1. Atom s prostim elektronom v orbitali z $n = 3$ in $l = 2$ postavimo v šibko magnetno polje, kjer velja $g\mu_\mathrm{B}B \ll \Delta W_{ls} = \lambda\langle\hat{\vec{l}}\cdot\hat{\vec{s}}\rangle$, $\lambda > 0$. Skiciraj energijske nivoje vseh stanj in izračunaj njihove premike glede na energijski nivo $E_3 = -W_0/9$!

Rešitev: Ker sta $l = 2$ in $s = 1/2$, je atom lahko v stanju ${}^2D_{3/2}$ ali ${}^2D_{5/2}$. Zaradi sklopitve ls sta oba multipleta energijsko premaknjena glede na energijo E_3. Iz

$$\langle\hat{\vec{l}}\cdot\hat{\vec{s}}\rangle = \hbar^2\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}$$

sledi

$$\Delta W_{ls}^{3/2} = -\frac{3}{2}\hbar^2\lambda, \qquad \Delta W_{ls}^{5/2} = \hbar^2\lambda.$$

Nadaljnje razcepe posameznega multipleta povzroči magnetno polje, kjer velja

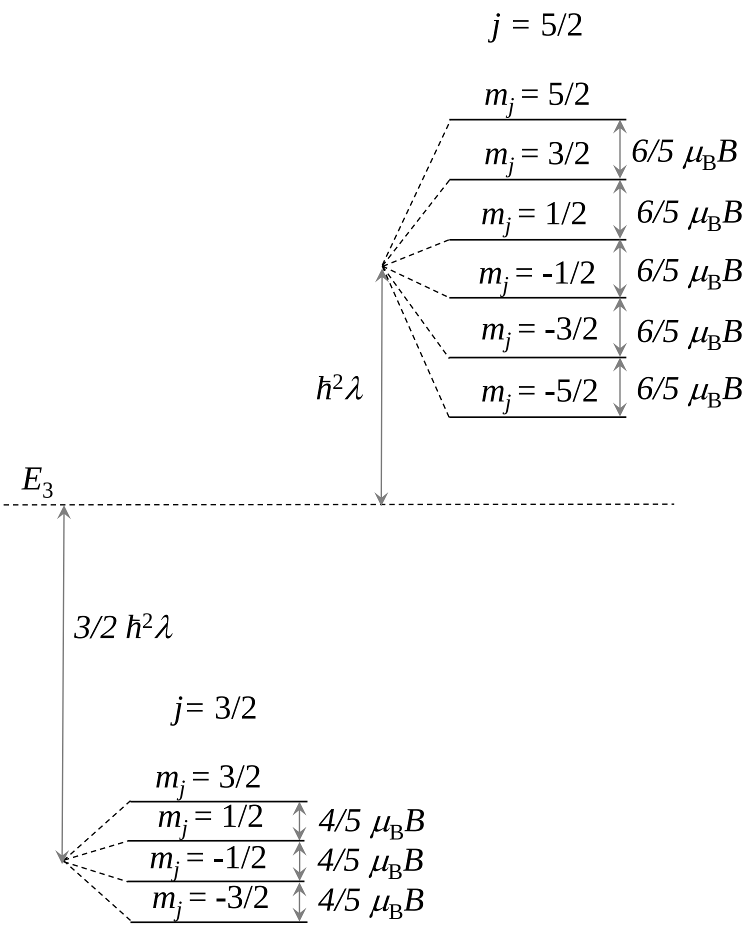
$$\Delta E_\mathrm{Z} = g_j\mu_B m_j.B$$

Energijski premik posameznega nivoja $\Delta W_j^{m_j} = \Delta W_{ls}^j + \Delta W_\mathrm{Z}^{m_j}$ izračunamo s pomočjo Landéjevih faktorjev

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}, \quad \Rightarrow \quad g_{3/2} = \frac{4}{5}, g_{5/2} = \frac{6}{5}$$

kot

$$\begin{aligned}
\Delta W_{3/2}^{3/2} &= -\frac{3}{2}\hbar^2\lambda + \frac{6}{5}\mu_B B, & \Delta W_{5/2}^{5/2} &= \hbar^2\lambda + 3\mu_B B,\\
\Delta W_{3/2}^{1/2} &= -\frac{3}{2}\hbar^2\lambda + \frac{2}{5}\mu_B B, & \Delta W_{5/2}^{3/2} &= \hbar^2\lambda + \frac{9}{5}\mu_B B,\\
\Delta W_{3/2}^{-1/2} &= -\frac{3}{2}\hbar^2\lambda - \frac{2}{5}\mu_B B, & \Delta W_{5/2}^{1/2} &= \hbar^2\lambda + \frac{3}{5}\mu_B B,\\
\Delta W_{3/2}^{-3/2} &= -\frac{3}{2}\hbar^2\lambda - \frac{6}{5}\mu_B B, & \Delta W_{5/2}^{-1/2} &= \hbar^2\lambda - \frac{3}{5}\mu_B B,\\
& & \Delta W_{5/2}^{-3/2} &= \hbar^2\lambda - \frac{9}{5}\mu_B B,\\
& & \Delta W_{5/2}^{-5/2} &= \hbar^2\lambda - 3\mu_B B,
\end{aligned}$$



$j = 5/2$
$m_j = 5/2$
$m_j = 3/2$
$m_j = 1/2$
$m_j = -1/2$
$m_j = -3/2$
$m_j = -5/2$
$6/5\ \mu_B B$
$6/5\ \mu_B B$
$6/5\ \mu_B B$
$6/5\ \mu_B B$
$6/5\ \mu_B B$
$\hbar^2\lambda$
E_3
$3/2\ \hbar^2\lambda$
$j = 3/2$
$m_j = 3/2$
$m_j = 1/2$
$m_j = -1/2$
$m_j = -3/2$
$4/5\ \mu_B B$
$4/5\ \mu_B B$
$4/5\ \mu_B B$

2. Elektron v osnovnem stanju je vezan na jedro zlata z $Z = 79$ in polmerom 7,3 fm. Kolikšna je verjetnost, da elektron najdemo v jedru? Valovna funkcija elektrona je oblike $\psi(r) = A\, e^{-Zr/r_B}$.

Rešitev: Valovno funkcijo normiramo

$$4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2Zr/r_B} r^2 \mathrm{d}r = 4\pi A^2 \left(\frac{r_B}{2Z}\right)^3 2! = 1, \qquad A = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi r_B^3}}.$$

Verjetnost, da se elektron nahaja v jedru je $(r = r_B/(2Z)t)$

$$\begin{aligned} P\left(r < r_0\right) &= \frac{1}{2}\int_0^{t_0} e^{-t} t^2 \mathrm{d}t = 1 - \frac{e^{-t_0}}{2}\int_0^\infty e^{-u}\left(u^2 + 2t_0 u + t_0^2\right) \\ &= 1 - e^{-t_0}\left(1 + t_0 + \frac{t_0^2}{2}\right) = 1{,}7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

kjer je $t_0 = 2Zr_0/r_B = 0{,}02$.

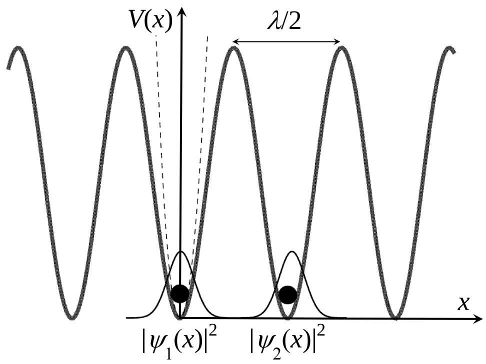
3. Pri Comptonovem sipanju odleti elektron s hitrostjo 0,9 c in v njegovem sistemu izmerimo, da se je foton sipal pravokotno glede na smer gibanja elektrona in da ima valovno dolžino 5 pm. Kolikšna je valovna dolžina vpadnega valovanja in sipani kot fotona glede na vpadno valovanje v laboratorijskem sistemu?

   Rešitev: Iz sistema elektrona transformiramo v sistem, ki sovpada z laboratorijskim, le da je zasukan z osjo x v smeri elektrona. S transverzalnim Dopplerjevim efektom dobimo $\lambda' = \lambda'_e/\gamma = 2{,}2$ pm in iz ohranitve energije v laboratorijskem sistemu

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \gamma m_e c^2 + \gamma \frac{hc}{\lambda'_e}, \qquad \lambda = \frac{\lambda'_e \lambda_c}{(\gamma - 1)\lambda'_e + \gamma \lambda_c} = 1{,}01 \text{ pm},$$

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{\lambda'_e/\gamma - \lambda}{\lambda_c}\right) = 58{,}9^\circ.$$

4. V eksperimentu s hladnimi atomi se v potencialu $V(x) = V_0 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}$ ($V_0 = 1$ neV, $\lambda = 1064$ nm), ki ga ustvarimo z dvema laserjema, nahajajo mirujoči atomi Cs ($m = 132{,}9u$) pri temperaturi nekaj nanokelvinov. Izračunaj energijo osnovnega enodelčnega stanja Cs atoma v izbrani jami, če je energija veliko manjša od V_0 in lahko potencial $V(x)$ v okolici minimuma nadomestiš s harmonskim potencialom! Kolikšen je prekrivalni integral $J = \int \psi_1^\dagger(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x$ med valovnima funkcijama Cs atomov v sosednjih jamah, ki sta razmaknjeni za $\lambda/2$?



Rešitev: V okolici minimuma (naprimer pri $x = 0$) potencial lahko razvijemo kot

$$V(x) \doteq V(x=0) + \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} x^2 = V_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 x^2,$$

od koder sledi

$$m\omega^2 = 2V_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V_0}{mc^2}}\frac{hc}{\lambda} = 0{,}15 \text{ neV}.$$

Prekrivalni integral je

$$\begin{aligned} J &= \langle\psi_0(x)|\psi_0(x-\lambda/2)\rangle = \sqrt{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-m\omega x^2/(2\hbar)}\mathrm{e}^{-m\omega(x-\lambda/2)^2/(2\hbar)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)}\mathrm{e}^{-m\omega(\lambda/2)^2/(4\hbar)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-m\omega(x-\lambda/4)^2/\hbar}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-m\omega(\lambda/2)^2/(4\hbar)}\langle\psi_0(x-\lambda/4)|\psi_0(x-\lambda/4)\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{mc^2E_0\lambda^2}{8(\hbar c)^2}\right) \approx \mathrm{e}^{-68}. \end{aligned}$$