# 3. izpit iz Moderne fizike 1

18. avgust 2021

*čas reševanja 90 minut*

1. Elektron postavimo v harmonski potencial $V = kx^2$, $k = 10$ eV/nm$^2$, in valovno funkcijo $\psi \propto \psi_1 + 2i\psi_3$, kjer sta $\psi_1$ in $\psi_3$ prvo in tretje vzbujeno lastno stanje. Izračunaj povprečno izmerjeno energijo. V katera stanja lahko začetno stanje preide preko dipolnega sevanja? Določi razpadne čase možnih prehodov ter valovno dolžino izsevanih fotonov.
   Velja: $\hat{x}\,\psi_n = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\left(\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} + \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\right)$.

   *Rešitev:* Valovno funkcijo normiramo in dobimo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\psi_1 + 2i\psi_3\right).[1/8] \tag{1}$$

   Povprečna izmerjena energija je

$$\langle E \rangle = \hbar\omega\left(\frac{1}{5}\frac{3}{2} + \frac{4}{5}\frac{7}{2}\right) = \hbar\omega\frac{31}{10} = 3{,}8 \text{ eV}\,, [1/4] \tag{2}$$

   kjer je $\hbar\omega = \hbar c\sqrt{2k/(m_e c^2)} = 1{,}2$ eV. Iz zgornje relacije ugotovimo, da lahko to stanje preide zgolj v stanja z $n \to n-1$, torej imamo dva možna prehoda: a) $\psi_3 \to \psi_2$ in b) $\psi_1 \to \psi_0$. [1/4] V obeh primerih je valovna dolžina izsevanega fotona

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} = 2\pi\frac{\hbar c}{\hbar\omega} = 1004 \text{ nm}.[1/8] \tag{3}$$

   Razpadni čas pri dipolnih sevalnih prehodih dobimo iz

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4}{3}\frac{\alpha c}{\hbar c}E_{12}^3\left(\frac{x_{12}}{\hbar c}\right)^2, \qquad E_{12} = \hbar\omega\,, \tag{4}$$

$$\frac{x_{12}^a}{\hbar c} = \sqrt{\frac{3}{2mc^2\,\hbar\omega}}\,, \qquad \frac{x_{12}^b}{\hbar c} = \sqrt{\frac{1}{2mc^2\,\hbar\omega}}\,, \tag{5}$$

   tako da velja

$$\tau_a = \frac{mc^2\,\hbar c}{2\alpha c\,(\hbar\omega)^2} = 1{,}5\,\mu\text{s}\,, [1/8] \qquad \tau_b = 3\tau_a\,.[1/8] \tag{6}$$

2. Elektron v enodimenzionalnem potencialu je v lastnem stanju

$$\psi = A\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-x/x_0}\,, \qquad\qquad x\in[0,\infty]\,,$$

kjer je $x_0 = 0{,}1$ nm. Poišči potencial $V(x)$ in energijo tega stanja. Pri tem vemo, da je potencial daleč stran od izhodišča enak nič, $V(x\to\infty) = 0$.

*Rešitev:*
Zvezo med valovno funkcijo, potencialom in energijo podaja stacionarna Schrödingerjeva enačba

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi\,.\ [1/8] \tag{7}$$

Potrebujemo $\psi''(x)$, zato odvajajmo funkcijo $\psi(x)$:

$$\psi'(x) = A\frac{(2x_0-x)x}{x_0^3}\,\mathrm{e}^{-x/x_0}\,,\ [1/8] \tag{8}$$

$$\psi''(x) = A\frac{x^2-4xx_0+2x_0^2}{x_0^4}\,\mathrm{e}^{-x/x_0}\,.\ [1/8] \tag{9}$$

Sedaj $\psi''(x)$ vstavimo v enačbo (7) in izrazimo potencial $V(x)$:

$$V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{4}{xx_0} + \frac{2}{x^2}\right)\,.\ [1/4] \tag{10}$$

V zgornji enačbi upoštevamo pogoj $V(x\to\infty) = 0$, od koder sledi izraz za energijo

$$E = -\frac{\hbar^2}{2mx_0^2}\,, \tag{11}$$

$$= -\frac{(\hbar c)^2}{2mc^2\,x_0^2}\,, \tag{12}$$

$$= -3{,}9\ \mathrm{eV}\,.\ [1/4] \tag{13}$$

Ko uporabimo zgornji izraz za $E$ v enačbi (10), se potencial poenostavi v

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xx_0}\right)\,.\ [1/8] \tag{14}$$

3. Pri prehodu med rotacijskima stanjema $l = 0$ in $l = 1$ ogljikov monoksid (CO) absorbira svetlobo valovne dolžine 2.6 mm.
(a) Izračunaj dolžino vezi med atomoma molekule. Atomska masa kisika je 16, ogljika pa 12.

(b) V absorpcijskem spektru opazimo dodatno šibko črto, ki je ima za 0.12 mm daljšo valovno dolžino in jo pripišemo izotopu ogljika. Za kateri izotop ogljika gre? Predpostavi, da izotopska modifikacija ne spremeni dolžine kemijske vezi.

*Rešitev:*
Vztrajnostni moment molekule znaša $J = \mu r^2$ [1/8], pri čemer je $r$ razdalja med atomoma, $\mu$ pa reducirana masa

$$\mu = \frac{m_\mathrm{C} m_\mathrm{O}}{m_\mathrm{C} + m_\mathrm{O}} \tag{15}$$
$$\approx 6.86\, u\,. \text{ [1/8]} \tag{16}$$

kjer je $u$ atomska enota mase.

Rotacijska kinetična energija molekule v stanju $l$ je enaka

$$W_\mathrm{r}(l) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\,. \text{ [1/8]} \tag{17}$$

Razlika med prvim vzbujenim in osnovnim stanjem znaša

$$\Delta W = W_\mathrm{r}(1) - W_\mathrm{r}(0) \tag{18}$$
$$= \frac{\hbar^2}{\mu r^2}\,. \text{ [1/8]} \tag{19}$$

Energija prehoda ustreza energiji absorbiranega fotona $\Delta W = hc/\lambda$, od koder sledi razdalja med atomoma

$$r^2 = \frac{\hbar c \lambda}{2\pi \mu c^2} \tag{20}$$
$$r \approx 1.13\ \text{Å}\,. \text{ [1/8]} \tag{21}$$

(b) Iz razmerja enačb (20) za izotopa ${}^{x}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$ in ${}^{12}\mathrm{C}^{16}\mathrm{O}$ sledi

$$\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu}\,, \text{ [1/8]} \tag{22}$$

pri čemer je $\mu'$ reducirana masa molekule izotopa,

$$\mu' = \frac{m'_\mathrm{C} m_\mathrm{O}}{m'_\mathrm{C} + m_\mathrm{O}}\,. \text{ [1/8]} \tag{23}$$

Iz zgornjih dveh enačb izrazimo maso izotopa ogljika

$$m'_\mathrm{C} = \frac{m_\mathrm{C} m_\mathrm{O}}{m_\mathrm{O}\lambda - m_\mathrm{C}\Delta\lambda}(\lambda + \Delta\lambda) \tag{24}$$
$$\approx 13\, u\,. \text{ [1/8]} \tag{25}$$

Torej, gre za izotop ${}^{13}\mathrm{C}$.

4. Po sipanju svetlobe na mirujočem elektronu v laboratorijskem sistemu izmerimo hitrost elektrona 0,8 c. Prav tako ugotovimo, da se foton, v sistemu kjer elektron po sipanju miruje in katerega os $x'$ je poravnana z osjo $x$ gibanja elektrona v laboratorijskem sistemu, giblje pravokotno na smer elektrona, recimo vzdolž osi $y'$, z valovno dolžino 0,002 nm. Kolikšna je frekvenca prvotnega vpadnega valovanja ter sipani kot fotona glede na vpadno valovanje, izmerjeno v laboratorijskem sistemu?

*Rešitev:* Iz sistema elektrona transformiramo v sistem, ki sovpada z laboratorijskim, le da je zasukan z osjo $x$ v smeri elektrona. S transverzalnim Dopplerjevim efektom dobimo

$$\lambda' = \frac{\lambda''}{\gamma} = \frac{0{,}002\ \mathrm{nm}}{\gamma} = 0{,}0012\ \mathrm{nm}\,.[1/4]$$

Ohranitev energije v laboratorijskem sistemu nam dá sledečo identiteto

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \gamma m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda'} = \gamma m_e c^2 + \gamma \frac{hc}{\lambda''}\,.[1/4]$$

Od tod dobimo valovno dolžino, oz. frekvenco vpadne svetlobe

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = c\left(\frac{\gamma}{\lambda''} + (\gamma - 1)\left(\frac{m_e c^2}{hc}\right)\right) = 3{,}3 \times 10^{18}\ \mathrm{Hz}\,.[1/4]$$

Sipalni kot dobimo iz enačbe za Comptonovo sipanje

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c\,(1 - \cos\theta)\ , \qquad \theta = \arccos\left(1 - \frac{\lambda''/\gamma - \lambda}{\lambda_c}\right) = 29^\circ.[1/4]$$