1a. izpit iz Moderne fizike 1

15. december 2021

čas reševanja 90 minut

1. Pion z mirovno maso 135 MeV/c^2 in kinetično energijo 200 MeV v letu razpade na dva fotona, $\pi^0 \to 2\gamma$. Določi maksimalno (minimalno) energijo posameznega fotona.

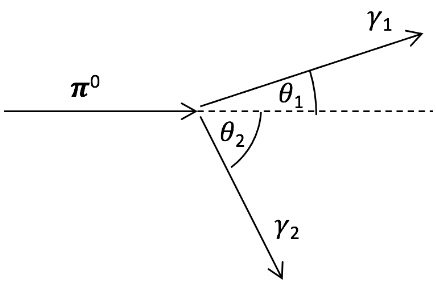
Rešitev: Zapišimo ohranitev energije

$$T + mc^2 = W_{\gamma 1} + W_{\gamma 2}\,, \quad [1/8] \tag{1}$$

in gibalne količine

$$\vec{P} = \vec{P}_{\gamma 1} + \vec{P}_{\gamma 2}\,, \quad [1/8] \tag{2}$$

pri čemer se količine brez indeksa nanašajo na pion, fotona pa označimo $\gamma 1$ in $\gamma 2$.



Slika 1: Skica razpada piona na dva fotona, ki odletita pod različnima kotoma.

Iz enačbe (1) vidimo, da si fotona porazdelita celotno energijo piona. Koliko jo prejme vsak, pa je odvisno od kotov pod katerimi koti fotona odletita. Iščemo torej takšna kota, da bo energija fotona 1 maksimalna možna, hkrati pa bo energija fotona 2 minimalna. Enačbo (2) zapišemo kot $\vec{P}_{\gamma 1} = \vec{P} - \vec{P}_{\gamma 2}$ in jo kvadriramo,

$$P_{\gamma 1}^2 = P^2 - 2PP_{\gamma 2}\cos\theta_2 + P_{\gamma 2}^2\,. \tag{3}$$

$P_{\gamma 1}$ bo maksimalna, ko bo $\cos\theta_2 = -1$, torej $\theta_2 = \pi$ in očitno $\theta_1 = 0$. Torej, foton 1 potuje v isti smeri, kot pion, foton 2 pa v nasprotno enaki smeri. Enačbo (2) lahko sedaj poenostavimo v $P = P_{\gamma 1} - P_{\gamma 2}$, oziroma:

$$cP = W_{\gamma 1} - W_{\gamma 2}\,, \quad [1/4] \tag{4}$$

pri čemer smo uporabili zvezo med gibalno količino in energijo fotona, $cP_{\gamma i} = W_{\gamma i}$ [1/8]. Gibalno količino piona pa izračunamo kot

$$\begin{aligned} cP &= \sqrt{(T+mc^2)^2-(mc^2)^2} \\ &= \sqrt{T^2+2mc^2T} \\ &= 307 \text{ MeV}\,. \quad [1/8] \end{aligned} \tag{5}$$

Iz enačb (1) in (4) končno izračunamo energiji obeh fotonov [1/4]

$$W_{\gamma 1} = \frac{T+mc^2+\sqrt{T^2+2mc^2T}}{2} = 321 \text{ MeV}\,, \tag{6}$$

$$W_{\gamma 2} = \frac{T+mc^2-\sqrt{T^2+2mc^2T}}{2} = 14 \text{ MeV}\,. \tag{7}$$

2. Delec v enodimenzionalni neskončni potencialni jami širine L opiše valovna funkcija

$$\psi(x) = N\left(x^2 - Lx\right)\,.$$

(a) Določi normalizacijsko konstanto N.
(b) Izračunaj pričakovane vrednosti lege in njenega kvadrata, $\langle x\rangle$ in $\langle x^2\rangle$.
(c) Izračunaj pričakovane vrednosti gibalne količine in njenega kvadrata, $\langle p\rangle$ in $\langle p^2\rangle$.
(d) Kolikšen je produkt nedoločenosti lege in gibalne količine, $\delta x \delta p$?
(e) Izračunaj pričakovano vrednost energije $\langle E\rangle$.

Rešitev:

(a) Pri dani valovni funkciji in znani širini jame L, sta robova jame očitno lahko le pri $x = 0$ in $x = L$, saj mora biti valovna funkcija tam enaka 0. Za normalizacijo zato velja:

$$\int_0^L \psi^2(x)\mathrm{d}x = N^2 \int_0^L (x^2-Lx)^2 \mathrm{d}x = N^2\left(\frac{1}{5}L^5 - \frac{1}{2}L^5 + \frac{1}{3}L^5\right) = 1\,. \tag{8}$$

torej

$$N = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\,, \quad [1/8] \tag{9}$$

(b)

$$\langle x\rangle = N^2\int_0^L x(x^2-Lx)^2\mathrm{d}x = N^2(\frac{1}{6}L^6 - \frac{2}{5}L^6 + \frac{1}{4}L^6) = \frac{1}{2}L\,, \quad [1/8] \tag{10}$$

$$\langle x^2\rangle = N^2\int_0^L x^2(x^2-Lx)^2\mathrm{d}x = \frac{2}{7}L^2\,, \quad [1/8] \tag{11}$$

(c)

$$\langle p\rangle = -\mathrm{i}\hbar\int_0^L \psi\psi'\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\hbar N^2\int_0^L (x^2-Lx)(2x-L)\mathrm{d}x = 0\,,\quad [1/8] \tag{12}$$

$$\langle p^2\rangle = -\hbar^2\int_0^L \psi\psi''\mathrm{d}x = -\hbar^2 N^2\int_0^L (x^2-Lx)2\mathrm{d}x = \frac{10\hbar^2}{L^2}\,,\quad [1/8] \tag{13}$$

(d)

$$\delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{L^2}{28} \qquad \delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{10\hbar^2}{L^2}\,. \tag{14}$$

Od tod izračunamo produkt nedoločenosti

$$\delta x\delta p = \sqrt{\frac{5}{14}}\,\hbar \approx 0.60\,\hbar\,.\quad [1/4] \tag{15}$$

(e) Ker je potencial znotraj jame enak $V(x)=0$ in že poznamo $\langle p^2\rangle$, lahko energijo izračunamo preprosto kot

$$\langle E\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m} = \frac{5\hbar^2}{mL^2}\,.\quad [1/8] \tag{16}$$

3. Vesoljski ladji se približujeta Zemlji z razdalje enega svetlobnega leta. Z Zemlje pošiljamo signale s frekvenco ν pod kotom 90° glede na prvo ladjo, ki izmeri ν_1. Na krovu 2. ladje, ki potuje s hitrostjo $v_2 = (4/\sqrt{21})v_1$, izmerijo frekvenco ν_2 pod kotom 90°. Ladji se srečata na Zemlji in ugotovita, da je $\nu_2 = (1/2)\nu_1$. Kolikšni sta hitrosti posameznih ladij glede na Zemljo? Določi čas, ki ga izmerijo na posamezni ladji za pot od začetne točke do Zemlje.

Rešitev. Upoštevamo Dopplerjev pod kotom za $cp = h\nu(1,\cos\alpha,\sin\alpha)$ in za opazovalca, ki se približuje

$$cp' = h\nu'\left(1,\cos\alpha',\sin\alpha'\right) = h\nu\gamma\left(1+\beta\cos\alpha,\cos\alpha+\beta,\sin\alpha\right)\,, \tag{17}$$

in za $\alpha = 90°$ dobimo $\nu_1 = \gamma_1\nu$. [1/8] Z obratno Lorenzovo transformacijo dobimo

$$cp = h\nu\left(1,\cos\alpha,\sin\alpha\right) = h\nu'\gamma\left(1-\beta\cos\alpha',\cos\alpha'+\beta,\sin\alpha'\right)\,, \tag{18}$$

in za $\alpha' = 90°$ velja $\nu_2 = \nu/\gamma_2$, [1/8] od koder sledi

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} = \frac{1}{2}\,.[1/8] \tag{19}$$

Iz te enačbe dobimo kvadratno enačbo za hitrost β_1, oziroma za $x = \beta_1^2$

$$(1-x)\left(1-R^2x\right) = \frac{1}{4}\,,\qquad R = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{\sqrt{21}}\,,\qquad x = \frac{9}{16}\,,\qquad \beta_1 = \frac{3}{4}\,.[1/4] \tag{20}$$

Vzeli smo tisto rešitev kvadratne enačbe kjer je $x < 1$. Hitrosti ladij sta

$$v_1 = \beta_1 c = \frac{3}{4}c\,, \qquad v_2 = R v_1 = \frac{3}{\sqrt{21}}c \sim 0{,}65c\,.[1/8] \tag{21}$$

Čas, ki ga ladja porabi za pot v sistemu zemlje je $t_Z = L/v$, na ladji pa seveda izmerijo čas, ki je krajši za dilatacijaski faktor $1/\gamma$

$$t_1 = \frac{L}{v_1\gamma_1} = \frac{\sqrt{7}}{3}\ \mathrm{yr} = 0{,}9\ \mathrm{yr}\,, \qquad t_2 = \frac{L}{v_2\gamma_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}2\ \mathrm{yr}\,.[1/4] \tag{22}$$

4. Delec postavimo v harmonski potencial $V = m\omega^2 x^2/2$ in napravimo veliko meritev. Izmerjene energije pri posamezni meritvi so $(1/2)\hbar\omega < E_i < (7/2)\hbar\omega, \forall i$, torej ne izmerimo niti $(1/2)\hbar\omega$, niti $(7/2)\hbar\omega$. Izmerimo pa povprečji $\langle E\rangle = (11/6)\hbar\omega$ in $\langle x\rangle = \sqrt{(2/3)\hbar/(m\omega)}$. Določi časovni razvoj valovne funkcije in napovej $\langle x^2\rangle$! Bodi pozoren, da so lahko koeficienti razvoja valovne funkcije v splošnem kompleksni in upoštevaj $\hat{x}\,\psi_n = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\left(\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} + \sqrt{n}\,\psi_{n-1}\right)$.

Rešitev: Ker nikoli ne izmerimo osnovnega stanja je $c_0 = 0$ in ker ne izmerimo stanj z $n \geq 3$, velja $c_{i\geq 3} = 0$, torej

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2\,.[1/8] \tag{23}$$

Iz normalizacije $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ [1/8] in izmerjene povprečne energije velja

$$\langle E\rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \hbar\omega\left(|c_1|^2\frac{3}{2} + (1-|c_1|^2)\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{6}\hbar\omega\,,[1/8] \tag{24}$$

od koder dobimo $|c_1|^2 = 2/3$ in $|c_2|^2 = 1/3$, [1/8] ne pa njune medsebojne faze, ker so koeficienti v splošnem kompleksni. Zapišemo lahko na primer $\psi = c_1\psi_1 + c_2 e^{i\varphi}\psi_2$, kjer so c_i in $\varphi \in \mathbb{R}$ in dobimo

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \left(c_1\psi_1^* + c_2 e^{-i\varphi}\psi_2^*\right)\left(c_1 x\psi_1 + c_2 e^{i\varphi}x\psi_2\right) \tag{25}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \left(c_1\psi_1^* + c_2 e^{-i\varphi}\psi_2^*\right)\left(c_1\sqrt{2}\psi_2 + c_2 e^{i\varphi}\sqrt{2}\psi_1\right) \tag{26}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}c_1 c_2 2\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\hbar}{3m\omega}}\,,[1/8] \tag{27}$$

kjer smo iz (25) v (26) izločili ničelne mešane člene. Iz meritve smo torej dobili $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$ ali fazo $\varphi = 30° = \pi/6$. [1/8] Časovni razvoj valovne funkcije je

$$\psi(x,t) = c_1\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 e^{i\pi/6}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \tag{28}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1 e^{-i3/2\,\omega t} + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_2 e^{-i5/2\,\omega t + i\pi/6}\,.[1/8] \tag{29}$$

Napoved za $\langle x^2 \rangle$ dobimo s ponovno uporabo enakosti za $\hat{x}\psi_n$

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \left(c_1\psi_1^* + c_2 e^{-i\varphi}\psi_2^*\right) \times \\ \left(c_1\left(\sqrt{2}x\psi_2 + x\psi_0\right) + c_2 e^{i\varphi}\left(\sqrt{3}x\psi_3 + \sqrt{2}x\psi_1\right)\right)\end{aligned} \tag{30}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \left(c_1\psi_1^* + c_2 e^{-i\varphi}\psi_2^*\right)\left(3c_1\psi_1 + (3+2)e^{i\varphi}c_2\psi_2\right) \tag{31}$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(3\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6}\frac{\hbar}{m\omega}\,,\ [1/8] \tag{32}$$

ki ni odvisen od velikosti faze φ.