2. izpit iz Moderne fizike 1

18. maj 2023

čas reševanja 90 minut

1. Mezon z maso 494 MeV/c^2 v mirovanju razpade na dva delca, katerih kinetični energiji izmerimo, in sicer $T_1 = 108$ MeV in $T_2 = 110$ MeV. Izračunaj masi novonastalih delcev!

   Rešitev:

   Velja ohranitev polne energije, kar lahko zapišemo kot

   $$m_0c^2 = m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 + T_2 \quad \text{[1/4 točke]} \tag{1}$$

   Poleg tega velja tudi ohranitev gibalne količine, in sicer imata oba nova delca po velikosti enaki gibalni količini, $P_1^2 = P_2^2$, saj odletita v nasprotnih si smereh. Iz tega sledi

   $$(m_1c^2 + T_1)^2 - (m_1c^2)^2 = (m_2c^2 + T_2)^2 - (m_2c^2)^2 \quad \text{[1/4 točke]} \tag{2}$$

   in z malo krajšanja dobimo

   $$2m_1c^2T_1 + T_1^2 = 2m_2c^2T_2 + T_2^2 \tag{3}$$

   Maso m_2 eliminiramo z uporabo enačbe (1) in po nekaj preureditvah dobimo izraz za m_1

   $$m_1c^2 = \frac{2m_0c^2T_2 - (T_1 + T_2)^2}{2(T_1 + T_2)} = 140 \text{ MeV} \quad \text{[1/4 točke]} \tag{4}$$

   Ker je problem simetričen na zamenjavo delcev, dobimo maso drugega delca z izmenjavo indeksov $1 \leftrightarrow 2$

   $$m_2c^2 = \frac{2m_0c^2T_1 - (T_1 + T_2)^2}{2(T_1 + T_2)} = 136 \text{ MeV} \quad \text{[1/4 točke]} \tag{5}$$

2. Pri proučevanju rotacijskega spektra plina CO_2 izmerimo najdaljše valovne dolžine $\lambda_1 = 1{,}28$ cm, $\lambda_2 = 0{,}63$ cm in $\lambda_3 = 0{,}43$ cm. Izračunaj dolžino vezi C=O!
   Poduk: CO_2 je linearna molekula O=C=O. Relativna atomska masa kisika je $M_\mathrm{O} = 16$, ogljika pa $M_\mathrm{C} = 12$.

Rešitev:
Molekulo CO_2 obravnavamo kot tog rotator, ki se vrti okoli C atoma. K vztrajnostnemu momentu prispevata le oba kisikova atoma in zato znaša $J = 2m_\mathrm{O}r^2$, kjer je m_O masa kisika, r pa C=O razdalja. [1/8 točke]

Rotacijske kinetične energije molekule so

$$W_l = \frac{\langle L^2\rangle}{2J} = \frac{\hbar^2}{4m_\mathrm{O}r^2}l(l+1) \quad \text{[1/4 točke]} \tag{6}$$

Molekula bo sevala/absorbirala fotone pri prehodu iz enega rotacijskega stanja v drugega (izbirno pravilo $\Delta l = \pm 1$) [1/8 točke], torej vsebuje spekter sledeče valovne dolžine λ_l

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda_l} &= W_l - W_{l-1} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{O}r^2}\,l \quad \text{[1/4 točke]} \end{aligned} \tag{7}$$

Masa atoma kisika je enaka $m_\mathrm{O} = M_\mathrm{O}mc^2$, kjer je $mc^2 = 930$ MeV energija atomske enote mase (približno kar masa protona). Uporabimo lahko kar najdaljšo valovno dolžino, λ_1, ki ustreza prehodu osnovnega v prvo vzbujeno stanje, $l = 1$ [1/8 točke]. Od tod izrazimo dolžino vezi r

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{\hbar c\lambda_1}{4\pi M_\mathrm{O}mc^2}} \\ &= 0{,}12\ \mathrm{nm} \quad \text{[1/8 točke]} \end{aligned} \tag{8}$$

3. Pri ionu helija He^+ merimo energijske nivoje. Kolikšen je popravek zaradi sklopitve ls v stanju $n = 2, l = 1$ ter poljubnim m_l? Izračunaj in skiciraj razcep teh nivojev, ko vklopimo magnetno polje gostote $B = 0{,}1$ T!
Namig: Pomagaš si lahko z rezultati za vodikov atom. Popravek zaradi sklopitve ls za vodik je $\Delta E_{ls} = \alpha\hbar c/(2m_e^2c^2)\,\langle r^{-3}\rangle\,\langle \mathbf{l}\cdot\mathbf{s}\rangle$, nekaj radialnih valovnih funkcij je:

$$\begin{aligned} R_{10} &= 2r_\mathrm{B}^{-3/2}\mathrm{e}^{-r/r_\mathrm{B}}\,, \\ R_{20} &= 2(2r_\mathrm{B})^{-3/2}\left(1 - \frac{r}{2r_\mathrm{B}}\right)\mathrm{e}^{-r/2r_\mathrm{B}}\,, \\ R_{21} &= 3^{-1/2}(2r_\mathrm{B})^{-3/2}\left(\frac{r}{r_\mathrm{B}}\right)\mathrm{e}^{-r/2r_\mathrm{B}}\,, \end{aligned}$$

Rešitev: Namesto enega protona v atomu vodika sta v He^+ ionu dva protona, torej $Z = 2$. To spremembo najlažje upoštevamo tako, da v izrazih za atom vodika spremenimo $\alpha \to Z\alpha$, oziroma $r_\mathrm{B} \to r_\mathrm{B}/Z$. [1/8 točke]

Spomnimo se, da je $r_\mathrm{B} = \hbar c/(\alpha m_e c^2)$. Pričakovano vrednost $1/r^3$ izračunamo lahko iz znane radialne funkcije za vodik, in sicer

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= Z^3 \int_0^\infty R_{21}^2(r) \frac{1}{r^3} r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{8}{24 r_\mathrm{B}^3} \int_0^\infty \frac{r}{r_\mathrm{B}} \mathrm{e}^{-r/r_\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}r}{r_\mathrm{B}} \\ &= \frac{1}{3 r_\mathrm{B}^3}. \quad \text{[1/8 točke]}\end{aligned}$$

Pričakovana vrednost $\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle$ je

$$\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \right]. \quad \text{[1/8 točke]} \tag{9}$$

Pri seštevanju vrtilnih količin imamo dve možnosti, ki sta $j = 1/2$ in $j = 3/2$ [1/8 točke], tako da je

$$\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle = \hbar^2 \begin{cases} 1/2, & j = \frac{3}{2}, \\ -1, & j = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Število stanj za $n = 2, l = 1$ je $(2s+1)(2l+1) = 2 \times 3 = 6$. V zgornji veji imamo $2j + 1 = 4$ stanj, v spodnji pa 2, skupaj torej 6. Velikost razcepa je

$$\Delta E_{ls} = \frac{Z \alpha \hbar c}{2 m_e^2 c^2} \left\langle r^{-3} \right\rangle \langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{\alpha^4}{3} m_e c^2 \frac{\langle \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \rangle}{\hbar^2} = \begin{cases} +0.24 \text{ meV}, & j = \frac{3}{2}, \\ -0.48 \text{ meV}, & j = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{[1/8 točke]}$$

Zunanje magnetno polje gostote 0,1 T ustreza limiti šibkega magnetnega polja, zato velja

$$\Delta E_B = g_J m_j \mu_\mathrm{B} B, \tag{10}$$

kjer je g_J Landéjev faktor,

$$g_J = \frac{3}{2} - \frac{l(l+1) - 3/4}{2j(j+1)} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{11}$$

skala energijskih popravkov pa

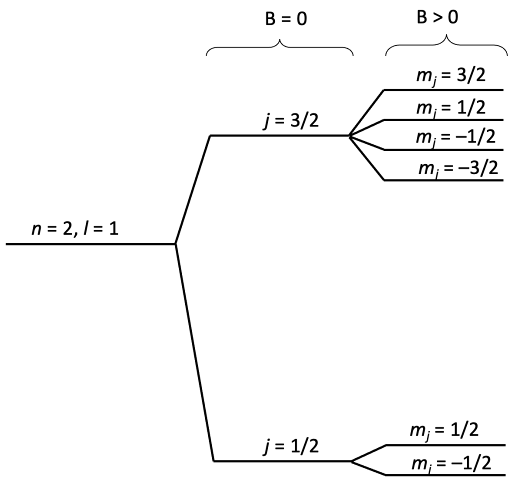
$$\mu_\mathrm{B} B = 0{,}006 \text{ meV} \tag{12}$$

Za stanja $n = 2, l = 1, j = 1/2$ je $g_J = 2/3$ in za energijske popravke tako dobimo

$$\Delta E_B = \begin{cases} +\frac{1}{3} \mu_\mathrm{B} B, & m_j = +\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{3} \mu_\mathrm{B} B, & m_j = -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{13}$$

Za stanja $n = 2, l = 1, j = 3/2$ je $g_J = 4/3$, energijski popravki pa znašajo [1/8 točke]

$$\Delta E_B = \begin{cases} +2\mu_\mathrm{B} B, & m_j = +\frac{3}{2}, \\ +\frac{2}{3}\mu_\mathrm{B} B, & m_j = +\frac{1}{2}, \\ -\frac{2}{3}\mu_\mathrm{B} B, & m_j = -\frac{1}{2}, \\ -2\mu_\mathrm{B} B, & m_j = -\frac{3}{2}, \end{cases} \tag{14}$$



Slika 1: Razcep energijskih nivojev pri 3. nalogi. [1/8 točke]

4. Elektron je v lastnem stanju enodimenzionalnega potenciala $V(x)$, ki je daleč stran od izhodišča enak nič, $V(x \to \infty) = 0$. Verjetnostna gostota elektrona je oblike

$$\rho(x) = \alpha x^4 \,\mathrm{e}^{-x/\lambda}, \quad x \in [0, \infty] \tag{15}$$

kjer je $\lambda = 0{,}5$ nm, α pa realen koeficient. Izračunaj pričakovani vrednosti potencialne in kinetične energije elektrona!

Rešitev:
Najprej normiramo verjetnostno gostoto,

$$\int_0^\infty \rho(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_0^\infty x^4 \,\mathrm{e}^{-x/\lambda} \,\mathrm{d}x = 24\lambda^5\alpha = 1 \tag{16}$$

kjer si pri integraciji pomagamo z $\Gamma(n)$ funkcijo. Torej je

$$\alpha = \frac{1}{24\lambda^5} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{17}$$

Lastno funkcijo elektrona dobimo iz verjetnostne gostote:

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} = \frac{1}{\sqrt{24\lambda^5}} x^2 \mathrm{e}^{-x/2\lambda} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{18}$$

Pričakovano kinetično energijo izračunamo kot

$$\langle T\rangle = \int_0^\infty \psi \hat{T} \psi \mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty \psi\psi'' \mathrm{d}x \quad \text{[1/8 točke]} \tag{19}$$

Potrebujemo $\psi''(x)$, zato odvajajmo funkcijo $\psi(x)$:

$$\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{24\lambda^5}} \frac{(4\lambda - x)x}{2\lambda} \mathrm{e}^{-x/2\lambda}\,, \tag{20}$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{\sqrt{24\lambda^5}} \frac{x^2 - 8\lambda x + 8\lambda^2}{4\lambda^4} \mathrm{e}^{-x/2\lambda}\,. \tag{21}$$

Po integraciji sledi

$$\langle T\rangle = \frac{(\hbar c)^2}{24mc^2\lambda^2} = 13\ \mathrm{meV} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{22}$$

Za izračun potencialne energije potrebujemo potencial $V(x)$, ki ga poiščemo s stacionarno Schrödingerjevo enačbo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi\,. \quad \text{[1/8 točke]} \tag{23}$$

Vstavimo $\psi(x)$ in $\psi''(x)$ v enačbo (23) in izrazimo potencial $V(x)$:

$$V(x) = E + \frac{\hbar^2}{8m}\frac{x^2 - 8\lambda x + 8\lambda^2}{\lambda^2 x^2} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{24}$$

V zgornji enačbi upoštevamo pogoj $V(x \to \infty) = 0$, od koder sledi izraz za energijo

$$E = -\frac{(\hbar c)^2}{8mc^2\lambda^2} \tag{25}$$

$$= -38\ \mathrm{meV}\,. \quad \text{[1/8 točke]} \tag{26}$$

Pričakovana vrednost potencialne energije je tako

$$\langle V\rangle = E - \langle T\rangle = -51\ \mathrm{meV} \quad \text{[1/8 točke]} \tag{27}$$