1. izpit iz Moderne fizike 1

13. februar 2017

čas reševanja 90 minut

1. Mione z maso $105\,\mathrm{MeV}/c^2$ in lastnim razpadnim časom $\tau_\mu = 2\,\mu$s pospešimo z napetostjo 2000 MV v prečno magnetno polje velikosti $B = 5\,$T. Kolikšen je polmer po katerem krožijo mioni? Koliko jih bo ostalo v takšnem pospeševalniku po 0,1 ms, če ob $t = 0$ vstopi $N_\mu = 10^6$? Za koliko se spremeni velikost eksperimenta in število preostalih delcev, če namesto mionov vzamemo nabite pione z maso $140\,\mathrm{MeV}/c^2$ in razpadnim časom $\tau_\pi = 0{,}03\,\mu$s?

   Rešitev: Iz velikosti radija $p = eBr$ in definicije gibalne količine $cp = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$ ter $T = eU$, dobimo

   $$r = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{eBc} = 140\,\mathrm{cm} \text{ ter } 142\,\mathrm{cm},$$

   za mione in pione po vrsti. Število mionov in pionov po $t = 10^{-4}$ s je

   $$N = N_0 \exp(-t/(\gamma\tau)) = 82,6 \times 10^3 \text{ ter } 2 \times 10^{-89},$$

   kjer smo uporabili $\gamma = E/mc^2 = (T + mc^2)/mc^2$.

2. a.) Elektron v neskončni enodimenzionalni potencialni jami širine 0,4 nm opisuje valovna funkcija $\psi = (2\psi_1 + i\psi_2)$, ki je linearna kombinacija osnovnega in prvega vzbujenega stanja. Izračunaj povprečno vrednost energije ter povprečno vrednost operatorja gibalne količine. b.) Kolikšna je energija osnovnega stanja sistema treh elektronov v potencialni jami? Pri tem zanemari elektrostatsko interakcijo med elektroni, upoštevaj pa Paulijevo izključitveno načelo.

   Rešitev: Valovna funkcija ni normirana, sta pa normirani funkciji ψ_1 ter ψ_2, zato je normirana valovna funkcija

   $$\psi = 2/\sqrt{5}\psi_1 + i/\sqrt{5}\psi_2,$$

   kjer smo upoštevali, da so funkcije $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin n\pi x/a$ ortogonalne. Lastne energije so

   $$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2},$$

0 zato je povprečna energija (izračunamo iz $E = \sum_n |c_n|^2 E_n$):

$$E = 4/5E_1 + 1/5E_2 = \frac{1}{5}\frac{h^2}{ma^2} \approx 4\,\mathrm{eV},$$

Povprečna vrednost operatorja gibalne količine pa je enaka nič. To lahko argumentiramo na več načinov. Valovna funkcija opisuje stoječe valovanje (sestavljeno iz dveh ravnih valov z nasprotno smerjo širjenja valovanja). elektron je vezan v jami, se ne premika po prostoru, zato je povprečna vrednost operatorja gibalne količina enaka 0. Valovna funkcija je simetrična, zato bo njen odvod antisimetričen. Ker je operator gibalne količine $p = -i\hbar\partial/\partial x$ bo torej povprečna vrednost operatorja $< p >= -i\hbar \int \psi(x)^* \partial/\partial x \psi(x) dx = 0$, kar seveda lahko pokažemo tudi z izračunom tega integrala.

Če v jamo vstavimo tri elektrone in zanemarimo elektrostatsko interakcijo bo valovna funkcija, ki opisuje celotno stanje podana kot direktni produkt lastnih valovnih funkcij za vsakega od treh elektronov. $\psi = \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)$. To vemo, saj je hamiltonian sedaj

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m},$$

kjer je $p_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$ operator gibalne količine i-tega elektrona. Φ_i pa so linearne kombinacije lastnih stanj enodolčne valovne funkcije $\Phi_i = \sum_n c_n \psi_n$. Osnovno stanje takega večdelčnega sistema bi bilo tako kar $\Phi_i = \psi_1$, torej $\psi = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\psi_1(x_3)$, ter energija $E = 3E_1$. Vendar pa moramo upoštevati še spinski del valovne funkcije ter Paulijevo izključitveno načelo. Zato ne moremo postaviti vse tri elektrone v osnovno stanje, ampak to lahko storimo zgolj za dva (tako da jima pripišemo nasprotne spine), tretji elektron pa bo moral zasesti prvo vzbujeno stanje. Energija tega stanja bo tako

$$E = 2E_1 + E_2 = \frac{6}{8}\frac{h^2}{ma^2} \approx 15\,\mathrm{eV},$$

3. V eksperimentu večkrat ponovimo isto meritev. Najprej pripravimo vodikov atom v stanju ψ_{n,l,m_l,m_s}, vedno z istimi kvantnimi števili, nato merimo energijo izsevanih fotonov. Pri meritvi sevalnega prehoda opazimo, da atom vedno izseva najprej foton z valovno dolžino $656,10\,\mathrm{nm}$. Če pa poskus ponovimo v močnem homogenem magnetnem polju, je valovna dolžina izsevanega fotona vedno $656,00\,\mathrm{nm}$. Kolikšne so lahko (glede na meritev) vrednosti kvantnih števil n, l, m_l, m_s? Kolikšno magnetno polje B smo uporabili v eksperimentu?

   Rešitev: Pri prehodu iz vzbujenega stanja z glavnim kvantnim številom n v eno od energijsko nižje ležečih stanj (recimo z glavnim kvantnim številom m) se izseva foton.

To se potem nadaljuje, dokler atom ne preide v osnovno stanje. V eksperimentu torej opazimo več fotonov z različnimi valovnimi dolžinami, ki ustrezajo prehodom. V eksperimentu opazujemo energijo fotona zgolj prvega (od večih) prehodov med stanji.

Energija tega fotona bo kar enaka razliki energij med obema stanjema, torej

$$\hbar\omega = hc/\lambda = \Delta E = E_1/n^2 - E_1/m^2,$$

kjer je $E_1 = -13.6eV$ energija osnovnega stanja vodikovega atoma. Poiskati je treba mozne kombinacije n in m, ki dajo pri prehodu foton z valovno dolzino $656,10\,\text{nm}$, kar pa hitro uganemo $n = 3$, $m = 2$. To, da pri eksperimentu vedno dobimo isti rezultat - foton z valovno dolzino $656,10\,\text{nm}$ pomeni, da so ostali prehodi iz stanja $n = 3$ dipolno prepovedani, v nasprotnem primeru bi iz stanja $n = 3$ lahko presli v osnovno stanje z $n = 1$ z direktnim prehodom in bi izmerili foton z krajšo valovno dolžino. Tako pa je naše začetno stanje takšno, da tak direktni prehod ni možen. Pri prehodu veljajo izbirna pravila.

$$\Delta l = \pm 1;\ \Delta m_l = 0, \pm 1;\ \Delta m_s = 0.$$

Zato mora biti začetno stanje bodisi z velikostjo tirne vrtilne kolicine $l = 2$ ali $l = 0$, saj je osnovno stanje vodika z $n = 1, l = 0$ in je tako direktni prehod v osnovno stanje iz $l = 2$ ali $l = 0$ dipolno prepovedan. V nadaljevanju pa opazimo, da se v magnetnem polju energija fotona poveča (valovna dolžina zmanjša), in prav tako iz teksta naloge razberemo, da se prehod vedno zgodi pri nekoliko nižji valovni dolžini $656,00\,\text{nm}$. V močnem magnetnem polju se energijski nivoji razcepijo, in sicer za

$$W = \mu_B B(m_l + 2m_s)$$

Energija izsevanih fotonov se lahko zato premakne navzgor, navzdol, ali pa ostane nespremenjena, saj je

$$\Delta\hbar\omega = \Delta\frac{hc}{\lambda} = \mu_B B(\Delta m_l) \approx \frac{hc\delta\lambda}{\lambda^2},$$

kjer smo upoštevali izbirno pravilo $\Delta m_s = 0$ ter v zadnjem koraku upoštevali da je razlika valovnih dolžin $\delta\lambda = 0,10nm$ majhna v primerjavi z valovno dolžino fotona. če enačbo obrnemo lahko določimo magnetno polje, ki znaša

$$B = \frac{hc\delta\lambda}{\mu_B\lambda^2} = 5T$$

To, da tudi v magnetnem polju vedno izmerimo isto valovno dolžino in da je energija fotona premaknjena navzgor pove, da je kvantno število našega vodika m_l vedno za ena večje od končnega (po prehodu). Izbirna pravila pa omogočajo spremembo kvantnega števila $\Delta m_l = 0, \pm 1$. Da bomo vedno dobili prehod iz $m_l \to m_l - 1$ pa je možno zgolj, če je $m_l = l = 2$. Torej v eksperimentu opazujemo prehod

$$\Psi_{3,2,2,\pm 1/2} \to \Psi_{2,1,1,\pm 1/2} \to \Psi_{1,0,0,\pm 1/2}$$

Začetno stanje s kvatnimi števili $n = 3$, $l = 2$, $m_l = 2$ je edino stanje, ki bo vedno najprej izsevalo foton z valovno dolžino $656,00\,\mathrm{nm}$, v magnetnem polju pa se bo vedno najprej izseval foton z $656,10\,\mathrm{nm}$. Na koncu pa se izseva še en foton z valovno dolžino $120\,\mathrm{nm}$.

4. Predpostavimo, da dvoatomno molekulo He_2 opišemo z Lennard-Jones potencialom

$$V = V_0 \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} \right), \qquad r_0 = 10\ \mathrm{nm}, \qquad V_0 = 10^{-5}\ \mathrm{eV}.$$

Ali bi bila takšna molekula stabilna, če upoštevamo prispevek nihajne energije? Kolikšna je največja vrednost kvantnega števila l preden molekula razpade?

Namig: Poišci razdaljo med molekulama, pri kateri je potencial minimalen in razvij V do drugega reda okrog te vrednosti.

Rešitev: Odvod potenciala po r bo 0, ko bo lega v minimumu

$$\frac{dV}{dr} = -12V_0 \left(\frac{r_0^{12}}{r^{13}} - \frac{r_0^6}{r^7} \right), \qquad r_{\min} = r_0.$$

$$V \simeq -V_0 + \underbrace{36\frac{V_0}{r_0^2}}_{\frac{1}{2}m_r\omega^2} (r - r_0)^2, \qquad \hbar\omega = 12\sqrt{\frac{V_0}{m_{He}c^2}}\frac{c}{r_0}.$$

kjer je $m_r = m_{He}/2$ in je celotna energija

$$E = -V_0 + E_n = -V_0 + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = -4{,}1\,\mu\mathrm{eV}.$$

Da rotacijski prispevek ne preseže celotne energije mora veljati

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2J}l(l+1) = \frac{(\hbar c)^2}{m_{\mathrm{He}}c^2 r_0^2} l\,(l+1) < |E|, \qquad l\,(l+1) < \frac{|E| m_{\mathrm{He}} c^2 r_0^2}{(\hbar c)^2} \sim 42{,}2\,,$$

od koder dobimo dobimo zgornjo mejo $l < 7$.