2. izpit iz Moderne fizike 1

8. julij 2020

čas reševanja 90 minut

1. Curek pionov usmerimo na tanko tarčo, ki jo opišemo s pravokotno plastjo širine 0,1 nm. Določi višino plasti, če je odbojnost curka prvič enaka nič, ko je energija pionov enaka 0,25 eV. Pri kateri energiji nastopi drugi minimum, ko odbojnost ponovno pade na nič? Za maso piona vzemi 140 MeV/c^2.

   Rešitev: Pri sipanju na pravokotni barieri opazimo ničle odbojnosti (oz. maksimalne prepustnosti), ko je $k_n a = n\pi$, kjer je $E_n + V_0 = (\hbar k_n)^2/(2m_\pi)$. Iz prvega sipalnega vrha pri $n = 1$ dobimo

   $$V_0 = E_1 - \frac{1}{2m_\pi c^2}\left(\frac{\pi\hbar c}{a}\right)^2 = 0{,}1 \text{ eV}.$$

   Drugi minimum odbojnosti pri $n = 2$ nastopi pri

   $$E_2 = \frac{1}{2m_\pi c^2}\left(2\frac{\pi\hbar c}{a}\right)^2 + V_0 = 4E_1 - 3V_0 = 0{,}7 \text{ eV}.$$

2. Atom vodika pripravimo v stanju $n = 3$, $l = 1$. Atom z izsevanjem enega fotona preide v nižje energijsko stanje. Določi možne valovne dolžine izsevanega fotona, če privzameš, da so dovoljeni zgolj dipolni prehodi. Kolikšne pa so možne valovne dolžine izsevanega fotona, če se atom nahaja v močnem homogenem magnetnem polju z jakostjo $B = 5$ T?

   Rešitev: Energija izsevanega fotona je enaka razliki energij med stanjem $n = 3$ in stanjem $n = 2$ ali $n = 1$. Pri dipolnih prehodih se mora spremeniti l, torej ima končno stanje $l = 0$. Temu pripadata energiji

   $$\Delta E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{E_0}{3^2} - E_0, \qquad\qquad \Delta E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{E_0}{3^2} - \frac{E_0}{2^2},$$

   kjer je $E_0 = -13{,}6$ eV energija osnovnega stanja vodikovega atoma. Preračunano na valovno dolžino je to $\lambda_1 = 102{,}6$ nm ter $\lambda_2 = 656{,}3$ nm. Atom vodika torej izseva foton z eno izmed teh dveh valovnih dolžin.

V magnetnem polju se energijski nivoji premaknejo in sicer za

$$\Delta W = \mu_B B \left(m_l + 2m_s\right) .$$

Pri prehodih se spinsko število ohranja, medtem ko je $\Delta m_l = \pm 1, 0$. Energija izsevanega fotona je zato odvisna od začetne in končne vrednosti projekcije vrtilne količine m_l. Ker je končno stanje z $m_l = 0$, je lahko premik energije fotona bodisi $\mu_B B$, $-\mu_B B$, ali pa 0.

$$\Delta \hbar\omega = \Delta \frac{hc}{\lambda} = \mu_B B(\Delta m_l) \approx \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

Izraženo v valovni dolžini je to $\Delta\lambda = \pm \mu_B B \lambda^2/(hc)$. Torej so v magnetnem polju, poleg že izračunanih centralnih valovnih dolžin, možne še $656{,}3 \pm 0{,}1$ nm in $102{,}6 \pm 0{,}0025$ nm, torej vse skupaj je možnih šest različnih valovnih dolžin.

3. Zgraditi želimo mionski trkalnik z 10 T magneti in polmerom 1 km. Določi kinetično energijo mionov in γ faktor. Koliko obhodov napravi mion v eni sekundi in koliko časa preteče v sistemu trkalnika, dokler ne razpade polovica začetnega števila mionov? Masa miona je $m_\mu c^2 \simeq 100$ MeV, lastni razpadni čas pa $\tau_\mu \simeq 2\,\mu$s.

   Rešitev: Gibalna količina miona in kinetična energija sledita iz

$$pc = erBc = \left(10^3\ \mathrm{m}\right)\left(10\frac{\mathrm{eV\ s}}{\mathrm{m}^2}\right)\left(3\times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 3\ \mathrm{TeV},$$
$$T = \sqrt{(pc)^2 + m_\mu^2 c^4} - m_\mu^2 c^4 \simeq pc = 3\ \mathrm{TeV}\,,$$

   od koder dobimo relativistični faktor γ in število obhodov n_o

$$\gamma = \frac{T}{m_\mu c^2} + 1 \simeq \frac{3\ \mathrm{TeV}}{0{,}1\ \mathrm{GeV}} = 3\times 10^4\,,$$
$$n_o = \frac{\omega t}{2\pi\gamma} = \frac{eBt}{2\pi\gamma m} = \frac{(pc)(tc)}{2\pi\gamma r m c^2} \simeq 48.000\,.$$

   Razpolovni čas dobimo iz eksponentnega pojemanja in upoštevanjem $\tau = \gamma\tau_\mu$

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-t/(\gamma\tau_\mu)} \qquad \Rightarrow \qquad t_{1/2} = \gamma\tau_\mu \log 2 = 4{,}2\,\mathrm{ms}\,.$$

4. Elektron v neskončni enodimenzionalni potencialni jami širine 0,4 nm ob času $t = 0$ opisuje valovna funkcija $\psi = (\sqrt{7}\psi_1 + i\psi_3)$, ki je linearna kombinacija osnovnega in drugega vzbujenega stanja. Normiraj valovno funkcijo in izračunaj povprečno vrednost energije. Izračunaj produkt nedoločenosti gibalne količine in nedoločenosti pozicije $\langle\delta x\rangle\langle\delta p\rangle$ ob $t = 0$. Ali se $\langle\delta x\rangle$ in $\langle\delta p\rangle$ spreminjata s časom? Odgovor utemelji z računom. Namig: izberi izhodišče koordinatnega sistema na sredini jame in upoštevaj

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cos((2n+1)x)^2 dx = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{(2+4n)^2},$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cos((2n+1)x)\cos((2m+1)x)dx = \frac{(-1)^{m+n}(1+2m)(1+2n)\pi}{4(m-n)^2(1+m+n)^2}$$

Rešitev: Valovna funkcija ni normirana, sta pa normirani funkciji ψ_1 ter ψ_3, zato je normirana valovna funkcija

$$\psi = \sqrt{\frac{7}{8}}\psi_1 + i\sqrt{\frac{1}{8}}\psi_3,$$

kjer smo upoštevali, da so v predlaganem koordinatnem sistemu funkcije ψ_n ortogonalne in za lihe n sode funkcije $\psi_{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(2n+1)\pi x/a$. Lastne energije so

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2},$$

zato je povprečna energija (izračunamo iz $E = \sum_n |c_n|^2 E_n$):

$$E = \frac{7}{8}E_1 + \frac{1}{8}E_3 = \frac{1}{4}\frac{h^2}{ma^2} \approx 5\,\mathrm{eV},$$

Povprečna vrednost operatorja gibalne količine je enaka nič. To lahko argumentiramo na več načinov. Valovna funkcija opisuje stoječe valovanje (sestavljeno iz dveh ravnih valov z nasprotno smerjo širjenja valovanja). Elektron je vezan v jami, se ne premika po prostoru, zato je povprečna vrednost operatorja gibalne količina enaka 0. Valovna funkcija je simetrična, zato bo njen odvod antisimetričen. Ker je operator gibalne količine $p = -i\hbar\partial/\partial x$ bo torej povprečna vrednost operatorja $\langle p\rangle = -i\hbar\int \psi(x)^*\partial/\partial x\psi(x)dx = 0$, kar seveda lahko pokažemo tudi z izračunom tega integrala.

Za določitev povprečne vrednosti kvadrata gibalne količine lahko uporabimo izračunano energijo, saj velja $\langle p^2\rangle = 2mT = 2mE = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2$.

Nekoliko več dela je z izračunom nedoločenosti koordinate. Poenostavimo izračun z uporabo namiga. Če zapišemo valovno funkcijo v predlaganem koordinatnem sistemu, je povprečna vrednost odmika $\langle x\rangle = 0$, saj je kvadrat valovne funkcija soda funkcija. Za kvadrat odmika pa dobimo z upoštevanjem namiga $\langle x^2\rangle = \frac{a^2}{12} - \frac{4a^2}{9\pi^2}$. Produkt nedoločenosti je tako

$$\langle\delta x\rangle\langle\delta p\rangle = h\sqrt{\frac{1}{24} - \frac{4}{18\pi^2}} = \hbar\sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{8}{9}} = 0{,}87\,\hbar\,.$$

Produkt nedoločenosti je odvisen od časa, saj se nedoločenost koordinate spreminja s časom zaradi mešanja členov. Zapisati je treba časovni razvoj valovne funkcije. Mešani členi tipa $x^2\psi_1\psi_3^* e^{i\omega t}$ ter $x^2\psi_1^*\psi_3 e^{-i\omega t}$ prinesejo časovno odvisnost, členi $x^2\psi_1\psi_1^*$ ter $x^2\psi_3\psi_3^*$ pa ne, zato se $\langle x^2\rangle$ s časom spreminja. $\langle p^2\rangle$ je konstanta in se ne spreminja s časom. To vemo, sa je energija konstanta. Lahko pa uporabimo operator gibalne količine in pokažemo, da mešani členi zaradi ortogonalnosti odpadejo.