1$. Izračunaj $\langle r^n \rangle$ za poljuben $n \in \mathbb{Z}$ in ga uporabi za δr ter $\langle V \rangle$. $\langle p^2 \rangle$ lahko dobiš z direktnim računom ali z virialnim teoremom preko $\langle T \rangle$. Velja:

$$
\psi_{310} = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi r_B^7}}\, r^2 \left(6\frac{r_B}{r} - 1\right) \cos\theta \exp\left(-\frac{r}{3r_B}\right)\,, \qquad r_B = \frac{\hbar c}{\alpha m_e c^2}\,.
$$

   Razloži, zakaj vrednost m_l ni pomembna za zgornji izračun.

   Rešitev: Najprej izračunamo $\langle r^n \rangle$ po definiciji

$$
\langle r^n \rangle = \int \mathrm{d}V\, \psi^*_{nlm} r^n \psi_{nlm}\,,
$$

   od koder je jasno, da m_l ne vpliva ne rezultat, ker v valovno funkcijo vstopi s faktorjem $e^{i m_l \phi}$ in se pokrajša s kompleksno konjugacijo. Sedaj izračunamo

$$
\begin{aligned}
\langle r^n \rangle &= 2\pi \frac{1}{81^2} \frac{2}{\pi r_B^7} \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, \cos^2\theta}_{=2/3} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2\, r^n\, r^4 \left(6\frac{r_B}{r} - 1\right)^2 \exp\left(-\frac{2r}{3r_B}\right) \\
&= \frac{3^{n-2}}{2^{n+4}}\, r_B^n \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{n+6} \left(\frac{4}{t} - 1\right)^2 e^{-t}\,,
\end{aligned}
$$

kjer smo trivialno integrirali po ϕ, izvedli integral po $\mathrm{d}\cos\theta$ in uvedli novo spremenljivko za eksponent $t = 2r/(3r_B)$. V preostalem delu uporabimo definicijo gamma funkcije za cela števila

$$\begin{aligned}\langle r^n\rangle &= \frac{3^{n-2}}{2^{n+4}}\, r_B^n (n+4)!\,(16 - 8(n+5) + (n+5)(n+6)) \\ &= \frac{3^{n-2}}{2^{n+4}}\left(n^2+3n+6\right)(n+4)!\, r_B^n\,, \text{[1/4 točke]}\end{aligned}$$

Ta splošni izraz lahko izvrednotimo za $n = 1, 2$ in $n = -1$, da dobimo

$$\langle r\rangle = \frac{25}{2}\, r_B\,, \text{[1/8 točke]} \qquad \langle r^2\rangle = 180\, r_B^2\,, \text{[1/8 točke]}$$

$$\delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle} = \frac{\sqrt{95}}{2}\, r_B\,, \text{[1/8 točke]} \quad \langle V\rangle = -\alpha\hbar c\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = -\frac{\alpha\hbar c}{9r_B}\,.\text{[1/8 točke]}$$

Z uporabo virialnega teorema dobimo

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = -\frac{\alpha\hbar c}{18 r_B}\,,$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{9\, r_B^2}\,, \text{[1/8 točke]} \qquad \delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{9}\, r_B}\,,$$

in končno produkt nedoločenosti

$$\delta r\delta p = \frac{\sqrt{95}}{3}\frac{\hbar}{2}\,.\text{[1/8 točke]}$$

3. Milijon elektronov postavimo v harmonični potencial $kx^2/2$ tako, da je ob času $t = 0$ celoten vzorec v vzbujenem stanju z lastno energijo pri $n = 3$. Po času $t = 0{,}36\,\mu\mathrm{s}$ izmerimo 700.000 elektronov v stanju z $n = 3$. Določi k ob predpostavki, da so se prehodi zgodili zaradi električnega dipolnega sevanja. Kolikšna je valovna dolžina izsevanih fotonov? Velja:

$$\langle i|x|j\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{j+1}\,\delta_{i\,j+1} + \sqrt{j}\,\delta_{i\,j-1}\right)\,, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}\,.$$

Rešitev: Število elektronov v stanju z $n = 3$ v odvisnosti od časa je podana z eksponentno odvisnostjo. Iz vhodnih podatkov lahko določimo razpadni čas

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}\,, \qquad \tau = \frac{t}{\ln\left(N_0/N(t)\right)} = \frac{0{,}36\,\mu\mathrm{s}}{\ln(1/0{,}7)} = 1{,}01\,\mu\mathrm{s}\,.\text{[1/8 točke]}$$

Razpadni čas pri dipolnih sevalnih prehodih za harmonski oscilator je enak

$$\tau^{-1} = \frac{3\alpha}{3\hbar}E_{12}^3\left(\frac{x_{12}}{\hbar c}\right)^2\,, \quad E_{12} = \hbar\omega(3-2) = \hbar\omega\,, \text{[1/8 točke]} \qquad x_{12} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{m\omega}}\,, \text{[1/8 točke]}$$

$$\tau = \frac{(mc^2)^2}{2\alpha\,\hbar c\, kc} \qquad k = \frac{(mc^2)^2}{2\alpha\,\hbar c\,\tau c} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{nm}^2}\,, \text{[1/4 točke]}$$

kjer smo uporabili $\omega^2 = k/m$ ter splošen izraz za matrični element

$$x_{12} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1}\delta_{m\,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m\,n-1} \right) \xrightarrow[m=3]{n=2} \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}} . \text{[1/8 točke]}$$

Valovna dolžina izsevanega fotona je

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{hc}{\hbar\omega(3-2)} = 2\pi\sqrt{\frac{mc^2}{k}} = 8{,}3\,\mu\text{m}. \text{[1/4 točke]}$$

4. Poglejmo si razcep energijskih nivojev zaradi sklopitve spin-tir za nekaj vrednosti spina $s = 1/2$ ali $s = 1$ ter orbitalne vrtilne količine $l = 1$ ali $l = 2$, torej štiri možne kombinacije (l, s). Za vsak par (l, s) določi j_{min}, j_{max} ter dovoljene j. Izračunaj število stanj (degeneracijo) n_j in skalarni produkt $\langle ls \rangle$ za vse vrednosti j pri posamezni kombinaciji (l, s). Pokaži, da je za vsak par (l, s) povprečni popravek k energiji, izpovprečen po vseh vrednostih j in utežen s številom stanj, enak nič:

$$\langle \Delta E_{ls} \rangle = \frac{\sum_j n_j \Delta E_{ls}(j)}{\sum_j n_j} = 0 \,, \qquad \forall (l, s) \,.$$

Rešitev: Za vsak par vrednosti (l, s) velja $j_{\text{min}} = |l - s|$, $j_{\text{max}} = l + s$, možne vrednosti za j gredo on j_{min} do j_{max} v korakih po 1, medtem ko je degeneracija za vsako vejo enaka $n_j = 2j + 1$. Splošna formula za povprečni skalarni produkt je

$$\langle ls \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right) \,.$$

Za vsako od štirih možnih kombinacij določimo $j_{\text{min,max}} = |l - s|\,, l + s$, vse možne vrednosti j, število stanj n_j ter skalarni produkt $\langle ls \rangle$:

	$s = 1/2, l = 1$	$s = 1/2, l = 2$	$s = 1, l = 1$	$s = 1, l = 2$
j_{min}	$1/2$	$3/2$	0	1 [1/8 točke]
j_{max}	$3/2$	$5/2$	2	3 [1/8 točke]
j	$\{1/2, 3/2\}$	$\{3/2, 5/2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{1, 2, 3\}$ [1/8 točke]
$n_j = 2j + 1$	$\{2, 4\}$	$\{4, 6\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{3, 5, 7\}$ [1/8 točke]
$\langle ls \rangle / \hbar^2$	$\{-1, 1/2\}$	$\{-3/2, 1\}$	$\{-2, -1, 1\}$	$\{-3, -1, 2\}$ [1/4 točke]

Za povprečni popravek k energiji, utežen s številom stanj na posamezni veji za nek j velja

$$\langle \Delta E_{ls} \rangle \propto \frac{\sum_j n_j \langle ls \rangle}{\sum_j n_j} \stackrel{?}{=} 0 \,,$$

ker je proporcionalna konstanta pri $\Delta E_{ls}(j)$, ki pomnoži $\langle ls \rangle$ in vključuje $\langle r^{-3} \rangle$, neodvisna od j, medtem ko držimo (l, s) konstantni. Ko izvrednotimo popravke za vrednosti v zgornji tabeli, dobimo da je povprečje nič. [1/4 točke]

	$s=1/2, l=1$	$s=1/2, l=2$
$\sum_j n_j \langle ls \rangle$	$2\times(-1)+4\times 1/2=\mathbf{0}$	$4\times(-3/2)+6\times 1=\mathbf{0}$

	$s=1, l=1$	$s=1, l=2$
$\sum_j n_j \langle ls \rangle$	$1\times(-2)+3\times(-1)+5\times 1=\mathbf{0}$	$3\times(-3)+5\times(-1)+7\times 2=\mathbf{0}$

Ta rezultat velja v splošnem.