2. kolokvij iz Moderne fizike 1

19. december 2017

čas reševanja 90 minut

1. Kolikšne so: pričakovana vrednost energije, operatorja kvadrata vrtilne količine ter projekcije vrtilne količine na z os atoma vodika v stanju $\psi = \left(\sqrt{2}\psi_{2,1,0} - i\psi_{2,1,-1} + i\psi_{2,1,1}\right)/2$? Poišči v katerih delih prostorskega kota je gostota verjetnosti elektrona največja.

   Rešitev:

   Normirana valovna funkcija je sestavljena iz radialnega dela in kotnega dela $\psi = R_{2,1}Y$, kjer je

   $$Y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}Y_{1,0} - iY_{1,-1} + iY_{1,1}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta - \sin\theta\sin\phi\right).$$

   Energija tega stanje je $E = -13.6/2^2\,\mathrm{eV} = -3.4\,\mathrm{eV}$, saj je glavno kvantno število $n = 2$, kvadrat vrtilne količine je $< L^2 >= 2\hbar$, saj so vse tri lastne funkcije z $l = 1$, projekcija vrtilne količine pa $< L_z >= 0$, saj sta absolutni vrednosti koeficientov pred funkcijama $Y_{1,-1}$ ter $Y_{1,1}$ enaki. Gostota verjetnosti v radialni smeri je podana s funkcijo $R_{2,1}^2$, medtem ko je kotni del podan z $|Y|^2$ in nam predstavlja gostoto verjetnosti da najdemo (pri danem radiju) elektron v izbranem delu prostorskega kota. Ta verjetnost je največja tam, kjer ima funkcija $|Y|^2$ maksimum, kar lahko z "bistrim pogledom" kar uganemo

   $$\phi = \pm\pi/2,$$

   saj bo pri tej vrednosti koeficient pred $\sin\theta$ največji, kar nam bo omogočilo največjo vrednost funkcije Y. Maksimum pa bo pri $(\theta, \phi) = (3\pi/4, \pi/2)$, ter $(\theta, \phi) = (\pi/4, -\pi/2)$ V splošnem rešitev poiščemo z gradientom. Maksimum funkcije $|Y|^2$ bo tam, kjer bo maksimum (oz minimum) funkcije Y.

   $$\frac{d}{d\phi}Y = 0 = \left(-\sin\theta\cos\phi\right),$$

   iz česar dobimo rešitev $\phi = \pm\pi/2$.

   $$\frac{d}{d\theta}Y = 0 = \left(-\sin\theta - \cos\theta\sin\phi\right),$$

   iz česar dobimo rešitev $(\theta, \phi) = (3\pi/4, \pi/2)$, ter $(\theta, \phi) = (\pi/4, -\pi/2)$

2. Elektron v potencialu $V = m\omega^2 x^2/2$ pripravimo v kombinaciji drugega in tretjega vzbujenega stanja, $n = 2, 3$. Povprečni odmik ob času $\omega t = \pi/4$ je

$$\langle x(t)\rangle = \frac{3\sqrt{15}}{16}a, \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \langle n|x|m\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m}\delta_{nm-1} + \sqrt{m+1}\delta_{nm+1}\right),$$

pri meritvi energije pa večkrat izmerimo E_2 kot E_3. Kolikšni sta verjetnosti, da izmerimo $E_{2,3}$ in kolikšen je razpadni čas za dipolni sevalni prehod med stanjema?

Rešitev: Povprečni odmik ob času ωt je

$$\begin{aligned}\langle \psi(t)|x|\psi(t)\rangle &= |c_2|^2\langle 2|x|2\rangle + |c_3|^2\langle 3|x|3\rangle + 2c_2c_3\cos\left(\frac{E_3-E_2}{\hbar}t\right)\langle 2|x|3\rangle \\ &= 2c_2c_3\cos\left(\frac{E_3-E_2}{\hbar}t\right)\sqrt{\frac{3}{2}}a = a\sqrt{3}c_2c_3 = \frac{3\sqrt{15}}{16}a,\end{aligned}$$

kjer smo uporabili $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$

$$\langle n|x|m\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m}\delta_{nm-1} + \sqrt{m+1}\delta_{nm+1}\right),$$

$$\langle 2|x|2\rangle = \langle 3|x|3\rangle = 0, \quad \langle 2|x|3\rangle = \langle 3|x|2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

Iz normalizacije $c_2^2 + c_3^2 = 1$, povprečnega odmika $c_2c_3 = 3\sqrt{5}/16$ in $c_2 > c_3$ dobimo

$$P_2 = c_2^2 = \frac{8+\sqrt{19}}{16} = 0{,}77, \qquad P_3 = c_3^2 = \frac{8-\sqrt{19}}{16} = 0{,}23.$$

Razpadni čas za sevalni prehod je

$$\tau = \frac{3\hbar}{4\alpha}\left(\frac{\hbar c}{\langle 2|x|3\rangle}\right)^2\frac{1}{\Delta E_{32}^3} = \frac{mc^2}{2\alpha\hbar\omega^2}, \qquad \omega_0 = \frac{mc^2}{2\alpha\hbar c}c = 5\times 10^{22}\ \text{Hz}.$$

3. Spinsko interakcijo dveh elektronov v stanju $|S, m_S\rangle$ sestavljenem iz eno-elektronskih $|s_1, m_{s1}\rangle, |s_2, m_{s2}\rangle$ stanj z enakima spinskima projekcijama na z os, opišemo z

$$\Delta\hat{H}_S = -\frac{\mathcal{J}}{\hbar^2}\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2 - 2B_z\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}\right),$$

kjer je B_z zunanje magnetno polje velikosti 1 T, $\mu_B = 0{,}06$ meV/T in $\mathcal{J} = 1$ meV. Kolikšen je popravek k energiji tega sistema? Upoštevaj, da so lastne energije funkcije lastnih vrednosti operatorjev kvadrata skupnega spina $\hat{S}^2 = (\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2$ ter njegove projekcije na z os $\hat{S}_z = \hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z}$.

Rešitev: Ker imata oba elektrona projekcijo $\pm 1/2$, je edina možnost za kvantni števili vsote spinov $S = 1, m_S = \pm 1$. Od tod sledi

$$\langle s_{1z}\rangle = \langle s_{2z}\rangle = \frac{\hbar m_S}{2} = \pm\frac{\hbar}{2},$$

medtem ko je

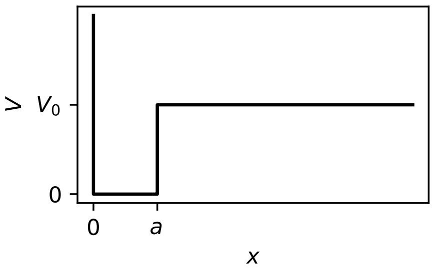
$$\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)\right) = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Popravek k energiji je

$$\Delta E = -\frac{\mathcal{J}}{4} \pm 2B_z\mu_B = -0.13\ \text{meV in } -0.37\ \text{meV},$$

za dva možna predznaka.

4. Kolikšna je energija osnovnega (nevzbujenega) stanja elektrona, ki se nahaja v potencialni jami, $V_0 = 10$ eV, $a = 1$ nm. Privzemi, da je energija osnovnega stanja $E \ll V_0$, tako da se valovna funkcija pri $x = a$ ne razlikuje dosti od valovne funkcije elektrona v neskončni potencialni jami.



Rešitev: Najprej poiščimo energijo osnovnega vezanega stanja v potencialni jami ($b = \infty$). Pri $x = 0$ ima valovna funkcija vrednost 0, zato je nastavek za valovno funkcijo v območju $[0, a]$

$$\psi_1 = Ae^{ikx} - Ae^{-ikx} = A_1 \sin kx$$

kjer je

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

v območju $[a, \infty]$ pa Schrodingerjevo enačbo reši nastavek

$$\psi_2 = A_2 e^{-\kappa(x-a)}$$

saj mora biti valovna funkcija omejena in končna, kjer je

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \kappa_0\sqrt{1 - k^2/\kappa_0^2}$$

kjer je

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = 16\,\text{nm}^{-1}$$

Valovna funkcija mora biti zvezno odvedljiva, iz česar dobimo pogoje za konstante

$$A_1 \sin ka = A_2$$
$$A_1 k \cos ka = -A_2 \kappa$$

Dobimo torej transcendentno enačbo za k,

$$\tan ka = -k/\kappa$$

ki pa jo v limiti majhnih energij (V_0 velik glede na E) lahko rešimo z razvojem. Vemo, da bo rešitev blizu rešitvi neskončne potencialne jame, zato razvijemo trigonometrični fukncij v okolici $ka = \pi$, saj to predstavlja osnovno stanje neskončne potencialne jame. Do prvega reda je $\sin ka \approx \pi - ka$, $\cos ka \approx -1$, ter $\kappa \approx \kappa_0$. Iz česar dobimo rešitev

$$k = \frac{\pi \kappa_0}{1 + \kappa_0 d} = 3\,\mathrm{nm}^{-1}$$

oziroma

$$E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = 0{,}34\,\mathrm{eV}.$$