1. Elektron v neskončni potencialni jami širine 0,4 nm opisuje valovna funkcija $\psi = 4i\psi_2 + 3\psi_3$, ki je linearna kombinacija prvega in drugega vzbujenega stanja. Normiraj valovno funkcijo ψ in poišči ortogonalno stanje $\psi_\perp$, sestavljenega iz ψ_2 in ψ_3. Izračunaj pričakovano vrednost energije za obe stanji.

   Rešitev: Valovna funkcija ni normirana, sta pa normirani funkciji ψ_2 ter ψ_3, zato je normirana valovna funkcija
$$\psi = \frac{4i}{5}\psi_2 + \frac{3}{5}\psi_3.$$
   Ortogonalno stanje poiščemo iz pogoja $\int \psi_\perp^* \psi dx = 0$ od koder sledi
$$\psi_\perp = \frac{3}{5}\psi_2 + \frac{4i}{5}\psi_3,$$
   saj je
$$\int \psi_\perp^* \psi \mathrm{dx} = \int \left(\frac{3}{5}\psi_2^* - \frac{4\mathrm{i}}{5}\psi_3^*\right)\left(\frac{4\mathrm{i}}{5}\psi_2 + \frac{3}{5}\psi_3\right)\mathrm{dx} = \int \frac{12\mathrm{i}}{25}\left|\psi_2\right|^2 - \frac{12\mathrm{i}}{25}\left|\psi_3\right|^2 \mathrm{dx} = 0,$$
   kjer smo upoštevali, da so $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ortonormirane. Lastne energije so
$$E_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2},$$
   zato sta pričakovani energiji za stanji ψ ter $\psi_\perp$ (izračunamo iz $E = \sum_n |c_n|^2 E_n$):
$$E = \frac{16}{25}E_2 + \frac{9}{25}E_3 = \frac{29}{40}\frac{h^2}{ma^2} \approx 14\,\mathrm{eV},$$
$$E_\perp = \frac{9}{25}E_2 + \frac{16}{25}E_3 = \frac{36}{40}\frac{h^2}{ma^2} \approx 17\,\mathrm{eV}.$$

2. Najmanj kolikšno energijo morajo imeti visokoenergijski kozmični anti-nevtrini $\overline{\nu}$, da na kozmičnem nevtrinskem ozadju $C\nu B$ s temperaturo $T_{C\nu B} = 1{,}95$ K tvorijo delec Z z maso $M_Z c^2 = 90$ GeV preko reakcije
$$\overline{\nu} + \nu_{C\nu B} \to Z?$$
   Kinetična energija nevtrinov s temperaturo $T_{C\nu B}$ je enaka $T_\nu = \frac{3}{2}k\,T_{C\nu B}$, kjer je $k = 9 \times 10^{-5}$ eV/K. Za maso nevtrina vzemi $m_\nu c^2 = 0{,}05$ eV.

   Rešitev: Invarianta vsote gibalnih količin je
$$(E_{\overline{\nu}} + E_\nu)^2 - (E_{\overline{\nu}} - c\,p_\nu)^2 = M_Z^2c^4,$$
$$2E_{\overline{\nu}}\left(E_{\overline{\nu}} + c\,p_\nu\right) = M_Z^2c^4,$$
   kjer smo zanemarili maso visokoenergijskega $\overline{\nu}$, tako da je $E_{\overline{\nu}} = c\,p_{\overline{\nu}}$ in dobimo
$$E_{\overline{\nu}} = \frac{M_Z^2c^4}{2\left(E_\nu + c\,p_\nu\right)} \simeq \frac{M_Z^2c^4}{2m_\nu c^2} = 8 \times 10^{22}\ \mathrm{eV}.$$

3. Na razdalji 130 milijonov svetlobnih let je združitev dveh nevtronskih zvezd sprožilo signal gravitacijskih valov s frekvenco 50 Hz in gama žarkov z energijo 200 keV, izmerjeno na Zemlji. S kolikšno hitrostjo in v katero smer se premika sistem zvezd, če je bila energija izsevanega fotona 100 keV? S kolikšno hitrostjo bi morala potovati vesoljska ladja, ki odpotuje po prejemu signala, da bi do zvezd prišla v 130000 letih, merjeno na ladji? Kolikšno frekvenco gravitacijskih valov bi zaznali na ladji? Predpostavi, da se obe valovanji širita z $v = c$ na zveznici z Zemljo.

   Rešitev: Predpostavimo, da se zvezdi premikata proti Zemlji. Iz Dopplerjevega zamika, dobimo

$$E_{\gamma Z} = \sqrt{\frac{1+\beta_n}{1-\beta_n}} E_\gamma, \qquad \beta_n = \frac{E_{\gamma Z}^2 - E_\gamma^2}{E_{\gamma Z}^2 + E_\gamma^2} = 0{,}6.$$

   V sistemu zemlje je pot, ki jo opravita zvezdi

$$L_Z - \beta_n c t_Z = \beta_L c t_Z, \qquad t_Z = \gamma t_L.$$

   Do enakega rezultata pridemo z opazovanjem zvezd v sistemu ladje:

$$\begin{aligned} &S : A(0,L) && S' : A'(-\gamma_L \beta_L L, \gamma_L L) \\ &\quad B(ct_Z, L - \beta_n c t_Z) && \quad B'(\gamma_L(ct_Z - \beta_L(L - \beta_n c t_Z)), \gamma_L(L - \beta_n t_Z c - \beta_L t_Z c) = 0), \end{aligned}$$

   Razlika časov krat relativna hitrost zvezd nam dá razliko poti, ki je kar $\gamma_L L$:

$$\Delta t_L \beta_{nL} c = \gamma_L (1 + \beta_n \beta_L) t_Z \frac{\beta_L + \beta_n}{1 + \beta_n \beta_L} c = \gamma_L L$$

   in dobimo isto enačbo kot zgoraj. Sedaj lahko izračunamo hitrost ladje

$$\frac{\beta_n + \beta_L}{\sqrt{1 - \beta_L^2}} = \frac{L_Z}{c t_L} \equiv r = \frac{130 \text{ M c yr}}{130 \text{ k c yr}} = 10^3 \gg 1.$$

   Dobljeno kvadratno enačbo lahko rešimo direktno ali upoštevamo $\beta_L \simeq 1 - \varepsilon$

$$\begin{aligned} (\beta_n + \beta_L)^2 \simeq 1 + \beta_n (2 + \beta_n) = r^2 (1 - \beta_L^2) \simeq 2 r^2 \varepsilon, \\ \varepsilon = \frac{1 + \beta_n (2 + \beta_n)}{2 r^2} = 1{,}3 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

   Hitrost zvezd v sistemu ladje je

$$\beta_{Ln} = \frac{\beta_n + \beta_L}{1 + \beta_n \beta_L} \simeq \frac{1{,}6 - \varepsilon}{1{,}6 - 0{,}6\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \varepsilon_{Ln},$$

   torej bo izmerjena frekvenca gravitacijskih valov na ladji

$$\nu_{Lg} = \sqrt{\frac{1 + \beta_{Ln}}{1 - \beta_{Ln}}} \nu_g \simeq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_{Ln}}} \nu_g \simeq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\, 100 \text{ Hz} = 125 \text{ kHz}.$$

4. S pomočjo načela nedoločenosti oceni za koliko se nedoločenost lege δx ter energija E osnovnega stanja elektrona, ki se nahaja v sinusnem potencialu

$$V = \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(x/a)$$

razlikuje od nedoločenosti lege δx_0 ter energije E_0 osnovnega stanja elektrona v harmonskem potencialu $V_0 = \frac{1}{2} k x^2$, kjer je $k = 50\,\mathrm{eV/nm}^2$ in $a = 0{,}4\,\mathrm{nm}$. Namig: Izračunaj najprej nedoločenost lege δx_0 ter energijo E_0 in išči rešitev za sinusni potencial z nastavkom $\delta x = \delta x_0 + \delta$ ter $E = E_0 + \Delta$ in privzemi da je popravek majhen.

Rešitev: Namig pravi, da bo sinusni potencial le manjši popravek harmonskega potenciala. Razvijmo sinusni potencial v Taylorjevo vrsto in obdržimo samo prva dva člena v razvoju:

$$V \approx \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{6} k x^4 / a^2.$$

Vidimo, da prvi člen razvoja res predstavlja harmonski potencial. Poiščimo najprej nedoločenost lege in energijo osnovnega stanja za ta del potenciala. Upostevamo Heisenbergovo nedoločenost $\delta x^2 \delta p^2 \geq \hbar^2/4$ in zapišemo pričakovano energijo osnovnega stanja (za katerega privzamemo, da ima najmanjši produkt nedoločenosti) in dobimo

$$E_0 = \langle E_0 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{8m\delta x^2} + \frac{1}{2} k \delta x^2,$$

kjer smo upoštevali, da je $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$. Z odvajanjem poiščemo minimum, kar nam da vrednost nedoločenosti osnovnega stanja

$$0 = \frac{-\hbar^2}{8m\delta x^4} + \frac{1}{2} k, \qquad \delta x_0 = \left(\frac{\hbar^2}{4km} \right)^{1/4} \approx 0.14\,\mathrm{nm}.$$

Ko to vstavimo v izraz za energijo dobimo

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1\,\mathrm{eV}.$$

Energijo osnovnega stanja celotnega (sinusnega) potenciala sedaj iščemo iz

$$E = \langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle - \frac{1}{6} k \langle x^4 \rangle / a^2 \sim \frac{\hbar^2}{8m\delta x^2} + \frac{1}{2} k \delta x^2 - \frac{k(\delta x^2)^2}{6a^2},$$

kjer smo privzeli $\langle x^4 \rangle \sim \langle x^2 \rangle^2$, s čimer smo gotovo naredili napako, vendar bo za oceno (red velikosti) služilo namenu. Z odvajanjem po δx^2 dobimo kubično enačbo

$$0 = \frac{-\hbar^2}{8m\delta x^4} + \frac{1}{2} k - \frac{k(\delta x^2)}{3a^2},$$

ki jo rešimo z nastavkom

$$\delta x = \delta x_0 (1 + \alpha),$$

kjer upoštevamo, da je popravek α majhen.

$$0 = \frac{-\hbar^2}{8m\delta x_0^4}(1-4\alpha) + \frac{1}{2}k - \frac{k\delta x_0^2(1+2\alpha)}{3a^2}$$

$$0 = k2\alpha - \frac{k\delta x_0^2(1+2\alpha)}{3a^2}$$

tako da ob upoštevanju, da je α majhen, dobimo

$$\alpha \approx \frac{\delta x_0^2}{6a^2} \approx 0.02.$$

Nedoločenost lege je tako za 2% večja od nedoločenosti lege v harmonskem potencialu. Energijo osnovnega stanja v sinusnem potencialu izračunamo tako, da vstavimo $\delta x = \delta x_0$ v izraz za energijo, saj je α majhen, ter upoštevamo izraze za E_0 in δx_0

$$E \approx E_0 - \frac{k(\delta x_0^2)^2}{6a^2} = E_0 - k(\delta x_0^2)\alpha = E_0(1-\alpha).$$

Energija je torej za 2% manjša kot v harmonskem potencialu.