1. Raketa se od izvora elektromagnetnega valovanja oddaljuje s hitrostjo $\frac{4}{5}c_0$. Kolikšen je kot med smerjo gibanja rakete in smerjo širjenja valovanja v sistemu oddajnika, če je frekvenca valovanja, ki jo zazna opazovalec na raketi enaka frekvenci oddanega valovanja v sistemu oddajnika? Pod kolikšnim kotom glede na smer gibanja oddajnika se valovanje širi v sistemu rakete?

   Rešitev: Naj se raketa giblje ($\beta = \frac{v}{c}$) v sistemu oddajnika v smeri osi x, valovanje pa naj se širi pod kotom θ glede na os x, oziroma θ' glede na os x' v sistemu rakete, če sta osi x in x' usmerjeni v isto smer (oddajnik se v sistemu rakete giblje v smeri $-x'$). Četverca valovnega vektorja v sistemu oddajnika in rakete zapored označimo s

$$\begin{aligned} k^\mu &= \frac{\omega}{c}(1,\, \cos\theta,\, \sin\theta, 0), \\ k'^\mu &= \frac{\omega'}{c}(1,\, \cos\theta',\, \sin\theta', 0). \end{aligned}$$

   Lorentzova transformacija "časovne" komponente da

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta),$$

   kjer je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3}$. Od tod sledi

$$\begin{gathered} \gamma(1 - \beta\cos\theta) = 1 \\ \beta\cos^2\theta - 2\cos\theta + \beta = 0 \\ \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ. \end{gathered}$$

   Kot θ' dobimo iz transformacije komponente "x",

$$\begin{gathered} \omega'\cos\theta' = \omega\gamma(\cos\theta - \beta) \\ \Rightarrow \quad \theta' = 120^\circ. \end{gathered}$$

   Ker se oddajnik giblje v smeri $-x$, se torej valovanje glede na oddajnik širi pod kotom $180^\circ - \theta' = 60^\circ$.

2. Za koliko se spremeni izmerjena hitrost svetlobe, če svetimo vzdolž cevi, po kateri teče voda s hitrostjo 100 km/h, v primerjavi z meritvijo, ko voda miruje? Kako natančno moramo meriti hitrost svetlobe, da bi zaznali relativistični popravek? Za lomni količnik vode vzemi 1,33.

   Rešitev: V sistemu mirujoče vode je hitrost svetlobe $v_\gamma = c/n$, medtem ko je v laboratorijskem sistemu

   $$v'_\gamma = \frac{v_\gamma + v}{1 + \frac{v v_\gamma}{c^2}} = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + n\beta}{1 + \beta/n}\right) \simeq \frac{c}{n}\left(1 + n\beta - \frac{\beta}{n}\right),$$

   kjer je $\beta = v/c$. Izmerjena hitrost je torej večja za

   $$\Delta v_\gamma = v'_\gamma - v_\gamma \simeq v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \simeq 12 \text{ m/s} = 43 \text{ km/h}.$$

   Relativistični popravek je v/n^2, torej je zahtevana natančnost meritve hitrosti svetlobe

   $$\delta v_\gamma = \frac{v}{n^2 v_\gamma} \simeq \frac{\beta}{n} = 7 \times 10^{-8}.$$

3. Valovna funkcija ψ delca v harmonskem potencialu je linearna kombinacija prvih štirih vzbujenih lastnih stanj. Povprečna energija delca je osemkrat večja od energije osnovnega stanja ψ_0 in velja $\int \psi_0^* x\psi \mathrm{d}x = 0$. S kolikšno verjetnostjo najdemo delec v posameznem lastnem stanju in kolikšen je $\langle x^2 \rangle$? Za lastne funkcije harmonskega oscilatorja velja $\hat{x}\,\psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} + \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\right)$.

Rešitev: Zaradi pogoja $\int \psi_0^* x\psi \mathrm{d}x = 0$ in z uporabo relacije $x\psi_n$ vidimo, da bodo ψ sestavljala le tri vzbujena stanja in sicer

$$\psi = c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + c_4\psi_4,$$

Normalizacija ψ in podana povprečna energija bosta dali dva pogoja

$$\begin{aligned} c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 &= 1, \\ E_2 c_2^2 + E_3 c_3^2 + E_4 c_4^2 &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(5c_2^2 + 7c_3^2 + 9c_4^2\right) = 8E_0 = 4\hbar\omega, \end{aligned}$$

iz katerih lahko izrazimo npr. $c_{3,4}$,

$$c_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - 2c_2^2}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{1}{2} + c_2^2},$$

in dobimo povprečno vrednost kvadrata odmika

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int \psi \hat{x}^2 \psi \mathrm{d}x = \int \left(c_2 x\psi_2 + c_3 x\psi_3 + c_4 x\psi_4\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\hbar}{m\omega}\left(4 + c_2\sqrt{6}\sqrt{1 + 2c_2^2}\right). \end{aligned}$$

Po drugi strani za gibalno količino $\hat{p}\,\psi_n = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} - \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\right)$ velja

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int \psi \hat{p}^2 \psi = \int \left|c_2\hat{p}\psi_2 + c_3\hat{p}\psi_3 + c_4\hat{p}\psi_4\right|^2 \\ &= \hbar m\omega\left(4 - c_2\sqrt{6}\sqrt{1 + 2c_2^2}\right). \end{aligned}$$

tako da je

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2 \rangle = 4\hbar\omega.$$

4. S pomočjo načela nedoločenosti oceni vezavno energijo helijevega atoma.
Namig: Sistem obravnavaj v eni dimenziji in upoštevaj, da je masa nukleonov veliko večja od mase elektronov. Pomagaj si z obravnavo v težiščnem sistemu.

Rešitev: Zaradi velike mase nukleonov lahko njuno gibanje zaremarimo in ju postavimo v izhodišče koordinatnega sistema. Hamiltonka za helijev atom je potem oblike

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m_\mathrm{e}} + \frac{p_2^2}{2m_\mathrm{e}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|x_2 - x_1|} - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0|x_2|} - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0|x_1|},$$

kjer se indeksa 1 in 2 nanašata na oba elektrona. Nadalje lahko zaradi istega razloga postavimo jedro v izhodišče koordinatnega sistema in predpostavimo $x_1 < 0 < x_2$. Ker ta koordinatni sistem predstavlja težiščni sistem, je

$$-x_1 = x_2 = \frac{x}{2},$$

kjer je $x = x_2 - x_1$ razdalja med elektronoma. Potem velje

$$p_1 = m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -m_\mathrm{e}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -p,$$
$$p_2 = m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = m_\mathrm{e}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p,$$

kjer je $p = m_\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ in je $m_\mathrm{r} = \frac{m_\mathrm{e}}{2}$ reducirana masa. Zgornjo dvodelčno Hamiltonko lahko ob upoštevanju definicije konstante fine strukture $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ potem preoblikujemo v enodelčno,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m_\mathrm{r}} + \frac{\alpha\hbar c}{x} - 4\frac{\alpha\hbar c}{\frac{x}{2}} = \frac{p^2}{2m_\mathrm{r}} - 7\frac{\alpha\hbar c}{x}.$$

Energija atoma je tako

$$E = \frac{\langle p^2\rangle}{2m_\mathrm{r}} - 7\alpha\hbar c\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle.$$

Če sta δx in δp nedoločenosti ustreznih operatorjev, je $\delta p^2 = \langle p^2\rangle$, saj sta elektrona vezana in je $\langle p\rangle = 0$. Ocenimo še $\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle = \frac{1}{\delta x}$ in upoštevamo $\delta x\delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, kar vodi do

$$E = \frac{\delta p^2}{2m_\mathrm{r}} - 14\alpha c\delta p.$$

Pogoj za minimum energije $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\delta p} = 0$ da

$$\delta p = 14\alpha m_\mathrm{r} c,$$

oziroma minimalno energijo

$$E_\mathrm{min} = -49\alpha^2 m_\mathrm{e} c^2 = -1{,}3\ \mathrm{Mev}.$$