1.a izpit iz Moderne fizike 1

8. december 2022

čas reševanja 90 minut

1. Foton z valovno dolžino $\lambda = 5$ pm se siplje na elektronu, tako da le-ta odleti pod kotom $\varphi = 60^\circ$ glede na vpadnico. Pod kolikšnim kotom θ glede na vpadnico odleti foton?

   Rešitev: Upoštevamo ohranitev gibalne količine v x in y smereh [1/4]

   $$p_f = p'_f \cos\theta + p'_e \cos\varphi\,, \qquad\qquad p'_f \sin\theta = p'_e \sin\varphi\,,$$

   kjer smo s črtico označili količine po sipanju. Iz zgornjih izrazov eliminiramo p'_e

   $$\frac{p_f - p'_f\cos\theta}{p'_f \sin\theta} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,. \quad [1/8]$$

   Gibalni količini fotona, izraženi z valovnima dolžinama, sta $p_f = h/\lambda$ in $p'_f = h/\lambda'$ [1/8]. Ko ju vstavimo v zgornjo enačbo in preuredimo, dobimo

   $$\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\varphi}\,. \quad [1/8]$$

   Valovna dolžina sipanega fotona je $\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)$, kjer je λ_c Comptonova valovna dolžina [1/8]. Vstavimo λ' v zgornjo enačbo in dobimo

   $$(1-\cos\theta)\left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right) = \frac{\sin\theta}{\tan\varphi}\,. \quad [1/8]$$

   Upoštevamo relaciji $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ in $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, kar nam dá

   $$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right)\tan\varphi\,, \qquad\qquad \theta = 43^\circ\,. \quad [1/8]$$

2. Elektron v neskončni potencialni jami širine 2 nm pripravimo v stanju, ki je linearna kombinacija osnovnega (ψ_1) in tretjega vzbujenega stanja (ψ_4) z realnimi koeficienti.

Pri meritvah v 3/4 primerov izmerimo energijo osnovnega stanja. Normaliziraj valovno funkcijo in izračunaj povprečno energijo $\langle E\rangle$ v enotah eV. Zapiši časovni razvoj valovne funkcije $\psi(x,t)$ in izračunaj $\langle x^2(t)\rangle$.
Lastna stanja so $\psi_n = \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$ in velja: $\int_0^a \mathrm{d}x\psi_n^2 x^2 = a^2/6(2-3/(n\pi)^2)$ ter $\int_0^a \mathrm{d}x\psi_n x^2\psi_m = 8(-1)^{m+n}a^2 mn/((m^2-n^2)^2\pi^2)$ za $m\neq n$.

Rešitev: Nastavek za valovno funkcijo je $\psi = c_1\psi_1 + c_4\psi_4$ in iz podatka o meritvah velja $c_1^2 = 3/4$. Iz normalizacije $c_1^2 + c_4^2 = 1$ sledi $c_4^2 = 1/4$, torej

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\psi_1 + \psi_4\right) . \ [1/4]$$

Povprečna energija je

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= c_1^2 E_1 + c_4^2 E_4 = \frac{3}{4}E_1 + \frac{1}{4}E_4 = \frac{3}{4}E_1 + \frac{16}{4}E_1 = \frac{19}{4}E_1 \\ &= \frac{19}{4}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2 = 0{,}44\ \mathrm{eV}\,, \ [1/4]\end{aligned}$$

kjer smo uporabili $E_1 = (\hbar c\,\pi/a)^2/(2mc^2) = 0{,}094$ eV. Časovni razvoj je podan z

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{2}\psi_4(x)e^{-iE_4t/\hbar} . \ [1/4]$$

Povprečni kvadrat odmika ob času t je podan z

$$\begin{aligned}\langle x^2(t)\rangle &= \int_0^a \mathrm{d}x\,\psi(t)^* x^2\psi(t) = \int_0^a \mathrm{d}x\left(\frac{3}{4}\psi_1^2 + \frac{1}{4}\psi_4^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{E_4-E_1}{\hbar}t\right)\psi_1\psi_4\right)x^2 \\ &= \frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{147}{128\pi^2} - \frac{16}{25\sqrt{3}\pi^2}\cos\left(\frac{E_4-E_1}{\hbar}t\right)\right) . \ [1/4]\end{aligned}$$

3. Pion π^- z maso 144 MeV/c^2 v mirovanju razpade na mion z maso 105 MeV/c^2 in brezmasni antinevtrino, ki vsaksebi odletita vzdolž osi y. Določi hitrost miona in za koliko se podaljša razpadni čas v letu, če je lastni razpadni čas 2 μs. S kolikšno napetostjo moramo pospešiti pion vzdolž osi x, da bo nastali mion seval Čerenkovo sevanje v vodi z lomnim količnikom $n = 1{,}33$?

Rešitev: V mirovnem sistemu piona je njegov četverec $cp_\pi = (m_\pi c^2, 0, 0)$, medtem ko pion in nevtrino odletita vzdolž y osi. Iz ohranitve 0-te in y komponente četvercev $p_\pi = p_\mu + p_\nu$ dobimo

$$0 : m_\pi c^2 = E + cp_\nu\,, \qquad y : 0 = p - p_\nu\,, \qquad E^2 - (cp)^2 = m_\mu^2 c^4 . \ [1/8]$$

Zanima nas energija miona, zato se znebimo p_ν in dobimo

$$(m_\pi c^2 - E)^2 = (cp)^2 = E^2 - m_\mu c^2\,, \qquad \frac{E}{m_\mu c^2} = \gamma = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu} = 1{,}05\,. \text{ [1/8]} \tag{1}$$

Razpadni čas miona se torej podaljša za 5%. Hitrost β dobimo iz definicije za γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}31\,. \text{ [1/4]}$$

Sevanje Čerenkova nastopi, ko je hitrost miona enaka hitrosti svetlobe v vodi

$$\beta_č = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,33} \simeq \frac{3}{4}\,, \qquad \gamma_č = 1{,}52\,. \text{ [1/8]}$$

Potem, ko nabiti pion pospešimo pod napetostjo U, je njegova kinetična energija

$$eU = T = (\gamma_\pi - 1)\,m_\pi c^2\,, \text{ [1/8]}$$

četverec miona pa postane

$$S: p_\mu = (E, 0, p) \qquad \Rightarrow \qquad S': p'_\mu = (\gamma_\pi E, \gamma_\pi \beta_\pi E, p)\,.$$

Njegov gama faktor dobimo po definiciji $E' = \gamma'_\mu m_\mu c^2$ ter ga enačimo s Čerenkovim:

$$\gamma'_\mu = \frac{E'}{m_\mu c^2} = \frac{\gamma_\pi E}{m_\mu c^2} = \gamma_\pi \gamma = \gamma_č\,, \qquad \gamma_\pi = \frac{\gamma_č}{\gamma}\,, \text{ [1/8]}$$

kjer smo γ že izračunali v enačbi (1). Iz kinetične energije piona sledi

$$eU = (\gamma_\pi - 1)\,m_\pi c^2 = \left(\frac{\gamma_č}{\gamma} - 1\right) m_\pi c^2 = 64 \text{ MeV}\,, \text{ [1/8]}$$

torej bi morali pion pospešiti z napetostjo $U = 64$ MV.

4. V $L = 1$ km dolgem linearnem pospeševalniku s homogenim električnim poljem $E = 1$ MV/m začnemo hkrati pospeševati elektron z enega, proton pa z drugega konca pospeševalnika, tako da potujeta drug proti drugemu. Kolišno pot naredi elektron, predno trči s protonom?

Rešitev: Ocenimo ali je potrebna relativistična obravnava. Potencialna energija delcev je $eEL = 1$ GeV, kar očitno terja relativistično obravnavo obeh delcev.

Sprememba relativistične gibalne količine elektrona je povezana z električnim poljem kot $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = eE$, kjer je $P = \gamma m_e v$, in sledi

$$\mathrm{d}(\gamma v) = \frac{eE}{m_e}\,\mathrm{d}t\,. \quad \text{[1/8]}$$

Po integraciji obeh strani, dobimo

$$\gamma\beta = \alpha_e t\,, \tag{2}$$

kjer je $\beta = v/c$ in smo vpeljali $\alpha_e = eE/(m_e c)$. Iz enačbe (2) izrazimo hitrost β,

$$\beta = \frac{\alpha_e t}{\sqrt{1+(\alpha_e t)^2}}\,. \quad [1/8]$$

Integriramo in dobimo lego elektrona kot funkcijo časa

$$x(t) = c\int_0^t \beta(t')\mathrm{d}t' = \frac{c}{\alpha_e}\left(\sqrt{1+(\alpha_e t)^2} - 1\right)\,. \quad [1/4]$$

Izrazimo čas kot funkcijo lege za elektron

$$(\alpha_e t)^2 = \left(1 + \frac{\alpha_e x}{c}\right)^2 - 1\,,$$

ter podobno za proton, s substitucijama $\alpha_e \to \alpha_p$ ter $x \to L - x$

$$(\alpha_p t)^2 = \left(1 + \frac{\alpha_p (L-x)}{c}\right)^2 - 1\,. \quad [1/8]$$

Iz zgornjih enačb eliminiramo čas in dobimo enačbo za x, kjer delca trčita

$$\alpha_p^2\left[\left(1+\frac{\alpha_e x}{c}\right)^2 - 1\right] = \alpha_e^2\left[\left(1 + \frac{\alpha_p(L-x)}{c}\right)^2 - 1\right]\,. \quad [1/4]$$

Kvadratni člen se pokrajša, tako da je enačba linearna, kar privede do rešitve

$$x = L\,\frac{L/2 + c\alpha_p^{-1}}{L + c(\alpha_p^{-1} + \alpha_e^{-1})} = 740\ \mathrm{m}\,. \quad [1/8]$$

Tu sta $\alpha_e = 5{,}9 \times 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$ in $\alpha_p = 3{,}2 \times 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$.

* Dodatek: Poglejmo dva limitna primera za kontrolo pravilnosti.

(i) V nerelativistični limiti imamo $c\alpha_p^{-1} \gg c\alpha_e^{-1} \gg L$ in sledi $x \approx L$, torej elektron opravi skoraj celotno pot.

(ii) Za enako masivna delca imamo $c\alpha_p^{-1} = c\alpha_e^{-1}$ in sledi $x = L/2$, trčita na sredini.