1.b izpit iz Moderne fizike 1

27. januar 2020

čas reševanja 90 minut

1. Elektron je v harmonskem oscilatorju ($V = \alpha x^2/2$), kjer je $\alpha = \omega^2 m = 13$ GeV/m^2. Njegova valovna funkcija je $\psi = A(\psi_1 + i/3\psi_3)$. V katera stanja lahko prehaja ψ preko dipolnih prehodov, če je $\int \psi_n^* x \psi_m dx = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2 \hbar\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)$? Določi razpadne čase za vse možne prehode in določi valovno dolžino izsevanih fotonov.

   Rešitev: Možni prehodi z izsevanjem fotona so iz $3 \to 2$, $1 \to 0$, z absorpcijo pa $3 \to 4$ in $1 \to 2$, vendar razpade lahko zgolj z izsevanjem fotona, torej v osnovno stanje ali stanje $n = 2$. Razpadni čas za dipolne prehode med stanjema m in n je

$$\frac{1}{\tau_{m\to n}} = \frac{4\alpha}{3\hbar} E_{mn}^3 \left(\frac{x_{mn}}{\hbar c}\right)^2. \tag{1}$$

Matrični prehodni element za harmonski oscilator je

$$x_{mn} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2 \hbar\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right). \tag{2}$$

Dovoljeni so le prehodi iz $1 \to 0$ in $3 \to 2$, torej

$$x_{10} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2 \hbar\omega}}, \qquad x_{32} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2 \hbar\omega}}\sqrt{3}. \tag{3}$$

Lastne energije so $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, torej bosta energiji izsevanih fotonov enaki $E_1 - E_0 = E_3 - E_2 = \hbar\omega = 1$ eV, kar dobim iz podatka o koeficientu vzmeti, oziroma valovna dolžina izsevanega fotona je $\lambda = c/\nu = 2\pi\sqrt{mc^2/\alpha} = 1250 nm$. Razpadna časa za prehod iz stanja 3, oz 1 sta

$$\tau_{1\to 0}^{-1} = \frac{4\alpha}{3\hbar}(\hbar\omega)^3\left(\frac{x_{10}}{\hbar c}\right)^2 = \frac{2\alpha c}{3\hbar c}\frac{(\hbar\omega)^2}{m_e c^2} = 1.4 \times 10^7\,\mathrm{s}^{-1}, \tag{4}$$

$$\tau_{3\to 2}^{-1} = \frac{4\alpha}{3\hbar}(\hbar\omega)^3\left(\frac{x_{32}}{\hbar c}\right)^2 = 3\,\tau_{1\to 0}^{-1}, \tag{5}$$

,

oziroma $\tau_{1\to 0} = 70$ ns.

2. Rotator se nahaja v linearni kombinaciji $\psi \propto \sqrt{2}Y_{20} + e^{i\delta}Y_{21}$. Normiraj ψ, poišči pričakovane vrednosti za $\langle L_{x,y,z}\rangle$ in primerjaj $\sum_i \langle L_i\rangle^2$ z $\langle \sum_i L_i^2\rangle^2$.

Rešitev: Normalizacija je $\psi = (\sqrt{2}Y_{20} + e^{i\delta}Y_{21})/\sqrt{3}$, pričakovane vrednosti so

$$\begin{aligned}
\langle L_x\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\delta}\langle 20|L_x|21\rangle + e^{-i\delta}\langle 21|L_x|20\rangle\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\hbar}{2}\sqrt{6}e^{\delta} + \frac{\hbar}{2}\sqrt{6}e^{-i\delta}\right) = \hbar\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\delta,\\
\langle L_y\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(e^{i\delta}\langle 20|L_y|21\rangle + e^{-i\delta}\langle 21|L_y|20\rangle\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\hbar}{2i}\sqrt{6}e^{i\delta} + \frac{\hbar}{2i}\sqrt{6}e^{-i\delta}\right) = -\hbar\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\delta,\\
\langle L_z\rangle &= \frac{1}{3}\left(2\hbar\times 0 + \hbar\times 1\right) = \frac{\hbar}{3},\\
\langle L^2\rangle &= \frac{1}{3}\left(2\hbar^2\times 2\cdot 3 + \hbar^2\times 2\cdot 3\right) = 6\hbar^2,
\end{aligned}$$

kjer smo uporabili

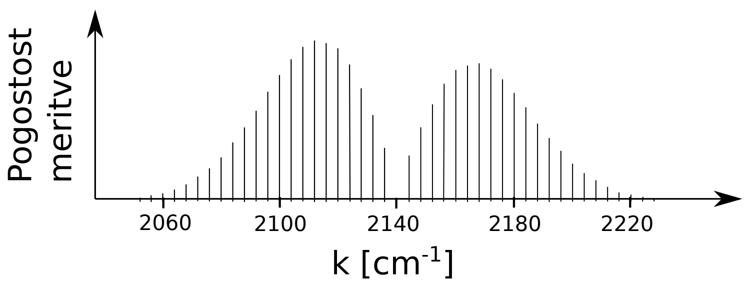
$$\begin{aligned}
\langle l'm'|L_x|lm\rangle &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,\delta_{l'l}\delta_{m'm\pm 1},\\
\langle l'm'|L_y|lm\rangle &= \pm\frac{\hbar}{2i}\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,\delta_{l'l}\delta_{m'm\pm 1},
\end{aligned}$$

Vsota kvadratov povprečnih vrednosti je

$$\sum_i \langle L_i\rangle^2 = \hbar^2\left(\frac{4}{3}\left(\cos^2\delta + \sin^2\delta\right) + \frac{1}{9}\right) = \hbar^2\frac{13}{9},$$

kar je manj od $\langle L^2\rangle = 6\hbar^2$.

3. V eksperimentu vedno pripravimo molekulo CO v prvem vibracijsko vzbujenem stanju $n = 1$, vendar v neznanem rotacijskem stanju l. Z izsevanjem fotona molekula preide v osnovno vibracijsko stanje $n = 0$. Izmerjene vrednosti valovnega števila $k = 2\pi/\lambda$ izsevanih fotonov so prikazane na spodnji sliki. Iz meritev določi efektivno vrednost konstante vzmeti α v harmonskem potencialu $V = \alpha(r - r_0)^2/2$ in povprečno razdaljo r_0 med atomoma. Privzemi, da je možen zgolj prehod $\Delta l = \pm 1$.



Rešitev: Energija molekule je $E_{n,l} = E_0 + \hbar\omega(n+1/2) + \hbar^2 l(l+1)/2J$. Pri izsevanju fotona preide v stanje s kvantnimi stevili $l \to l+1$ ali $l \to l-1$. Torej je energija izsevanega fotona za stanje s kvantnim številom $l > 0$ in $n = 1 \to n = 0$ lahko

$$E_{l\to l-1} = \hbar\omega + \hbar^2 l/J$$

Ali v primeru, ko je $l \to l+1$, za $l \geq 0$:

$$E_{l\to l+1} = \hbar\omega - \hbar^2(l+1)/J$$

Energije izsevanih fotonov so tako nekoliko premaknjene od centralne frekvence $\omega = kc$. Centralno frekvenco preberemo iz grafa ($k = 2140$ cm^{-1}) in je $\omega = 6.4 \cdot 10^{14}$ Hz. Iz reducirane mase $m = \frac{16m_p cdot 12m_p}{16m_p+12m_p} = 6.9$ GeV lahko tako določim efektivni koeficient harmonskega potenciala $\alpha = \omega^2 m = 320$ eV/nm^2.

Iz razmika energij od centralne frekvence je enak $\Delta E = \hbar^2/J$. Iz grafa razberemo, da je razmik med energijami ($\Delta k = 400$ m^{-1}) $\Delta E = \hbar\Delta kc = 0.78 \cdot 10^{-6}$ eV. Vem iz vaj, da je vztrajnostni moment molekule kar $J = mr_0^2$, zato lahko iz ΔE dolocim efektivno razdaljo med atomoma $r_0 = \hbar/\sqrt{\Delta E m} = 0.27$ nm.

4. Kolikšen bi bil razcep energijskih nivojev z $l = 1$ zaradi ls sklopitve, če bi elektron imel spin 3/2? Skiciraj razcepe in določi število stanj na vsaki veji. Kako bi izgledal energijski spekter v močnem magnetnem polju in kako se porazdelijo stanja? $\psi_{210} = 1/\sqrt{32\pi r_B^3}(r/r_B)\cos\theta e^{-r/(2r_B)}$.

   Rešitev: Popravek zaradi spin-tir sklopitev je

$$\Delta E_{ls} = \frac{\alpha\hbar c}{2m^2c^2}\left\langle \frac{1}{r^3}\right\rangle \langle ls\rangle\,,$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3}\right\rangle = \int_V \psi_{210}^2 \frac{1}{r^3} = \frac{1}{8r_B^3}\int_0^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t \int_{-1}^1 \cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta = \frac{1}{24\,r_B^3},$$

$$\langle ls\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) = \frac{\hbar^2}{2}\begin{cases} 3, & j = \frac{5}{2}, \\ -2, & j = \frac{3}{2}, \\ -5, & j = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{ls} = \frac{\alpha^4 mc^2}{3\cdot 2^5}\begin{cases} 3, & j = \frac{5}{2}, & 6 \text{ stanj}, \\ -2, & j = \frac{3}{2}, & 4 \text{ stanj}, \\ -5, & j = \frac{1}{2}, & 2 \text{ stanj}, \end{cases}$$

   kjer je $\alpha^4 mc^2/(3\cdot 2^5) \simeq 15\,\mu$eV. Skupaj je 12 stanj, enako kot v originalni m_l, m_s bazi z $(2l+1)(2s+1) = 3\times 4 = 12$.

   V močnem magnetnem polju je $\Delta E_B = \mu_B\,(m_l + 2m_s)\,B$, kjer je $m_l = (-1, 0, 1)$ in $m_s = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$.

   in dobimo

Število stanj	1	1	2	1	2	1	2	1	1
$\Delta E_B/(\mu_B B)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4