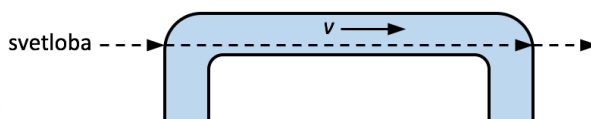


1.a izpit iz Moderne fizike 1

18. december 2020

čas reševanja 90 minut

1. Z natančnim merilcem merimo hitrost svetlobe pri prehodu skozi prozorno tekočino. Ko je tekočina v mirovanju, izmerimo njen lomni količnik $n = 1,33$. Nato tekočino po cevi spravimo v gibanje s hitrostjo $v = 2$ m/s v smeri širjenja svetlobe (glej skico). Za koliko se poveča hitrost svetlobe pri potovanju skozi gibajočo se tekočino, merjeno v laboratorijskem sistemu?



Rešitev: V inercialnem sistemu S' gibajoče vode, voda miruje in hitrost svetlobe je $c'_s = c/n$, kjer je n lomni količnik. Preko Lorentzove transformacije hitrost c'_s prevedemo v laboratorijski sistem S , ki se giblje s hitrostjo $-v$ glede na S' (t.i. obratna Lorentzova transformacija).

$$c_s = \frac{c'_s + v}{1 + \frac{c'_s v}{c^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{c}{n} \frac{1 + n\beta}{1 + \beta/n} \quad (2)$$

kjer je $\beta = v/c$. Razlika v hitrosti svetlobe skozi gibajočo in mirujočo tekočino je enaka

$$\Delta c = c_s - c'_s \quad (3)$$

$$= v \frac{n^2 - 1}{n^2 + n\beta} \quad (4)$$

$$\approx v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0.87 \text{ m/s} \quad (5)$$

pri čemer smo upoštevali $n\beta \ll n^2$ in ta člen v imenovalcu zanemarili.

Opomba: Uporaba napačne smeri Lorentzove transformacije (v namesto $-v$) v enačbi (1) privede do negativnega rezultata (-0.87 m/s), ki se na nekaj decimalk ujema s pravilnim rezultatom. Naknaden privzetek absolutne vrednosti Δc tako ne šteje k pravilnemu poteku reševanja.

2. V potencialu je ujet delec, katerega stanje opišemo kot superpozicijo osnovnega in prvega vzbujenega stanja:

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) + \psi_2(x)) .$$

Če označimo z E_1 energijo osnovnega, z E_2 pa energijo prvega vzbujenega stanja, kolikšna je pričakovana vrednost energije $\langle E \rangle$ in kolikšna njena nedoločenost δE ? Izračunaj nihajni čas τ pričakovane vrednosti lege delca $\langle x(t) \rangle$ okoli srednje vrednosti.

Rešitev: Zapišemo časovni razvoj funkcije

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \psi_2(x)e^{-i\omega_2 t}] \quad (6)$$

kjer je smo vpeljali $\omega_i = E_i/\hbar$. Od tod sledi

$$\langle E \rangle = \int \Psi^* \hat{H} \Psi dx = i\hbar \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx = \sum_i |c_i|^2 E_i = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad (7)$$

$$\langle E^2 \rangle = \int \Psi^* \hat{H}^2 \Psi dx = -\hbar^2 \int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} dx = \sum_i |c_i|^2 E_i^2 = \frac{E_1^2 + E_2^2}{2} \quad (8)$$

pri čemer smo s c_i označili koeficiente v razvoju. Nedoločenost energije je tako enaka

$$\begin{aligned} \delta E &= \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} \\ &= \frac{E_2 - E_1}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Pričakovana vrednost lege sledi kot

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \int \Psi^* \hat{x} \Psi dx \\ &= \frac{1}{2} \int x (\psi_1 e^{i\omega_1 t} + \psi_2 e^{i\omega_2 t}) (\psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int x [\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_1 \psi_2 (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t})] dx \\ &= \frac{1}{2} \int x (\psi_1^2 + \psi_2^2) dx + \left[\int x \psi_1 \psi_2 dx \right] \cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{aligned} \quad (10)$$

Prvi člen je neodvisen od časa in predstavlja srednjo vrednost lege, drugi člen pa predstavlja časovno modulacijo s frekvenco $\omega_1 - \omega_2$. Ustrezni nihajni čas je torej

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{h}{E_2 - E_1} \quad (11)$$

3. Opazujemo razpad K^+ mezona v njegovem mirovnem sistemu. Razpade lahko ali v anti-mion μ^+ in brezmasni nevtrino, $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, ali v $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$. Določi gibalno količino razpadnih produktov v težiščnem sistemu za oba primera. Kolikšna je energija nevtrina? Kolikšno gibalno količino μ^+ izmeri opazovalec, ki se giblje z $\beta = 0.6$ v smeri μ^+ ? $m_{K^+, \mu^+, \pi^+, \pi^0} = \{494, 106, 140, 135\}$ MeV/ c^2 .

Rešitev: Z ohranitvijo gibalne količine v težiščnem sistemu K^+ dobimo

$$(m_K c^2, 0) = (E_1, pc) + (E_2, -pc), \text{ kjer } E_{1,2}^2 - (pc)^2 = m_{1,2}^2 c^4. \quad (12)$$

Zgornjo enačbo preuredimo in kvadriramo, da dobimo

$$m_K c^2 = \sqrt{(pc)^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{(pc)^2 + m_2^2 c^4}, \quad (13)$$

$$m_K^2 c^4 - 2m_K c^2 \sqrt{(pc)^2 + m_1^2 c^4} + (pc)^2 + m_1^2 c^4 = (pc)^2 + m_2^2 c^4, \quad (14)$$

$$\left(\frac{m_K^2 c^4 + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2m_K c^2} \right)^2 = (pc)^2 + m_1^2 c^4, \quad (15)$$

$$\frac{p}{c} = \frac{\sqrt{m_K^4 - 2m_K^2 (m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}}{2m_K}. \quad (16)$$

Za zgornja dva primera dobimo $p_{\pi^+} = p_{\pi^0} = 205$ MeV/ c in $p_{\mu^+} = p_{\nu_\mu} = 236$ MeV/ c . Nevtrino je skoraj brezmasen, zato je $E_\nu = pc = 236$ MeV. Gamma faktor podaljšanja razpadnega časa ($\tau' = \gamma\tau$) za pion in anti-mion sta enaka

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{\sqrt{(pc)^2 + m^2 c^4}}{mc^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{mc} \right)^2} = \{1,8 \text{ in } 2,4\}. \quad (17)$$

Gibalna količina, ki jo izmeri gibajoči se opazovalec je enaka

$$p'c = \gamma (pc - \beta E) = \gamma \left(pc - \beta \sqrt{(pc)^2 + m^2 c^4} \right) \quad (18)$$

$$= \gamma pc \left(1 - \beta \sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{pc} \right)^2} \right) = 101 \text{ MeV}. \quad (19)$$

4. Elektronu v neskončni potencialni jami širino jame $[0, a/2]$ hipoma raztegnemo na $[0, a]$. Določi, s kolikšno verjetnostjo je v osnovnem oziroma v prvem vzbujenem stanju raztegnjene jame. Izračunaj povprečno energijo, produkt nedoločenosti lege in gibalne količine ter zapiši časovni razvoj.

$$\int_0^{a/2} dx \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{2a \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi(4 - n^2)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - (k + 1/2)^2)^2} = \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + 1/2)^2}{(1 - (k + 1/2)^2)^2}$$

Rešitev: Začetno valovno funkcijo ter lastna stanja lahko zapišemo kot

$$\psi = \sqrt{\frac{4}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}, \quad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (20)$$

Koeficiente v razvoju valovne funkcije dobimo z integralom

$$c_n = \int_0^{a/2} dx \psi \psi_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-(n/2)^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 2, \end{cases} \quad (21)$$

in 0 za ostale n . Integral za $n = 2$ dobimo trivialno iz normalizacije ψ

$$c_2 = \int_0^{a/2} dx \sqrt{\frac{8}{a^2}} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{a/2} dx \psi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Od tu sledijo verjetnosti za osnovno in vzbujeno stanje $P_{n=1} = |c_1|^2 = 32/(9\pi)^2 = 0,36$ in $P_{n=2} = |c_2|^2 = 1/2$. Z nastavkom $n = 2k + 1, k = 0, \dots, \infty$ preverimo normalizacijo

$$c_2^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - (k + 1/2)^2)^2} = 1. \quad (23)$$

Za lastna stanja velja $E_n = (\hbar n \pi)^2 / (2ma^2)$, torej je povprečna energija

$$\langle E \rangle = c_2^2 E_2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2 E_{2k+1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \left(\frac{1}{2} 2^2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2 (2k+1)^2 \right) \quad (24)$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \left(2 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + 1/2)^2}{(1 - (k + 1/2)^2)^2} \right) = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{ma^2}, \quad (25)$$

kar je seveda enako E_1 za potencialno jamo širine $a/2$, $\langle E \rangle = (\hbar \pi)^2 / (2m(a/2)^2)$. Povprečna $\langle x \rangle = a/4$, kar vemo iz oblike začetnega stanja, ter $\langle p \rangle = 0$ in $\langle p^2 \rangle = 2m\langle E \rangle = (2\hbar \pi/a)^2$. Ostane nam še

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{a/2} dx \psi^2 x^2 = \frac{a^2}{24\pi^2} (2\pi^2 - 3), \quad \delta x \delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2}. \quad (26)$$

S koeficienti c_n določimo časovni razvoj

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \frac{\psi_2}{\sqrt{2}} e^{-iE_2 t/\hbar} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \psi_{2k+1} e^{-iE_{2k+1} t/\hbar}. \quad (27)$$