1.a izpit iz Moderne fizike 1

13. december 2019

čas reševanja 90 minut

1. Nizkoenergijske mione z $v = 0$ in $m_\mu c^2 = 105$ MeV postavimo v homogeno električno polje $E = 1$ MV/m dolžine 210 m. Kolikšna je kinetična energija mionov ob izstopu? Tok mionov ob izhodu iz električnega polja je 1000/s, kolikšen je na detektorju, ki je od izstopa oddaljen 1 km? Razpadni čas miona je 2μs.

   Rešitev: Iz rešitev za $u^0 = \gamma(\tau)c = c\cosh\alpha\tau$ in $u^1(\tau) = dx/d\tau = c\sinh\alpha\tau$ dobimo

   $$\int_0^{\tau_1} u^1(\tau)\,d\tau = L_1 = \frac{c}{\alpha}\left(\cosh\alpha\tau_1 - 1\right), \qquad \gamma = \cosh\alpha\tau_1 = \frac{\alpha L_1}{c} + 1 = 3,$$

   kjer je $\alpha = eE/m_\mu c$. Od tod dobimo

   $$T = m_\mu c^2(\gamma - 1) = 2m_\mu c^2 = 210 \text{ MeV}, \qquad \gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} = 2\sqrt{2}.$$

   Iz zadnjega rezultata izračunamo število delcev na detektorju

   $$N = N_0 e^{-t/\gamma\tau_\mu} = N_0 e^{-L_2/\beta\gamma c\tau_\mu} = 554/s.$$

2. Z uporabo načela nedoločenosti oceni energijo osnovnega stanja elektrona v 1D potencialu $V(x) = 2\kappa\,|x|$, kjer je $\kappa = 100$ eV/nm.

   Rešitev: Postavimo se v težišče linearnega potenciala tako da sta $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ in ocenimo

   $$\langle E_0\rangle \simeq \frac{\delta p^2}{2m} + 2\kappa\delta x \simeq \frac{\delta p^2}{2m} + \frac{\hbar\kappa}{\delta p}, \qquad \frac{d\langle E_0\rangle}{d\delta p} = \frac{\delta p}{m} - \frac{\hbar\kappa}{\delta p^2} = 0, \qquad \delta p = \sqrt[3]{\hbar\kappa m},$$

   od koder dobimo

   $$\langle E_0\rangle \simeq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\hbar c\,\kappa}{mc^2}} = 13.7 \text{ eV}.$$

3. Na Zemlji opazujemo gibanje dveh vesoljskih ladij, ki se gibljeta v nasprotnih smereh, ena proti drugi. Začetna razdalja med njima je 1 svetlobni dan. Prva ladja se giblje s hitrostjo $v_1 = 0.5c$, druga pa s hitrostjo v_2 (merjeno na Zemlji). Druga ladja pošlje

proti prvi radijski signal z oddajnikom, ki deluje pri 10 MHz. Določi hitrost v_2, če na prvi ladji detektirajo radijski signal pri frekvenci 20 MHz. Kdaj se ladji srečata, merjeno po obeh ladijskih urah, ter kdaj po zemeljski uri? Ko se ladji srečata, druga ladja spremeni velikost in smer hitrosti, tako da se v sistemu Zemlje giblje pravokotno na prvo ladjo s hitrostjo $v_2 = 0.5c$. Kolikšna je hitrost ladje 2 v sistemu ladje 1?

Rešitev:

Dopplerjev frekvenca radijskega valovanja, ki ga oddaja ladja 2 je v sistemu Zemlje

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}$$

Frekvenca, ki jo vidijo na ladji 1 pa je

$$\nu_1 = \nu \sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}} \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}}$$

Ker je ta frekvenca dvakrat večja sledi

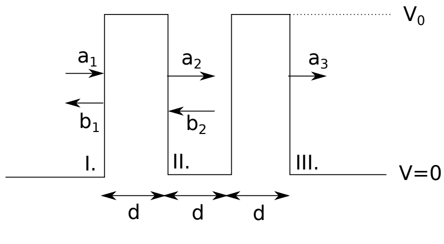
$$4 = \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1} \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2} = 3 \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}$$

Iz česar sledi $v_2 = c/7$. Ladji se torej srečata po času $t = \frac{x}{v_1+v_2}$ kar nanese $14/9 = 1.56$ dneva. Ladijska časa sta ustrezno krajša za faktorja γ_1 in γ_2.

Ko ladja spremeni hitrost je v sistemu ladje 1 njena hitrost $v'_x = -v_1$ ter $v'_y = v_1/\gamma_2$, oziroma velikost hitrosti je $v' = v_1\sqrt{1+1/\gamma_2^2} = c\sqrt{7}/4$.

4. Pokaži, da je prepustnost za elektrone z energijo $E < V_0$ v potencialu, ki ga prikazuje skica, enaka $T = 1/|p|^2$, kjer je $p = (1+\gamma^2\sinh^2\kappa d)e^{i2\phi - ikd} + (\gamma^2 \sinh^2\kappa d)e^{ikd}$, $\gamma = \frac{\kappa^2+k^2}{2\kappa k}$, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$. Kolikšna je lahko največja vrednost prepustnosti? Določi ϕ in izračunaj najmanjšo možno energijo E elektrona, pri kateri je prepustnost T največja v limiti $V_0 \to \infty$.

   Namig: matrika za prehod preko potencialnega skoka iz območja II. v I. je
   $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M_s \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\kappa d + i\delta \sinh\kappa d & i\gamma\sinh\kappa d \\ -i\gamma \sinh\kappa d & \cosh\kappa d - i\delta\sinh\kappa d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$,
   kjer je $\delta = \frac{\kappa^2-k^2}{2\kappa k}$.



Rešitev:

Matrični formalizem smo vpeljali na vajah. Prenosna matrika za prehod iz območja III. v območje I. se glasi

$$M = M_s \cdot \begin{pmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{ikd} \end{pmatrix} \cdot M_s.$$

V resnici ni potrebno izracunati celotne matrike, saj iščem rešitev

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oziroma $a_1 = M_{11} a_3$. Prepustnost je namreč $T = |a_3|^2/|a_1|^2 = 1/|M_{11}|^2$. Z nekaj truda lahko pokažem, da je $p = M_{11}$ in s tem odgovorim na prvo vprašanje, pri čemer je $\phi = \arctan \frac{\delta \sinh \kappa d}{\cosh \kappa d}$.

Prepustnost je torej oblike $T = 1/|ae^{i2\phi - ikd} + be^{ikd}|^2$, kjer smo vpeljali $a = 1 + b$ in $b = \gamma^2 \sinh^2 \kappa d$, kar lahko zapišem kot

$$T = \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab\cos(2\phi - 2kd)},$$

Prepustnost bo največja takrat, ko bo $\cos = -1$, oziroma

$$T = \frac{1}{(a-b)^2} = 1.$$

Največja prepustnost je torej 1, to pa se zgodi pri energijah, ki zadoščajo pogoju $2\phi - 2kd = (2n+1)\pi$, kjer je n celo število.

V limiti $V_0 = \infty$ bo $\phi = \pi/2$ iz česar dobimo $kd = n\pi$, torej lastna stanja neskončne potencialne jame. Najmanjša možna energija, pri kateri je prepustnost $T = 1$ je tako kar energija osnovnega stanja neskončne potencialne jame.