1.b izpit iz Moderne fizike 1

23. januar 2023

čas reševanja 90 minut

1. Elektroni tunelirajo skozi visok potencial $V \gg E$ ozke širine a tako, da jih $1/3$ preide skozi bariero. Določi produkt višine in širine Va, če je energija vpadnih elektronov 30 eV in velja $V \ll (\hbar/a)^2/m$.

   Rešitev: Verjetnost za prehod skozi plast v primeru tuneliranja je podana z

$$T = \frac{1}{1 + \left(k^2 + \kappa^2\right)^2 / \left(2k\kappa\right)^2 \sinh^2(\kappa a)} = \frac{1}{3}\,, [1/4]$$

   kjer sta $k^2 = 2mE/\hbar^2$ in $\kappa^2 = 2m(V-E)/\hbar^2$ [1/8], od koder sledi

$$\left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa}\right)^2 \sinh^2(\kappa a) = 2\,.[1/8]$$

   Ker je $V - E \ll \hbar^2/(ma^2)$, lahko zgornji izraz razvijemo za majhen κa, tj. $\sinh x \sim x$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{k^2 + \kappa^2}{2k\kappa}\right)^2 \sinh^2(\kappa a) &\simeq \frac{(E + V - E)^2}{4E(V-E)}\frac{2m(V-E)a^2}{\hbar^2} [1/8] \\ &= \frac{(Va)^2 m}{2\hbar^2 E} = 2\,, [1/8]\end{aligned}$$

   in iz začetne energije dobimo produkt višine in širine

$$Va = 2\hbar c\sqrt{\frac{E}{mc^2}} = 3{,}0 \text{ eV nm}.[1/4]$$

2. Pri najpreprostejši obravnavi vodikovega atoma v kvantni mehaniki zanemarimo gibanje jedra, kar vodi do Rydbergove energije, $W_\mathrm{R} = 13{,}6$ eV, kot ionizacijske energije atoma. Izračunaj popravek k ionizacijski energiji lahkega vodika ^{1}H, če upoštevamo, da elektron in jedro krožita okoli skupnega težišča. Kolikšna je razlika med ionizacijskima energijama lahkega vodika ^{1}H in devterija ^{2}H?

   Rešitev: Hamiltonian za sistem elektrona (e) in jedra (j) je

$$\hat{H} = -\frac{\alpha\hbar c}{r} + \frac{p_\mathrm{e}^2}{2m_\mathrm{e}} + \frac{p_\mathrm{j}^2}{2m_\mathrm{j}} \tag{1}$$

Jedro in elektron krožita okoli skupnega težišča, zato sta njuni gibalni količini v vsakem trenutku nasprotno enaki, torej po velikosti enaki $p_{\mathrm{e}} = p_{\mathrm{j}} \equiv p$. Tako lahko Hamiltonian poenostavimo v

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\alpha \hbar c}{r} + \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_{\mathrm{e}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{j}}}\right) && (2) \\ &= -\frac{\alpha \hbar c}{r} + \frac{p^2}{2\mu} && (3) \end{aligned}$$

kjer smo vpeljali reducirano maso, $\mu^{-1} = m_{\mathrm{e}}^{-1} + m_{\mathrm{j}}^{-1}$ [1/4] in s tem Hamiltonian prevedli na znani Hamiltonian elektrona v statičnem Coulombskem potencialu (približek statičnega jedra), le da namesto mase elektrona m_{e} nastopa reducirana masa μ.

V izrazu za Rydbergovo energijo nadomastimo m_{e} z μ in dobimo ionizacijsko energijo osnovnega stanja atoma

$$W_\mu = \frac{\alpha^2}{2}\mu c^2 \quad [1/4] \tag{4}$$

Popravek k ionizacijski energiji statičnega jedra je

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_\mu - W_{\mathrm{R}} \\ &= \frac{\alpha^2}{2}(\mu - m_{\mathrm{e}})c^2 \\ &= \left(\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}} + m_{\mathrm{p}}} - 1\right) W_{\mathrm{R}} \\ &\approx -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} W_{\mathrm{R}} \\ &\approx -7{,}4\ \mathrm{meV} \quad [1/4] && (5) \end{aligned}$$

kjer smo za maso jedra vzeli maso protona, $m_{\mathrm{j}} = m_{\mathrm{p}}$ in naredili približke za $m_{\mathrm{p}} \gg m_{\mathrm{e}}$.

Pri razliki ionizacijskih energij med izotopoma v reducirani masi upoštevamo $m_{\mathrm{j}} = m_{\mathrm{p}}$ za ^{1}H ter $m_{\mathrm{j}} = 2m_{\mathrm{p}}$ za ^{2}H,

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_{(^2\mathrm{H})} - W_{(^1\mathrm{H})} \\ &= \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{2m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{e}}}{2m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}} - \frac{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}}\right) c^2 \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{2m_{\mathrm{p}}}} - \frac{1}{1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}}\right) W_{\mathrm{R}} \\ &\approx \frac{m_{\mathrm{e}}}{2m_{\mathrm{p}}} W_{\mathrm{R}} \\ &\approx 3{,}7\ \mathrm{meV} \quad [1/4] && (6) \end{aligned}$$

3. Atom vodika je v stanju $\psi_{320} = Ar^2 e^{-r/(3r_B)}(3\cos\theta^2 - 1)$. Izračunaj normalizacijo A in vezavno energijo v običajnem osnovnem približku. Določi lastne vrednosti operatorja kvadrata celotne vrtilne količine $\langle J^2 \rangle$, kjer je $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$. Določi velikost skalarnega produkta $\langle LS \rangle$ za posamezne vrednosti j in izračunaj velikost popravka $\Delta E_{LS} = \alpha\hbar c/(2(mc)^2) \langle r^{-3} \rangle \langle LS \rangle$ zaradi spin-tir sklopitve.

Rešitev: Normalizacija sledi iz

$$\begin{aligned}
1 &= \int_V \mathrm{d}V |\psi|^2 = A^2 \int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, r^4 e^{-(2r)/(3r_B)} \left(3\cos\theta^2 - 1\right)^2 \\
&= 2\pi A^2 \int_0^\infty \mathrm{d}t \, t^6 e^{-t} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \left(9c^4 - 6c^2 + 1\right) = 2\pi A^2 \left(\frac{3r_B}{2}\right)^7 6! \left(\frac{18}{5} - \frac{12}{3} + 2\right) \\
&= 2\pi A^2 r_B^7 \frac{3^7}{2^7} \left(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5\right) \left(\frac{54 - 60 + 30}{15}\right) = 2\pi 3^9 r_B^7 A^2 = 1 \,,
\end{aligned}$$

kjer smo uvedli $t = 2r/(3r_B)$ in od koder sledi

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi 3^9 r_B^7}} \,.[1/4]$$

Vezavna energija je

$$E_3 \simeq -\frac{E_R}{(n=3)^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{3^2} = -1.5 \text{ eV} \,.[1/8]$$

Smo v stanju z $l = 2$, za katerega so možne vrednosti kvantnega števila j

$$j^{\max} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \,, \qquad\qquad j^{\min} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \,.[1/8]$$

Za ta kvantna števila dobimo lastne vrednosti

$$\langle J^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1) = \hbar^2 \times \begin{cases} \frac{5}{2}\frac{7}{2} = \frac{35}{4}, & j = \frac{5}{2} \,, \\ \frac{3}{2}\frac{5}{2} = \frac{15}{4}, & j = \frac{3}{2} \,.[1/8] \end{cases} \tag{7}$$

in skalarni produkt

$$\langle LS \rangle = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\right) \tag{8}$$

$$= \hbar^2 \times \begin{cases} 1, & j = \frac{5}{2} \,, \\ -\frac{3}{2}, & j = \frac{3}{2} \,. \end{cases} [1/8] \tag{9}$$

Popravek zaradi LS sklopitve je potem

$$\Delta E_{LS} = \frac{\alpha\hbar c}{2(mc)^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\langle LS\rangle = \frac{\alpha^4\hbar^3 c(mc^2)^3}{810(mc)^2(\hbar c)^3}\times\begin{cases}1, & j=\frac{5}{2}\,,\\ -\frac{3}{2}, & j=\frac{3}{2}\end{cases} \tag{10}$$

$$= \frac{\alpha^4 mc^2}{810}\times\begin{cases}1, & j=\frac{5}{2}\,,\\ -\frac{3}{2}, & j=\frac{3}{2}\end{cases} = 1{,}8\,\mu\mathrm{eV}\times\begin{cases}1, & j=\frac{5}{2}\,,\\ -\frac{3}{2}, & j=\frac{3}{2}\,.\end{cases}\,[1/8] \tag{11}$$

kjer je $r_B = \hbar c/(\alpha mc^2)$ in smo povprečje $\langle r^{-3}\rangle$ izvrednotili podobno kot normalizacijo

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle = A^2\int_0^\infty r^2\mathrm{d}r\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\frac{1}{r^3}r^4 e^{-(2r)/(3r_B)}\left(3\cos\theta^2-1\right)^2 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{405 r_B^3}\,.[1/8] \tag{13}$$

4. Preučujemo proton v enodimenzionalnem potencialu oblike $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. V poskusu s kratkotrajnim curkom fotonov valovne dolžine $\lambda = 600$ nm vzbudimo proton v deseto vzbujeno stanje ($n = 10$). Koliko znaša konstanta potenciala k v enotah eV/nm^2? Koliko fotonov bo spontano izseval proton pri dipolnih prehodih v osnovno stanje ter kolikšne bodo njihove energije? Približno oceni, po kolikšnem času se bo proton vrnil v osnovno stanje.

Rešitev: Proton v paraboličnem potencialu predstavlja harmonični oscilator z možnimi energijami $W_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Izbirno pravilo prehodov je $\Delta n = \pm 1$, [1/8] kar pomeni, da harmonični oscilator lahko absorbira ali izseva le fotone z energijo $\hbar\omega$, ki v našem primeru znaša

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = 2\ \mathrm{eV}\,.[1/8] \tag{14}$$

Harmonični oscilator torej postopoma prehaja iz stanja $n = 10 \to 9 \to \ldots \to 0$ in pri vsakem prehodu izseva foton energije $\hbar\omega$ (in valovne dolžine 600 nm). Skupno torej izseva 10 fotonov.[1/8]

Potencial harmoničnega oscilatorja lahko zapišemo tudi kot $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2$, od koder sledi

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 \\ &= mc^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 10^5\ \mathrm{eV/nm}^2\,,[1/8] \end{aligned} \tag{15}$$

kjer je $mc^2 = 940$ MeV lastna energija protona.

Povprečni življenjski čas n-tega stanja harmoničnega oscilatorja izračunamo kot

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{4\alpha c}{3(\hbar c)^3}(\hbar\omega)^3(x_{n-1,n})^2 \quad [1/8] \tag{16}$$

kjer je $x_{n-1,n} = \int \psi^*_{n-1} \hat{x} \psi_n \mathrm{d}x$ matrični element harmoničnega oscilatorja, katerega kvadrat znaša

$$(x_{n-1,n})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} n \quad [1/8] \tag{17}$$

ki ga smo ga izračunali na vajah, a ga ne znamo nujno na pamet. Ker gre za približno oceno časov, ga lahko tudi ocenimo iz velikostne skale harmoničnega oscilatorja a

$$(x_{n-1,n})^2 \approx a^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \tag{18}$$

Druga možnost ocene pa je iz pričakovane vrednosti $\langle x^2 \rangle$. Iz pričakovane vrednosti potencialne energije $\langle V \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ (spomnimo se, da za harmonični oscilator velja $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ in $W_n = \langle T \rangle + \langle V \rangle$), od koder sledi

$$(x_{n-1,n})^2 \approx \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{19}$$

Katerikoli izraz za matrični element (17), (18) ali (19) služi dovolj dobro za našo oceno. V nadaljevanju bomo uporabili eksaktni izraz (17), od koder sledi

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{2\alpha c}{3\hbar c} \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2} n \tag{20}$$

Tako lahko poenostavljeno izrazimo τ_n kot

$$\tau_n = \frac{\tau_1}{n} \tag{21}$$

kjer je τ_1 življenjski čas prvega vzbujenega stanja

$$\tau_1 = \frac{3\hbar c}{2\alpha c} \frac{mc^2}{(\hbar\omega)^2} \approx 32\ \mu\mathrm{s} \quad [1/8] \tag{22}$$

Pričakovani celotni čas harmoničnega oscilatorja za prehod od stanja z $n = 10$ v osnovno stanje ($n = 0$) lahko ocenimo kot vsoto vseh življenjskih časov vzbujenih stanj

$$\begin{aligned} t &= \tau_{10} + \tau_9 + \ldots + \tau_1 \\ &= \tau_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \ldots + 1 \right) \\ &\approx 2{,}9\, \tau_1 \approx 93\ \mu\mathrm{s} \quad [1/8] \end{aligned} \tag{23}$$

Komentar za nadobudne: Ker so prehodi stanj podani z eksponentno porazdelitvijo v času, $P_n(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau_n}$, je seštevanje povprečnih časov, ki smo ga naredili v enačbi (23) le ocena. Problem se da matematično točno rešiti z uporabo Batemanovih enačb, ki so bile prvotno razvite za razpadne verige radioaktivnih elementov. Tako dobimo, da je osnovno stanje zasedeno s 50% verjetnostjo po času $2{,}7\, \tau_1 \approx 86\ \mu$s, kar se dobro ujema z našim računom.