1. Trkalnik LHC ustvarja bozone W z maso 80 GeV/c^2, ki med drugim razpadejo v skoraj brezmasni anti-nevtrino in mion z maso 0,1 GeV/c^2. Kolikšna je energija miona, če bozon W miruje v laboratorijskem sistemu? Izračunaj opaženo razpadno dolžino miona, če je njegov razpadni čas v mirovanju $\tau = 2{,}2\ \mu$s.

   Rešitev: Ker sta mion in anti-nevtrino v primerjavi z W skoraj brezmasna, vsak odnese polovico energije
$$E_\mu = E_{\overline{\nu}} = \frac{M_W}{2}.$$
   Razpadni čas miona se v laboratorijskem sistemu podaljša za
$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{c^2p^2}{E^2}}} = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} \simeq 400,$$
   kjer smo upoštevali $E_\mu^2 - (cp)^2 = m_\mu^2 c^4$. Tako dobimo razpadno dolžino
$$l_\mu = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2}\, c\tau_\mu = 400 \times\ 3 \times 10^8\ \mathrm{m}\ \times 2{,}2\ \mu\mathrm{s} = 264\ \mathrm{km}.$$

2. V absorpcijskem spektru molekule HCl opazimo črte prehodov med rotacijskimi stanji molekuje pri inverznih valovnih dolžinah 103,09 cm^{-1}, 123,65 cm^{-1}, 144,44 cm^{-1} in 164,90 cm^{-1}. Prehodu iz katerega rotacijskega stanja (l) ustreza posamezna črta? Kolikšen je razmik med jedroma v molekuli, če sta relativni atomski masi vodika in klora zapored 1 in 35?

   Rešitev: Energijski nivoji rotacijskih stanj so

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2J} l\,(l+1)\,.$$

   Ker so električni dipolni prehodi možni le z $\Delta l = 1$, opazimo ekvidistančne absorpcijske črte pri energijah

$$\Delta E_l = E_{l+1} - E_l = \frac{\hbar^2}{J}(l+1).$$

   Iz podatkov o inverznih valovnih dolžinah absorbcijskih črt določimo povprečen energijski razcep med njimi

$$\langle \Delta E\rangle = \langle \Delta E_{l+1} - \Delta E_l\rangle = hc \times 20{,}60\ \mathrm{cm}^{-1} = \frac{\hbar^2}{J}.$$

   Posamezne črte potem ustrezajo prehodom $l \to l+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= 103{,}09\ \mathrm{cm}^{-1} &&: && l = \frac{1/\lambda}{20{,}60\ \mathrm{cm}^{-1}} - 1 = 4,\\
\frac{1}{\lambda} &= 123{,}65\ \mathrm{cm}^{-1} &&: && l = 5,\\
\frac{1}{\lambda} &= 144{,}44\ \mathrm{cm}^{-1} &&: && l = 6,\\
\frac{1}{\lambda} &= 164{,}90\ \mathrm{cm}^{-1} &&: && l = 7.
\end{aligned}$$

   Ob upoštevanju

$$\langle \Delta E\rangle = \frac{\hbar^2}{J} = \frac{\hbar^2}{m_r a^2},$$

   kjer je $m_r = \frac{35}{36}u$ reducirana masa molekule HCl, določimo radaljo med jedroma

$$a = \sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi \times 35uc^2/36 \times 20{,}60\ \mathrm{cm}^{-1}}} = 130\ \mathrm{pm}.$$

3. Izračunaj relativni popravek k energiji osnovnega stanja atoma vodika,

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{r_{\mathrm{B}}^{3/2}} \mathrm{e}^{-r/r_{\mathrm{B}}},$$

zaradi končne razsežnosti jedra. Računaj v približku, kjer je naboj jedra enakomerno porazdeljen znotraj radija $r_j = 0{,}88$ fm, kar da potencialno energijo oblike

$$V(r) = -\alpha\hbar c \begin{cases} \frac{1}{r} & ; \quad r \geq r_j, \\ \frac{1}{r_j}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_j}\right)^2\right] & ; \quad r < r_j. \end{cases}$$

Namig: V najnižjem redu je popravek energije zaradi spremembe potenciala $\Delta V(r)$ enak $\Delta E = \int \psi^* \Delta V(r) \psi \mathrm{d}V$, $\alpha = 1/137$ pa je konstanta fine strukture..

Rešitev: Glede na Coulombski potencial je potencial $V(r)$ spremenjen za

$$\Delta V(r) = -\alpha\hbar c \begin{cases} 0 & ; \quad r \geq r_j, \\ \frac{1}{r_j}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_j}\right)^2 - \frac{r_j}{r}\right] & ; \quad r < r_j. \end{cases}$$

Popravek energije osnovnega stanja je potem

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int |\psi_{1,0,0}|^2 \Delta V(r) \mathrm{d}V \\ &= \frac{\alpha\hbar c}{\pi r_{\mathrm{B}}^3 r_j} \int_0^{r_j} \mathrm{e}^{-2r/r_{\mathrm{B}}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_j}\right)^2 + \frac{r_j}{r} - \frac{3}{2}\right] r^2 \mathrm{d}r \int_\Omega \mathrm{d}\Omega. \end{aligned}$$

Ob upoštevanju $r_j \ll r_{\mathrm{B}}$ lahko zgornji integral poenostavimo v

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{4\alpha\hbar c}{r_{\mathrm{B}}^3 r_j} \int_0^{r_j} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_j}\right)^2 + \frac{r_j}{r} - \frac{3}{2}\right] r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{5} \frac{\alpha\hbar c}{r_{\mathrm{B}}} \left(\frac{r_j}{r_{\mathrm{B}}}\right)^2 = \frac{4}{5} W_0 \left(\frac{r_j}{r_{\mathrm{B}}}\right)^2. \end{aligned}$$

Relativni popravek energije je potem

$$\frac{\Delta E}{W_0} = \frac{4}{5}\left(\frac{r_j}{r_{\mathrm{B}}}\right)^2 \simeq 2 \times 10^{-10}.$$

4. Elektron z energijo 2 eV se nahaja v osnovnem stanju harmonskega potenciala V_0 z lastnimi stanji

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} a}} H_n\left(\frac{x}{a}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \; a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Hipoma (elektron ostane v istem stanju) spremenimo potencial:

$$V_0 = \frac{m\omega^2}{2} x^2 \;\Rightarrow\; V_1 = V_0 + m\omega^2 b x \; (b = 0{,}2 \text{ nm}).$$

Določi verjetnost, da najdemo elektron v prvem vzbujenem stanju potenciala V_1.

Namig: Upoštevaj, da je $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) \exp\left(-y^2 + y y_0 - \frac{y_0^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \sqrt{\pi} y_0^n \exp\left(-\frac{y_0^2}{4}\right)$.

Rešitev: Potencial V_1 preoblikujemo v

$$V_1 = \frac{m\omega^2}{2}\left[(x+b)^2 - b^2\right],$$

torej gre za premaknjem harmonski potencial, katerega lastna stanja so

$$\psi_n(x+b) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} a}} H_n(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right),$$

$$y = \frac{x}{a} + y_0, \quad y_0 = \frac{b}{a} = \frac{b\sqrt{2 m_e c^2 E_0}}{\hbar c} \simeq 2,$$

začetno stanje pa je v premaknjenih koordinatah

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi} a}} \exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{2}\right).$$

Koeficienti v razvoju stanja $\psi_0(x)$ po lastnih funkcijah $\psi_n(x+b)$ so v splošnem

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \psi_n(x+b) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} n! \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) \exp\left(-y^2 + y y_0 - \frac{y_0^2}{2}\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{y_0^n}{\sqrt{2^{n+1} n!}} \exp\left(-\frac{y_0^2}{4}\right).$$

Verjetnost, da najdemo elektron v prvem vzbujenem stanju potenciala V_1 je

$$|c_1|^2 = \left[\frac{y_0}{2} \exp\left(-\frac{y_0^2}{4}\right)\right]^2 = e^{-2} \simeq 0{,}14.$$