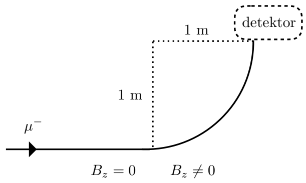
2. izpit iz Moderne fizike 1

11. julij 2017

čas reševanja 90 minut



1. Curek negativno nabitih mionov $m_\mu c^2 = 105$ MeV pospešen z napetostjo 100 MV pošljemo v magnetno polje, usmerjeno pravokotno na ravnino curka. Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja, da curek zadane detektor kot na sliki? Za koliko se zmanjša pretok mionov na detektorju v primerjavi s tistim, ki ga izmerimo tik pred vstopom v $B_z \neq 0$? Lastni razpadni čas miona je $\tau_\mu = 2\,\mu$s.

   Rešitev: Iz skice je razvidno, da je radij kroženja $r = 1m$ in da je laboratorijski čas potovanja enak četrtini obratne frekvence kroženja. Iz vhodne napetosti dobimo gibalno količino in gostoto magnetnega polja

   $$pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)} = 176 \text{ MeV}, \qquad B = \frac{pc}{erc} = 0{,}59 \text{ T}. \tag{1}$$

   Število izmerjenih mionov pada z laboratorijskim časom kot

   $$N = N_0 e^{-t/(\gamma\tau)}, \quad t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi m}{2eB} = 6{,}2 \times 10^{-9} s, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{T + mc^2}{m_c^2} = 1{,}95. \tag{2}$$

   Ker je $t/(\gamma\tau) \ll 1$, dobimo

   $$\frac{\Delta N}{N_0} \simeq -\frac{t}{\gamma\tau} = 1{,}6 \times 10^{-3}. \tag{3}$$

2. Vesoljska ladja leti s hitrostjo $0.5\,c$ mimo Zemlje. Začetna oddaljenost merjena na Zemlji je 100 svetlobnih dni, najbližje pa je na razdalji 1 svetlobni dan. Kolikšna mora biti frekvenca oddajnika na ladji in pod kakšnim kotom (merjeno na ladji) morajo poslati radijski signal proti Zemlji ob začetku poti, da ga bodo na Zemlji prestregli s sprejemnikom, ki deluje pri 1 MHz? Kdaj po prejemu signala na Zemlji

ter s kolikšno frekvenco morajo poslati signal proti ladji, da ga bo ta prestregla s sprejemnikom, ki deluje pri 1 MHz, ko bo na najkrajši oddaljenosti od Zemlje?

Rešitev: V sistemu ladje S', ki se giblje s hitrostjo v proti zemlji, bo frekvenca valovanja izražena s frekvenco valovanja v sistemu Zemlje S podana z

$$\omega' = \gamma(\omega + vk_x) = \omega\gamma\left(1 - \beta\cos(\theta)\right),$$

kjer smo upoštevali, da je projekcija valovnega vektorja negativna $k_x = -k\cos(\theta)$, saj kaže valovni vektor od ladje proti zemlji ter $k = \omega/c$. Frekvenca signala na ladji mora biti tako

$$\omega' \approx \omega\left(\gamma\left(1-\beta\right)\right) = \omega/\sqrt{3} = 0,58\,\mathrm{MHz}.$$

Kot, pod katerim moramo valovanje poslati pa izračunamo iz transformacije valovnega vektorja. Vem (glej skripto), da velja

$k'_x = \gamma(k_x + v\omega/c^2)$ ter $k'_y = k_y$, kar pomeni, da velja

$$k'_y/k' = \sin(\theta') = k_y/k' = ck_y/\omega' \approx \sin(\theta)/\left(\gamma\left(1-\beta\right)\right) = \sin(\theta)\sqrt{3} = 0,0173$$

Ko pa bo ladja na najkraši razdalji, pa bo frekvenca valovanja poslanega z Zemlje premaknjena zaradi transferzalnega Dopplerjevega pojava.

$$\omega' = \omega\gamma,$$

kjer smo upoštevali, da je kot $\theta = \pi/2$. Tako dobimo frekvenco

$$\omega = 0,87\,\mathrm{MHz}.$$

Manjka še izračun časa, kar pa ni težavno, sa vemo, da bo ob prejemu signala ladja prepotovala polovico poti (njena hitrost je polovica hitrosti svetlobe). Signal moramo tako poslati po 99 dneh od prejema, saj moramo upoštevati še en dan poti, ki jo signal potrebuje do ladje.

3. Atom vodika je v stanju $\psi = N\left(\psi_{2,0,0} - i\psi_{3,1,-1} + i\psi_{3,1,1}\right)$. Določi normalizacijsko konstanto N in izračunaj povprečno vrednost energije, operatorja kvadrata vrtilne količine ter projekcije vrtilne količine na z os za to stanje. Koliko črt bi opazili v emisijskem spektru tega stanja ter kolikšne bi bile energije izsevanih fotonov v eksperimentu, če bi opazovali emisijo v močnem magnetnem polju $B = 5\,\mathrm{T}$? Privzemi, da atom prehaja v nižje vzbujeno stanje zgolj preko dipolnih sevalnih prehodov.

   Rešitev: Funkcijo moramo najprej normirati. Ker so valovne funkcije $\psi_{n,l,m}$ ortogonalne in normirane, je normalizacijska konstanta kar

$$N = 1/\sqrt{3}.$$

Povprečna vrednost operatorja projekcije vrtilne količine na z os je

$$\langle L_z \rangle = \hbar/3(0 - 1 + 1) = 0.$$

Povprečna vrednost operatorja kvadrata vrtilne količine je

$$\left\langle L^2 \right\rangle = \hbar^2/3(0 + 1(1 + 1) + 1(1 + 1)) = \hbar^2 4/3.$$

Povprečna vrednost energije pa

$$\langle E \rangle = E_1/3(1/2^2 + 1/3^2 + 1/3^2) = -2{,}14\,\mathrm{eV},$$

kjer je $E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV}$.

Pri prehodu iz vzbujenega stanja z glavnim kvantnim številom n v eno od energijsko nižje ležečih stanj (recimo z glavnim kvantnim številom m) se izseva foton. To se potem nadaljuje, dokler atom ne preide v osnovno stanje. V eksperimentu torej opazimo več fotonov z različnimi valovnimi dolžinami, ki ustrezajo prehodom.

Pri tem pa morajo veljati izbirna pravila, in sicer $\Delta l = \pm 1$. Tako vidimo, da tak vodik lahko izseva zgolj iz $\psi_{3,1,1} \to \psi_{2,0,0}$ in $\psi_{3,1,-1} \to \psi_{2,0,0}$, ter z direktnimi prehodi v osnovno stanje $\psi_{3,1,1} \to \psi_{1,0,0}$ in $\psi_{3,1,-1} \to \psi_{1,0,0}$, saj je stanje $\psi_{2,0,0}$ stabilno in ne more izsevati fotona.

Energiji teh dveh setov prehodov sta

$$\hbar\omega = hc/\lambda = \Delta E = E_1/3^2 - E_1/2^2,$$

ter

$$\hbar\omega = hc/\lambda = \Delta E = E_1/3^2 - E_1,$$

prvi usreza prehodu v vidnem delu spektra pri valovni dolžini 656 nm, drugi pa prehodu v UV delu spektra pri valovni dožini 120 nm,

V močnem magnetnem polju pa pride do razcepa. Vem, da je energijski razcep

$$W = \mu_B B(m_l + 2m_s).$$

Ker je končno stanje (po prehodu) vedno s kvantnim številom $m_l = 0$, spin pa se pri prehodu ohranja, v eksperimentu opazimo štiri črte (namesto dveh). Razmik med črtama v enem izmed obeh setov pa je enak

$$\Delta E = 2\mu_B B.$$

4. Čarmonij je vezano stanje "charm" kvarka c z maso $m_c c^2 = 1{,}4$ GeV skupaj z lastnim anti-delcem $\bar{c}$. Celotno energijo tega sistema lahko približno opišemo z

$$\hat{H} = 2m_c c^2 + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha_s \hbar c}{\hat{r}} + \frac{b\hat{r}}{\hbar c},$$

kjer je μ reducirana masa in $b = 0{,}18\ \mathrm{GeV}^2$, $\alpha_s = 0{,}5$. S pomočjo Bohrovega modela $2\pi r = n\lambda = nh/p$ oceni energijo osnovnega in prvega vzbujenega stanja. Namig: pri minimizaciji lahko zanemariš $1/r$ prispevek.

Rešitev: Z Bohrovim modelom ocenimo energijo osnovnega stanja

$$E_n \simeq 2m_c c^2 + \frac{n^2\hbar^2}{m_c r^2} - \frac{\alpha_s \hbar c}{r} + \frac{br}{\hbar c},$$

$$\frac{dE_n}{dr} = -\frac{2n^2\hbar^2}{m_c r^3} + \frac{b}{\hbar c} = 0, \qquad r_n = \sqrt[3]{\frac{2n^2}{b m_c c^2}}\hbar c.$$

Energije vzbujenih stanj so tako

$$E_n = 2m_c c^2 + 3\sqrt[3]{\frac{b^2 n^2}{4 m_c c^2}} - \frac{\alpha_s \hbar c}{r_n}, \qquad E_1 = 3{,}1\ \mathrm{GeV}, \qquad E_2 = 3{,}5\ \mathrm{GeV}.$$