1.b izpit iz Moderne fizike 1

25. januar 2021

čas reševanja 90 minut

1. Molekulo NaCl obravnavamo kot iona Na^+ in Cl^- na razdalji $a = 0{,}25$ nm. Molekulo vzbudimo v rotacijsko vzbujeno stanje z $l = 1$ in $m = 0$. Kolikšen je povprečni življenjski čas, preden zaradi dipolnega prehoda preide v osnovno stanje? Kolikšna je energija pri prehodu izsevanega fotona? Relativna masa Na je 23, Cl pa 35.

   Rešitev: Molekula NaCl se vrti okoli skupnega težišča Na^+ in Cl^- ionov. Vztrajnostni moment molekule je $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$, kjer sta r_1 in r_2 razdalji ionov do skupnega težišča, pri čemer torej velja $m_1 r_1 = m_2 r_2$ in $r_1 + r_2 = a$. Od tod sledi vztrajnosti moment molekule kot

$$J = ma^2, \tag{1}$$

   kjer je m reducirana masa sistema,

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 13.9\,u \quad [1/8 \text{ točke}] \tag{2}$$

   pri čemer je $m_1 = 23\,u$, $m_2 = 35\,u$ in $u = 930$ MeV$/c^2$ atomska enota mase ($\approx$ masa protona).

   Rotacijska energija molekule je

$$W_l = \frac{\langle L^2 \rangle}{2J} = \frac{\hbar^2}{2J}\, l(l+1) \tag{3}$$

   kjer je $\langle L^2 \rangle = \hbar^2\, l(l+1)$ pričakovana vrednost kvadrata vrtilne količine. Pri prehodu molekule iz stanja $l = 1$ v osnovno stanje $l = 0$, se izseva foton z energijo

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_{l=1} - W_{l=0} = \frac{\hbar^2}{ma^2} = \frac{(\hbar c)^2}{13.9\,uc^2\,a^2} \\ &= 4.8 \times 10^{-5}\,\text{eV} \quad [1/8 \text{ točke}] \end{aligned} \tag{4}$$

   Za določitev življenjskega časa vzbujenega stanja, moramo izačunati matrični element, zato pa potrebujemo valovni funkciji obeh stanj. Valovni funkciji rotatorja v stanjih $l = 0$, $m = 0$ in $l = 1$, $m = 0$ sta sferična harmonika

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{in} \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad [1/8 \text{ točke}] \tag{5}$$

Dipolni moment molekule je vektor, velikosti $p = ea$, ki ga po komponentah zapišemo kot

$$\vec{p} = ea(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \quad \text{[1/8 točke]} \tag{6}$$

Matrični element dipolnega momenta pri prehodu iz prvega vzbujenega stanja v osnovno je

$$\vec{p}_{01} = \int Y_{00}^* \,\vec{p}\, Y_{01}\, \mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

$$= \frac{\sqrt{3}ea}{4\pi} \int (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\cos\theta\, \mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\varphi \tag{8}$$

[1/8 točke]

Integracija po φ je enaka 0 za x in y komponenti. Neničelna je le z komponenta

$$p_{01,x} = 0 \tag{9}$$

$$p_{01,y} = 0 \tag{10}$$

$$p_{01,z} = \frac{ea}{\sqrt{3}} \quad \text{[1/4 točke]} \tag{11}$$

Tako je kvadrat matričnega elementa enak $(p_{01})^2 = (p_{01,z})^2 = (ea)^2/3$.

Obratna vrednost razpadnega časa je

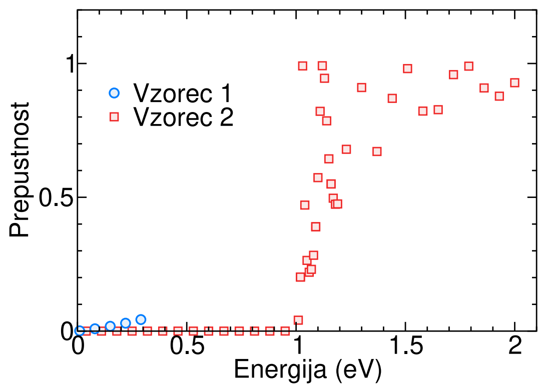
$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{01}^3 (p_{01})^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 \hbar} \tag{12}$$

$$= \frac{4\alpha}{3\hbar}\Delta W^3 \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\hbar c}\right)^2 \tag{13}$$

$$= 8.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{14}$$

Od tod sledi razpadni čas $\tau = 1.1 \times 10^6\,\mathrm{s} \approx 13$ dni.

2. Na plasteh molekul sipamo curek elektronov z energijo E in merimo prepustnost. Pri vzorcu 1 lahko merimo le pri nizkih energijah in ugotovimo, da prepustnost linearno narašča z energijo, in sicer $T = aE$, kjer je $a = 0{,}10/\mathrm{eV}$. Vzorec 2, ki je nekajkrat debelejši, pa dopušča tudi meritve visokih energij, glej sliko obeh meritev. Vzorca obravnavaj kot potencialni plasti in s pomočjo podane slike določi, koliko znaša potencial plasti in kako debela je plast pri vzorcu 1.



Rešitev: Plasti molekul obravnavamo kot potencialni plasti višine V_0, pri čemer imata vpadni in prepuščenih curek elektronov zunaj plasti valovni število k, znotraj pa k', in sicer

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{15}$$

$$k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{16}$$

Uporabimo izraz s predavanj oz. vaj za prepustnost na potenticalni plasti/jami širine d, ki je enak

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k'^2 - k^2}{2kk'}\right)^2 \sin^2 k'd} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{17}$$

in velja za poljubne d, k in k' (tudi imaginaren).

S slike vidimo, da je pri debeli plasti (vzorec 2), prepustnost enaka 0 vse do praga $E_{\text{min}} = 1$ eV, od koder poskoči na 1. Očitno je tuneliranje pod pragom zanemarljivo, tako da je potencial plasti enak $V_0 = 1$ eV. [1/4 točke]

O tem se lahko prepričamo tudi matematično preko enačbe (17). Za $T = 1$, mora biti $\sin k'd = 0$, oziroma $k' = 0$, saj imamo opravka s prvim maksimumom (najnižji možni k'). Iz enačbe (16) potem sledi da je $V_0 = E_{\text{min}} = 1$ eV.

Tanjša plast (vzorec 1) pa prepušča tok elektronov tudi pri manjših energijah, se pravi imamo opravka s tuneliranjem. Izraz (17) izrazimo z energijami, tako da vanj vstavimo enačbi za k in k' in dobimo

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} d\right)} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{18}$$

pri čemer smo še upoštevali da je $E < V_0$, torej uporabili $\sin(ix) = i\sinh(x)$.

Zanimajo nas le zelo nizke energije ($E \ll V_0$), zato lahko izraz poenostavimo

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{V_0}{4E} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} d\right)} \tag{19}$$

$$\approx \frac{4}{V_0 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} d\right)} E \quad \text{[1/8 točke]} \tag{20}$$

pri čemer smo upoštevali, da je drugi člen v imenovalcu v prvi vrstici precej večji od 1. Od tod hitro vidimo, da izmerjeni sorazmetnostni koeficient a ustreza

$$a = \frac{4}{V_0 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} d\right)} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{21}$$

od koder pa lahko izračunamo debelino d vzorca 1. Zgornji izraz preoblikujemo v

$$\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} d\right) = \frac{4}{aV_0} = 40 \tag{22}$$

Enačbo lahko eksaktno rešimo z uporabo $\sinh^{-1}$ funkcije, lahko pa aproksimiramo $\sinh x \approx e^x/2$, saj vidimo, da je $x \gg 1$,

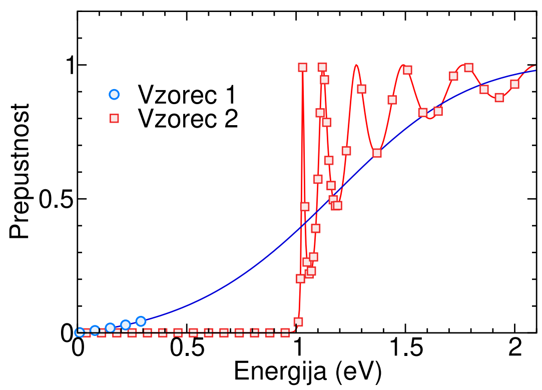
$$\frac{1}{4} \exp\left(\frac{2\sqrt{2mV_0}}{\hbar} d\right) \approx \frac{4}{aV_0} \tag{23}$$

Od tod pa sledi

$$d = \frac{\hbar c}{\sqrt{8mc^2 V_0}} \ln\left(\frac{16}{aV_0}\right) \tag{24}$$

$$= 0.50 \text{ nm} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{25}$$

Dodatek: Za boljšo predstavo glede zgornjega eksperimenta lahko sedaj uporabimo enačbo (18) in vrišemo celotni krivulji. Za vzorec 1 ($d = 0.5$ nm) in za vzorec 2 ($d = 3.5$ nm; ne izvemo iz naloge).



3. Rotator je v stanju $l = 1$ kot kombinacija stanj z $m = 0$ in 1. Izmerjena povprečna projekcija vrtilne količine na os y je $3/(10\sqrt{2})\,\hbar$ in na os z je $3/10\,\hbar$. Določi verjetnost, da pri meritvi projekcije na os z izmerimo vrednost nič. Napovej povprečno vrednost projekcije na os x in celotni kvadrat vrtilne količine.
Namig: $\int Y^*_{l'm'}\hat{l}_{x,y}Y_{lm} = \{1, \pm 1/i\}_{x,y}\hbar/2\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\delta_{l'l}\delta_{m'm\pm 1}$.
Rešitev: Valovna funkcija je linearna kombinacija

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(Y_{10} + a\,e^{-i\varphi}\,Y_{11}\right)\,. \quad \text{[+ normalizacija = 1/4 točke]} \tag{26}$$

Iz meritve povprečne projekcije vrtilne količine na os z, dobimo

$$\langle l_z\rangle = \hbar\frac{a^2}{1+a^2} = \hbar\frac{3}{10}\,, \qquad a = \sqrt{\frac{3}{7}}\,. \quad \text{[1/8 točke]} \tag{27}$$

Verjetnost, da izmerimo $\langle l_z\rangle = 0$, je podana s kvadratom koeficienta pred Y_{10} in je enaka $1/(1+a^2) = 7/10$ [1/8 točke]. Iz projekcije na os y sledi fazni zamik φ

$$\langle l_y\rangle = \frac{1}{1+a^2}\int d\Omega\left(ae^{i\varphi}Y^*_{11}\hat{l}_yY_{10} + ae^{-i\varphi}Y^*_{10}\hat{l}_yY_{11}\right) \quad \text{[1/8 točke]} \tag{28}$$

$$= \frac{a}{1+a^2}\frac{\hbar}{2i}\left(\sqrt{2}e^{i\varphi} - \sqrt{2}e^{-i\varphi}\right) = \frac{a}{1+a^2}\hbar\sqrt{2}\sin\varphi \quad \text{[1/8 točke]} \tag{29}$$

$$= \hbar\frac{3}{10}\frac{\sqrt{2}}{a}\sin\varphi = \hbar\frac{3}{10\sqrt{2}}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{3}{28}}\,. \tag{30}$$

Napovedani povprečji za projekciji na os x in z sta

$$\langle l_x\rangle = \frac{a}{1+a^2}\hbar\sqrt{2}\cos\varphi = \hbar\frac{3}{10}\frac{\sqrt{2}}{a}\sqrt{1-\sin\varphi^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,, \quad \text{[1/8 točke]} \tag{31}$$

$$\langle l^2\rangle = \hbar^2 2\frac{1+a^2}{1+a^2} = 2\hbar^2\,. \quad \text{[1/8 točke]} \tag{32}$$

4. Ion helija He^+ postavimo v magnetno polje in natančno merimo energijske nivoje. Kolikšen je popravek zaradi sklopitve ls $\Delta E_{ls} = Z\alpha\hbar c/(2m_e^2c^2)\,\langle r^{-3}\rangle\,\langle ls\rangle$ v stanju $n = 3, l = 2$ ter poljubnim m_l? Skiciraj razcepe in število stanj pri $B = 0$ in v močnem B. Pomagaš si lahko z valovno funkcijo za vodik:
$\psi_{320} = 1/(81\sqrt{6\pi}r_B^{3/2})\,(r/r_B)^2\,(3\cos^2\theta - 1)\,e^{-r/(3r_B)}\,,\ r_B = \hbar c/(\alpha m_e c^2)\,.$
Rešitev: Popravek k energiji zaradi ls sklopitve je

$$\Delta E_{ls} = \frac{Z\alpha\hbar c}{2m_e^2c^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\langle ls\rangle,$$
$$\langle ls\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right).$$

Namesto enega protona v atomu vodika sta v He^+ ionu dva protona. To spremembo najlažje upoštevamo tako, da v izrazih za atom vodika spremenimo $\alpha \to Z\alpha$, oziroma $r_B \to r_B/Z$ [1/8 točke]. Število stanj v $n=3, l=2$ je $(2s+1)(2l+1) = 2\times 5 = 10$ [1/8 točke] in za njih velja

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \frac{2\pi Z^3}{81^2\, 6\pi\, r_B^3} \int_0^\infty \left(\frac{r}{r_B}\right)^2 e^{-2r/(3r_B)} \frac{r^2}{r} \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \left(3\cos^2\theta - 1\right)^2 \mathrm{d}(\cos\theta) \\ &= \frac{Z^3}{405 r_B^3}. \quad \text{[1/4 točke]}\end{aligned}$$

Pri seštevanju vrtilnih količin imamo dve možnosti $j = 3/2$ in $j = 5/2$ [1/8 točke], tako da je

$$\langle ls \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \begin{cases} 2, & j = \frac{5}{2}, \\ -3, & j = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{[1/8 točke]}$$

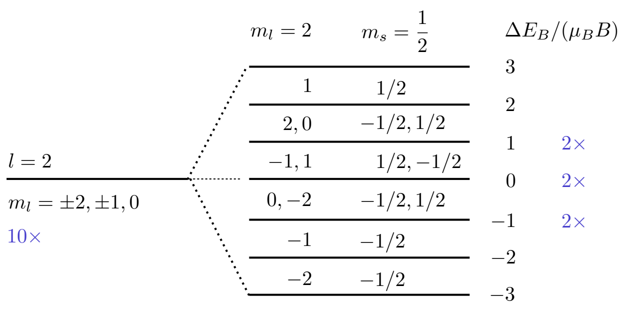
V zgornji veji je $2j+1 = 6$ stanj, v spodnji pa 4, skupaj torej 10. Velikost razcepa je

$$\Delta E_{ls} = \frac{Z^4 \alpha \hbar^3 c^3}{810 (m_e c^2)^2 r_B^3} \frac{\langle ls \rangle}{\hbar^2} = \frac{Z^4 \alpha^4}{810} m_e c^2 \frac{\langle ls \rangle}{\hbar^2}. = 0{,}014\ \mathrm{meV} \begin{cases} 2, & j = \frac{5}{2}, \\ -3, & j = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

V močnem zunanjem magnetnem polju je energijski razcep

$$\Delta E_B = \mu_B \left(m_l + 2m_s\right) B = \mu_B B \begin{cases} \pm 2 \pm 1, & m_l = \pm 2\,, \\ \pm 1 \pm 1, & m_l = \pm 1\,, \\ \pm 1, & m_l = 0\,, \end{cases}$$

kot je skicirano na Sliki 1.



Slika 1: Skica razcepa stanj v močnem magnetnem polju. Začetno deset-kratno degenerirano stanje se razcepi na 7 nivojev, od katerih so trije dva-kratno degenerirani. [1/4 točke]