

Fizikalni praktikum 5

Zbirka navodil praktikumskeh vaj za zimski semester 3. letnika študija fizike

Natan Osterman
Oddelek za fiziko, FMF, UL

1. oktober 2023

Kazalo

0 Predgovor	5
1 Difuzija tekočin	7
2 Osnove mikrovalovne tehnike	11
3 Hallov pojav	21
4 Sunkovna jedrska magnetna resonanca	27
5 Spektrometrija žarkov γ s scintilacijskim spektrometrom	37
6 Kotna korelacija anihilacijskih žarkov γ	43
7 Elektronska spinska resonanca	57
8 Poskusi z žarki X	61
9 Holografija	69
10 Elektrooptični pojav v feroelektričnem tekočem kristalu	75
11 Fazno občutljivi ojačevalnik	79
12 Test znanja uporabe osciloskopa	85

0 Predgovor

Mnoga leta so bila navodila za vaje, sodeč po študentskih anketa, najšibkejša točka tega predmeta. Navodila smo zato jeseni 2020 digitalizirali, posodobili, poenotili in jih zložili v zbirko. V tekstu in enačbah so še možne posamezne napake, zato vas lepo prosim, da mi jih sporočite po elektronskih pošti ali pa jih kar popravite v navodilih, ki se nahajajo pri vsakem eksperimentu.

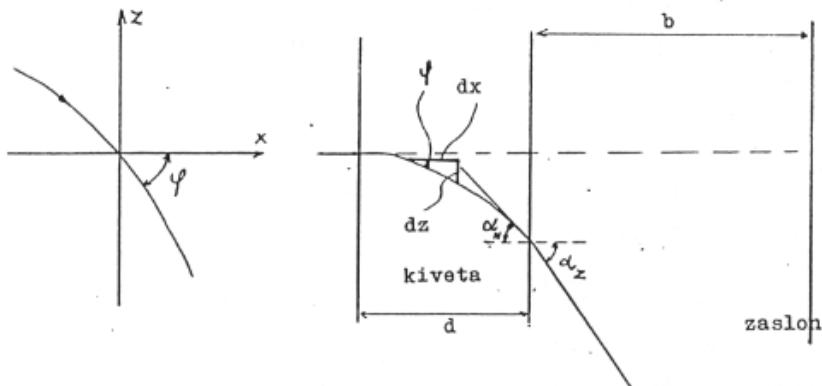
Natan Osterman, natan.osterman@fmf.uni-lj.si

Pot žarka v nehomogenem, plastovitem sredstvu:

Sredstvo naj bo iz planparalelnih plasti, tako da zavisi lomni količnik le od ene koordinate (višine z). Lomni zakon

$$\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{se pospoli na sredstvo z zvezno}$$

spremenljivim lomnim količnikom: $\cos \varphi = \frac{\text{konst}}{n(z)}$



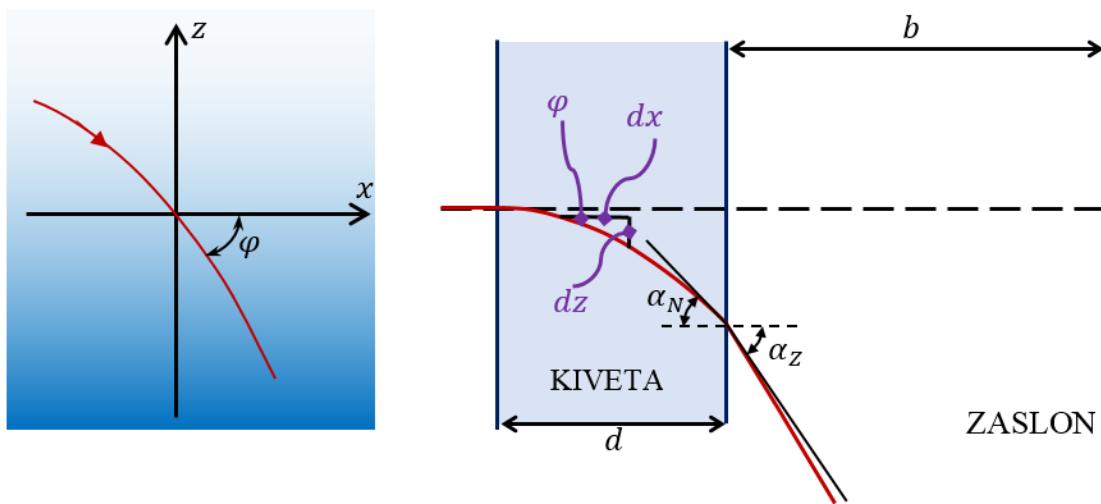
Prehod žarka skozi kiveto izračunamo tako:

Slika 1: Še leta 2016 so bila nekatera navodila natipkana na pisalni stroj.

1 Difuzija tekočin

1.1 Pot žarka v nehomogenem, plastovitem sredstvu

Sredstvo naj bo iz planparalelnih plasti, tako da zavisi lomni količnik le od ene koordinate (višine z). Lomni zakon $\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1}$ se pospoli na sredstvo z zvezno spremenljivim lomnim količnikom: $\cos \varphi = \frac{\text{konst.}}{n(z)}$



Slika 1.1: Levo: Lom žarka nekje znotraj sredstva v kiveti. Desno: Shematsko prikazana pot žarka od izvora proti zaslonu kot pomoč pri razumevanju izpeljave.

Prehod žarka skozi kiveto izračunamo tako:

$$d(\log \cos \varphi) = -d(\log n)$$

ali

$$\frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dn}{n}$$

$$\tan \varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$$

Žarek se torej v kiveti odkloni za kot $\alpha_N = \frac{d}{n} \frac{dn}{dz}$. Po izstopu iz kivete se odklon še poveča, $\alpha_Z = n\alpha_N = d \frac{dn}{dz}$. Na zaslonu dobimo potem odmik $Y = bd \frac{dn}{dz}$. Iz izpeljave se vidi, da velja izračunani odklon le za majhne kote $\alpha \approx \sin \alpha$ in za $d \ll b$. Če obsvetimo kiveto z ravninskim snopom žarkov, nagnjenim za 45° , dobimo na zaslonu krivuljo. Če je sredstvo homogeno, dobimo na zaslonu premico.

1.2 Difuzija

Koncentracija difundirajoče snovi f je funkcija kraja in časa. Difuzijski tok je sorazmeren gradientu koncentracije: $\vec{Q} = -D \operatorname{grad} f$. Upoštevamo še kontinuitetno enačbo $\operatorname{div} \vec{Q} = -\frac{\partial f}{\partial t}$ in dobimo

$$D \nabla^2 f = \frac{\partial f}{\partial t}$$

ali v našem primeru

$$D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Osnovna rešitev te enačbe je $f = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$ (preizkusil!) in predstavlja porazdelitev v primeru, ko je v času $t = 0$ difundirajoča snov vsa zbrana na mestu $z = 0$. Rešitev za poljubno začetno porazdelitev snovi dobimo iz osnovne rešitve z integriranjem.

Primer: V začetku je snov enakomerno porazdeljena po polprostoru $z > 0$, kjer je $f(z) = f_0 = 1$, v polprostoru $z < 0$ pa je $f(z) = 0$. Rešitev je v tem primeru

$$f = \frac{f_0}{2} \left[1 + \theta \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right) \right], \text{ kjer je } \theta(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta \text{ tabelirana funkcija.}$$

Pri opisanem poizkusu so začetni pogoji prav taki. Če vzamemo, da je lomni količnik linearna funkcija koncentracije, velja tudi

$$n(z) = \frac{n_0 + n_1}{2} + \frac{n_1 - n_0}{2} \theta \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right)$$

in iz prej navedenega sledi

$$Y = bd \frac{dn}{dz} = bd(n_1 - n_0) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

Ploščina pod krivuljo je od časa neodvisna:

$$S = \int y dz = kbd(n_1 - n_0)$$

kjer je $k = \frac{a+b}{a}$, a pa razdalja med izvorom divergentnega snopa žarkov in kiveto.

Maksimalni odmik je sorazmeren $t^{-\frac{1}{2}}$:

$$Y_{\max} = bd \frac{n_1 - n_0}{(4\pi Dt)^{1/2}} = \frac{s}{k(4\pi Dt)^{1/2}}$$

1.3 Navodilo

Postavi laser okoli 180 cm od zaslona, kiveto na jezdecu pa na sredo med njiju tako, da bo laserski žarek padal preko sredine kivete na spodnji del zaslona z milimetrskim papirjem. Med laser in kiveto pritrdi še stekleno paličico, nagnjeno pod kotom 45° , ki ima nalogo razpršiti žarek v ravinski snop žarkov. Ker je v naši postavitvi a razdalja med paličico in kiveto, si s tem dosegel največjo možno povečavo k .

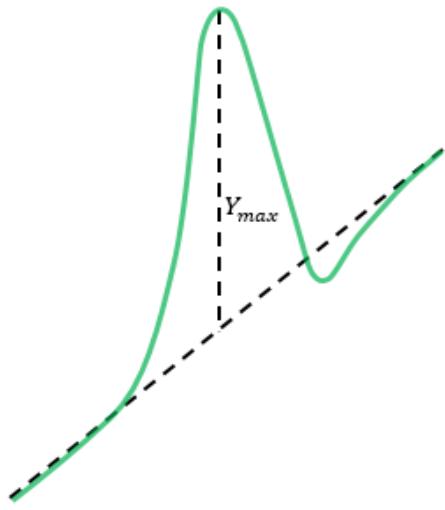
Natoči v kiveto do polovice alkohola, nato pa s kapilarnim lijakom vodo na dno. Natakaj zelo previdno in počasi, da se tekočini med seboj ne pomešata. Na zaslonu moraš videti krivuljo, kot jo približno kaže slika.

V začetku zarisuj višino Y_{max} vsakih 5 – 10 min, kasneje v daljših intervalih. Med čakanjem med odčitki se loti vaje *Test znanja uporabe osciloskopa*.

Večkrat nariši tudi celotno krivuljo. Ne pozabi izmeriti razdalj a, b in debeline d .

Nariši diagram: na absciso čas, na ordinato pa kvocient $\frac{1}{4\pi k^2} \left(\frac{S}{Y_{max}} \right)^2$. Dobiti moraš premico, katere strmina je enaka konstanti D . Ploščino S izmeri na risbi in primerjaj z izračunano vrednostjo po formuli. Ali so ploščine krivulj enake?

Podatek: $n_{\text{etanol}} - n_{\text{H}_2\text{O}} = 0,029$



Slika 1.2: Oblika krivulje kot jo vidimo na zaslonu (ozioroma milimetrskem papirju).

2 Osnove mikrovalovne tehnike

2.1 Naloga

1. Prilagodite valovod na generator mikrovalov.
2. Izmerite frekvenco valovanja s pomočjo v valovod vgrajenega resonatorja.
3. Posnemite rodove klistronovega delovanja v odvisnosti od odbojne napetosti.
4. Izmerite moči, ki jih porablja termistor v vrhovih najmočnejših rodov.
5. Z osciloskopom posnemite krivulji ubranosti za valovod, ki je zaključen z bremenom, in za kratko sklenjeni valovod.

2.2 Uvod

Mikrovalovi so elektromagnetno valovanje z valovno dolžino nekaj cm in frekvenco nekaj GHz. Kot izvor mikrovalov služijo klistroni: to so elektronke, ki imajo za pospeševalno mrezico še dve mrežici, povezani s poloma resonančne votline. Lastno nihanje elektromagnetnega polja v resonančni votlini (ki je tudi priključena na pospeševalno napetost; slednja ob vklopu zaradi naključnih oscilacij napetosti vzbudi začetno nihanje v votlini) ustvarja med mrežicama izmenično napetost, ki enakomerni curek elektronov hitrostno modulira. Hitrost elektronov med mrežicama se namreč bodisi poveča, če kaže električno polje med mrežicama v nasprotni smeri curka, bodisi zmanjša, če kaže polje v smeri curka. Zaradi hitrostne modulacije nastanejo po preletu mrežic v elektronskem curku zgoščine in razredčine.

V refleksnem klistronu je za mrežicama resonančne votline odbojna elektroda, ki neenakomerni elektronski curek usmeri nazaj proti mrežicama in katodi. Če je odbojna napetost izbrana pravilno, se hitrostno modulirani curek vrne med mrežici s tako fazo, da električno polje gruč elektronov ojači lastno nihanje elektromagnetnega polja v resonančni votlini in klistron deluje kot oscilator. Pogoj za pozitivno povratno zvezo, s katero lastno nihanje v resonančni votlini vzdržuje samo sebe, je izpoljen pri več diskretnih vrednostih napetosti: pravimo, da klistron deluje v različnih rodovih. Mikrovalovno elektromagnetno polje iz resonančne votline speljemo v valovod.

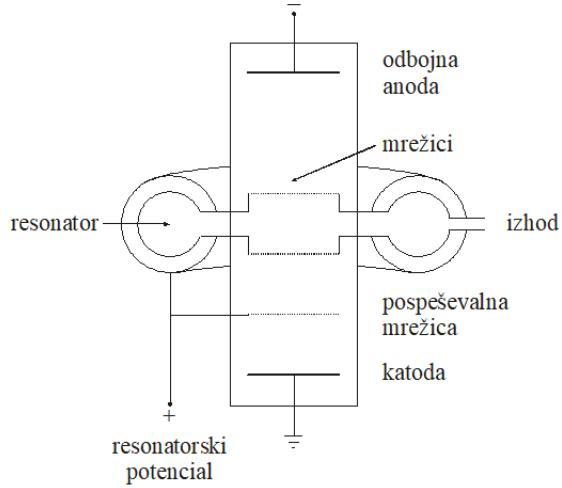
2.2.1 Širjenje mikrovalov

Mikrovalove lahko v splošnem le delno usmerjamo po prostoru. Za strogo usmerjeno prenašanje pa uporabljam mikrovalovne vodnike v obliki dveh vzporednih žic, kable ali cevi – valovode. Pri frekvencah nihanj mikrovalov (GHz) so v takih vodnikih upornost, prevodnost, kapacitivnost in induktivnost zvezno porazdeljene (slika 2). Vrednosti teh količin, preračunane na enoto dolžine, označimo z R , G , L in C .

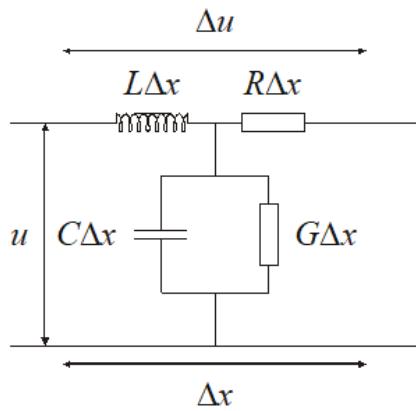
Padec napetosti na dolžinskem elementu Δx takega vodnika je vsota padca napetosti na ohmskem uporniku in padca napetosti na induktivnem uporniku (slika 2):

$$\Delta u = Ri\Delta x + L\Delta x \frac{di}{dt} \quad (1)$$

oziroma



Slika 1: Refleksni klistron



Slika 2: Shematska ponazoritev majhnega dela mikrovalovnega vodnika

$$\frac{du}{dx} = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (2)$$

Podobno lahko napišemo za tok, ki teče po prevodniku $G\Delta x$ in kondenzatorju $C\Delta x$:

$$\Delta i = Gu\Delta x + C\Delta x \frac{du}{dt} \quad (3)$$

oziroma

$$\frac{di}{dx} = Gu + C \frac{du}{dt}. \quad (4)$$

Če sta R in G zanemarljiva (vod brez izgub), dobimo odtotod diferencialni enačbi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

in

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Če vodnik napajamo z izmenično sinusno napetostjo $u = U \exp(j\omega t)$ oziroma s sinusnim tokom $i = I \exp(j\omega t)$, dobimo, da za amplitudo napetosti U in amplitudo toka I velja

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (R + j\omega L)I = ZI \quad (7)$$

in

$$\frac{\partial I}{\partial x} = (G + j\omega C)U = YU, \quad (8)$$

kjer sta Z in Y impedanca in admitanca dolžinske enote mikrovalovnega voda. Upornost mikrovalovnega voda na dolžinsko enoto R imenujemo rezistanca, prevodnost G konduktanca, suscep-

tibilnost ωC susceptanca in reaktivnost ωL reaktanca.

Z odvajanjem zadnjih dveh zvez dobimo valovni enačbi za U in I

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = ZYU = \gamma^2 U \quad (9)$$

in

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = ZYI = \gamma^2 I, \quad (10)$$

kjer je $\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta$ konstanta širjenja z realnim delom $\alpha = R/2\omega L + G/2\omega C$ (atenuacijska konstanta) in imaginarnim delom $\beta = \omega\sqrt{LC}$ (fazna konstanta).

Rešitvi diferencialnih enačb za amplitudo napetosti in toka sta

$$U(x) = A \exp(\gamma x) + B \exp(-\gamma x) \quad (11)$$

in

$$I(x) = \frac{1}{Z} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{A}{Z_0} \exp(\gamma x) - \frac{B}{Z_0} \exp(-\gamma x), \quad (12)$$

kjer je $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$ karakteristična impedanca voda. Trenutna napetost u in tok i sta

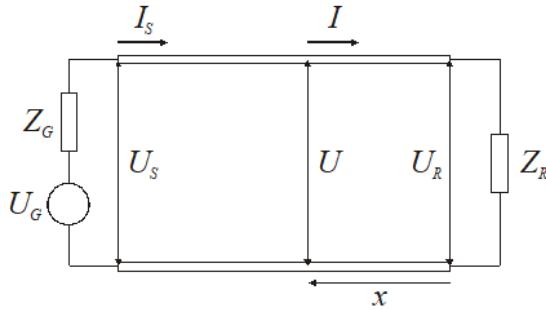
$$u(x, t) = A \exp(\gamma x + j\omega t) + B \exp(-\gamma x + j\omega t) = (U_i + U_r) \exp(j\omega t) \quad (13)$$

in

$$i(x, t) = \frac{A}{Z_0} \exp(\gamma x + j\omega t) - \frac{B}{Z_0} \exp(-\gamma x + j\omega t) = (I_i + I_r) \exp(j\omega t), \quad (14)$$

kjer so U_i in U_r ter I_i in I_r amplitude vpadnega oziroma odbitega valovanja. V splošnem imamo v vodniku torej stojno valovanje. Zanimivo je, da je razmerje U/I za prihajoče valovanje ali odbito valovanje enako karakteristični impedanci Z_0 in je isto na vseh mestih voda. Pri vodilih brez izgub ($R = G = 0$) je karakteristična impedanca realna.

Konstanti A in B določimo iz napetosti in toka na porabniku, ki ga napaja mikrovalovni vod (slika 3).



Slika 3: Napetosti in tokovi v vodniku: U_G je amplituda notranje napetosti generatorja napetosti, Z_G je impedanca generatorja napetosti, I_s je amplituda tok iz generatorja napetosti, U_s je amplituda zunanje napetosti generatorja napetosti, I in U sta tok in napetost na mestu x , Z_R je impedanca porabnika in napetost na porabniku

Koordinatno izhodišče $x = 0$ postavimo ob porabniku, kjer velja $U = U_R$, $I = I_R$ in $Z_R = U_R/I_R$, iz česar sledi

$$U_R = A + B \quad (15)$$

$$I_R = \frac{A - B}{Z_0} \quad (16)$$

$$A = \frac{U_R}{2} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right) \quad (17)$$

$$B = \frac{U_R}{2} \left(1 - \frac{Z_0}{Z_R} \right) \quad (18)$$

oziroma

$$U(x) = \frac{U_R}{2} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right) \exp(\gamma x) + \frac{U_R}{2} \left(1 - \frac{Z_0}{Z_R} \right) \exp(-\gamma x) \quad (19)$$

in

$$I(x) = \frac{I_R}{2} \left(1 + \frac{Z_R}{Z_0} \right) \exp(\gamma x) + \frac{I_R}{2} \left(1 - \frac{Z_R}{Z_0} \right) \exp(-\gamma x) \quad (20)$$

ter impedanca Z na mestu x , kar nas pravzaprav zanima:

$$Z = \frac{U}{I} = Z_0 \left(\frac{Z_R + Z_0 \tanh \gamma x}{Z_0 + Z_R \tanh \gamma x} \right). \quad (21)$$

Če vodnik nima izgub ($R = G = 0$) in je kratko sklenjen ($Z_R = 0$) velja $U = jI_R Z_0 \sin \beta x$ in $I = I_R \cos \beta x$. Če tak vodnik ni zaključen, se vlogi napetosti in toka zamenjata. Razdalja med maksimi amplitud je $\lambda = 2\pi/\beta$. Iz zadnje enačbe vidimo, da je impedanca mikrovalovnega voda na različnih mestih različna. Za izračun moramo poznati karakteristično impedanco Z_0 , impedanco bremena Z_R ter konstanto širjenja γ .

Enačbo (21) lahko uporabimo tudi za določanje impedance bremena Z_R iz poznane vrednosti Z . Kot pogosto uporabljanu metodo si oglejmo določanje Z_R iz izmerjene vrednosti minimalne impedance vodnika $Z_{\min} = |U_{\min}/I_{\min}|$, ki nastopi v oddaljenosti x_{\min} od porabnika. Poglejmo si, kako z meritvijo določimo Z_{\min} in x_{\min} . Najpreprosteje pridemo do rezultata, če vpeljemo refleksijski koeficient r_R , ki je definiran kot razmerje amplitud odbitega in vpadnega vala pri x_0 , torej na bremenu:

$$r_R = \frac{U}{I} \Big|_{x_0} = \frac{B}{A} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_0 + Z_R}. \quad (22)$$

V splošnem je refleksijski koeficient kompleksno število. Če je vod na koncu zaključen tako, da je $Z_R = Z_0$, odboja ni in je $r_R = 0$. Če pa je vod kratko sklenjen, se vse valovanje odbije in je $r_R = 1$. Ob okrajšavi $U'_R = \frac{U_R}{2} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_R} \right)$ velja

$$U(x) = U'_R \exp(\gamma x) [1 + r_R \exp(-2\gamma x)], \quad (23)$$

$$I(x) = \frac{U'_R}{Z_0} \exp(\gamma x) [1 - r_R \exp(-2\gamma x)], \quad (24)$$

$$Z(x) = \frac{U}{I} = Z_0 \frac{1 + r_R \exp(-2\gamma x)}{1 - r_R \exp(-2\gamma x)}. \quad (25)$$

Nas bo odslej zanimal približek, ko smemo izgubo v vodu zanemariti, torej $R = G = \alpha = 0$, kar pomeni, da ima konstanta širjenja γ od 0 različno samo imaginarno komponento: $\gamma = j\beta$.

Značilna in lahko merljiva količina za stojno valovanje v vodniku je razmerje med minimalno in maksimalno amplitudo napetosti ali toka, ki ga imenujemo ubranost:

$$s = \frac{|U_{\min}|}{|U_{\max}|}. \quad (26)$$

Če refleksijski koeficient, ki je kompleksno število, zapišemo v obliki $r_R = \exp(2t_0 + 2ju_0) = |r_R| \exp(2ju_0)$, sledi iz enačb (23) in (24) za ubranost

$$s = \frac{1 - |r_B|}{1 + |r_B|} = \frac{|I_{\min}|}{|I_{\max}|}. \quad (27)$$

Posebni primeri: če je vod zaključen z naravnim bremenom in je $Z_R = Z_0$ ni refleksije ($r_R = 0$) in je ubranost $s = 1$. Če pa je vod kratko sklenjen in je refleksija popolna ($r_R = 1$) je ubranost $s = 0$. Iz enačbe (25) sledi, da je

$$Z_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = Z_0 \frac{1 + |r_R|}{1 - |r_R|} = \frac{Z_0}{s} \quad (28)$$

in

$$Z_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = Z_0 \frac{1 - |r_R|}{1 + |r_R|} = Z_0 s. \quad (29)$$

Po drugi strani lahko Z_{\min} izrazimo z zvezo (21) in je

$$Z_{\min} = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \tan \beta x_{\min}}{Z_0 + jZ_R \tan \beta x_{\min}} = Z_0 s. \quad (30)$$

x_{\min} določimo z dvojno meritvijo: najprej izmerimo krivuljo ubranosti za vodnik, ki je zaključen z bremenom, nato pa še za vodnik, ki je kratko sklenjen. Ker je v slednjem primeru $U_{\min} = 0$ pri $x = 0$, pri vodniku, ki je zaključen z bremenom pa je $x_{\min} \neq 0$, se opazovani minimum ubranosti premakne proti bremenu ravno za vrednost x_{\min} . Če je premik večji od $\lambda/4$ izgleda, kot da se je minimum premaknil proti generatorju.

Če Z_R izpišemo po komponentah, $Z_R = \xi_R + j\eta_R$, iz enačbe (30) sledi, da je

$$\xi_R + j(\eta_R + Z_0 \tan \beta x_{\min}) = (Z_0 - \eta_R \tan \beta x_{\min} + j\xi_R \tan \beta x_{\min}) s \quad (31)$$

Po izenačenju realne in imaginarne komponente dobimo reaktanco bremena, normirano na karakteristično upornost:

$$\frac{\eta_R}{Z_0} = \frac{(s^2 - 1) \tan \beta x_{\min}}{1 + s^2 \tan^2 \beta x_{\min}}, \quad (32)$$

enako normirana rezistanca pa je

$$\frac{\xi_R}{Z_0} = \left(1 - \frac{\eta_R}{Z_0} \tan \beta x_{\min} \right) s. \quad (33)$$

Iz teh zvez izračunamo rezistanco ξ in reaktanco η neznanega bremena. Za grafično reševanje enačbe (30) uporablajo tudi Smithov diagram, ki je opisan v dodatku A.

2.2.2 Frekvenca mikrovalov

Eden od načinov za določitev frekvence mikrovalov je, da izmerimo valovno dolžino valovanja, nato pa odtod določimo frekvenco. Pri širjenju valovanja v vakuumu (in približno tudi v zraku) je hitrost valovanja enaka hitrosti svetlobe:

$$\nu \lambda = c, \quad (34)$$

kjer je λ valovna dolžina valovanja s frekvenco ν . Pri vstopu v valovod se valovna dolžina valovanja spremeni in je enaka

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}, \quad (35)$$

kjer je a daljša stranica preseka valovoda. Valovno dolžino valovanja v valovodu lahko izmerimo (več pri opisu merjenja slike valovanja v valovodu, slika 4), iskano frekvenco pa dobimo iz izraza:

$$\nu = \frac{c\sqrt{\lambda'^2 + 4a^2}}{2a\lambda'}. \quad (36)$$

Frekvenco mikrovalov lahko merimo tudi z resonatorjem, ki ga vgradimo v valovod. Resonator uglasimo na merjeno frekvenco npr. s premikanjem dna. Ko je resonator uglasen, se tudi v njem pojavi valovanje, toda za to se porabi del moči valovanja v valovodu. Na merilniku moči se od-klon instrumenta zmanjša za kakih 60 %. Če je vijak za premikanje dna resonatorja umerjen v frekvenčni skali (poglej umeritveno tabelo!), lahko tako neposredno določimo frekvenco valovanja v valovodu.

2.2.3 Merjenje moči mikrovalov

Moč valovanja v valovodu najpogosteje merimo s termoelektričnimi elementi, ki se zaradi obsevanja z mikrovalovi segrejejo, zato se jim spremeni upornost; takim elementom pravimo bolometri. Z bolometrom izmerimo moč P_m , ki jo ta absorbira na račun vpadne moči P . P_m in P povezuje enačba

$$P = \frac{P_m}{1 - |r_R|^2}, \quad (37)$$

kjer je r_R refleksijski koeficient

$$|r_R|^2 = \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^2. \quad (38)$$

Bolometri so navadno dveh vrst:

1. **Bareterji** (angl. barretter) so sestavljeni iz tanke platinaste žičke. Zveza med sprejeto močjo in spremembou upornosti je linearna. Slabost bareterjev je, da so zelo občutljivi na preobremenitve. Občutljivost: $3 - 12\Omega/\text{mW}$
2. **Termistorji** so izdelani iz polprevodnikov (nikljevi ali magnezijevi oksidi), ki so zaradi boljše prevodnosti pomešani z bakrenim prahom. Zveza med absorbirano mikrovalovno močjo in spremembou upornosti ni popolnoma linearna, temperaturni koeficient je negativen. Niso občutljivi na preobremenitve, zato jih pogosto uporablajo. Občutljivost: $50 - 100\Omega/\text{mW}$

Spremembo upornosti merimo z bolj ali manj izpopolnjenim Wheatstonovim mostičkom bodisi tako, da merimo spremembu toka skozi detektor, ki je potrebna, da se porušeno ravnotežje spet vzpostavi, bodisi tako, da pri porušenem ravnotežju merimo tok skozi galvanometer ali kak podoben merilnik, ki jo vgrajen v mostiček.

2.2.4 Določanje impedance bremena iz meritve ubranosti

Sliko valovanja v valovodu merimo s posebnim vodom. To je valovod, ki ima po sredini ene izmed širših ploskev zarezo, skozi katero sega merilna sonda v notranjost. Na sondi je priključena mikrovalovna dioda, ki sprejete signale usmeri. Usmerjeni signal vodimo preko ojačevalnika na merilni instrument. Kadar je valovanje v valovodu stojno, se ob premikanju sonde vzdolž valovoda od-klon instrumenta spreminja: merimo namreč hrbte in vozle stojnega valovanja.

Da je meritev kvantitativna, ima merilni vod skalo za določitev lege sonde. Merilna linija pa je opremljena tudi z enostavno električno napravo, s katero lahko posnamemo sliko valovanja s pisalnim instrumentom.

Z merilnim vodom bi žeeli dobiti resnično sliko porazdelitve amplitude napetosti v valovodu. V resnici je slika popačena zaradi kvadratične karakteristike diode. Da določimo ubranost, moramo razmerje minimalnega in maksimalnega odčitka, h_{min} in h_{max} , koreniti

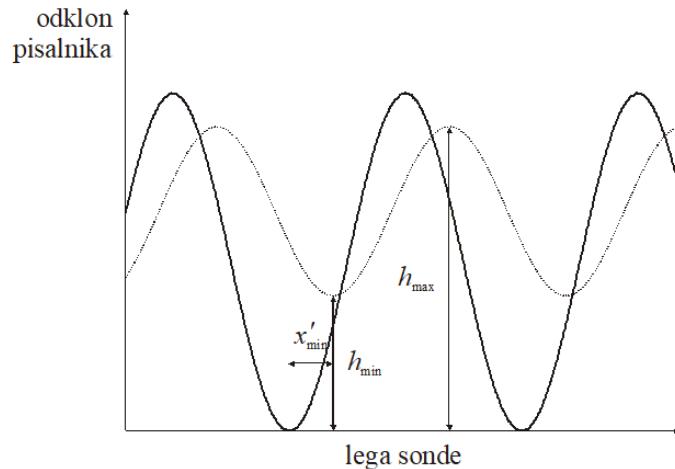
$$s = \frac{|U_{min}|}{|U_{max}|} = \sqrt{\frac{h_{min}}{h_{max}}}. \quad (39)$$

Za določitev x_{min} in s , ki po enačbah (32) in (33) služita za izračun impedance bremena Z_R , z merilnim vodom najprej posnamemo sliko valovanja pri bremenu z neznano impedanco (slika 4). Nato breme odstranimo, valovod zaključimo s kratkostično steno ter ponovno posnamemo sliko valovanja. Iz obeh krivulj določimo ubranost s . Da je meritev čim natančnejša, odčitamo razdaljo med dvema minimoma na krivulji, ki opisuje kratko sklenjen valovod. Ta razdalja je enaka polovici valovne dolžine valovanja v valovodu.

Razlika med lego izbranega minima krivulje, ki opisuje valovod z bremenom, in ustreznega minima krivulje, ki opisuje kratko sklenjen valovod, je iskani x_{min} . Ker sta λ' in x'_{min} merjena v istih enotah, velja

$$\frac{x'_{min}}{\lambda'} = \frac{x_{min}}{\lambda} = \frac{\beta x_{min}}{2\pi}, \quad (40)$$

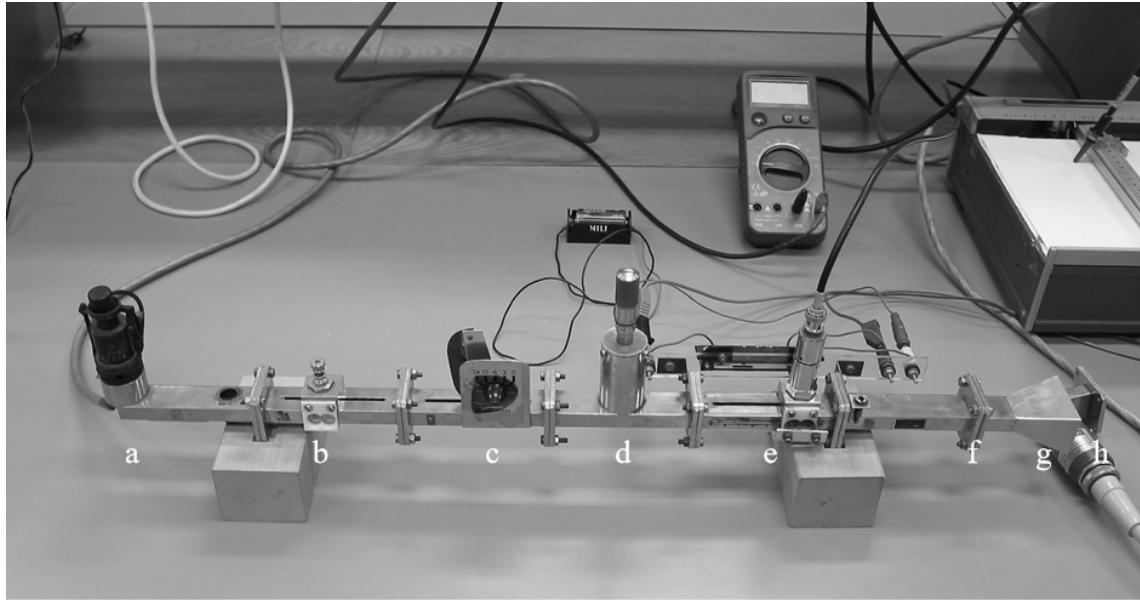
odkoder sledi, da je $\beta x_{min} = 2\pi \frac{x'_{min}}{\lambda'}$.



Slika 4: Krivulji ubranosti za valovod, zaključen z bremenom, in za kratko sklenjen valovod.

2.3 Potek meritve

V začetku vaje sestavlja mikrovalovni elementi zaporedje, ki je shematsko prikazano na sliki 5.



Slika 5: Elementi mikrovalovnega sistema: a) izvor, b) ubiralka, c) dušilka, d) rezonator, e) merilni vod, f) kratkostična stena, g) antena, h) bolometer. V ozadju je viden voltmeter, s katerim merimo odbojno napetost na klistronu, in pisalnik, ki se je nekoč uporabljal namesto osciloskopa.

lega vijaka	frekvenca [Ghz]
100	10.0
300	9.0
500	8.0

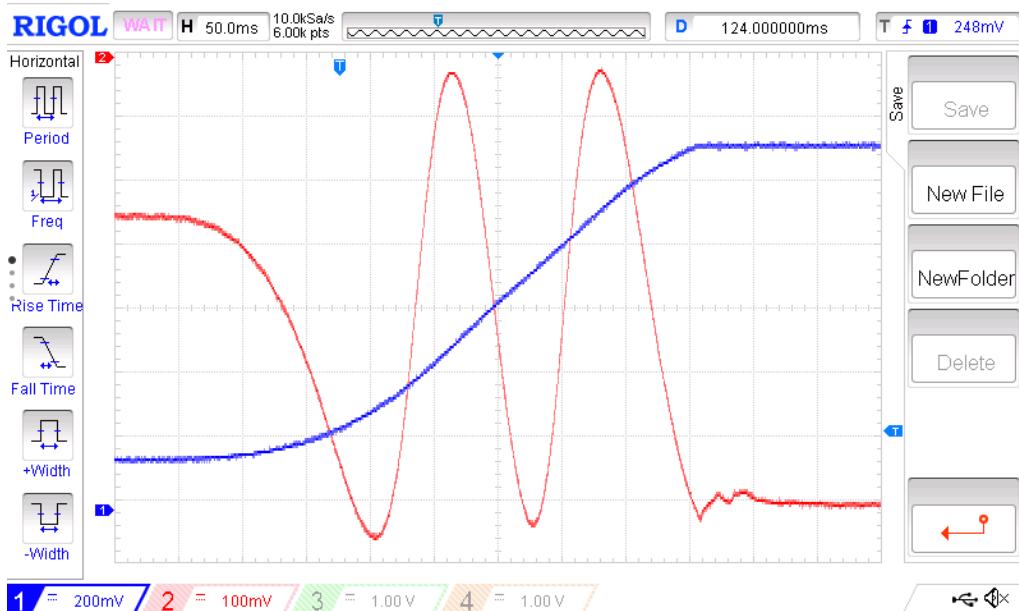
Tabela 2.1: Umeritev mikrometrskega vijaka rezonatorja.

1. Na konec valovoda namestite naravno breme (anteno). Prižgite napajalnik refleksnega klistrona. Ko se ta ogreva, izhod iz merilne sonde povežite z vhodom CH2 osciloskopa. Če sedaj počasi spreminjate odbojno napetost klistrona (kar spremljate na voltmetu), signal sonde na osciloskopu naraste, pade itd. Prepričajte se, da rezonator slučajno ni v resonanci z valovanjem v valovodu.
2. Izberite si enega od najmočnejših rodov in naravnajte odbojno napetost tako, da bo signal sonde za ta rod največji. S premikanjem vozička na ubiralki lahko signal močno spremenite. Pomaknite voziček v lego, kjer je signal največji. Izmenično vrtite vijak na ubiralki in premikajte voziček, dokler signal ne doseže maksimuma. Sedaj lahko učvrstite vijak ubiralke z matico, še nekoliko popravite lego vozička in bolj natančno naravnate odbojno napetost; voziček naj ostane v tem položaju do konca vaje. S tem ste prilagodili valovod na klistron. (O vlogi ubiralke govori Dodatek.)
3. Vrtite mikrometrski vijak na rezonatorju in obenem opazujte signal merilne sonde. Ko pride do resonance, se signal občutno zmanjša. S pomočjo lege mikrometrskega vijaka in umeritvene tabele 2.1 določite frekvenco mikrovalov.
4. Vrtite gumb za nastavitev odbojne napetosti klistron iz ene skrajne lege v drugo in opazujte jakost mikrovalovnega valovanja v valovodu. Izmerite odbojne napetosti, kjer se pojavijo maksimumi jakosti valovanja (rodovi delovanja klistrona).
5. Izključite napajanje klistrona, odstranite naravno breme in pritrđite na valovod prehodnik. Na prehodnik privijte termistor in ga povežite z vhodom merilnika mikrovalovne moči. Merilnik moči naravnajte na območje 10 mW in ga vključite. Ko se ogreje, ga naravnajte z

gumboma za grobo in fino regulacijo, da bo kazalec instrumenta pokril ničlo. Vključite še klistron in izmerite moči P_m v vrhovih najmočnejših rodov.

- Nastavite odbojno napetost tako, da bo klistron pri najmočnejšem rodu. Vhod CH1 osciloskopa (primerena začetna občutljivost: 2 V/div) priključite na drsnik meritne linije (oglejte si vezavo drsnika z 9V baterijo). Vhod CH2 osciloskopa (primerena začetna občutljivost: 100 mV/div) povežite z izhodom iz meritne sonde. Nastavite časovno skalo osciloskopa na, recimo, 50 ms/div. Premikajte voziček meritne linije od leve proti levi in opazujte oba signala. Napetost na CH1 je sorazmerna z lego sode, napetost na CH2 pa niha. Po potrebnih spremenitvah nastavite občutljivosti obeh kanalov tako, da bo pokrito celotno območje vrednosti. Z ravnalom izmerite razdaljo med skrajnima legama vozička, da boste lahko x-os na grafih kasneje narisali v dolžinskih enotah.

Proženje osciloskopa nastavite na CH1, izberite način normalnega proženja (trigger mode: Normal) in nivo proženja nastavite malo nad signalom pri skrajno levi legi vozička. Ko voziček potegnete od skrajno leve do skrajno desne lege, bi se morala na zaslonu izrisati signalna, podobna sliki 6.



Slika 6: Zaslon osciloskopa pri zajemanju krivulje ubranosti.

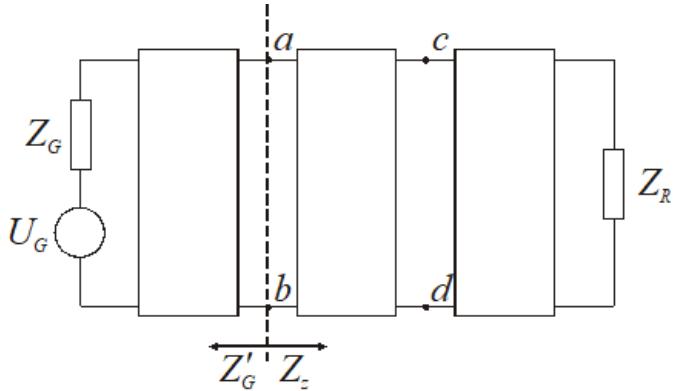
Zajeta signala shranite na USB ključek (Tipka Storage, Type CSV, izberite kanala CH1 in CH2, Save. Če se osciloskop "pritožuje", enkrat pritisnite tipko RUN/STOP in ponovno poskusite shraniti signala. Vzrok za morebitno prepočasno snemanje na USB ključ je prevelika količina zajetih podatkov. V meniju Acquisition v tem primeru nastavite MemDepth na najmanjšo vrednost in zajemite signal še enkrat.) Izklopite meritnik moči in odstranite predhodnik s termistorjem. Valovod zaključite s kratkostično steno in še enkrat posnemite oba signala. Valovod zaključite z anteno in še enkrat posnemite oba signala.

Na svojem računalniku na isti graf narišite vse tri krivulje ubranosti (signal sonde v odvisnosti od lege sonde - CH2 v odvisnosti od CH1). Iz prve krivulje določite ubranost. Iz ubranosti in razdalje x_0 izračunajte impedanco bremena, ki ga predstavlja prehodnik s termistorjem. Iz merjenih moči P_m in iz ubranosti s določite še prave moči P v vrhovih posameznih rodov. Določite valovno dolžino v valovodu λ' in iz nje izračunajte frekvenco mikrovalov.

2.4 Dodatek: impedančno prilagajanje valovoda na generator z ubiralko

Maksimalni prenos moči od generatorja do bremena dobimo, če je impedanca bremena enaka konjugirano kompleksni vrednosti impedance generatorja. Takrat pravimo, da sta impedanci generatorja in bremena prilagojeni.

Theveninov teorem: če je generator povezan z bremenom preko enega ali več reaktančnih vezij (vod brez izgub) in je na enem paru priključkov izpolnjen pogoj o konjugirano impedančni prilagoditvi, je pogoj o taki prilagoditvi izpolnjen na vseh parih vezij in maksimalna moč bo prenešena od generatorja do bremena.



Slika 7: K izpeljavi Theveninovega teorema

Levo stran preseka a-b lahko nadomestimo z impedanco generatorja Z'_G , desno stran pa z vezju ekvivalentno impedanco Z_z . Napetost nadomestnega generatorja U'_G je napetost kroga, ki je odprt v preseku a-b.

Naj bo v preseku a-b izpolnjen pogoj o kompleksni impedančni prilagoditvi. Prenos moči skozi presek a-b je tedaj maksimalen tako v ekvivalentnem kot v originalnem krogu. Ker med potjo ni izgube moči ($R = 0$), se maksimalna moč prenese prav do bremena. To pomeni, da so kompleksno prilagojena vsa stičišča. Če ne bi bilo tako, ne bi dobili maksimalnega prenosa moči. Impedanco torej lahko prilagodimo v kateri koli točki voda med generatorjem in bremenom.

Če vod ni zaključen s karakteristično impedanco, lahko na njem najdemos mesto, kjer je realni del impedance voda enak karakteristični impedanci voda. Pri ubiralki najdemos to mesto s pomikanjem sonde vzdolž vodnika, vse dokler ne dosežemo največjega prenosa moči. Popolno kompenzacijo dosežemo tako, da sondom bolj ali manj potopimo v valovod. Tako namreč spremojamo kapacitivnost voda. S tem prilagajamo susceptanco na vrednost reaktance in dosežemo zahtevano kompleksno impedančno prilagoditev generatorja na breme.

3 Hallov pojav

3.1 Uvod

E. H. Hall si je leta 1879 zamislil eksperiment pri katerem je kovinski trak snovi, po katerem je tekel tok, postavil v prečno magnetno polje, pravokotno na trak. Domneval je, da magnetna sila pritegne tok elektronov ob enega izmed robov kovinskega traku, kar bi se poznalo na povečanju upora skozi kovinski trak (zaradi zmanjšanja efektivnega preseka traku). Ker tega ni zaznal, je sklepal, da se med robovoma traku pojavi električna napetost (danes poznana kot Hallova napetost), kjer nastalo električno polje preko električne sile uravnovesi magnetno silo na gibajoče se elektrone.

3.1.1 Hallova napetost

Hallov eksperiment je prikazan na sliki 1. Pravokotno izrezan kovinski trak s stranicami a , b in c po katerem teče električni tok I v smeri osi x , postavimo v prečno magnetno polje B v smeri osi z . Predpostavimo, da so nosilci naboja elektroni z nabojem $-e_0$. Gostota toka $j = I/(bc)$ je za elektrone podana tudi z izrazom $j = -ne_0v$, kjer sta n in v gostota in hitrost nosilcev naboja. Elektroni se zaradi magnetne sile $F_m = -e_0vB$, ki deluje v smeri osi $-y$, začnejo kopičiti ob robu kovinskega traku. Tam se nabere plast negativnega naboja, na drugi strani, kjer je primanjkljaj elektronov, pa plast pozitivnega naboja. Ti dve plasti ustvarita prečno električno polje E_y v smeri osi $-y$ in s tem električno silo $F_e = -e_0(-E_y) = e_0E_y$, ki ravno uravnovesi magnetno silo. V stacionarnem stanju (to se vzpostavi v zelo kratkem času, ki je reda velikosti 10^{-12}s) velja $F_m + F_e = 0$, torej

$$e_0E_y = e_0vB. \quad (1)$$

Iz tega sledi izraz za velikost prečnega električnega polja E_y :

$$E_y = vB = -\frac{jB}{ne_0}. \quad (2)$$

Hallova napetost U_H , to je napetost, ki nastane zaradi prerazporeditve naboja med robovoma kovinskega traku, je definirana kot

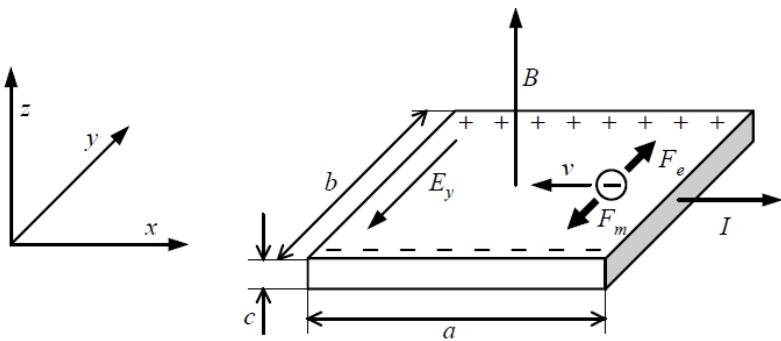
$$U_H = E_y b = -\frac{jBb}{ne_0} = -\frac{IB}{ne_0c}. \quad (3)$$

Kvocient E_y/jB imenujemo Hallova konstanta in ga označimo z R_H . Sledi

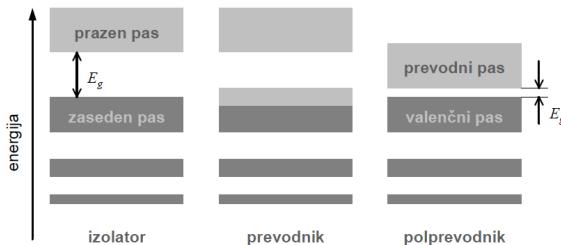
$$R_H = -\frac{1}{ne_0} = \frac{U_H c}{IB}. \quad (4)$$

Pri tem velja omeniti, da dobimo s pomočjo natančnejših izračunov (transportna teorija) še dodaten predfaktor v izrazu za Hallovo napetost U_H in Hallovo konstanto R_H , ki znaša $3\pi/8$. Vendar so tudi v tem primeru upoštevane določene predpostavke, kot so neodvisnost proste poti od energije nosilcev naboja, ter številni termoelektrični efekti, do katerih pride, če vzorec ni izotermen. Meritve pokažejo, da so slednji efekti nekaj redov velikosti manjši od Hallovega pojava.

Iz enačbe 3 sledi, da lahko uporabimo Hallov pojav za merjenje gostote magnetnega polja B . V t.i. Hallovi sondi imamo prevoden trak, ki ga postavimo v neznano magnetno polje, skozi katerega napeljemo vedno isti tok in z občutljivim voltmetrom merimo Hallovo napetost. Ker je ta sorazmerna



Slika 1: Shema Hallovega eksperimenta.



Slika 2: Shema energijskih pasov za izolator, prevodnik in polprevodnik. Temni pasovi so zasedeni, svetli so prazni. E_g predstavlja energijsko režo, ki je v izolatorju večja od nekaj eV, v polprevodniku pa dovolj ozka, da termično gibanje omogoči skok elektronov iz valenčnega pasu v prevodni pas.

z magnetnim poljem, je potrebno Hallovu sondu le enkrat umeriti v znanem magnetnem polju. Iz enačbe (4) pa sledi, da lahko z merjenjem Hallove konstante določimo predznak in gostoto nosilcev naboja v raznih materialih. Pri tej vaji bomo določili vrsto nosilcev v vzorcu, germanijevem polprevodniku. V polprevodniku namreč nečistoče odločilno vplivajo na gostoto nosilcev naboja.

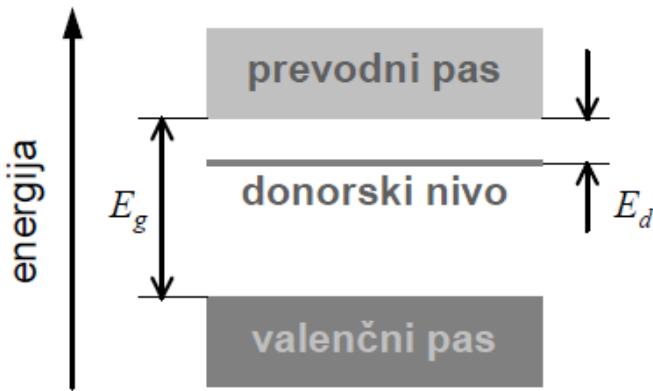
3.1.2 Polprevodniki

V kristalu z N atomi se zaradi prekrivanja atomskih orbitalov vsaka izmed prvotnih diskretnih energij v izoliranih atomih razcepi v N energijskih nivojev. Energijski nivoji, ki ležijo skupaj in izvirajo iz iste energije v izoliranem atomu, tvorijo energijski pas. V vsakem pasu je lahko $2N$ elektronov (faktor 2 zaradi spina). Energijski pasovi se lahko prekrivajo ali pa med njimi nastanejo prepovedani pasovi. To so energije, ki jih ne more imeti noben elektron v kristalu.

Kristal je izolator (glej sliko 2), če ima vse energijske pasove do neke energije povsem polne, višje ležeči pasovi pa so prazni in ločeni s širokim prepovedanim pasom z energijsko režo, večjo od tipično 2 eV. To pomeni, da pri sobni temperaturi termična energija, ki je reda velikosti $k_B T = 0,025\text{eV}$, ne omogoči skoka elektrona v višje ležeče nezasedene pasove. Sledi, da takšen kristal ne prevaja električnega toka, saj tedaj elektroni ne morejo prejeti sicer majhne kinetične energije, ko steče električni tok. Elektroni namreč nimajo prostih stanj z nekoliko višjo energijo, kamor bi lahko skočili. Z drugimi besedami, povsem zapolnjeni pasovi v kristalih ne prevajajo električnega toka.

V prevodniku je najvišje ležeči neprazni energijski pas le delno zaseden. Tako lahko elektroni prejmejo kinetično energijo, ko se gibljejo v električnem polju. V prevodniku torej električno polje požene električni tok.

Če je energijska reža med najnižjim nezasedenim (prevodnim) pasom in najvišjim polnim (valenčnim) pasom okoli 1 eV, lahko pri dovolj visoki temperaturi termična energija zadošča, da del elektronov preide v prevodni pas in s tem prevaja električni tok. V tem primeru k prevodnosti prispevajo tako elektroni kot tudi vrzeli, ki nastanejo v valenčnem pasu. Za čisti polprevodnik velja (glej literaturo), da je gostota elektronov n_p , ki so dvignjeni iz valenčnega pasu enaka



Slika 3: Valenčni in prevodni pas v polprevodniku tipa n. Donorski nivo leži tik pod dnem prevodnega pasu. Zato je dovolj že majhna energija E_d , da elektron iz donorskoga nivoja preide v prevodni pas.

$$n_p(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_e k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_g}{2k_B T} \right), \quad (5)$$

kjer je m_e efektivna masa elektrona in E_g velikost energijske reže med prevodnim in valenčnim pasom.

3.1.3 Hallov pojav v polprevodniku tipa n

Gostota nosilcev naboja (in s tem prevodnost) se v polprevodniku drastično poveča v prisotnosti primesi, ki se vgradijo v polprevodniški kristal. Kristal čistega polprevodnika običajno sestavlja štirivalentni atomi kot sta germanij in silicij. Če dodamo primes petivalentnih atomov, kot je arzen, se ta vgradi v strukturo štirivalentnih atomov in ima tako en odvečni elektron. Ta elektron potrebuje zelo majhno energijo (nekaj stotink eV), da se od njega odtrga in skoči v prevodni pas. Dodatni donorski nivo tako leži tik pod prevodnim pasom. Energijsko režo označimo z E_d (glej sliko 3). Izkaže se (glej literaturo), da so v primeru dopiranja polprevodnika s petivalentnimi atomi večinski nosilci naboja elektroni, zato pravimo takšnemu polprevodniku, da je tipa n. Podobno so večinski nosilci naboja vrzeli (pozitivni naboji), če polprevodnik dopiramo s trivalentnimi atomi, kot je galij. Tedaj govorimo o polprevodniku tipa p.

H gostoti elektronov v prevodnem pasu v primeru polprevodnika tipa n prispevajo tudi elektroni, ki so bili termično dvignjeni iz donorskoga nivoja. Iz velekanonične porazdelitve (glej literaturo) dobimo naslednji izraz v limiti nizkih temperatur ($k_B T \ll E_d$)

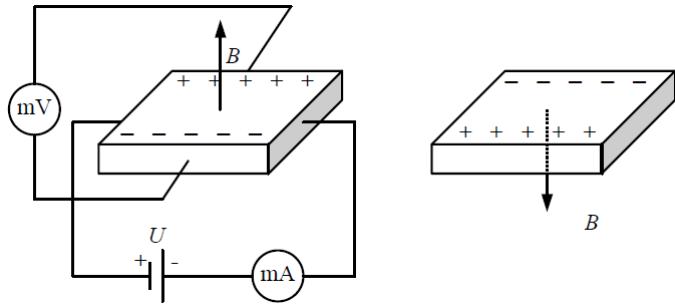
$$n_p(T) = N_d^{1/2} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/4} \exp \left(-\frac{E_d}{2k_B T} \right), \quad (6)$$

kjer je N_d gostota donorskih primesi. Ko pa je termična energija dovolj velika ($k_B T > E_d$), so v prevodni pas vzbujeni vsi donorski elektroni

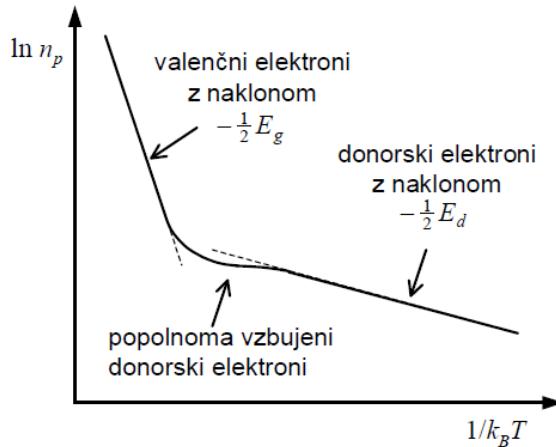
$$n_p(T) = N_d \quad (7)$$

Ker je gostota valenčnih elektronov v polprevodniku približno 10^{22} cm^{-3} in gostota nečistoč tipično med 10^{13} cm^{-3} in 10^{19} cm^{-3} , prevladuje pri nižjih temperaturah prevodnost zaradi vzbujenih donorskih elektronov, pri višjih temperaturah pa zaradi valenčnih elektronov, vzbujenih v prevodni pas.

Iz zgornjega je razvidno, da lahko z merjenjem Hallove napetosti (enačba (4)) izmerimo temperaturno odvisnost gostote nosilcev naboja v polprevodniku tipa n in preverimo ustreznosti izrazov (5) - 7)



Slika 4: Električna shema eksperimenta. Če obrnemo vzorec, kar je ekvivalentno temu, da obrnemo smer magnetnega polja, dobimo Hallove napetost z nasprotnim predznakom. Pri tem se napetost zaradi nesimetrije kontaktov ne spremeni (glej enačbo (8)).



Slika 5: Pričakovana odvisnost $\ln n_p$ od $1/k_B T$ za polprevodnik tipa n, ki ustreza enačbi (7).

3.2 Opis eksperimenta

Shema vaje je prikazana na sliki 4. Vzorec je pravokotno izrezan kos germanijevega polprevodnika, ki je tipa n. To pomeni, da so v njem donorske primesi in so večinski nosilci naboja elektroni. Z merjenjem Hallove napetosti U_H lahko pri znani vrednosti polja B , debelini vzorca c in znanem toku I skozi vzorec, iz enačbe (4) določimo vrednost Hallove konstante R_H . Le-ta je neposredno povezana z gostoto nosilcev naboja. Ker lahko pri vaji spremenjamo temperaturo vzorca, tako pomerimo temperaturno odvisnost gostote nosilcev naboja. Izkaže se, da se za dani vzorec na merjenem temperaturnem območju med 20°C in 80°C zelo občutno spremeni razmerje v deležu donorskih in valenčnih elektronov, ki so se vzbudili v prevodni pas.

Če narišemo graf $\ln n_p$ v odvisnosti od $1/k_B T$, pričakujemo odvisnost, ki je prikazana na sliki 5. Pri nižjih temperaturah ima odvisnost naklon $-\frac{1}{2}E_d$, vmes je konstantna, pri višjih temperaturah pa ima naklon $-\frac{1}{2}E_g$. To ustreza enačbam (5 - 7) in razmislek, da pri nižjih temperaturah sprva prevajajo vzbujeni donorski elektroni, pri višjih pa prevladujejo vzbujeni valenčni elektroni, saj jih je bistveno več od števila donorskih elektronov. Ker znašata v danem vzorcu germanija, ki je dopiran s petvalentnimi atomi, $E_g = 0.66\text{eV}$ ter $E_d \approx 0.01\text{eV}$, lahko sklepamo, da so že pri sobni temperaturi vzbujeni skoraj vsi donorski elektroni, tako da nizkotemperaturne limite, ki jo popiše enačba (6) pri danem eksperimentu niti ne izmerimo.

3.3 Naloge

1. Izmeri temperaturno odvisnost Hallove napetosti vzorca polprevodnika tipa n na temperaturnem območju med 20°C in 80°C .

2. Nariši graf Ohmske upornosti R v odvisnosti od temperature T .
3. Nariši graf Hallove konstante R_H v odvisnosti od temperature T .
4. S pomočjo enačbe (4) nariši graf $\ln n_p$ v odvisnosti od $1/k_B T$.
5. Določi vrsto nosilcev naboja v germanijevem vzorcu na tem temperaturnem območju. Preveri ustreznost enačb (5 - 7)!

3.4 Navodila za izvedbo

Germanijev vzorec z debelino $c = 0,95\text{mm}$ vtaknemo z nosilnim okvirjem v režo magneta z gostoto magnetnega polja $B = 0,173\text{T}$. Z vzorcem je potrebno ravnati previdno, saj je krhek. Električna vezava vzorca je prikazana na sliki 4. Ker kontakti na vzorcu niso povsem simetrični, je izmerjena napetost U_1 vsota Hallove napetosti U_H in potencialne razlike, ki nastane zaradi nesimetrije kontaktov U_p , torej je $U_1 = U_H + U_p$. Običajno je napetost U_p po absolutni vrednosti večja od U_H . Če vzorec v magnetnem polju obrnemo (glej sliko 4), se spremeni le predznak Hallove napetosti, torej je $U_2 = -U_H + U_p$. Iz obeh izmerjenih napetosti tako lahko določimo iskano Hallovo napetost

$$U_H = \frac{1}{2}(U_1 - U_2). \quad (8)$$

Temperaturo vzorca povečujemo postopoma po približno 5°C . To dosežemo z grelcem. Pred vsako meritvijo počakamo vsaj 5 minut, da se z mešanjem temperatura vzorca čim bolj ustali in izenači s temperaturo olja. Merimo v čim večjem temperaturnem območju (tipično med 20°C in 80°C).

3.5 Vprašanja

1. Ali se spremeni predznak Hallove konstante, če so nosilci naboja vrzeli?
2. Ali so za Hallovo sondo, ki je namenjena merjenju gostote magnetnega polja, primernejši prevodniki ali polprevodniki?
3. S pomočjo ionizacijske energije atoma petvalentne primesi oceni velikost donorske reže E_d za polprevodnike tipa n (glej literaturo).

3.6 Literatura

- N. W. Ashcroft in N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing.
 C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, Inc.
 J. Strnad. *Fizika*, četrти del. DMFA, Ljubljana.

4 Sunkovna jedrska magnetna resonanca

NALOGA:

1. Za vzorec vode s primešanimi paramagnetnimi ioni poišči signal proste precesije po sunku $\pi/2$ in signal spinskega odmeva po zaporedju sunkov $\pi/2$ in π . Z opazovanjem širine signala proste precesije in signala spinskega odmeva poišči takšno lego sonde, da bo magnetno polje v področju vzorca čim bolj homogeno. Iz obeh širin izračunaj T_2^* in oceni nehomogenost magnetnega polja v vzorcu.
2. Z opazovanjem odvisnosti signala proste precesije med dvema sunkoma $\pi/2$ določi relaksacijski čas T_1 za vzorec vode s primešanimi paramagnetnimi ioni in za vzorec vodovodne vode.
3. Za vodo s primešanimi paramagnetnimi ioni poišči odvisnost višine signala spinskega odmeva od presledka τ med sunkoma $\pi/2$ in π in določi spinsko-spinski relaksacijski čas, T_2 .

4.1 Jedro v homogenem magnetnem polju

Jedro ima poleg vrtilne količine (spin) $\vec{\Gamma}$ tudi magnetni moment $\vec{\mu}$. Vrtilna količina in magnetni moment imata isto smer in sta povezana z enačbo,

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{\Gamma}, \quad (4.1)$$

kjer je γ giromagnetno razmerje, ki je odvisno od vrste jedra (za proton velja $\gamma = 2.675 \cdot 10^8 / \text{Ts}$ oz. izraženo v Hertzih $\gamma/2\pi = 42.576 \text{ MHz/T}$).

V magnetnem polju \vec{B}_0 , ki naj kaže vzdolž osi z , deluje na magnetni moment navor,

$$\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = \gamma \vec{\Gamma} \times \vec{B}_0. \quad (4.2)$$

Sprememba vrtilne količine je sorazmerna sunku navora kar da enačbo,

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{N} = \gamma \vec{\Gamma} \times \vec{B}_0. \quad (4.3)$$

Vidimo, da je spremembra vrtilne količine vedno pravokotna nanjo. Poleg tega je pravokotna tudi na magnetno polje, iz česar sledi, da vrtilna količina (magnetni moment) precesira okrog smeri magnetnega polja. Krožna frekvenca precesije je neodvisna od kota med magnetnim poljem in magnetnim momentom in jo imenujemo Larmorjeva frekvenca,

$$\omega_L = \gamma B_0, \quad (4.4)$$

kjer je B_0 velikost magnetnega polja.

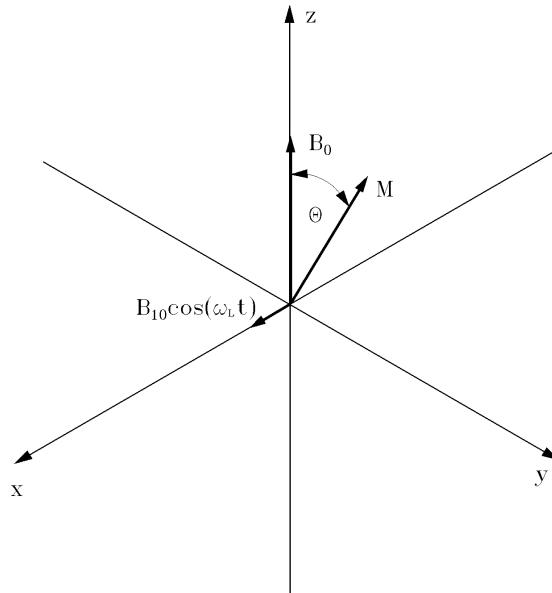
Postavimo snov, v kateri so jedra s spinom in magnetnim momentom različnim od nič, v idealno homogeno magnetno polje $\vec{B}_0 = (0, 0, B_{0z})$, ki je usmerjeno vzdolž osi z . Magnetni moment na enoto volumna imenujemo magnetizacija,

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{\mu}_i. \quad (4.5)$$

Ob upoštevanju gibalne enačbe za posamezni magnetni moment 4.3, zveze 4.1 in definicije magnetizacije s seštevanjem po vseh jedrih dobimo gibalno enačbo za magnetizacijo,

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}_0. \quad (4.6)$$

Tudi magnetizacija precesira okrog smeri magnetnega polja z Larmorjevo frekvenco, kadar ni vzporedna z njim. V ravnovesnem stanju je magnetizacija \vec{M} , ki je posledica orientacije magnetnih momentov atomskih jader v vzorcu obrnjena vzdolž smeri magnetnega polja \vec{B}_0 . Komponenta magnetizacije pravokotno na smer magnetnega polja je namreč enaka nič, ker posamezni magnetni momenti precesirajo okoli smeri magnetnega polja z različnimi faznimi zamiki in njihove projekcije na ravnino, ki je pravokotna na magnetno polje, kažejo v različne smeri.



Slika 4.1: Orientacija magnetnih polj.

4.2 Vpliv kratkotrajne visokofrekvenčne magnetne motnje na magnetizacijo v statičnem magnetnem polju

Ko za kratek čas T vključimo dodatno magnetno polje \vec{B}_1 , ki oscilira z Larmorjevo frekvenco $\omega_L = \gamma B_0$ in kaže v smeri osi x (pravokotno na smer statičnega magnetnega polja), se kot Θ med magnetizacijo in statičnim magnetnim poljem \vec{B}_0 poveča. Magnetizacija zato začne precdirati okoli smeri magnetnega polja s frekvenco ω_L , kar sledi iz enačbe 4.6.

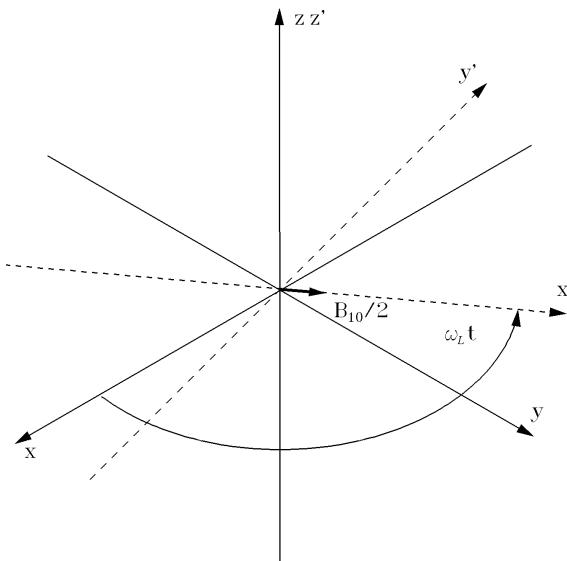
Velikost kota Θ med magnetizacijo \vec{M} in statičnim magnetnim poljem \vec{B}_0 je določena z amplitudo in časom trajanja dodatnega magnetnega polja. Eksperimentalno so posebej zanimivi takšni časi T in amplitude polja \vec{B}_1 , da se kot Θ spremeni za π ali $\pi/2$. Ker dodatno magnetno polje navadno povzročimo s tuljavico, ki jo napajamo s sunkovnim radiofrekvenčnim (RF) izvorom električnega toka, govorimo o sunkih π in $\pi/2$.

Da si olajšamo račun in predstavo, se iz laboratorijskega sistema raje preselimo v vrteči se sistem, ki se vrvi okoli smeri magnetnega polja z Larmorjevo frekvenco ω_L ,

$$z' = z, \quad (4.7)$$

$$x' = x \cos \omega_L t + y \sin \omega_L t, \quad (4.8)$$

$$y' = y \cos \omega_L t - x \sin \omega_L t. \quad (4.9)$$



Slika 4.2: Vrteči se sistem, ki je označen s črtkano črto, se vrta okoli osi z z Larmorjevo frekvenco ω_L .

V laboratorijskem sistemu lahko linearno polarizirano RF magnetno polje zapišemo kot vsoto dveh krožno polariziranih komponent,

$$\vec{B}_1 = B_{10}(\cos \omega_L t, 0, 0) = \quad (4.10)$$

$$= \frac{B_{10}}{2}(\cos \omega_L t, \sin \omega_L t, 0) + \frac{B_{10}}{2}(\cos \omega_L t, -\sin \omega_L t, 0). \quad (4.11)$$

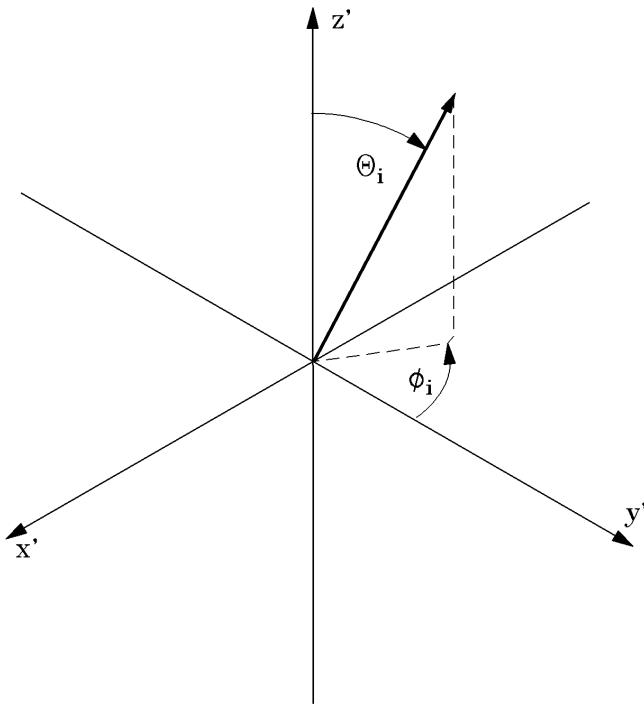
Prva komponenta polja se vrta skupaj z vrtečim se sistemom, zato jo vidimo v njem kot statično magnetno polje vzdolž osi x' , druga komponenta pa se vrta z dvakratno Larmorjevo frekvenco okoli osi z' (Slika 4.2).

Zaradi hitrega vrtenja druga komponenta magnetnega polja ne vpliva znatno na smer magnetizacije \vec{M} . Ostane samo prva statična komponenta, ki povzroči precesijo magnetizacije \vec{M} okoli osi x' . Statično magnetno polje v smeri z smo namreč že upoštevali z vpeljavo vrtečega se sistema, zato lahko nanj v vrtečem se sistemu odslej naprej kar pozabimo. Vidimo, da je zelo pomembno, da ima motnja Larmorjevo frekvenco, saj se zato enačbe gibanja v vrtečem se sistemu precej poenostavijo. V novem sistemu torej magnetizacija ne precesira več okrog osi z' , ampak se kvečjemu odkloni za kot Θ glede na os z' pod vplivom RF magnetnega polja.

Sunek $\pi/2$ obrne magnetizacijo, ki v ravnoesnem stanju kaže vzdolž osi z' , v smer osi y' . Po sunku $\pi/2$ v vrtečem se koordinatnem sistemu magnetni moment ne čuti nobenega zunanjega magnetnega polja. Pričakovali bi, da bo magnetizacija \vec{M} ostala obrnjena vzdolž osi y' . To se v realnih vzorcih ne zgodi. Magnetizacija je namreč vsota magnetnih momentov posameznih jader. Na precesijo posameznega magnetnega momenta vplivajo poleg zunanjih magnetnih polj tudi naključno spremenljajoča se polja magnetnih momentov drugih jader in elektronov. Smer, v katero kaže posamezen magnetni moment, se zato s časom statistično odmika od prvotne smeri in se vrača v termodinamsko ravnoesno vrednost.

V polarnem kordinatnem sistemu označimo smer magnetnega momenta s polarnim kotom ϕ_i , ki je kot med projekcijo magnetnega momenta na ravnino $x'y'$ in osjo y' in azimutom Θ_i , ki je kot med smerjo magnetnega momenta in osjo z' (slika 4.3).

Izkaže se, da se smeri magnetnih momentov raztresejo po polarnem kotu ϕ (izgubijo fazno povezavo v ravnini $x'y'$) hitreje kot se njihova komponenta vzdolž osi z' vrne v ravnoesno vrednost (manjšanje azimuta Θ). Projekcija magnetizacije \vec{M} na ravnino $x'y'$ zato eksponentno pada z razpadno konstanto T_2 , ki jo imenujemo transverzalni oziroma spinsko-spinski relaksacijski čas.



Slika 4.3: V polarnem kordinatnem sistemu označimo smer magnetnega momenta s polarnim kotom ϕ_i in azimutom Θ_i

Ker se pri izgubljanju fazne povezave magnetnih mometov v ravnini $x'y'$ projekcija celotnega magnetnega momenta na os z' ne spreminja, se tudi celotna energija magnetnih momentov jeder v magnetnem polju ne spremeni. Od tod sledi, da na T_2 lahko vpliva le interakcija med magnetnimi momenti jeder, iz česar izhaja tudi ime spinsko-spinski relaksacijski čas.

S termodinamskega stališča lahko govorimo o termalizaciji jedrskega spinskega sistema. Sinhrono precediranje je pri dani celotni energiji sistema le eno od množice možnih stanj z enako energijo. Sčasoma gre sistem skozi vsa možna stanja (ergodijski teorem) in verjetnost da ga najdemo ravno v sinhronem stanju je zanemarljiva, ker je možnih nesinhronih stanj mnogo več kot sinhronih.

Zaradi izgubljanja fazne povezave v ravnini $x'y'$ moramo paziti, da so dolžine sunkov π in $\pi/2$ dovolj kratke. Magnetizacijo moramo namreč obrniti v ravnino $x'y'$, preden znaten del magnetnih momentov izgubi fazno povezavo, to je v času mnogo krajšem kot T_2 .

Poleg izgube fazne povezave se zmanjšuje tud azimut posameznega magnetnega momenta, Θ_i . Projekcija magnetizacije na os z' se zato povečuje s karakterističnim časom T_1 , ki ga imenujemo longitudinalni oziroma spinsko-mrežni relaksacijski čas,

$$M_{z'} = M \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right). \quad (4.12)$$

S podobnimi argumenti kot prej ugotovimo, da se v tem primeru celotna energija magnetnih momentov jeder v statičnem magnetnem polju spremeni, torej je posredi interakcija magnetnih momentov jeder z magnetnimi momenti elektronov v atomih (molekulah, kristalu) in od tod ime spinsko-mrežni relaksacijski čas.

Termodinamsko gledano gre v tem primeru za ohlajanje jedrskega spinskega sistema, saj se povprečna energija na spin (temperatura) manjša.

4.3 Spinski sistem v nehomogenem magnetnem polju

Do sedaj smo predpostavljali, da je statično magnetno polje \vec{B}_0 idealno homogeno. V realnem življenju seveda takšnih magnetnih polj ne srečamo, ali pa celo sami povzročimo nehomogenosti,

ker nam to pomaga izluščiti dodatne podatke (npr.: slikanje s pomočjo jedrske magnetne resonance, merjenje pretokov tekočin in seveda merjenje konstante lastne difuzije).

Imejmo močno statično magnetno polje $\vec{B}_0(\vec{r}) = (0, 0, B_z(\vec{r}))$ v smeri osi z . Postavimo se zopet v vrteči se koordinatni sistem, ki naj se vrti s povprečno Larmorjevo frekvenco $\omega_L = \gamma\langle B_z \rangle$, kjer povprečimo magnetno polje po mestih vseh jeder. V vrtečem se sistemu posamezen magnetni moment "čuti" poleg notranjih magnetnih polj še razliko med poljem na mestu magnetnega momenta in povprečnim magnetnim poljem (Povprečno magnetno polje smo namreč že upoštevali z vpeljavo vrtečega se kordinatnega sistema.)

$$\Delta B_z(\vec{r}_i) = B_z(\vec{r}_i) - \langle B_z \rangle, \quad (4.13)$$

kjer je \vec{r}_i krajevni vektor za i-to jedro. Razlika povzroči precesijo posameznih magnetnih momentov v vrtečem se sistemu okoli osi z' z različnimi frekvencami v različnih smereh. Fazna povezava med magnetnimi momenti v ravnini $x'y'$ (raztresenost po kotu ϕ) se zato še dodatno pokvari. Projekcija magnetizacije v ravnino $x'y'$, v nehomogenem magnetnem polju ne pada več eksponentno s karakterističnim časom T_2 , ampak kot neka druga krivulja, katere oblika je odvisna od T_2 , od nehomogenosti magnetnega polja in od oblike vzorca. Navadno karakteristični čas padanja te krivulje označimo s T_2^* . Posledica tega je, da v praksi navadno ne moremo izmeriti T_2 neposredno iz časovne odvisnosti amplitude signala proste precesije, ki je sorazmerna projekciji magnetizacije na ravnino $x'y'$.

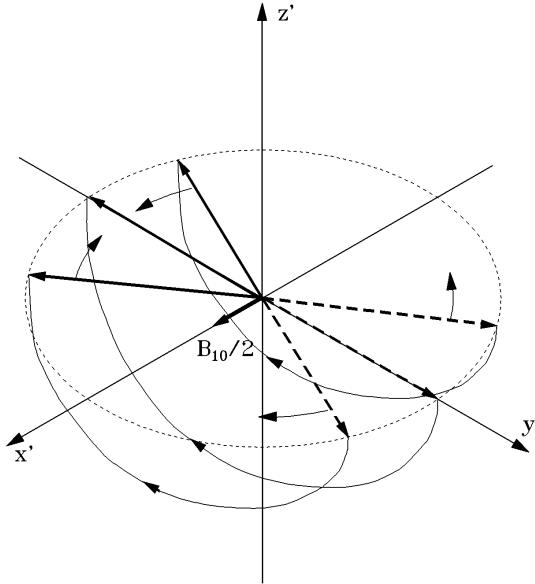
Ocenimo čas T_2^* . Naj bo ΔB_z povprečno odstopanje magnetnega polja od povprečnega magnetnega polja po vzorcu. Vzemimo, da je pravi T_2 zelo velik v primerjavi s T_2^* , to pomeni, da se magnetni momenti v glavnem raztresejo zaradi nehomogenosti magnetnega polja. Magnetizacija v ravnini $x'y'$ bo izginila, ko bo povprečni magnetni moment kazal pravokotno na smer y' (smer magnetizacije takoj po sunku $\pi/2$) torej, ko se bo zavrtel za kot $\sim \pi/2$ okoli osi z' . Sledi:

$$\gamma \Delta B_z T_2^* \approx \pi/2, \quad (4.14)$$

in

$$T_2^* \approx \frac{1}{\gamma \Delta B_z}. \quad (4.15)$$

Ker je račun samo približen, smo upoštevali $\pi/2 \approx 1$.

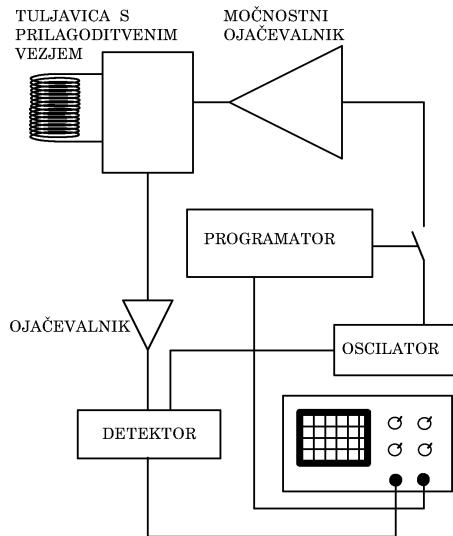


Slika 4.4: Med delovanjem sunka π se magnetni momenti (črtkano) obrnejo za kot π okoli osi x' . Po času 2τ se magnetni momenti zopet zberejo v smeri osi $-y'$.

Pri meritvi pravega relaksacijskega časa T_2 se želimo znebiti razpršenosti smeri magnetnih momentov po kotu ϕ , ki je posledica nehomogenosti magnetnega polja. Poglejemo najprej posamezni

magnetni moment. Takoj po sunku $\pi/2$ je magnetni moment obrnjen v smer osi y' , nato pa precesira okoli osi z' s frekvenco $\omega_i = \gamma\Delta B_z(\vec{r}_i)$. V času τ se i-ti magnetni moment zavrti za kot $\phi_i(\tau) = \omega_i\tau$ glede na os y' . Če bi po času τ obrnili magnetno polje $\Delta B_z(\vec{r}_i)$ v nasprotno smer, bi magnetni moment precesiral z enako frekvenco vendar v nasprotni smeri. Zato bi po času 2τ zopet kazal v isto smer kot na začetku, to je v smer osi y' . Ker magnetnega polja $\Delta B_z(\vec{r}_i)$ ne moremo zelo hitro obrniti, raje obrnemo magnetne momente, kar zlahka dosežemo s sunkom π , ki obrne magnetne momente za kot π okoli osi x' (4.4). Rotacija za kot π okoli osi x' presliko $\phi_i(\tau)$ v $\pi - \phi_i(\tau)$. Ker bo magnetni moment še naprej precesiral v isti smeri, bo po času 2τ polarni kot $\phi_i(2\tau) = \pi - \omega_i\tau + \omega_i\tau = \pi$. Če torej v času τ po sunku $\pi/2$ delujemo na sistem s sunkom π , se v času 2τ po $\pi/2$ sunku magnetni momenti zopet zberejo v smeri osi $-y'$. V merilni tuljavici se zato pojavi signal, ki ga imenujemo spinski odmev. Seveda smo se z gornjim postopkom znebili samo razpršenosti smeri magnetnih momentov zaradi nehomogenosti magnetnega polja, razpršenost zaradi notranjih polj pa je ostala. Zato amplituda spinskega odmeva z večanjem razmaka med sunkoma pada kot $\exp(-\frac{2\tau}{T_2})$.

Širina spinskega odmeva je odvisna od tega, kako hitro se magnetni momenti zopet zberejo v smer osi $-y'$, na kar vpliva nehomogenosti magnetnega polja. Ker sunek π deluje podobno, kot če bi obrnili smer precesije, takoj vidimo, da je zbiranje pravzaprav v času obrnjeno razpadanje. Obliko spinskega odmeva tako dobimo, če sestavimo dva signala proste precesije pri čemer prvega "prezrcalimo" v času ($t \rightarrow -t$). Širina spinskega odmeva je torej $2T_2^*$, upoštevati pa moramo, da to velja le, kadar je pravi T_2 veliko daljši od T_2^* .



Slika 4.5: Shema NMR spektrometra.

4.4 NMR spektrometer

Signal, ki pove, da magnetizacija precesira okrog smeri magnetnega polja \vec{B} , dobimo v tuljavici, ki je navita okrog vzorca tako, da ima os pravokotno na smer statičnega magnetnega polja. Tuljavica je sestavni del nihajnega kroga, ki je uglasen na precesijsko frekvenco magnetizacije ω_L pri določenem magnetnem polju. Celotna naprava za opazovanje NMR (angl. nuclear magnetic resonance) vsebuje poleg magneta še (slika 4.5):

- visokofrekvenčni oscilator 9 MHz,
- programator trajanja sunkov, ki določa čas trajanja motnje \vec{B}_1 ,
- vrata, ki prepuščajo visokofrekvenčno nihanje v času, ki ga določi programator,

- močnostni visokofrekvenčni ojačevalnik, ki napaja tuljavico, s katero povzročimo motnjo,
 - detektor inducirane napetosti, ki je vezan na isto tuljavico kot močnostni ojačevalnik,
 - osciloskop, na katerem opazujemo precesijske signale. Prožimo ga s signali iz programatorja.

Programator generira zaporedje sunkov z ustrezno širino in ustreznimi razmaki. Ti sunki krmilijo vrata, ki spuščajo RF signal iz oscilatorja v močnostni ojačevalnik, od koder gre na vzbujevalnodetekcijsko tuljavico. Po prenehanju sunka signal, ki se inducira v tuljavici, detektiramo z detektorjem in ojačimo z ojačevalnikom ter ga opazujemo na zaslonu osciloskopa. Signal, ki ga opazujemo na osciloskopu, je ovojnica visokofrekvenčnega nihanja precesijske frekvence ω_L .

4.5 Meritev

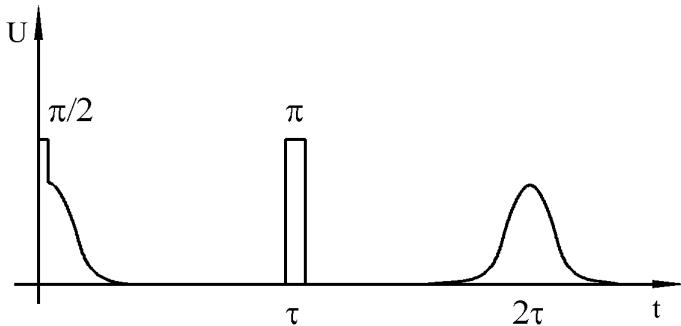
Signal proste precesije pada s konstanto T_2^* . Na osnovi zveze 4.15 lahko z opazovanjem signala proste precesije ocenimo nehomogenost magnetnega polja v vzorcu. Pri izbiranju delovnih pogojev premikamo sondu v magnetnem polju toliko časa, da dobimo čim bolj položen signal proste precesije, torej čim večji T_2^* oziroma čim manjši ΔB .

Sedaj, ko znamo določiti T_2^* , poglejmo še, kako določimo prave vrednosti T_1 in T_2 .

Določanje T_1 sloni na enačbi $M_z = M_0[1 - \exp(-t/T_1)]$. Ustvariti si moramo take eksperimentalne pogoje, da bomo opazovali M_z kot funkcijo časa (v različnih časovnih presledkih) po prenehanju sunka $\pi/2$. To nam omogoča zaporedje dveh sunkov $\pi/2$ med katerima lahko presledek τ po želji spremojamo. V tem primeru višina signala proste precesije, ki sledi drugemu sunku narašča z večanjem presledka τ tako kot M_z . To sledi iz dejstva, da drugi sunek privede nazaj v smer $\pi/2$ glede na os z' tisti del magnetizacije, ki se je v času τ že relaksirala, tisti del, ki je že precesiral pod kotom $\theta = \pi/2$, pa zavrti naprej za $\pi/2$ t.j. v celoti za π (v smer $-z'$) in mu tako onemogoči, da bi prispeval k signalu proste precesije.

Ker se zaporedje sunkov ponavlja z neko periodo, je potrebno paziti, da se vzorec med posameznimi zaporedji sunkov lahko relaksira v ravnovesno stanje, kar pomeni, da mora biti perioda znatno večja od pričakovanega časa T_1 .

Pravo vrednost T_2 določimo s pomočjo spinskega odmeva. Pri tem gre za to, da za sunkom $\pi/2$ po nekem času τ uporabimo še sunek π , kateremu po času 2τ sledi spinski odmev.



Slika 4.6: Signal spinskega odmeva.

Sliko, ki jo dobimo na zaslonuskloščnika, kaže slika 4.6. Širina signala spinskega odmeha je prav tako kot širina signala proste precesije merilo za čas T_2^* . V odvisnosti amplitude spinskega odmeha od časa 2τ je skrit pravi spinsko-spinski relaksacijski čas T_2 . Vendar je treba takoj povedati, da iz meritve višine spinskega odmeha pri različnih zakasnivkah τ v tekocinah ni mogoče vedno določiti časa T_2 . Vzrok je v tem, da se molekule v tekočini gibljejo (lastna difuzija) in pri tem iz enega področja magnetnega polja prehajajo v drugo. Zaradi nehomogenosti polja se pri tem prehajanju stohastično spreminja precesijska frekvanca spinov, kar ima za posledico izgubo fazne povezave, ki je s sunkom $\pi/2$ ni mogoče popraviti. Vpliv lastne difuzije je prevladujoč pri dolgih časih τ , zato lahko v primeru, ko je čas T_2 dovolj majhen, vpliv difuzije zanemarimo.

4.6 Potek dela

Natančnejša navodila o delovanju NMR spektrometra si oglej v knjižici, ki je priložena spektrometu.

Najprej odpri vodo za hlajenje magneta, da se prižge rdeča luč. Prižgi spektrometer in osciloskop. Gumb 1 (slika 4.7) postavi v položaj FID. S tem si izbral program, ki vsebuje en sam sunek $\pi/2$. Zmanjšaj periodo ponavljanja zaporedja sunkov na minimum (gumb 4). Nastavi dolžino sunka (gumb 7) na polovico maksimalne dolžine. S stikalom 14 izberi fazno detekcijo*. Na ta način boš lažje nastavil velikost statičnega magnetnega polja in s tem precesijsko frekvenco protonskih magnetnih momentov v vodi na frekvenco RF motnje. V principu bi lahko spreminal frekvenco motnje, vendar je to praktično težje izvedljivo, ker je potrebno sprejemno-oddajno tuljavico vedno ponovno uglasiti.

V merilno glavo spektrometra vstavi epruveto, ki vsebuje vodo z dodanimi paramagnetnimi ioni. Potenciometer za regulacijo toka na napajalniku magneta zavrti na minimum. Prižgi napajalnik. Polagoma zvišuj tok magneta in opazuj osciloskop. Ko doseže velikost magnetnega polja tolikšno vrednost, da se Larmorjeva frekvenca jeder ujema s frekvenco RF oscilatorja v spektrometru, opaziš na osciloskopu takoj za sunkom $\pi/2$ signal proste precesije. Daljša perioda signala pomeni boljše ujemanje frekvenc. Z gumbom za regulacijo toka nastavi najdaljšo možno periodo. Preklopi stikalo 14 na diodno detekcijo in s spremjanjem dolžine sunka $\pi/2$ maksimiziraj amplitudo signala proste precesije.

Poskrbi, da je gradient magnetnega polja izklopljen (gumb 13). Izmeri T_2^* in na osnovi tega oceni nehomogenost magnetnega polja v vzorcu.

Izberi program spinski odmev (SE) z gumbom 1. Z gumboma 9 in 8 nastavi razmik[†] med sunkoma na ~ 100 ms. S stikalom na zadnji strani spektrometra nastavi proženje osciloskopa na drugi sunek. Nastavi dolžino drugega sunka na $\pi/2$. (Amplituda signala proste precesije po drugem sunku takrat doseže največjo vrednost.) Izmeri odvisnost amplitude signala proste precesije za drugim sunkom kot funkcijo zakasnitve med sunkoma in iz meritev določi T_1 .

Vstavi v merilno glavo spektrometra epruveto z navadno vodovodno vodo. Povečaj periodo ponavljanja zaporedja sunkov na maksimum (gumb 4). Tako kot za prejšnji vzorec izmeri T_1 .

V merilno glavo spektrometra zopet vstavi epruveto, ki vsebuje vodo z dodanimi paramagnetnimi ioni. Zmanjšaj periodo ponavljanja zaporedja sunkov na minimum (gumb 4). Z gumboma 9 in 8 nastavi razmik med sunkoma na $\sim T_2^*$. Nastavi dolžino drugega sunka na π (amplituda signala spinskega odmeva takrat doseže maksimalno vrednost). Izmeri odvisnost amplitude signala spinskega odmeva kot funkcijo zakasnitve med sunkoma in iz meritev določi pravi T_2 za vodo s primesjo paramagnetnih ionov. Vpliv difuzije zanemari.

Pravega T_2 za vodovodno vodo ne moremo določiti, ker vpliv difuzije ni več zanemarljiv.

4.7 Dodatek: diodna in fazna detekcija

V sprejemni tuljavici se inducira izmenična napetost, ki oscilira z Larmorjevo frekvenco ω_L . Ker nas zanima samo amplituda, to napetost ustrezno ojačimo in nato usmerimo z diodo. Z ustreznim filtrom, ki prepušča samo nizke frekvence, se znebimo RF oscilacij in na zaslonu osciloskopa vidimo signal, ki je sorazmeren amplitudi napetosti na tuljavici. Takšnemu načinu detektiranja signala pravimo diodna detekcija.

Poglejmo, kaj se zgodi, če signal na tuljavici zmnožimo s kosinusnim signalom s konstantno amplitudo, ki oscilira s frekvenco RF oscilatorja. Celotna napetost na izhodu iz množilnika je sorazmerna produktu obeh,

$$U(t) = A(t) \cos(\omega_L t) A_0 \cos(\omega_{RF} t + \delta). \quad (4.16)$$

Prodoti razbijemo na vsoto,

$$U(t) = \frac{A(t) A_0}{2} [\cos((\omega_L - \omega_{RF})t - \delta) + \cos((\omega_L + \omega_{RF})t + \delta)], \quad (4.17)$$

*Več o fazni detekciji si preberi v dodatku.

[†]Pozor, razmik med sunkoma ni umerjen. Z opazovanjem sunkov na osciloskopu umeri gumb 8 za nastavitev razmika med sunkoma za vsa tri območja gumba 9.

pri čemer dobimo dva člena. Prvi oscilira z razliko frekvenc $\omega_L - \omega_{RF}$ in drugi z vsoto frekvenc. Ker sta obe frekvenci približno enaki, bo njuna razlika zelo majhna, vsota pa zelo velika. Z ustreznim filtrom odfiltriramo visokofrekvenčni del in na osciloskopu opazujemo samo prvi člen, ki oscilira z razliko frekvenc. V primeru, da sta obe frekvenci natančno enaki, sledi,

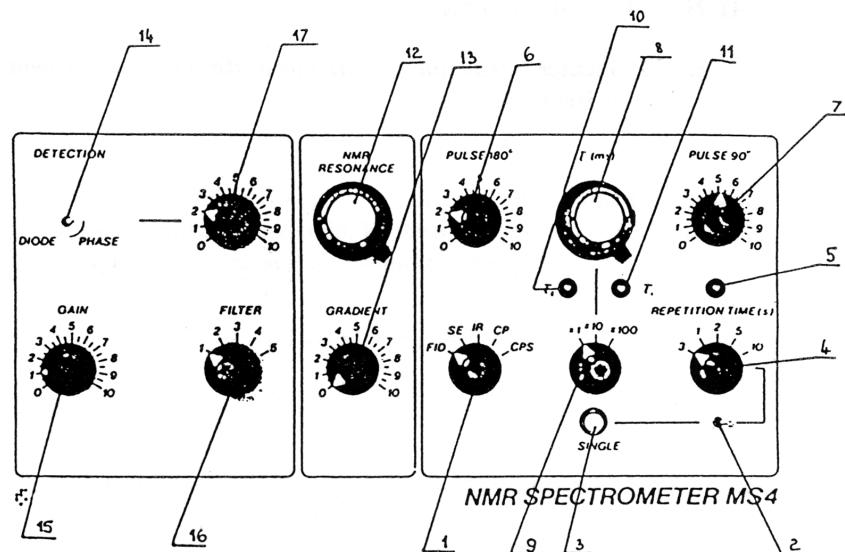
$$U(t) = \frac{A(t)A_0}{2} \cos \delta. \quad (4.18)$$

Signal na osciloskopu je sorazmeren amplitudi napetosti na tuljavici. Poleg imamo še faktor $\cos \delta$, ki lahko povzroča težave, saj lahko spremeni predznak ali pa je celo 0. V ta namen je v našem spektrometu vezje, s katerim lahko spremenjamo fazni zamik δ in s tem predznak in amplitudo signala na osciloskopu.

Pri dejanski meritvi se frekvenci ω_L in ω_{RF} nikoli ne ujemata točno. Signal na osciloskopu zato oscilira z razliko frekvenc. To s pridom izkoristimo pri iskanju resonance. Statično magnetno polje spremenjamo tako, da je perioda oscilacij na zaslonu osciloskopa čimdaljša, kar pomeni, da sta si frekvenci kar se da blizu.

4.8 Literatura

1. C. P. Slichter (*Principles of Magnetic Resonance*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990).
2. M. H. Leviyy (*Spin Dynamics, Basics of Nuclear Magnetic Resonance*, John Wiley & Sons Ltd., 2002).



- 1 - Izbera programu
- 2 - Izbera ročnega ali avtomatskega proženja programa
- 3 - Tipka za ročno proženje
- 4 - Izbera časa ponavljanja programa
- 5 - LED indikator proženja
- 6 - Nastavitev dolžine drugega sunka
- 7 - Nastavitev dolžine prvega sunka
- 8 - , 9 - Nastavitev razmika med prvim in drugim sunkom
- 10 - LED indikator zakasnitve drugega sunka
- 11 - LED indikator zakasnitve prvega sunka
- 12 - Fina regulacija frekvence RF oscilatorja
- 13 - Regulacija gradienta magnetnega polja
- 14 - Izbera načina detekcije RF signala
- 15 - Nastavitev ojačanja vhodnega ojačevalnika
- 16 - Nastavitev pasovne širine izhodnega ojačevalnika
- 17 - Nastavitev faze referenčnega signala pri fazni detekciji

Slika 4.7: Kontrolna plošča NMR spektrometra.

5 Spektrometrija žarkov γ s scintilacijskim spektrometrom

5.1 Delovanje spektrometra

Energije žarkov ne merimo neposredno, ampak le posredno tako, da izmerimo energijo elektronov, ki jo le ti prejmejo od žarkov γ pri fotoefektu ali Comptonovem sisanju, ali pa energijo parov pozitron-elektron iz procesa tvorbe parov. Pri scintilacijskem detektorju uporabljamo v ta namen (zaradi visokega vrstnega števila) monokristale natrijevega jodida (NaI) z dodatkom okrog 1% talija (Tl) kot nečistoče.

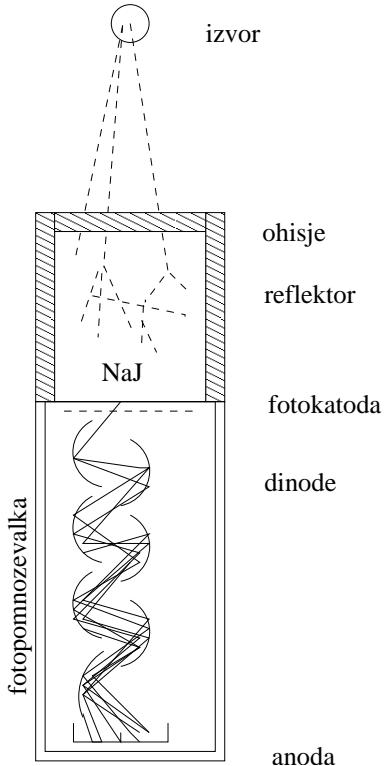
Pri potovanju hitrih nabitih delcev skozi kristal ostane za njimi razdejanje v obliki sledi elektron-vrzeli. Ta sled je za elektrone z energijo 1 MeV v NaI dolga približno 1,5 mm. Ponovno združevanje med elektroni in vrzelmi poteka energijsko ugodneje v bližini atoma nečistoče. Tu vrzeli vza mejo elektron atomom nečistoče in jih ionizirajo. Elektroni se nato rekombinirajo s temi ioniziranimi atomi nečistoč. Odvečno energijo oddajo bodisi sosednjim atomom v kristalni mreži in tako povečajo termično gibanje ali pa z izsevanjem fotonov vidne svetlobe. Scintilator NaI(Tl) seva fotonе v času približno 10^{-6} s po tem, ko so nastali pari elektron-vrzeli. Ta čas je v glavnem določen s časom, ki ga porabijo vrzeli, da pridejo do atomov nečistoč. Število scintilacijskih fotonov je odvisno od vrste scintilatorja, je pa tem večje, čim večje je število parov elektron vrzel v sledi hitrega elektrona, oziroma čim višja je bila njegova kinetična energija. To število določamo s pomočjo fotopomnoževalke, naprave, ki je v bistvu fotocelica, le da električni signal še sama ojači. Višina signala iz fotopomnoževalke je sorazmerna številu fotonov, torej tudi energiji, ki jo hitri nabični delci izgubi v scintilatorju.

Energija nastalih fotonov je le nekaj odstotkov kinetične energije nabitega delca. Če je njihova povprečna energija okrog 3 eV, nastane pri upočasnitvi elektrona energije na primer 0,3 MeV okrog 10^3 fotonov. Večino te svetlobe z reflektorjem (običajno je to MgO, glej sliko 5.1), ki obdaja scintilator, usmerimo na fotokatodo fotopomnoževalke. Iz fotokatode približno vsak deseti foton izbije fotoelektron. V signalu, ki ustrezka kinetični energiji elektrona 0,3 MeV dobimo torej okrog 300 fotoelektronov. To število fotopomnoževalka okrog 10^6 -krat pojača in tako dobimo na izhodu okrog 10^8 elektronov, kar ustrezza približno 10^{-11} As. Ker se vse to zgodi v času 10^{-6} s, dobimo tokovni sunek višine okrog $10 \mu\text{A}$. Sunek nato ojačimo s predajačevalnikom in ojačevalnikom ter mu izmerimo napetostno višino z amplitudnim analizatorjem. Višina sunka je enolično merilo za energijo elektrona v scintilatorju.

5.2 Izvor signala

5.2.1 Umeritvena krivulja

Višina sunka na izhodu iz ojačevalnika (U) je sorazmerna s kinetično energijo elektrona (W_e), $U = k \times W_e + U_0$. Pri tem je k odvisen od vrste in kvalitete scintilatorja, vrste fotopomnoževalke, napetosti na njenih dinodah, ojačanja predajačevalnika in ojačevalnika. Umeritveno krivuljo moramo vsakokrat, ko spektrometer uporabljamo, znova umeriti, izbranih delovnih pogojev pa med meritvijo ne smemo spremenijati.



Slika 5.1: Scintilacijski spektrometer za žarke γ



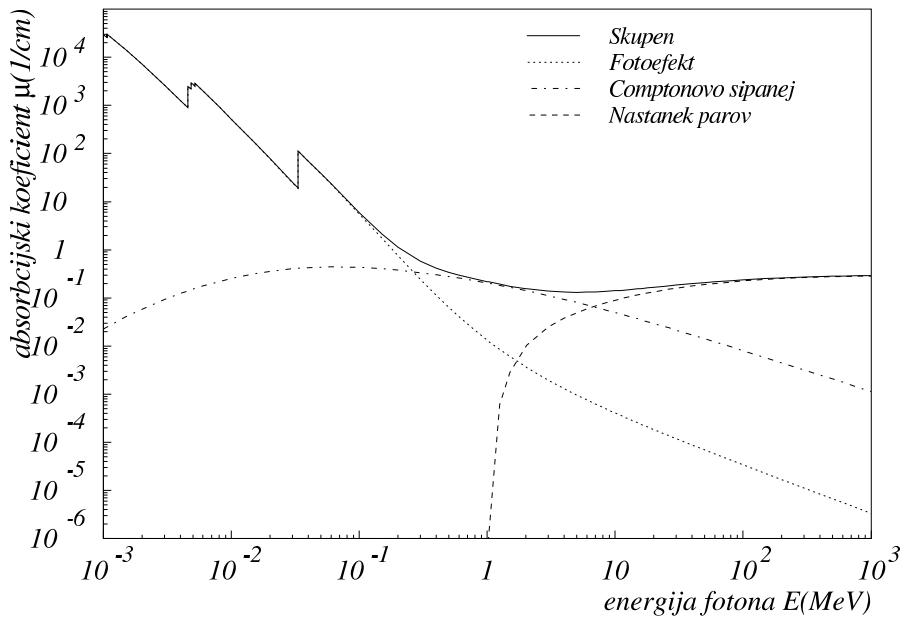
Slika 5.2: Shema vezave elektronskih komponent

5.2.2 Nastanek fotonov

Relativni delež fotoefekta, Comptonovega sipanja in tvorbe parov v scintilatorju je odvisen od vrste scintilatorja in od energije žarkov γ . Za scintilator NaI (Slika 5.3) pri energijah $E_\gamma < 100$ keV prevladuje fotoefekt, pri $E_\gamma \approx 1$ MeV prevladuje Comptonovo sipanje. Tvorba parov je mogoča pri $E_\gamma > 1,02$ MeV in prevlada pri energijah $E_\gamma > 10$ MeV.

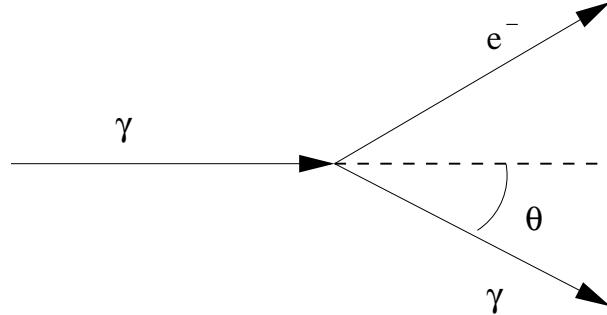
5.2.3 Fotoefekt

Pri fotoefektu žarek γ izbije elektron iz enega od vezanih stanj. Najverjetnejše je to elektron iz lupine K. Njegova energija je $E_\gamma - E_K$, kjer je E_K vezavna energija elektrona. Ker se absorpcijski koeficient, ki je posledica fotoefekta, spreminja približno kot $Z^5 E_\gamma^{-7/2}$, kjer je Z vrstno število atoma, prevladi v NaI fotoefekt v glavnem na atomih J, za katere je $E_K = 33,2$ keV. Atom, ki je po emisiji elektrona K v vzbujenem stanju, se vrne v osnovno stanje tako da zapolni vrzel z elektronom iz višjih manj vezanih stanj (običajno so to stanja L) in pri tem izseva karakterističen žarek X. Tudi ta lahko v scintilatorju doživi fotoefekt na manj vezanih elektronih in tako dobimo namesto prvotnega žarka γ dva elektrona, katerih skupna energija je približno (v mejah keV) enaka E_γ (zakaj ?). Elektrona se v scintilatorju upočasnila in mu oddala svojo kinetično energijo. V porazdelitvi sunkov iz spektrometra dobimo takoj vrh (fotovrh), katerega lega je enolično merilo za energijo žarkov γ . Ker nekateri karakteristični žarki uidejo iz scintilatorja, dobimo poleg vrha $E \approx E_\gamma$ tudi vrh pri $E = E_\gamma - E_K$. Ker pa je ločljivost scintilacijskega spektrometra za elektrone z energijo približno 0,5 MeV nekaj pod 10%, se oba vrha zlijeta v enega. Dva vrha dobimo pri meritvi spektra žarkov γ energije okrog 60 keV. Vrh pri nižji energiji imenujemo vrh pobega fotona (photon escape peak).



Slika 5.3: Absorcijski koeficient μ za žarke γ različnih energij v NaI.

5.2.4 Comptonovo sipanje



Slika 5.4: Comptonovo sipanje

Comptonovo sipanje je neelastično sipanje fotona na (skoraj) prostem (nevezanem) elektronu. Potek sipanja je prikazan na sliki 5.4. Žarek γ spremeni smer za kot ϑ ; pri tem se mu kinetična energija zmanjša na:

$$E_{\gamma'} = \frac{E_{\gamma}}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m_0 c^2} (1 - \cos \vartheta)}, \quad (5.1)$$

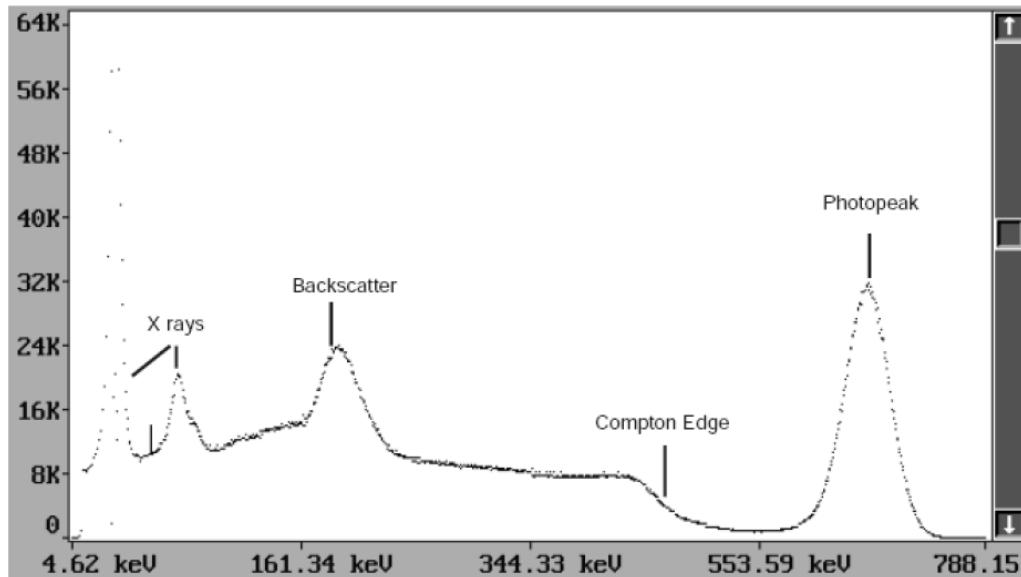
kjer je $m_0 c^2$ mirovna energija elektrona (0,51 MeV). Razliko energij $E = E_{\gamma} - E_{\gamma'}$ odnese elektron. Ta razlika je največja, kadar odleti elektron v smeri vpadlega fotona (energija Comptonovega roba):

$$E_{max} = E_{\gamma} \frac{2 \frac{E_{\gamma}}{m_0 c^2}}{1 + 2 \frac{E_{\gamma}}{m_0 c^2}} \quad (5.2)$$

Energija ustreznega nazaj sisanega fotona je:

$$E_{min} = \frac{E_{\gamma}}{1 + 2 \frac{E_{\gamma}}{m_0 c^2}} \quad (5.3)$$

Če je $0,5 \text{ MeV} < E_\gamma < 2 \text{ MeV}$, je $0,17 \text{ MeV} < E_{\gamma_{min}} < 0,22 \text{ MeV}$. Presek za Comptonovo sipanje se spreminja kot $Z E^{-1/2}$ in je dominanten na področju od $0,4 \text{ MeV} < E_\gamma < 4 \text{ MeV}$.



Slika 5.5: Scintilacijski spekter Cs-137

Spekter comptonsko sipanih elektronov je zvezen. Elektroni se sipajo pretežno naprej in fotoni pretežno nazaj.

V NaI(Tl) scintilacijskih stevcih je porazdelitev v področju Comptonovih elektronov nekoliko spremenjena (slika 5.5). Prej izrazit rob izgine. To je posledica dejstva, da se nekateri od nazaj sipanih žarkov γ preko fotoefekta absorbirajo v scintilatorju. Tako se vsa energija žarkov γ porabi v aktivnem volumnu in dogodek registriramo v fotovrhu (imenujemo ga tudi vrh popolne absorbcije) namesto pri energiji Comptonovega roba. Rob se zaradi tega zaoblji.

Poleg tega se pri energiji, ki približno ustreza $E_{\gamma_{min}}$ pojavi majhen vrh (vrh povratnega sipanja - back scattering peak). Ta pripada fotonom, ki so se sipali nazaj v steklu, ki prekriva scintilator ali pa v steklu fotopomnoževalke in se nato absorbirali v scintilatorju.

Razmerje med višino zveznega Comptonovskega spektra in višino fotovrha je odvisno od energije žarkov γ , predvsem pa od velikosti kristala. V vrhu popolne absorbcije se registrira temveč dogodkov, čim večji je scintilator.

5.2.5 Tvorba parov

Kadar ima žarek γ dovolj energije ($E_\gamma \geq 1,02 \text{ MeV}$), se lahko v bližini jedra spremeni v par pozitron-elektron s skupno kinetično energijo $E_\gamma - 2m_0c^2$, odvečno gibalno količino pa prevzame jedro. Absorpcijski koeficient za proces tvorbe parov se spreminja kot $(E_\gamma - 2m_0c^2)^2 Z^2$. Nastala delca se gibljeta pretežno v smeri naprej. V scintilatorju se zaustavita in mu predata svojo kinetično energijo. Ko se pozitron upočasni, se anihilira z enim od elektronov, ki jih sreča na svoji poti. Nastaneta dva žarka γ , ki pod kotom 180° odletita vsak v svojo smer. Če bi oba žarka neovirano ušla iz scintilatorja, bi dobili v spektru vrh, ki ustreza kinetični energiji para $E = E_\gamma - 2m_0c^2$. Govorimo o vrhu dvojnega pobega. Če se absorbira v scintilatorju eden od anihilacijskih žarkov γ , je v scintilatorju absorbirana energija $E = E_\gamma - m_0c^2$, če pa se absorbirata oba, je absorbirana energija $E = E_\gamma$ (vrh popolne absorbcije).

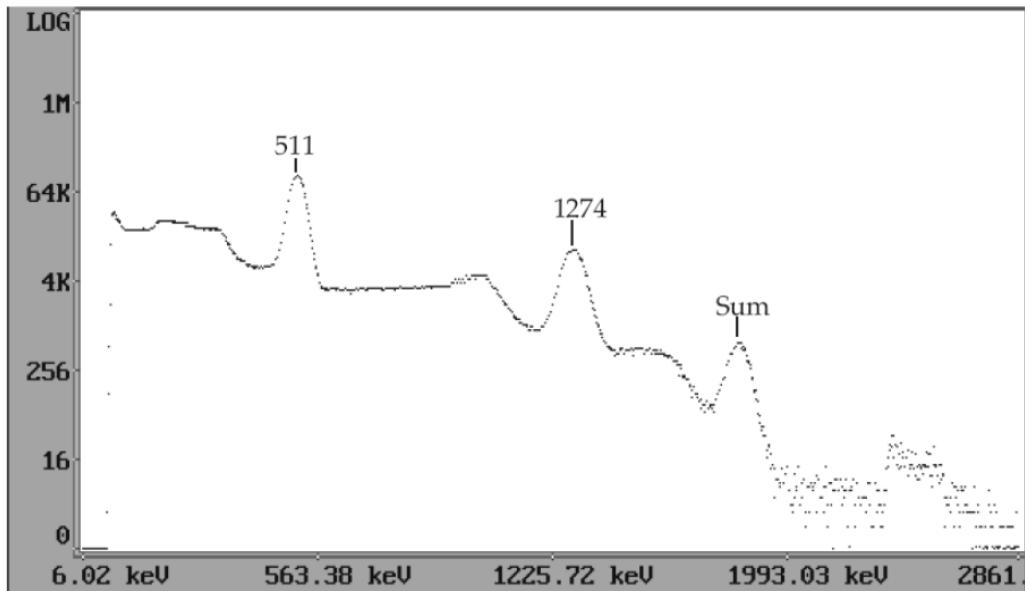
Ker je možno, da poteka absorpcija žarkov γ po katerikoli od naštetih poti, dobimo v spektru žarkov γ z energijo $E > 1,02 \text{ MeV}$ vse tri vrhove, ki so med seboj razmaknjeni za $0,51 \text{ MeV}$. Razmerje njihovih višin je močno odvisno od velikosti scintilatorja. Pri majhnem prevladuje vrh dvojnega pobega, pri velikem pa vrh popolne absorbcije.

5.3 Naloga:

1. Ojačene signale iz scintilacijskega detektorja si poglej na osciloskopu. K poročilu priloži sliko zaslona ali pa skico signalov.
2. Z enokanalnim analizatorjem izmeri spekter ^{22}Na . Nariši graf.
3. S pomočjo dveh črt γ iz ^{22}Na z energijo $E_1 = 0,51 \text{ MeV}$ in $E_2 = 1,277 \text{ MeV}$ umeri energijsko skalo scintilacijskega spektrometra (večkanalni analizator) in izmeri energijo črt γ iz ^{137}Cs in ^{60}Co . Pri analizi od izmerjenega spektra odštej spekter ozadja.
4. Izmeri energijsko ločljivost za vrh popolne absorbcije tako, da podatkom v okolici vrha prilagaš gaussovo funkcijo. Izmeri ločljivost za vrhove pri različnih energijah - uporabi meritve spektrov ^{22}Na , ^{137}Cs in ^{60}Co . Ali se ločljivost spreminja z energijo?
5. Izračunaj izkoristek kristala za vrh popolne absorbcije (določi z izvorom ^{137}Cs).
6. Oceni energijo vrha povratnega sisanja.

5.3.1 Potrebščine

- scintilacijski detektor: fotopomnoževalka s kristalom NaI(Tl) in katodnim predočevalnikom
- izvor visoke napetosti za napajanje fotopomnoževalke CAEN N471
- ojačevalnik z enokanalnim analizatorjem Ortec 590A [?]
- večkanalni analizator MCA 8000A
- radioaktivni izvori ^{22}Na , ^{137}Cs in ^{60}Co



Slika 5.6: Scintilacijski spekter Na-22.

5.4 Potek dela

Seznani se z navodili za ojačevalnik, enokanalni in večkanalni analizator. Priključi vse elemente na omrežje, postavi izvor ^{22}Na na scintilacijski detektor in počakaj cca. 20 min., da se aparatura stabilizira. Med katerokoli meritvijo poskrbi, da v bližnji okolici ne bo

radioaktivnih izvorov. Premeri geometrijo postavitve in z izmerami opremi shemo postavitev v poročilu.

Ojačevalnik ORTEC 590A služi kot napajalnik za predojačevalnik za scintilacijski detektor, kot ojačevalnik in kot enokanalni analizator. Sunke izhoda AMP ojačevalnika priklopi na osciloskop in opazuj kako sunki naraščajo medtem, ko napetost na fotopomnoževalki višaš od 0 do okoli 1000V. Nastavi ojačenje ojačevalca tako, da bodo najvišji sunki segali do cca. 6 V.

Za uporabo kot enokanalni analizator uporabimo izhod SCA. Izhod signala so logični sunki, ki jih dobimo le takrat, ko je višina signala znotraj okna, katerega spodnji rob in širino nastavimo z gumboma LOWER LEVEL in WINDOW. Sunke napeljemo na števec in izmerimo število sunkov pri nastavljenih vrednostih. Meritev izvedi tako, da bo celotno območje signalov pokril z okoli 20-30 meritvami. S premikanjem spodnjega roba po korakih za širno okna izmeri porazdelitev po višini sunkov.

Sedaj izmeri spekter še z večkanalnim analizatorjem. Ojačeni izhod AMP napelji na vhod večkanalnega analizatorja MCA 8000A in poženi program ADCMCA. Umeri energijsko skalo.

Za vsak posnet spekter si zabeleži čas trajanja meritve, zmanjšan za mrtvi čas, ko sistem ni uspel zajemati podatkov. Z večkanalnim analizatorjem izmeri še spektre ostalih izvorov, ki so na voljo. Zajete spektre shrani v datoteke za kasnejšo obdelavo doma. S pomočjo energij znanih črt γ izvora ^{22}Na poišči energije vrhov v spektrih ostalih izvorov. Pri spektru ^{137}Cs določi položaj vrha popolne absorbcije, comptonskega vrha in vrha povratnega sisanja.

Ne pozabi na meritev ozadja. Ker je sunkov iz ozadja malo, zajemaj podatke dlje časa.

Izkoristek kristala pri dani geometriji izračunaj s pomočjo izvora ^{137}Cs . Aktivnost izvora je januarja 2013 znašala 9250 Bq, razpolovni čas ^{137}Cs je 30.07 let. Izkoristek η je odvisen od števila sunkov v fotovrhu N_{foto} in številom vseh fotonov γ v prostorskem kotu 2π , N_{vsi} :

$$\eta = \frac{N_{foto}}{N_{vsi}}. \quad (5.4)$$

Ločljivost spektrometra R je definirana kot razmerje med energijsko širino na polovični višini ΔE in energijo vrha E :

$$R = \frac{\Delta E}{E}. \quad (5.5)$$

Določena je s številom elektronov N, ki jih scintilacijski fotoni izbijejo iz fotokatode fotopomnoževalke, saj je statistična napaka $\pm\sqrt{N}$. Ker je $N \propto E_\gamma$, se ločljivost spektrometra z energijo boljša kot $\frac{1}{\sqrt{E_\gamma}}$.

5.5 Vprašanja

1. Razloži energijsko lego vrha fotonskega pobega, če ti je znan podatek, da so vezavne energije elektronov v atomu joda za K lupino 33,2 keV, za L_{III} in L_{II} pa 4,54 keV oziroma 4,85 keV.
2. Kako bi se kvalitativno spremenil spekter, če bi bil izvor γ 2 MeV v sredi zelo velikega kristala NaI?
3. Če bi hotel dobiti iz fotopomnoževalke pozitiven signal, bi ga odvzel namesto iz anodnega upora iz zadnje dinode. Razloži zakaj! Ali bi bil signal manjši?
4. Ali lahko ozemljiš pri fotopomnoževalki anodo namesto katode? Kakšne prednosti oziroma slabosti bi to povzročilo (pomni napetosti pri fotopomnoževalki gredo tudi do 2500 V!).
5. Oglej si tabelo energij γ žarkov pri razpadih različnih elementov (priloženo navodilom vaje). Ali lahko jasno identificiraš element, ki najbolj prispeva k spektru ozadja?

5.6 Literatura

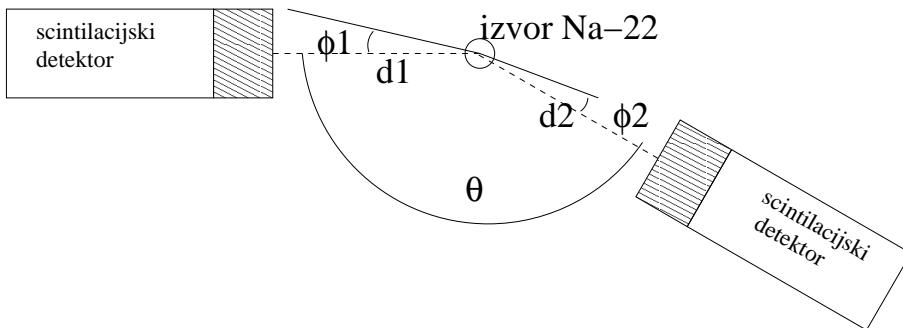
1. ORTEC 590a <http://www.ortec-online.com/electronics/amp/590a.htm>
2. CAEN N471 <http://www.caen.it/nuclear/product.asp?id=239>

6 Kotna korelacija anihilacijskih žarkov γ

Michel Adamič & Rok Pestotnik, 2021

6.1 Naloga

1. Inicializiraj časovno-digitalni pretvornik na plošči Red Pitaya in opravi kalibracijo
2. Izmeri ločljivost časovno-digitalnega pretvornika
3. Izmeri porazdelitev časovnih intervalov med razpadi radioaktivnega vira
4. Poišči koincidence anihilacijskih žarkov γ in izmeri njihovo kotno korelacijo



Slika 6.1: Eksperimentalna postavitev.

6.2 Anihilacija pozitrona

Pozitron e^+ , ki je po Diracu luknja v morju pozitivnih energij, se pri srečanju s svojim antidelcem elektronom e^- anihilira. Energija, ki se pri tem sprosti, se razširi v prostor v obliki elektromagnetevega valovanja.

Ko si skušamo natančneje predočiti približevanje elektrona in pozitrona, nas zanima, ali morda ne pride najprej do nastanka vodikovemu atomu podobne tvorbe v kateri elektron in pozitron krožita okoli skupnega težišča in se delca anihilirata šele pozneje.

Raziskave so pokazale, da tak vezan sistem $e^+ - e^-$ res obstaja. Imenovali so ga pozitronij. Oglejmo si njegovo osnovno stanje, v katerem sta pozitron in elektron najbliže drug drugemu. Kot pri vodikovemu atomu ima to stanje tudi pri pozitroniju orbitalno vrtilno količino $l = 0$. Glede na to, da imata elektron in pozitron spin $1/2$, se osnovno stanje razcepi na dve podstanji: eno ima vrtilno količino 0 (singlet), drugo pa ima vrtilno količino 1 (triplet). Vezalna energija osnovnega stanja je 6,8 eV. Tripletno stanje je za okrog 10^{-3} eV manj vezano kot singletno stanje.

Poglejmo si anihilacijo v singletnem stanju. Predpostavimo, da pozitronij miruje (če se giblje, obravnavamo njegovo anihilacijo v težiščnem sistemu, nato pa količine preračunamo v laboratorijski sistem). Ker je vrtilna količina sistema enaka 0, so si v prostoru vse smeri enakovredne. Pri

anihilaciji nastali foton lahko odleti v katerokoli smer. Vendar pa zaradi ohranitve gibalne količine pri anihilaciji ne more nastati en sam foton; istočasno mora nastati še eden in odleteti v nasprotno smer kot prvi. Le tako je pred anihilacijo in po njej gibalna količina sistema enaka 0.

Kako pa je z vrtilno količino? Da tudi ta ostane za ves sistem po anihilaciji enaka 0, morata biti oba fotona ali levo ali pa desno cirkularno polarizirana.

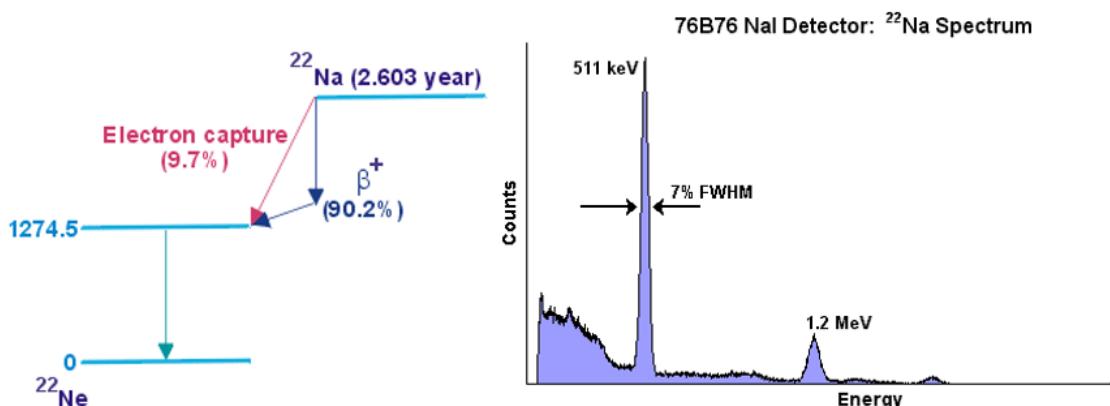
Pri anihilaciji v tripletnem stanju ohranitve gibalne količine niti vrtilne količine ne moremo doseči samo z dvema fotonomi γ . Nastati morajo najmanj trije fotoni γ .

Z ozirom na to, da je verjetnost, da najdemo pozitronij v singletnem stanju 1/4 in verjetnost, da ga najdemo v tripletnem 3/4, bi pričakovali, da bomo bolj pogosto opazili anihilacijo v tri fotone γ kot v dva fotona γ . V resnici pa ni tako. Upoštevati je namreč treba, da življenska doba pozitronija ni ista v obeh stanjih. V singletnem stanju je okrog 10^{-10} s v tripletnem pa približno 1000-krat daljša, to je okrog 10^{-7} s. V tem času pa pozitronij doživi trke z atomi in pri tem iz tripletnega stanja preide v singletno.

6.3 Osnova eksperimenta

Pri vaji uporabljamo radioaktivni vir ^{22}Na , ki prek razpada β^+ služi kot vir pozitronov e^+ . Pozitron se anihilira z elektronom, pri čemer hkrati nastaneta dva kolinearna fotona γ z energijo 511 keV, ki letita v nasprotno smer. 511 keV gama žarki iz ^{22}Na so torej časovno in kotno korelirani, kar bi radi izmerili s postavljivijo, ki jo prikazuje slika 6.1. Koincidence zaznanih fotonov bomo izmerili z natančnim dvokanalnim časovno-digitalnim pretvornikom, krajše TDCjem, ki je na voljo na merilni platformi Red Pitaya. Preden se lotiš izvedbe vaje, natančno preberi priložena navodila za njegovo uporabo (6.7).

6.4 Potek dela



Slika 6.2: Razpadna shema ^{22}Na (levo) in scintilacijski spekter ^{22}Na (desno).

Vse meritve opraviš s sunki iz enega oziroma dveh scintilacijskih detektorjev*. Jedra ^{22}Na razpadajo v 90,2 % primerov z β^+ razpadom in v 9,7 % primerov z ujetjem elektrona v vzbujeno jedro ^{22}Na , ki z izsevanjem 1,2 MeV fotona gama preide v osnovno stanje (glej razpadno shemo na sliki 6.2). Pozitroni se v snovi ustavijo in pri anihilaciji dobimo kolinearna žarka z energijo 511 keV. S sunki iz fotovrha, ki pripada tem žarkom, opraviš vse poskuse. Od ostalih sunkov jih ločiš s pomočjo diskriminatorja, tako da nastaviš njegov nivo na vrednost, ki v spektru ustrezna dolini pod fotovrhom. Določiš jo z opazovanjem sunkov na osciloskopu: iz modula NIM (ojačevalec in

*Kako deluje scintilacijski detektor, si preberi v navodilih za vajo *Spektrometrija žarkov γ* .

diskriminatorev ORTEC 9302 - slika 6.3) analogni ojačeni izhod AMP napelji[†] na prvi kanal osciloskopa, logični izhod DIS pa na drugi vhod, ki ga uporabi tudi za proženje osciloskopa. Pazi na pravilno zaključitev. Standard NIM temelji na negativni tokovni logiki, kjer logično '1' predstavlja tok -16 mA , ki mora biti zaključen preko $50\text{ }\Omega$ upora, da dobimo nivo $-0,8\text{ V}$. Digitalni osciloskop, ki ga uporabljamo, ponuja tako standardno $1\text{ M}\Omega$ kot tudi $50\text{ }\Omega$ zaključitev, ki jo izbereš v meniju za posamezen kanal. Z vrtenjem vijaka DISC LEVEL na modulu ORTEC 9302 nastaviš nivo diskriminacije. Nariši v zvezek kakšen je tipični časovni potek signalov! Lahko narediš tudi posnetek zaslona osciloskopa (za navodila glej sliko 6.7). **Ne pozabi nastaviti tudi diskriminatorja na drugem kanalu!**

6.4.1 Priprava merilnega inštrumenta

Za kalibracijo časovno-digitalnega pretvornika moramo na njegova vhoda pripeljati naključno porazdeljene sunke radioaktivnih razpadov, za kar uporabimo postavitev, ki jo prikazuje slika 6.4. Izhod iz diskriminatorja je prekratek za nadaljnjo obravnavo, zato ga peljemo na enega izmed 8 identičnih kanalov modula EG&G-ESN GG8000, ki hkrati služi kot oblikovalnik sunkov, zakasnilna enota in razdelilec. Po standardu NIM so vhodno-izhodne impedance vhodov oziroma izhodov $50\text{ }\Omega$, kar je treba pri povezovanju upoštevati. Če želimo signal razcepiti/razdeliti na dva, moramo to storiti z ustreznim modulom, ki je temu namenjen, sicer tvegamo, da zaradi nepravilne zaključitve logična vezja ne bodo delovala. V našem primeru za to uporabljamo zakasnilno enoto (GG8000, slika 6.3), kjer na vhod pripeljemo vhodni signal, na izhodu pa dobimo dva signala OUT (srednji in desni konektor) in (PAZ!!!) skrajno levo invertirani OUT signal. Izhodna signala sta glede na vhodnjega zakasnjeni za čas, ki ga nastavimo z izvijačem na vijaku DELAY, njuno dolžino pa nastavimo z vijakom WIDTH.

Med module NIM in TDCjem na Red Pitayi moramo vstaviti še pretvornik nivojev (slika 6.5), ki signale iz negativne tokovne logike NIM pretvarja v pozitivno napetostno logiko TTL, ki jo lahko pripeljemo na vhode FPGA. Ti kot logično '1' interpretirajo signale nad $+2\text{ V}$, za 'dogodek' pa TDC smatra prehod iz 0 v 1. **POZOR! Povezave med pretvornikom nivojev in Red Pitayo so fiksne in jih ne spreminja, sicer lahko uničiš čip.** Pretvornik nivojev prav tako potrebuje napajanje, zato ga ne pozabi vklopiti v vtičnico.

- Nastavi širino (WIDTH) signalov OUT iz obeh diskriminatorjev na približno 100 ns. Pomagaj si z osciloskopom (pazi na $50\text{ }\Omega$ zaključitev).
- Oba vhoda TDC pelji na razdeljeni izhod istega diskriminatorja, tako kot vidiš na sliki 6.4.
- Izvedi inicializacijo in kalibracijo časovno-digitalnega pretvornika, kot je opisano v navodilih za njegovo uporabo. Scintilatorja naj bosta čim bližje viru, da bo frekvenca sunkov višja.

6.4.2 Določitev časovne ločljivosti TDCja

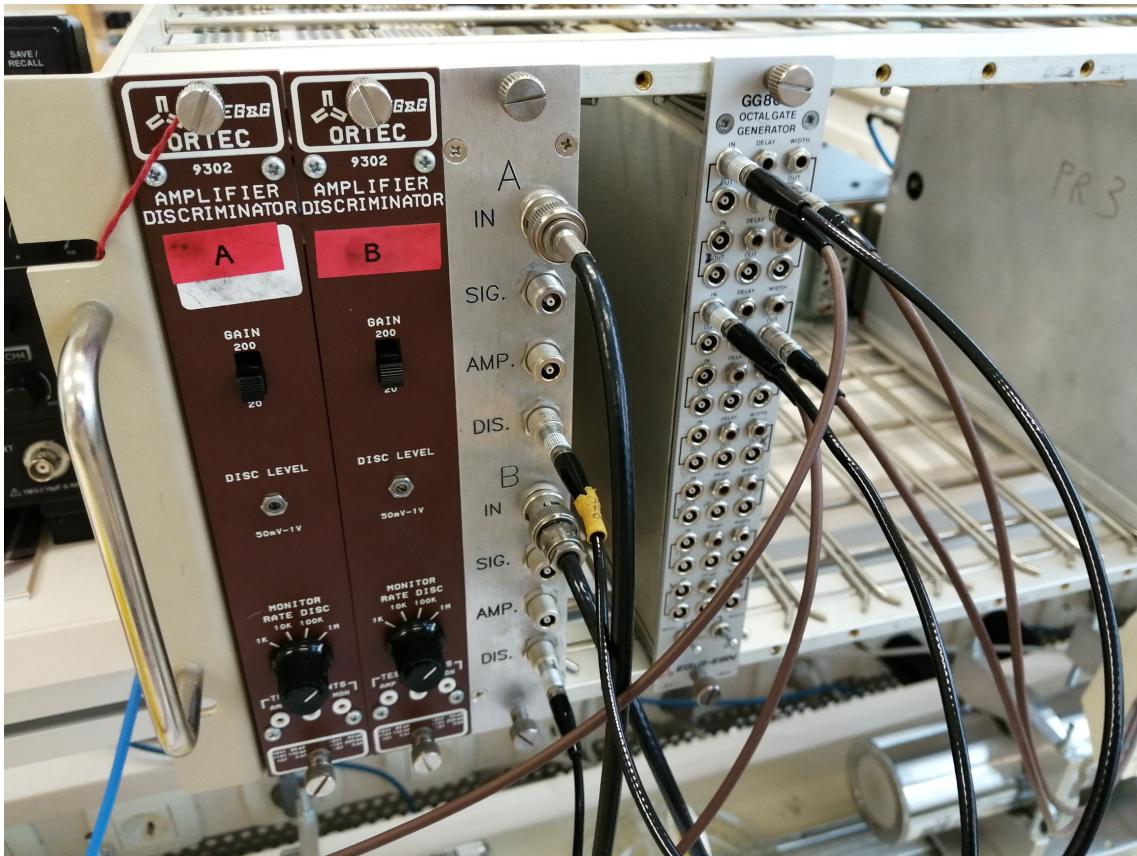
Z identično vezavo (slika 6.4) izmerimo še medkanalno ločljivost časovno-digitalnega pretvornika. Oba kanala (TDC0 in TDC1) sta namreč vezana na isti signal, zato bi teoretično med njima ob vsakem sunku morali izmeriti identični časovni interval. V praksi so izmerki nekoliko raztreseni okoli povprečja, kar predstavlja ločljivost TDCja. Doprinos pretvornika nivojev je zanemarljiv.

- Z medkanalno meritvijo izmeri ločljivost časovno-digitalnega pretvornika. Pazi, da pravilno omejiš obseg merilnega območja; vrh, ki ga iščeš, je najbližji ničli.
- Funkcija 'Autoscale' naj bo vključena, število binov lahko pustiš na 200. Ločljivost TDCja se podaja kot RMS vrednost raztrosa izmerkov, ki jo kot 'Stdev' dobiš s klikom na gumb 'Statistics'.

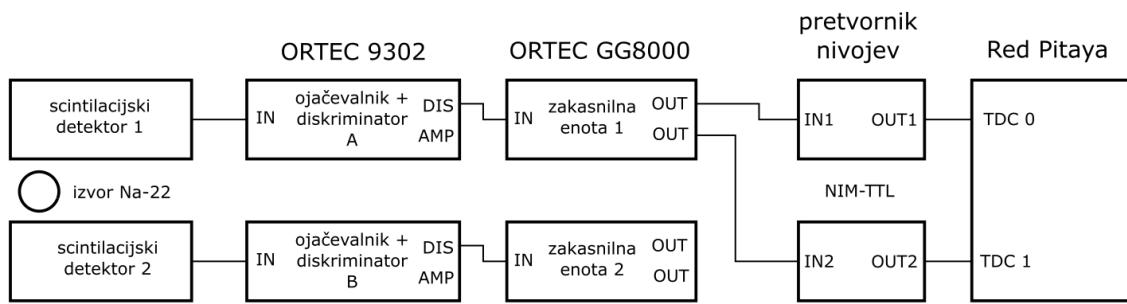
6.4.3 Meritev radioaktivnega razpada

Zdaj, ko je karakterizacija TDCja opravljena, lahko vsak kanal priklopiš na svoj scintilacijski detektor, tako kot kaže slika 6.6. S to postavitvijo bomo delali do konca vaje.

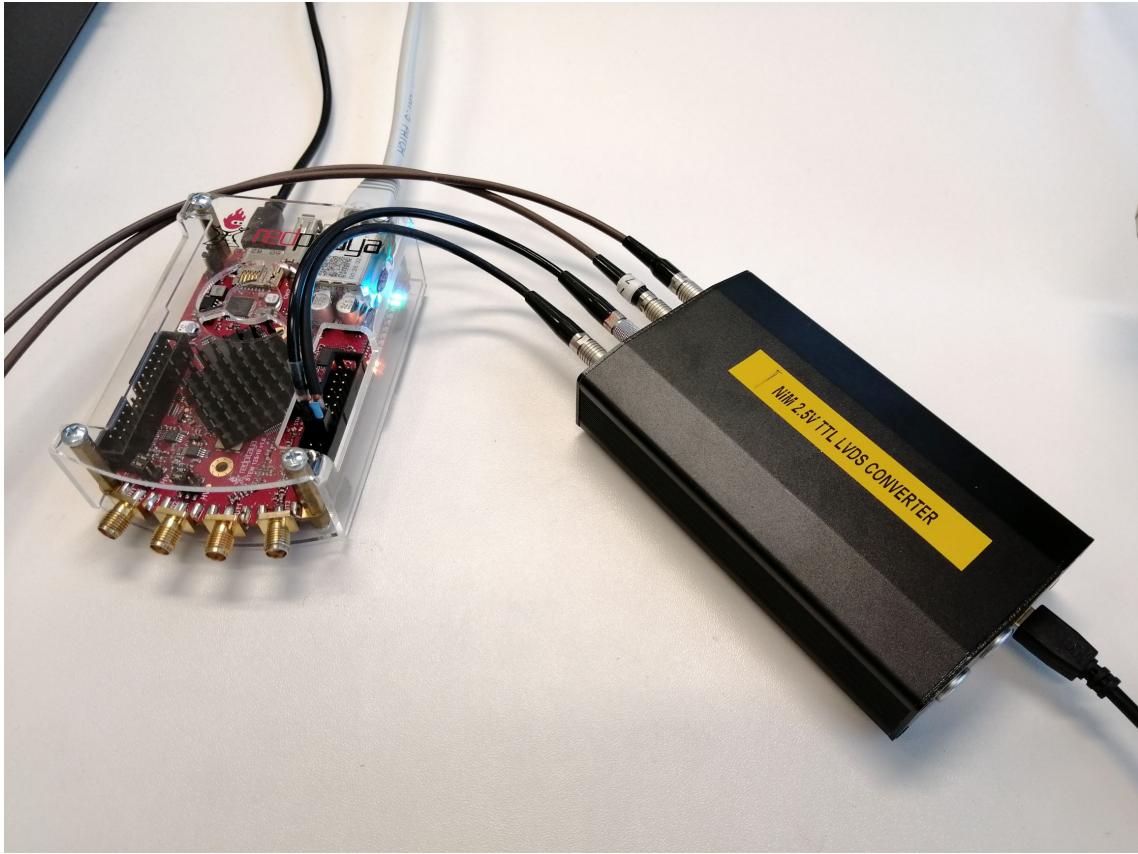
[†]Pozor: kabli so zelo občutljivi! Ko jih pretikas med posameznimi vhodi/izhodi, jih moraš prijeti za kovinsko ohišje čisto pri NIM modulu.



Slika 6.3: Modula ORTEC 9302, ojačevalec in diskriminator, imata vhod in izhode na zadnji strani. Zaradi enostavnosti rokovanja so signali napoljeni na sprednjo ploščo. Desno vidimo še 8-kanalni razdelilec oziroma zakasnilno enoto GG8000.



Slika 6.4: Shema povezav za kalibracijo in meritev časovne ločljivosti TDCja.



Slika 6.5: Pretvornik nivojev (desno) in Red Pitaya (levo). Kablov na tej sliki se pri vaji ne dotikaj!

Z enokanalno meritvijo, torej merjenjem časovnih intervalov med zaporednimi razpadi, bi radi preučili naključno naravo radioaktivnega razpada, ki velja za Poissonov proces.

- Izberi en kanal TDC (ni važno kateri) in izmeri porazdelitev časovnih intervalov med sosednjimi sunki. Merilno območje sprva pusti privzeto (± 48 ms) z vključenim ‘Autoscale’.
- Nato fiksiraj merilno območje na isto okno, kot ga je izbrala avtomatska skala, ter izključi ‘Autoscale’. Program v tem načinu deluje hitreje, zato bo štetje sunkov bolj točno. Fiksiraj še čas meritve, na primer na 30 sekund, ter ponovi meritev.
- Shrani histogram (‘Export’) za kasnejšo obdelavo.

Poissonovo porazdelitev zapišemo kot

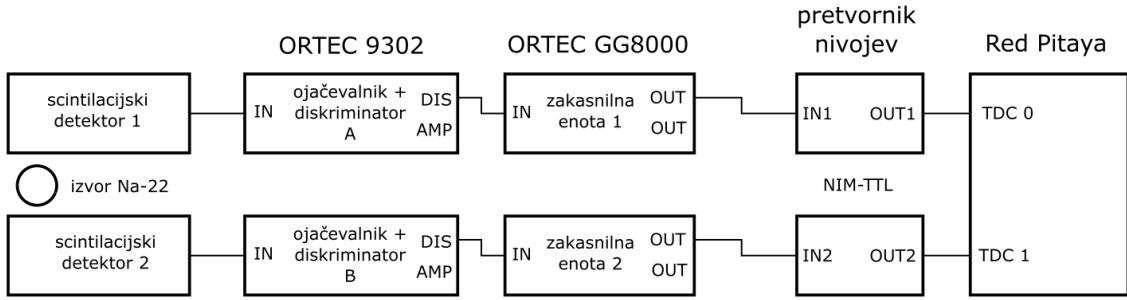
$$P_N^{\bar{N}} = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}, \quad (6.1)$$

kjer je P verjetnost, da se v nekem časovnem intervalu zgodi N dogodkov, medtem ko jih v povprečju pričakujemo \bar{N} . V primeru meritve radioaktivnega razpada so dogodki izmerjeni sunki, definiramo pa lahko še povprečno število zaznanih sunkov na sekundo kot hitrost sunkov, $R = \bar{N}/t$. Zanima nas, kakšna je verjetnostna gostota za porazdelitev časov med razpadi. Znotraj čakalnega časa ni sunkov ($N = 0$), za kar je verjetnost

$$P_0^{\bar{N}} = \frac{\bar{N}^0}{0!} e^{-\bar{N}} = e^{-\bar{N}} = e^{-Rt} = q. \quad (6.2)$$

Verjetnost, da ne zaznamo razpada, torej eksponentno upada s časom t . Verjetnost, da ga zaznamo, je potem takem

$$p = 1 - q = 1 - e^{-Rt}. \quad (6.3)$$



Slika 6.6: Shema povezav sistema za meritev koincidenčnih dogodkov.

Verjetnostno gostoto dobimo z odvajanjem po času, kar nam naposled da

$$\frac{dp}{dt} = R e^{-Rt}, \quad (6.4)$$

$$\ln\left(\frac{dp}{dt}\right) = \ln R - Rt. \quad (6.5)$$

Čakalni časi med zaporednimi pulzi so torej porazdeljeni po eksponentni porazdelitvi, ki je značilna za Poissonov proces. V našem primeru izmerimo diskretno verzijo $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ verjetnostne gostote (6.4), kjer je Δp število sunkov v posameznem predalu histograma, normirano s številom vseh sunkov v oknu ('Time intervals'), Δt pa širina predala.

- Histogram izmerjene gostote verjetnosti logaritmira in se s prilagajanjem premice prepričaj, da je porazdelitev čakalnih časov res eksponentna. Preveri, če se začetna vrednost in naklon premice po enačbi (6.5) ujemata s povprečno hitrostjo sunkov R , ki si jo izmeril/a s števcem!

6.4.4 Kotna korelacija anihilacijskih žarkov gama

Pri meritvi koincidenčnih žarkov morajo biti izvor ^{22}Na in oba scintilatorja na isti premici. Za zadostno število koincident naj bosta scintilatorja sprva nameščena čim bližje izvoru. Zakasnitvi na obeh zakasnilih enotah (DELAY) naj bosta enaki; najlažje, da obe zavrtiš na minimum.

- Signala obeh kanalov iz prostih izhodov OUT napelji na osciloskop in naredi posnetek zaslona meritve - glej sliko 6.7.
- Najprej izvedi medkanalno meritve s polnim merilnim območjem (± 48 ms) in vključenim 'Autoscale'. Prepričaj se, da razumeš rezultat meritve, preden nadaljuješ.
- Zoži merilno območje izključno na koincidenčni vrh, ki se nahaja na času 0. Nato izključi 'Autoscale' (zaradi bolj natančnega štetja dogodkov) in fiksiraj čas meritve (na primer na 30 sekund). Število izmerjenih dogodkov v izbranem oknu (vrednost 'Time intervals' v števcu) predstavlja število koincident.

Nekaj izmerjenih koincident v izbranem oknu je tudi naključnih. Če hitrost sunkov, torej njihovo število na sekundo, na prvem kanalu znaša R_1 in na drugem R_2 , potem je pri širini merilnega okna τ hitrost naključnih koincident enaka

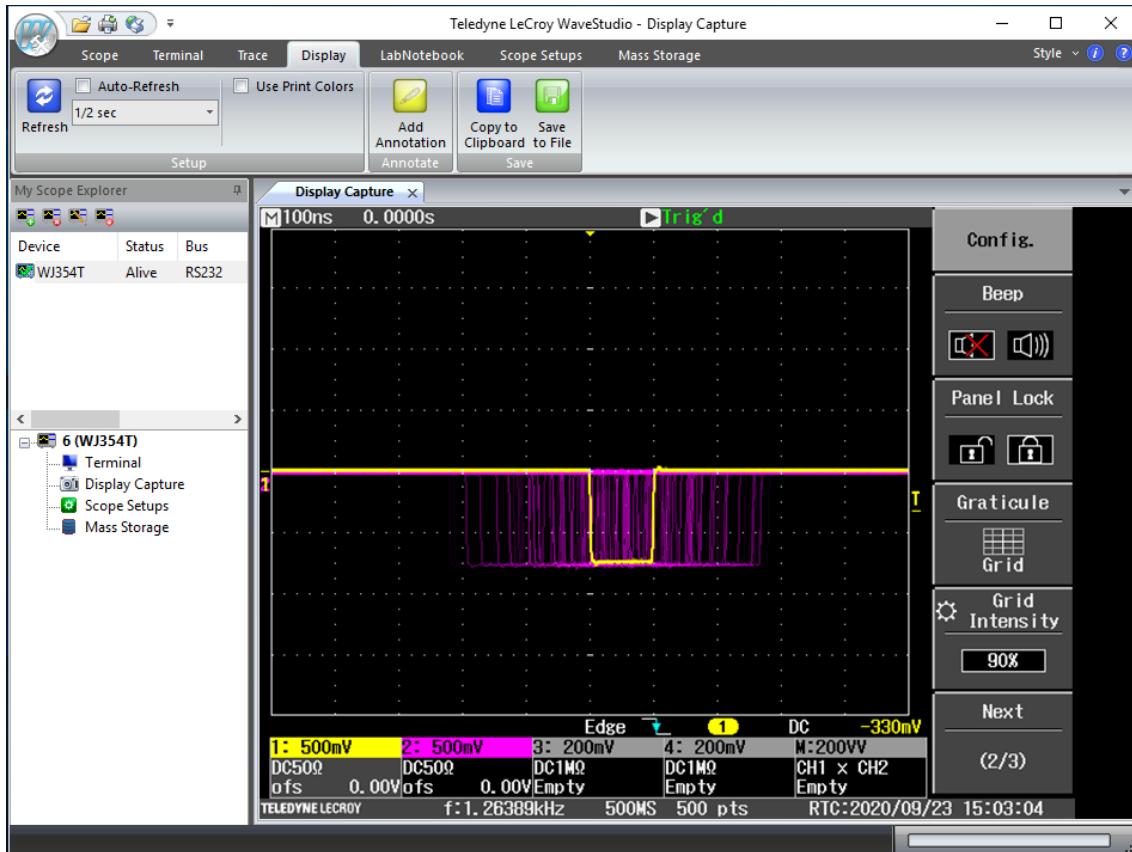
$$R_{12} = R_1 R_2 \tau. \quad (6.6)$$

- Z izvijačem povečaj zamik med kanaloma (DELAY), da se koincidenčni vrh 'odpelje' izven merilnega območja, tako da TDC vidi le še naključne koincidente (pomagaj si tudi z osciloskopom). Prepričaj se o veljavnosti enačbe (6.6).

Nazadnje izmerimo še kotno korelacijo anihilacijskih žarkov. Zamik med kanaloma zavrti nazaj na 0, potem pa scintilatorja nekoliko oddalji od izvora, da s tem povečaš kotno ločljivost naprave. Razmisli, od česa je odvisna kotna ločljivost meritve!

- Pri kotu nič izmeri časovni raztres oziroma širino koincidenčnega vrha.
- Izmeri število koincidenc za različne kote med scintilacijskima detektorjema.

Pri velikih kotih število koincidenc ne upade povsem na nič. Razlog gre pripisati sipanju žarkov gama in že izmerjenim naključnim koincidencam.



Slika 6.7: Posnetek zaslona osciloskopa lahko naredimo preko računalnika s programom WaveStudio s klikom na gumb ‘Display Capture’ v meniju levo. Sliko si lahko shranimo s ‘Save to File’ v meniju zgoraj. Opomba: osciloskop se po vsaki komunikaciji z računalnikom avtomsatko zaklene, ponovno ga odklenemo s pritiskom na ‘Panel Lock’ na zaslonu na dotik.

6.5 Dodatek/vprašanja

Če ti po koncu vaje ostane čas, se lahko še malo poigraš s postavitevijo in nastavitevami TDCja. Par zanimivih idej:

1. Vrni se na enokanalno meritev, kjer si meril/a porazdelitev časovnih intervalov med zaporednimi sunki. Če omejiš merilno okno na zelo majhne čase (pod $1 \mu\text{s}$), boš opazil/a, da pod določeno vrednostjo ni izmerkov. To je mrvi čas merilnega sistema. Koliko znaš in ali lahko s pomočjo osciloskopa najdeš komponento, ki je ‘kriva’ za to? Mrvi čas TDCja na Red Pitayi je približno 14 ns.
2. Širina koincidenčnega vrha je mnogo večja od ločljivosti TDCja. Zakaj je temu tako? Poskušaj z osciloskopom poiskati vir tresenja signala. Kaj bi morali storiti, da bi bile koincidence bolj ostro definirane?

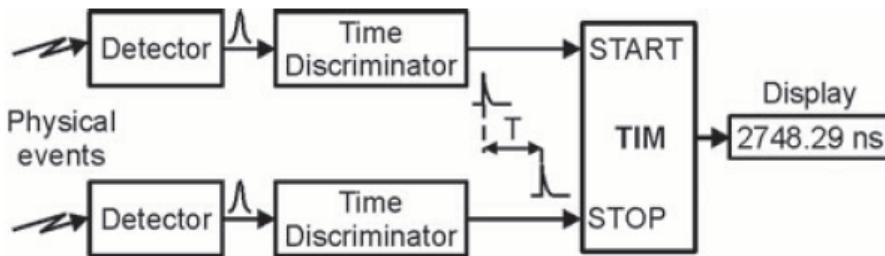
6.6 Seznam uporabljenih modulov NIM

1. Visokonapetostni izvor CAEN N471 [1]
2. Ojačevalnik z diskriminatorjem ORTEC 9302 [2]
3. Zakasnilna enota EG&G-ESN GG8000 [3]

6.7 Priloga: navodila za uporabo časovno-digitalnega pretvornika na Red Pitayi

6.7.1 Uvod

Časovno-digitalni pretvornik ali po angleško TDC (*Time-to-Digital Converter*) je naprava za natančno merjenje časovnih intervalov med dogodki. Primer tipične izvedbe prikazuje slika 6.8, kjer z dvokanalnim TDCjem merimo časovno razliko med prihodom začetnega (START) in končnega (STOP) pulza. Takšno postavitev z dvema kanaloma bomo uporabljali tudi mi za detekcijo koincidenčnih anihilacijskih žarkov gama.



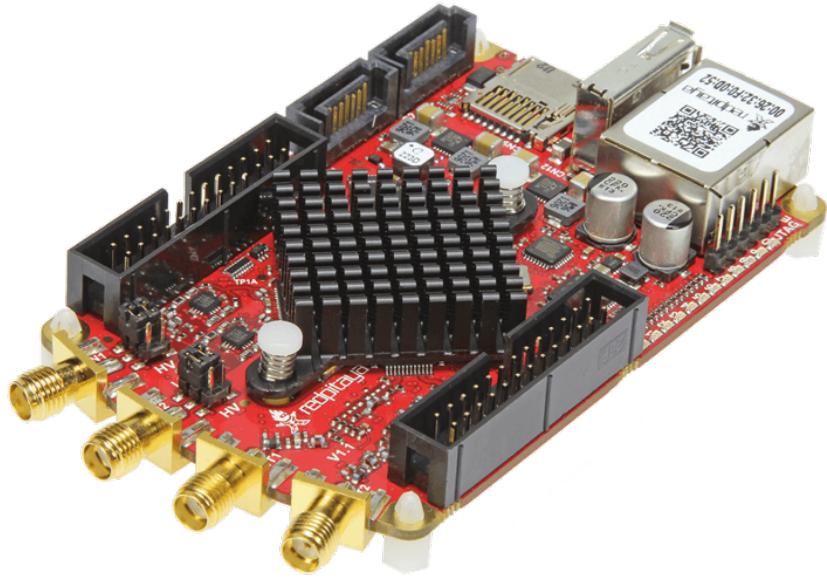
Slika 6.8: Meritev časovnega intervala. Slika povzeta po [4].

Kot meritni instrument bomo uporabljali slovensko razvojno ploščo Red Pitaya [5], ki jo vidimo na sliki 6.9. V prvem približku gre za mini Linux računalnik z dvojedrnim ARM Cortex-A9 procesorjem, se pravi nekaj podobnega kot priljubljeni Raspberry Pi. A v resnici Red Pitaya ponuja še veliko več. Bazira namreč na polno programirljivem čipu Zynq-7010 proizvajalca Xilinx [6], ki na istem kosu silicija poleg procesorja vsebuje tudi tako imenovano *programirljivo polje vrat* ali po angleško *Field Programmable Gate Array*, krajše FPGA. Osnova te tehnologije je polje oziroma matrika velikega števila programirljivih logičnih celic, ki jih lahko z uporabo ustreznega razvojnega orodja preoblikujemo in povežemo v poljubno digitalno vezje, ki je hkrati zelo zmogljivo in poceni. Sistem Zynq nam torej omogoča, da lahko procesorju kadarkoli dodajamo enote s kakršnokoli funkcionalnostjo, ki jo v tistem trenutku potrebujemo. V našem primeru bomo na polju FPGA implementirali dvokanalni časovno-digitalni pretvornik, ki je bil izdelan v sklopu mojega magistrskega dela.

6.7.2 Inicializacija časovno-digitalnega pretvornika

Celoten TDC je v programskega smislu sestavljen iz treh delov, ki morajo biti vklopljeni, preden lahko začnemo opravljati meritve. To so:

- na FPGA implementirano vezje z dvema kanaloma TDC,
- strežniški program, ki teče na sistemu Linux in izmerjene časovne znake preko Ethernet kabla pošilja osebnemu računalniku,
- grafični uporabniški vmesnik v MATLABu, s katerim upravljamo s TDCjem ter obdelujemo in izrisujemo izmerjene časovne intervale.



Slika 6.9: Red Pitaya STEMlab 125-14. Srce, Xilinxov čip Zynq-7010, se skriva pod črnim hladilnikom. Slika od [5].

Izvorno kodo vseh komponent lahko najdete na githubu [7].

Ob vklopu Red Pitaye na napajanje se ob zagonu operacijskega sistema avtomatsko sproži programiranje FPGA in požene strežniški program. Na plošči bo čez nekaj trenutkov začela utripati rdeča lučka, ki v ritmu bitja srca naznanja, da Linux dela. Ko zasvetita še dve rumeni lučki, je dvokanalni TDC naložen in pripravljen na uporabo.

Zdaj lahko v Windowsih poženeš aplikacijo *TDCgui*, ki se nahaja na namizju. MATLAB se nekaj časa zaganja (1-2 minuti), zato bodi potrebežljiv/a. Odpre se okno grafičnega vmesnika, kjer v glavi vneses parametre povezave TCP/IP (naslov 192.168.1.15, vrata 1001) ter klikneš na gumb 'Connect'. Če je vse v redu, lahko na desni že bereš temperaturo čipa Zynq; glej sliko 6.10. Preveri še, da direktorij v oknu 'Path' kaže na obstoječo mapo, ki jo boš uporabljal/a za shranjevanje in branje datotek.

6.7.3 Kalibracija

Uporabljeni TDC temelji na principu časovne interpolacije, kjer čas v grobem merimo s štetjem urinih ciklov, za fine meritve znotraj posameznega cikla pa skrbi integrirana zakasnilna linija, ki je sestavljena iz 192 diskretnih elementov na FPGA. Ko na vhod TDCja pripeljemo sunek, ta s končno hitrostjo potuje po liniji, ki se vzorči ob naslednjem urinem ciklu. Iz razdalje, ki jo signal prepotuje po liniji, lahko torej zelo natančno izmerimo čas prihoda sunka znotraj urinega cikla. Preden pa lahko začnemo uporabljati inštrument, je treba zakasnilno linijo kalibrirati, torej izmeriti zvezo med diskretno prepotovano razdaljo (med 1 in 192) in fizičnim časom v pikosekundah. To opravimo v prvem zavihu grafičnega vmesnika, imenovanem 'Calibration', kot lahko vidimo na sliki 6.10.

Potrebeno je izmeriti zakasnitev posameznih elementov v zakasnili liniji, kar storimo s tako imenovanim statističnim testom. Na vhod TDCja pripeljemo naključno generirane sunke, recimo od radioaktivnega razpada. S klikom na gumb 'Enable' poženemo kanale, ki jih želimo kalibrirati – hkrati je lahko aktivnih več kanalov, njihovo stanje pa označuje zelena lučka na levem robu panela. Ob tem dobimo naključno razporejene zadetke vzdolž linije, pri čemer je večja verjetnost, da zadanemo 'širše' elemente, torej tiste z večjo zakasnitvijo. Histogram zadetkov posameznih zakasnitvenih elementov lahko v realnem času spremljamo v oknu grafičnega vmesnika (slika 6.10). Ko zberemo dovolj (vsaj nekaj 10000 sunkov) statistike, kliknemo na gumb 'Calibrate' in MATLAB ustvari kalibracijsko tabelo za izbrani kanal. Ne pozabi tega storiti za oba kanala! Če je kalibracija uspešna, se statusna lučka (ob ustavljenem kanalu) barva modro.



Slika 6.10: MATLAB aplikacija z odprtim zavihkom za kalibracijo.

Širina W_i posameznega zakasnitvenega elementa i , merjena v pikosekundah, je enostavno

$$W_i = \frac{N_i}{N} \cdot T, \quad (6.7)$$

kjer je N število vseh nabranih sunkov, N_i število sunkov v elementu i in T perioda ure jedra TDC. Pretvorba iz fine meritve i v pikosekunde je potem:

$$T_i = \sum_{k=1}^{i-1} W_k + \frac{W_i}{2}, \quad (6.8)$$

kjer seštejemo širine vseh prejšnjih zakasnitvenih elementov in polovico i -tega, da dobimo čas T_i , ki ga shranimo v kalibracijsko vpogledno tabelo. Rezultate kalibracije vključno z izmerjenimi širinami elementov, kalibracijsko funkcijo in nelinearnostjo linije si lahko ogledamo s klikom na gumb ‘Plot calibration data’. Hitrost potovanja signala po zakasnilni liniji je zelo neenakomerna, zato kalibracijska funkcija ni premica, kot bi dobili v idealnem primeru. S klikom na gumb ‘Export’ lahko še shranimo meritve za vse kanale hkrati, ki se zapisejo v datoteko .mat v mapi, ki je specificirana v oknu ‘Path’. To pride zelo prav, saj nam ob naslednjem zagonu aplikacije ni potrebno ponovno opravljati statističnega testa, pač pa z ‘Import’ samo uvozimo že izmerjene histograme in kliknemo ‘Calibrate’.

Zakasnitve signala znotraj vezja so funkcija temperature, zato je na desni na voljo termometer, ki vsako sekundo bere temperaturo silicija. Ob zagonu Red Pitaye počakaj kakšnih 10 minut, da se čip segreje, preden opravljaš kalibracijo. Pri sobni temperaturi se zadeva tipično ustali na približno 60 °C, največja dovoljena temperatura obratovanja pa je 85 °C.

Kdor bi rad o delovanju TDCja in lastnostih zakasnilne linije izvedel več, je vladno vabljen k branju mojega magisterija [8], ki je prostost dostopen na spletnem Repozitoriju Univerze v Ljubljani.

6.7.4 Meritve časovnih intervalov

Ko so zakasnilne linije kalibrirane, lahko začnemo opravljati časovne meritve. Odpremo naslednji zavihek ‘Measurement’, ki je prikazan na sliki 6.11. Najprej moramo na levi izbrati časovno-digitalne pretvornike, s katerimi bomo izvedli meritev – kanala START in STOP. Če sta kanala

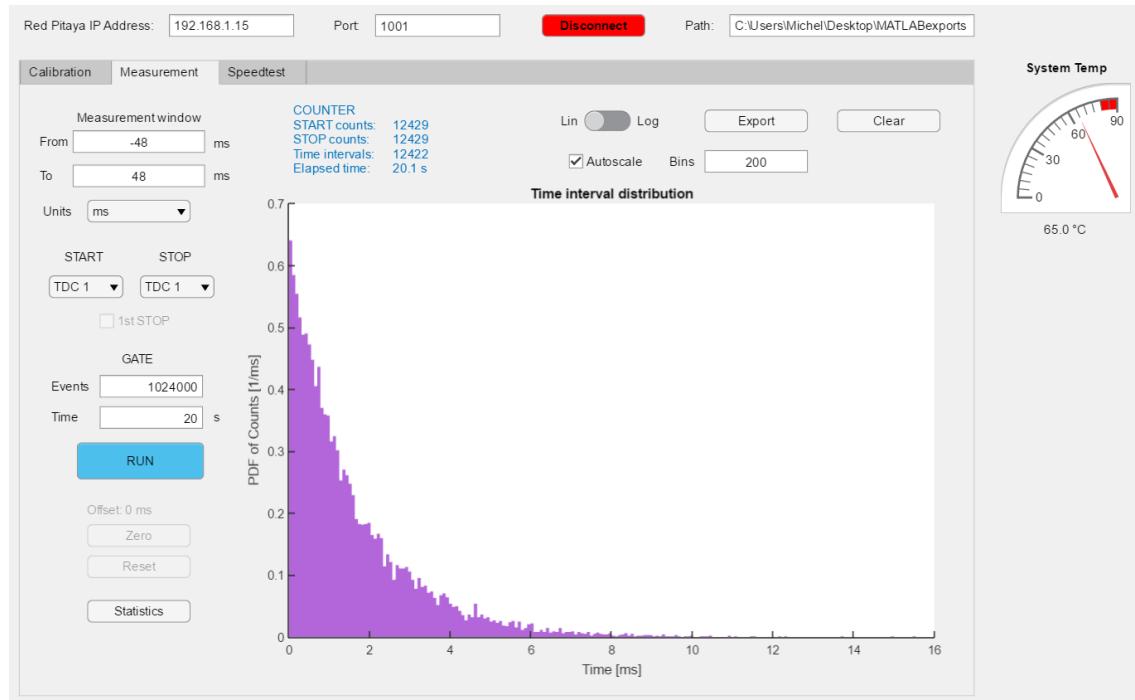
različna, gre za **medkanalno** meritev, če pa v obeh menijih izberemo isti kanal, tako kot na sliki 6.11, gre za **enokanalno** meritev. Zgoraj izberemo še merilno območje, ki se razteza do največ ±48 ms. Časovni intervali, ki padejo izven izbranega okna, so zavrnjeni. V meniju GATE določimo, koliko intervalov bi radi izmerili, oziroma, kako dolgo naj meritev traja. Če čas pustimo na 0, je trajanje neomejeno. Meritev poženemo/ustavimo z gumbom 'RUN'. Opomba: ravnokar omenjene nastavitev in meritev sama se hranijo za vsako kombinacijo kanalov START-STOP, zato lahko mirno preklapljam med različnimi kanali brez izgube podatkov. Če bi radi izbrisali posamezno meritev, je treba pritisniti gumb 'Clear'.

Na histogramu v realnem času vidimo rezultat meritve, ki je ponazorjen v obliki gostote verjetnosti (angl. *probability density function*). Vrednost v posameznem predalu histograma je torej

$$PDF_i = \frac{N_i}{N \cdot \Delta t}, \quad (6.9)$$

kjer je N_i število izmerkov v predalu i , N število vseh izmerkov v oknu, Δt pa širina posameznega predala. Na voljo imamo tudi števec COUNTER (z modro), ki kaže število izmerkov v izbranem oknu ('Time intervals') in število vseh prebranih sunkov na posameznem kanalu. Desno se nahajajo nastavitev grafike, od vrste navpične skale (linearna/logaritemsko) do zrnatosti histograma – števila binov. Pomembna in zelo priročna funkcija je 'Autoscale', ki časovno skalo avtomatsko omeji na izmerjene podatke. Če je ta funkcija izklopljena, je skala fiksna in enaka izbranemu merilnemu območju. Za večino meritev se priporoča, da je avtomatska skala vklopljena.

Ko smo z meritvijo zadovoljni, jo lahko v obliki enakega histograma shranimo z gumbom 'Export', ki v zgoraj nastavljenem direktoriju ustvari datoteko .txt za kasnejšo obdelavo. Lahko si shranimo tudi sliko histograma s pomočjo skritega menija desno zgoraj ob grafu.



Slika 6.11: Primer enokanalne TDC meritve, kjer smo merili porazdelitev časovnih intervalov med sosednjimi razpadi radioaktivnega vira. Kot pričakovano za Poissonov proces, je porazdelitev eksponentna.

Enokanalna TDC meritev

Primer vidimo na sliki 6.11. V tem režimu je aktivен le en TDC kanal, TDC1, merimo pa časovni razmak med sosednjimi sunki na vhodu TDCja. Izmerjeni intervali so po definiciji vedno pozitivni. Izmerjeno število sunkov na kanalu START je seveda enako STOP, ker gre za isti kanal.

Medkanalna TDC meritve

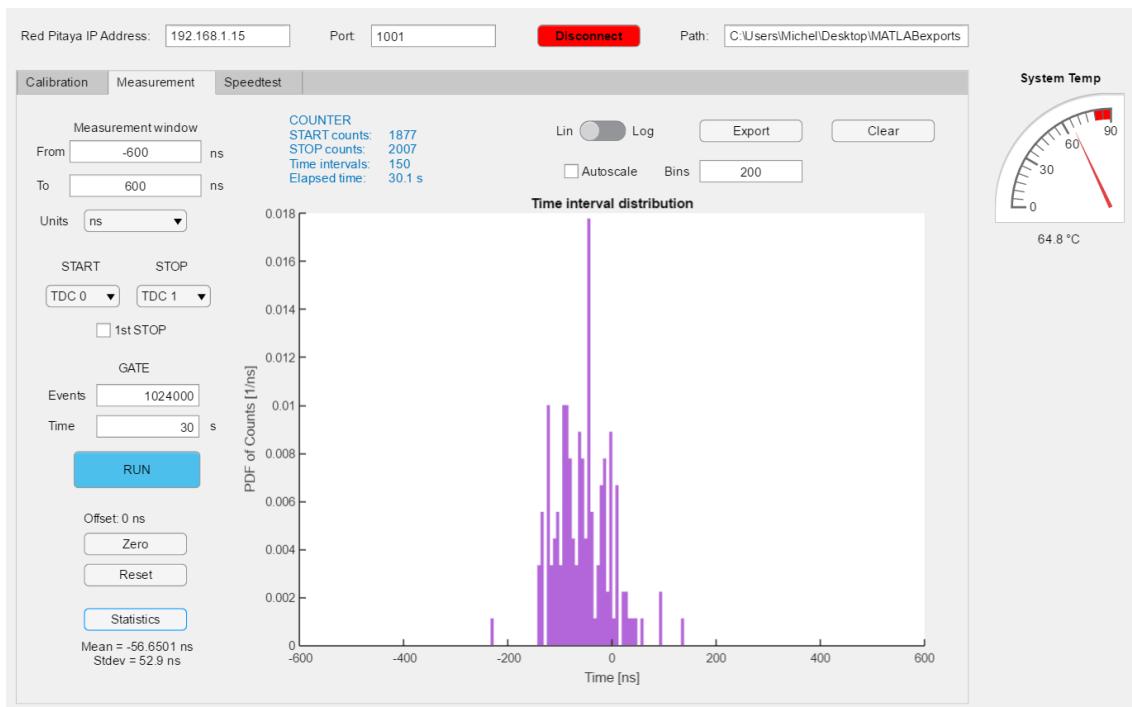
Med vajo bomo TDC večinoma uporabljali v dvokanalnem START-STOP režimu, tako kot shematsko prikazuje slika 6.8. V tem primeru merimo časovno razliko med značkami na STOP in START kanalu, torej STOP minus START, kar je idealno za iskanje koincidenc med kanaloma. Primer medkanalne meritve vidimo slike 6.12.

Izmerjeni intervali zdaj lahko segajo tudi v negativno smer, če sunki STOP prehitevajo START. Specifičnost medkanalnih meritvev, na katero je treba paziti, je inherentna dvojnost meritvev, kar nazorno prikazuje slika 6.13. Ob privzetem neomejenem merilnem območju je število točk dva-kratnik dejanskih dogodkov, (skoraj) vsak izmerek pa ima 'dvojčka' nekje daleč stran na nasprotni osi. Naloga operaterja je, da omejim merilno območje na interval, ki je fizikalno smiseln. Na primer, če vemo, da sunke STOP pošiljamo na TDC za sunki START, potem merilno območje omejimo zgolj na pozitivno polos, in tako naprej. Lep primer je tudi slika 6.12, kjer smo merilno območje omejili na ± 600 ns za iskanje koincidenc.

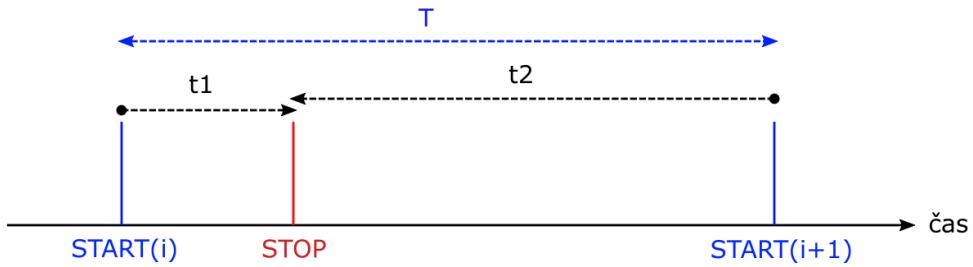
Levo spodaj ob histogramu je za hitro analizo vrhov na voljo gumb 'Statistics', ki izračuna povprečje izmerkov v oknu in njihov raztres okoli povprečja (glej sliko 6.12). Na levi sta še meni za odštevanje povprečja 'Offset' in funkcija '1st STOP' (tik pod izbiro kanalov), ki sta na voljo le pri medkanalnih meritvah. Ob kliku na gumb 'Zero' se izmerki zamaknejo tako, da je njihovo povprečje enako nič, 'Reset' pa jih povrne na originalne izmerjene vrednosti. Opcija '1st STOP' se uporablja za filtriranje značk STOP in je pri tej vaji ne bomo potrebovali. Prav tako ne bomo potrebovali tretjega zavihka aplikacije, 'Speedtest', ki je namenjen testiraju hitrosti delovanja časovno digitalnega pretvornika.

6.7.5 Nekaj dodatnih napotkov

Tekom izdelave magisterija sem ugotovil, da aplikacije v MATLABu ne blestijo po hitrosti in 100-odstotni zanesljivosti. V zelo redkih primerih se lahko zgodi, da grafični vmesnik naleti na napako oziroma preneha delovati, k čemur lahko pripomore (pre)hitro klikanje na gume. V tem primeru enostavno ponovno zaženi aplikacijo, uvozi shranjeno kalibracijo in normalno nadaljuj z meritvami. Ko končaš z vajo, prekini povezavo s TDCjem (gumb 'Disconnect') in Red Pitayo izklopi iz napajanja.



Slika 6.12: Primer medkanalne TDC meritve, kjer merimo časovno razliko med sunki na kanalih STOP in START. Izmerjeni vrh, ki je centriran približno okoli ničle, so koincidence anihilacijskih žarkov gama.



Slika 6.13: Medkanalna meritev – dogodek na kanalu STOP proizvede dva izmerjena časovna intervala, t_1 in t_2 , glede na to, ali za referenco vzamemo značko START pred ali za njim. Če je razmak med sosednjima značkama START v danem trenutku enak T , potem velja $t_2 = -(T - t_1)$. Vsak dogodek torej proizvede pozitivni interval t_1 in negativnega t_2 . Naloga operaterja je, da prepozna, katera meritev je fizikalno smiselna in temu primerno prilagodi merilno območje.

Literatura

- [1] CAEN N471 http://www-f9.ijs.si/~rok/detectors/doc/manuals/nim/n471_rev0.pdf
- [2] ORTEC 9302 <https://www.ortec-online.com/products/electronics/amplifiers/9302>
- [3] ORTEC GG8020 <https://www.ortec-online.com/products/electronics/delays-gates-and-logic-modules/gg8020>
- [4] J. Kalisz, “Review of methods for time interval measurements with picosecond resolution,” *Metrologia*, vol. 41, no. 1, str. 17–32, februar 2004. DOI:10.1088/0026-1394/41/1/004.
- [5] Red Pitaya. <https://www.redpitaya.com/>.
- [6] Xilinx. <https://www.xilinx.com/products/silicon-devices/soc/zynq-7000.html>.
- [7] Izvorna koda časovno-digitalnega pretvornika. https://github.com/madamic/zynq_tdc.
- [8] M. Adamič, *Časovno digitalni pretvornik visoke ločljivosti na čipu Xilinx Zynq-7010*, magistrsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, 2020.

7 Elektronska spinska resonanca

7.1 Uvod

Za spektroskopijo z elektronsko spinsko resonanco se pogosto uporablja sinonimna izraza elektronska paramagnetna resonanca (EPR) ali elektronska magnetna resonanca (EMR). Magnetna resonančna spektroskopija se imenuje, ker merimo prehod med energijskimi nivoji prostih elektronov v magnetnem polju. Osnovni principi so podobni kot pri jedrski magnetni resonanci (NMR), le da so pri elektronski resonanci frekvence prehodov mnogo višje, večinoma se dela v mikrovavelovnem frekvenčnem področju (do 30GHz). Zanimivi so pa tudi poizkusi pri nižjih frekvencah in odgovarjajočem nižjem magnetnem polju.

ESR se uporablja za študij prostih radikalov pri kemičnih reakcijah pa tudi pri stabilnih spojinah. EPR signal dajo paramagnetne soli; poogleneli materiali, nekateri polimeri; zlasti pa je uporabna za študij strukturnih defektov v kristalih (F in V centri).

Elektron je delec s spinom $S = 1/2$ in ima magnetni moment, katerega velikost bi bila po "klasični teoriji" en Bohrov magneton $\mu_B = e\hbar/2m_e = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$, kjer je e osnovni naboj elektrona, \hbar Planckova konstanta in m_e masa elektrona. V zunanjem magnetnem polju B_0 sta možni dve orientaciji: paralelno s poljem $m_s = \frac{1}{2}$ in antiparalelno s poljem $m_s = -\frac{1}{2}$ (m_s je magnetno kvantno število). Med tema dvema stanjema je energijska razlika ΔE :

$$\Delta E = E_{+1/2} - E_{-1/2} = g\mu_B B_0, \quad (1)$$

kjer je g Landejev faktor in je za prost elektron enak 2 (oziroma bolj natančno $g = 2,0023193$ zaradi relativističnih efektov). Landejev faktor je odvisen tudi od kemične vezave in elektronskega okolja. Prehode med temi nivojema lahko vzbujamo z elektromagnetnim sevanjem, katerega frekvenca izpolnjuje pogoj (velja izbirno pravilo $s_m = \pm 1$)

$$\Delta E = g\mu_B B_0 = h\nu \quad (h \text{ je Planckova konstanta}) \quad (2)$$

Tako dobimo zvezo med frekvenco in resonančno vrednostjo magnetnega polja. Resonančna frekvanca ν je torej funkcija magnetne poljske gostote B_0 , za prost elektron dobimo razmerje $\nu/B_0 = 28,026 \text{ GHz/T}$ (Za primer protonske jedrske magnetne resonanse so resonančne frekvence približno 650-krat nižje; $\nu_{NMR}/B_0 = 42,5 \text{ MHz/T}$).

Energijska razlika ΔE je razmeroma majhna v primeru z vidno ali infrardečo spektroskopijo, zato so signali precej šibki. Relativna populacija obeh energijskih nivojev, ločenih z energijsko razliko ΔE je dana z Boltzmannovo porazdelitvijo:

$$n_2/n_1 = \exp(-\Delta E/k_B T) = \exp(-hv/k_B T), \quad (3)$$

kjer je k_B Boltzmannova konstanta ($k_B = 1,39 \times 10^{-23} \text{ J/K}$) in T absolutna temperatura.

Npr. pri frekvenci $\nu = 100 \text{ MHz}$ in sobni temperaturi je relativna razlika $\frac{n_2 - n_1}{n_1} \approx 2 \times 10^{-5}$. Neto absorpcija radiacije in s tem občutljivost je odvisna od razlike populacij

$n_2 - n_1 = \Delta n$; torej čim višja je frekvanca in z njo magnetno polje, tem večja je občutljivost. Zaradi interakcij elektrona s kristalno mrežo, z drugimi elektroni ali jedri, resonančne črte niso ostre ampak razširjene ali razcepljene.

7.2 Aparatura

Vzorec DPPH (2,2-diphenyl-1-picrylhydrazyl) se nahaja v tuljavi resonančnega kroga regenerativnega oscilatorja (oglej si shemo na sliki 3). Ko doseže zunanje magnetno polje B_0 vrednost, ki izpoljuje resonančni pogoj nastopi absorpcija visokofrekvenčnega valovanja (Q-faktor nihajnega kroga se zniža) in amplituda oscilacij oscilatorja pade. Usmerimo jih z diodo in opazujemo na osciloskopu. Merjenje precej olajšamo z modulacijo magnetnega polja, amplituda le te je mnogo manjša od statične komponente polja (slika 2), frekvenco izberemo primerno, npr. 215 Hz. Dvakrat v periodi polje preide resonančno točko in absorpcijski signal se pojavi na osciloskopu. To velja, če je amplituda modulacije večja od širine črte. Običajna pa je manjša, v tem primeru dobimo signal modulacijske frekvence, katerega amplituda je proporcionalna odvodu absorpcijske črte v odvisnosti od statične komponente polja. Signal, ki ga opazujemo na osciloskopu, je šibek in le malo izstopa iz šuma. Da izboljšamo razmerje signala proti šumu, uporabimo fazni detektor.

Fazni detektor¹ lahko uporabljam pri merjenjih, kjer je na razpolago referenčni signal $U_{ref} = U_0 \cos(\omega t + \phi)$. V našem primeru je to napetost, ki napaja modulacijske tuljave. Signal $U_{sig} = A(t) \cos(\omega t)$ je usmerjen izhod regenerativnega oscilatorja delno prekrit s šumom in iste frekvence ω ; med njima je fazna razlika ϕ . Osnova delovanja faznega detektorja je, da napravi produkt obeh signalov kot analogni množilec:

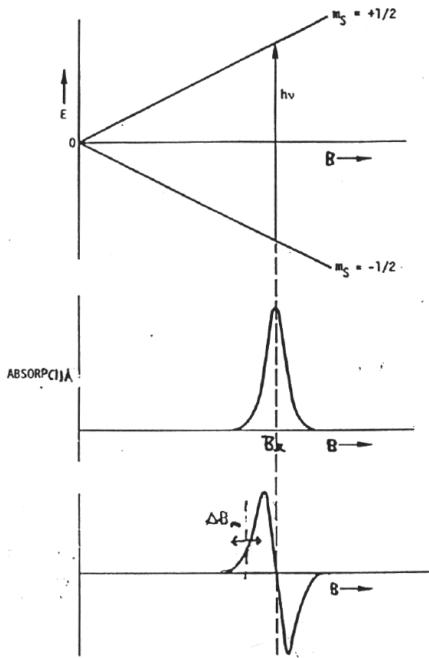
$$U_{out} = U_{ref} U_{sig} = A(t) \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t), \quad U_0 = 1 \quad (4)$$

$$U_{out} = \frac{1}{2} A(t) [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \quad (5)$$

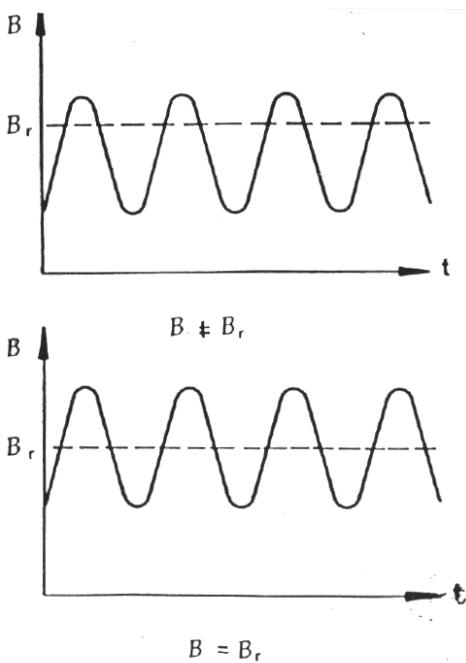
Vidimo, da nosilna frekvenca signala $A(t)$ ni več ω ampak nič. Če izhodni signal filtriramo z RC filtrom, člen z 2ω odpade in tudi vse komponente v $A(t)$ s frekvenco, večjo od $1/RC$. Tipična vrednost RC je 1s; torej fazni detektor prepušča frekvenčni pas širine 1Hz okrog modulacijske frekvence ω . Izhod regenerativnega oscilatorja ima frekvenčno širino nekaj kHz (to opazujemo na osciloskopu). Teoretično izboljšanje razmerja signala proti šumu:

$$\frac{(S/N)_{\text{fazni detektor}}}{(S/N)_{\text{reg. osc.}}} = \sqrt{\frac{(\Delta f)_{\text{fazni detektor}}}{(\Delta f)_{\text{reg. osc.}}}} \approx 50 \quad (6)$$

¹Za boljše razumevanje delovanja faznega detektorja za študente univerzitetnega programa priporočamo še branje navodil vasej »Fazno občutljivi ojačevalnik«.



Slika 1: a) diagram energijskih nivojev prostega elektrona v magnetnem polju, b) ESR absorpcija r.f. energije v odvisnosti magnetnega polja, c) amplituda ESR signala na izhodu detektorja je proporcionalna odvodu absorpcijske črte.



Slika 2: Magnetno polje B sestoji iz istosmerne komponente B_{DC} in izmenične B_{AC} , tako da da je $B = B_{DC} + B_{AC}$. Statično polje B_{DC} spremimo s tokom, ki napaja elektromagnet.

7.3 Naloga

1. Z vzorcem DPPH kot merjencem določi g-faktor prostega elektrona in razmerje B/ν .
2. Izmeri širino absorpcijske črte

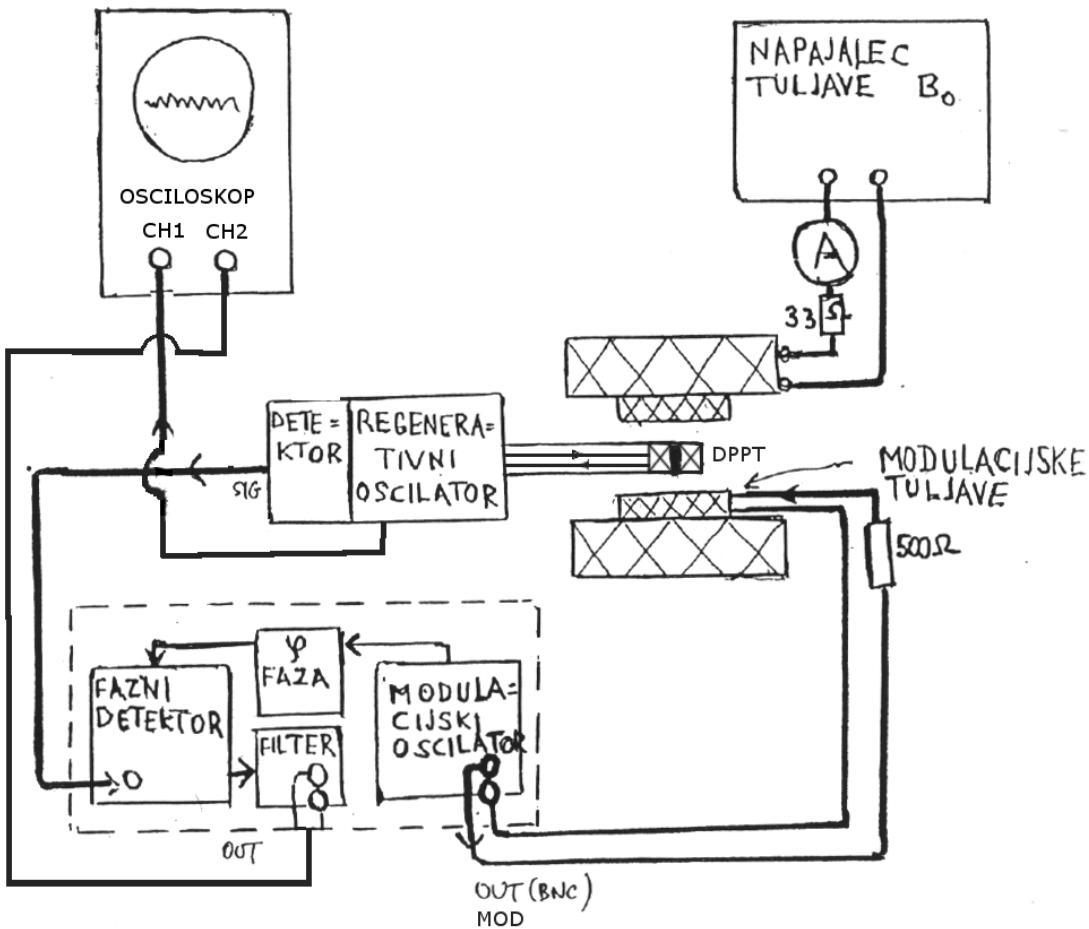
7.4 Navodilo

1. Z osciloskopom direktno izmeri frekvenco regenerativnega oscilatorja. Izračunaj magnetno poljsko gostoto tuljave z izrazom $B_0 = N\mu_0 I/d$, kjer je $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Vs/Am, število ovojev tuljave $N = 1557$, d diagonalna tuljava in I tok skozi tuljavo.

Namig: Če boš za izračun d uporabil polmer ali premer tuljave, preštej, koliko navojev tuljave vidiš.

2. S faznim detektorjem izmeri odvod absorpcijske črte tako, da spreminjaš tok I v majhnih korakih in z osciloskopom odčitavaš izhod faznega detektorja. Širina absorpcijske črte ΔB je definirana kot razmik med ekstremoma odvoda.

Napetost v odvisnosti od toka meri pri treh različnih frekvencah oscilatorja (npr. 80, 85, 90 MHz).



Slika 3: Elektronska shema eksperimenta. Dobro si oglejte, kje vse so prisotne tuljave.

8 Poskusi z žarki X

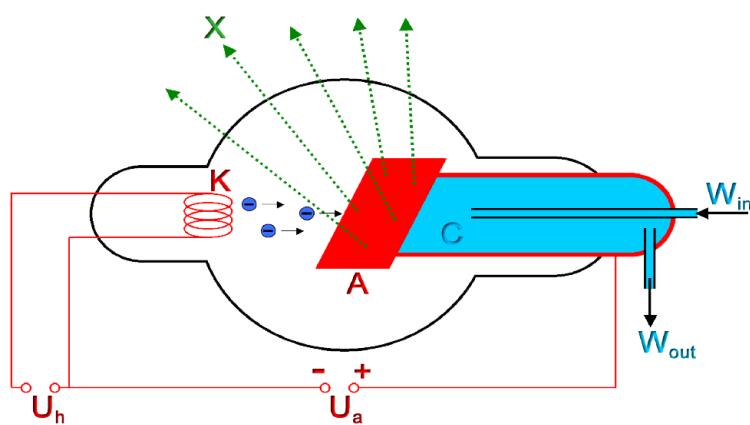
8.1 Naloga

1. Z ionizacijsko celico izmeri povprečno jakost doze v snopu žarkov X.
2. Izmeri polariziranost primarnih žarkov X.
3. Izmeri polariziranost sipanih žarkov X.

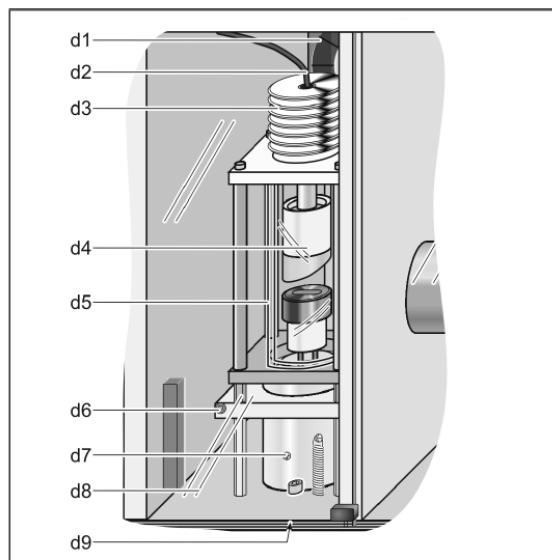
8.2 Izvor žarkov X

Elektrone, ki izhajajo iz katode, pospešimo z visoko napetostjo proti kovinski tarči. Pri trku zaradi zavirjanja elektronov v polju jeder nastanejo X žarki zavorno sevanje. Če imajo elektroni zadostno energijo, pa lahko iz notranjih elektronskih lupin izbijejo elektrone. Elektroni iz višjih stanj zapolnijo vrzel, pri tem pa izsevajo karakteristične X žarke, ki imajo točno določeno energijo.

V našem primeru boste eksperimente opravljali s pomočjo rentgenske naprave Lehr und Didaktiksysteme 554811, ki vsebuje rentgensko cev z molibdenovo anodo in omogoča izpeljavo vrste različnih eksperimentov. Rentgenska cev je zaprta v cevi iz svinčevega stekla, ki absorbira večino X žarkov, ki ne letijo proti kolimatorju. Na ta način lahko med delovanjem opazujete spremembu temperature katode, če spremenjate katodni tok. Anoda je izdelana iz molibdena, na njej pa je maksimalna napetost 37 kV, ki povzroči anodni tok 1.2 mA. Za hlajenje anode skrbi ventilator. Jakost doze v bližini anode znaša 10 Sv/min, 10 cm od ohišja pa je manjša od $1 \mu\text{Sv}/\text{h}$. Zaradi varnosti je mogoče aparatujo vključiti samo, kadar so drsna vrata eksperimentalnega prostora zaprta.

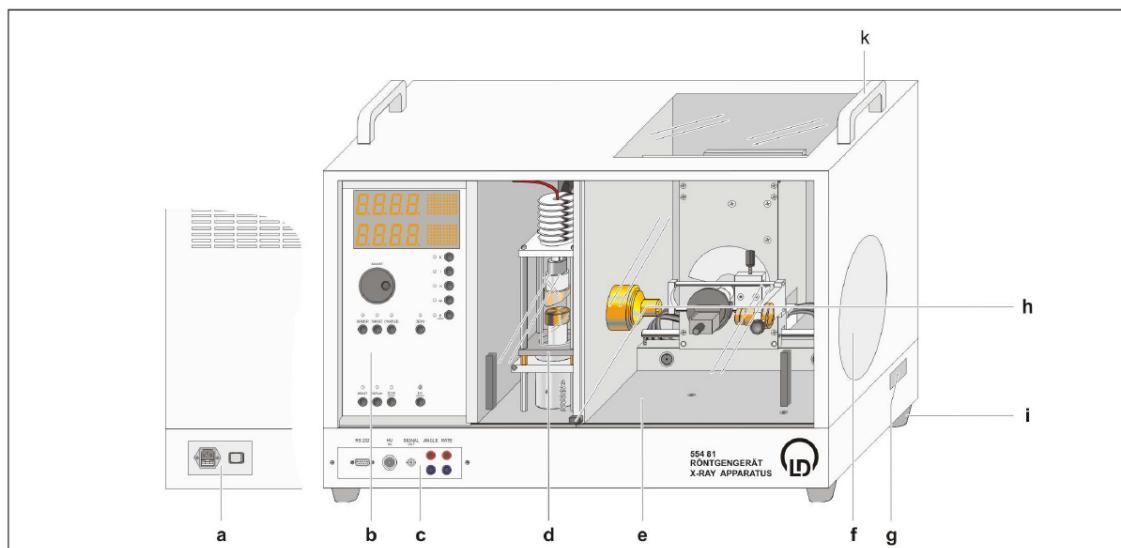


Slika 1: Shema rentgenske cevi



- d1 Ventilator
 d2 Visoko napetostni kabel
 d3 Hladilnik
 d4 Rentgenska cev
 d5 Cev iz svincevega stekla
 d6 Vijk
 d7 Podnozje
 d8 Drsna vratca iz svicevega stekla

Slika 2



- a napajanje
 b kontrolna plošča
 c Prikljucki
 d rentgenska cev
 e eksperimentalni prostor
 f fluorescenčni zaslon
 g kanal za dodatna napajanja
 h vratca z varnostnim mehanizmom
 i podnozje
 k rocaj

Slika 3

8.3 Ionizacijska celica

Najenostavnejša ionizacijska celica je kar ploščni kondenzator zvezan z izvorom visoke napetosti. Če v prostor med ploščama posvetimo z rentgenskimi žarki, ti na atomih zraka povzročijo (v glavnem) fotoefekt. Fotoelektroni zaradi svoje kinetične energije ionizirajo molekule. Nastale ionske pare napetost na kondenzatorju usmeri k ploščam in tako dobimo v tokokrogu tokovni sunek. Če je fotonov veliko (v našem primeru okrog $10^9/\text{s}$), se sunki povprečijo v merljiv električni tok. V splošnem vsi ionski pari ne dosežejo elektrod. Nekaj se jih prej rekombinira, odvisno od električne poljske jakosti v kondenzatorju. Pri nizkih poljskih jakostih je rekombinacija znatna, pri višjih pa je praktično ni več. To lepo vidimo pri opazovanju toka v odvisnosti od napetosti na kondenzatorju pri konstanti jakosti sevanja žarkov X. Tok najprej z višanjem napetosti narašča, nato pa nastopi nasičenje. (Pri višjih napetostih tok spet naraste, vendar je to že posledica drugih efektov).

Pojem števila fotonov pri rentgenskih napravah le redko uporablja. Vzrok je v tem, da število ionskih parov, ki jih žarki X ustvarijo v ionizacijski celici, ni odvisno samo od njihovega števila, ampak tudi od njihove energije. Namesto jakosti izvora govorijo o hitrosti eksponicijske doze (As/kg), ali absorbirane doze (Gr/h).

Namen te vaje je določiti eksponicijsko dozo v snopu rentgenskih žarkov. Eksponicijska doza X je električni naboj ΔQ enega predznaka, ki ga v zraku volumna ΔV z maso Δm , na enoto mase sprosti ionizirajoče sevanje

$$X = \Delta Q / \Delta m. \quad (1)$$

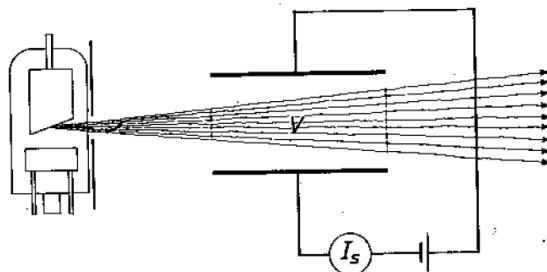
Enota za eksponicijsko dozo je As/kg zraka. Hitrost eksponicijske doze

$$dX/dt = \Delta I / \Delta m, \quad (2)$$

kjer ΔI pomeni tok nabitih dolcev (enota A/kg zraka). Če upoštevamo zvezo $m = \rho \Delta V$ velja:

$$dX/dt = \Delta I / \rho \Delta V. \quad (3)$$

Že omenjeni tok nasičenja v ionizacijski celici je torej merilo za hitrost eksponicijske doze. Če znotraj celice gostota toka ni konstantna, dobimo iz meritve dozo, ki je povprečena preko obsevanega volumna celice.



Slika 4: Ionizacijska celica

8.4 Spekter žarkov X

Žarki X nastanejo v rentgenski cevi zaradi interakcije pospešenih elektronov z jedri v anodi. Glede površno bi pričakovali, da se bo elektron v bližini jedra gibal po hiperboli. Ko bi se jedru približeval, bi se njegova hitrost večala, ko pa bi se oddaljeval, bi se spet manjšala. Ker pa pospeševani ali upočasnjevani naboj seva elektromagnetno energijo, se mu med gibanjem mimo jedra hitrost zmanjša. Količina izsevanega energije je odvisna od sile med elektronom in jedrom in od tega, kako dolgo ta sila deluje vse pa je odvisno od tega, kako daleč od jedra se elektron giblje. Frekvenca izsevanega elektromagnetskog valovanja ν je določena s kinetično energijo ΔE_k , ki jo izgubi elektron:

$$\Delta E_k = h\nu, \quad (4)$$

kjer je h Planckova konstanta. Maksimalno frekvenco dobimo takrat, ko se vsa elektronova kinetična energija spremeni v elektromagnetno

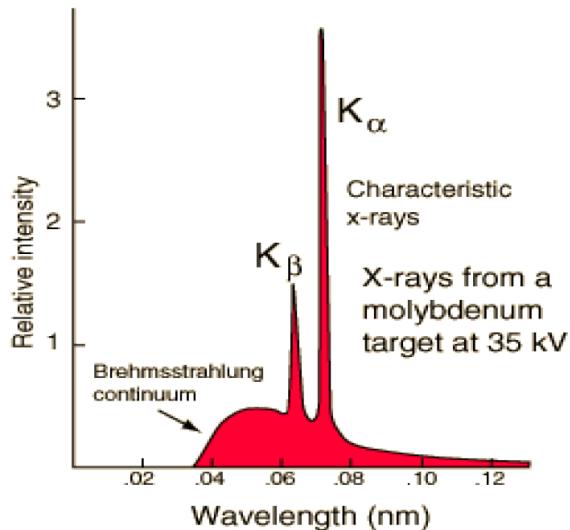
$$h\nu = E_k. \quad (5)$$

Priročna je formula za izračun ustrezne valovne dolžine

$$\lambda_{min} [nm] = 1240/U[V], \quad (6)$$

kjer je U anodna napetost. Velja si zapomniti, da je pri napetosti 12,4 kV minimalna valovna dolžina 0,1 nm.

Celotni spekter žarkov X, ki bi jih dobili iz rentgenske cevi, v kateri bi elektrone pospeševali z istosmerno napetostjo 35 kV na anodo iz molibdena kaže slika.



Slika 5: Spekter izsevane svetlobe.

Poleg zveznega dela spektra opazimo na sliki tudi diskretne črte. Pospešeni elektroni namreč iz atomov v tarči izbijajo elektrone. Ko sosednji elektroni skačejo na prazna mesta, sevajo karakteristične žarke X, ki se v spektru pojavijo kot diskretne črte. Ker je vezalna energija elektronov v lupini K za volfram $E_K = -69,5$ keV, v lupini L pa $E_{L1} = -12,1$ keV, $E_{L2} = -11,5$ keV in $E_{L3} = -10,2$ keV, lahko v našem primeru, ko imamo elektrone pospešene na 35 keV, ti izbijajo iz atoma le elektrone v lupini L in črte v spektru na sliki ustrezajo prehodom manj vezanih elektronov v to lupino.

8.5 Polariziranost žarkov X

Oglejmo si še poenostavljeno sliko nastanka zavornega sevanja. Pomagali si bomo kar s klasičnim modelom nihajočega naboja, čeprav bi morali uporabiti metode kvantne mehanike.

Naj naboje niha v smeri osi Y: $Y = A \sin \omega t$ s pospeškom $a_z = -A\omega^2 \sin \omega t$. Pospeševanju naboja sledi sevanje elektromagnetnega valovanja, ki ga opišemo z vektorjem jakosti električnega polja \vec{E} (ki ima smer nihajočega naboja in je pravokoten na smer razširjanja valovanja) in vektorjem magnetne poljske gostote \vec{B} (ki je pravokoten na \vec{E} in na smer razširjanja). Ker naboje niha v smeri osi Y, ima vektor \vec{E} vedno isto smer. Pravimo, da je valovanje linearно polarizirano (v smeri osi Y). Energijski tok valovanja, ki ga seva tak nihajoč naboju, je v različnih smereh prostora različen. Največji je v ekvatorialni ravnini, v smeri nihanja naboja pa je enak 0.

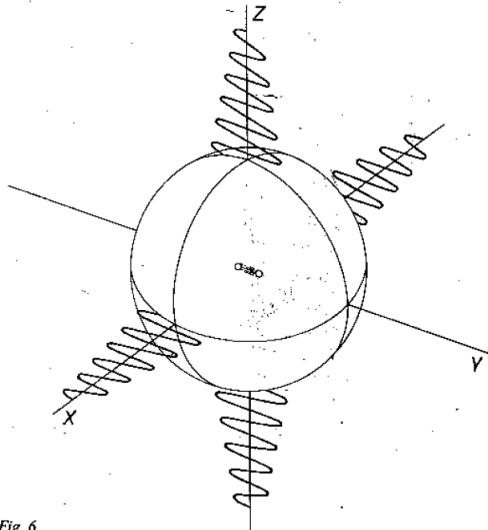


Fig. 6

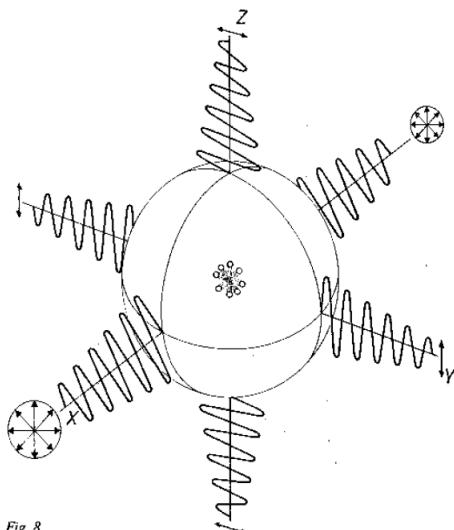


Fig. 8

Slika 6: Model nihajočega naboja. Levo: naboj niha v smeri osi Y. Desno: več nabojev, smeri nihanja so enakomerno porazdeljene v ravnini Y-Z.

Imejmo več istočasno nihajočih nabojev, katerih smeri nihanja so enakomerno porazdeljene v ravnini Y-Z. V tem primeru dobimo v smeri X nepolarizirano valovanje, v smereh Y in Z pa je valovanje še vedno linearne polarizirano (slika Fig.8). Če smeri nihanja nabojev v ravnini YZ niso enakomerno porazdeljene, dobimo v smeri X delno polarizirano svetlobo.

Če bi se elektroni v anodi zavirali samo v smeri svojega prvotnega gibanja (naj bo to smer Y), bi dobili linearne polarizirane žarke X, ki se širijo v ravnini XZ. V resnici se veliko elektronov odkloni od prvotne smeri gibanja že prej, predno se zavorno sipljejo, zaradi česar so žarki X v ravnini XZ le delno polarizirani.

8.6 Koherentno sisanje žarkov X

Pri interakciji žarkov X z elektroni se energija (frekvenca) fotonov ne spremeni, če so elektroni vezani (elastično sisanje, koherentno sisanje) in zmanjša, če so elektroni prosti oz. slabo vezani (neelastično sisanje Comptonov efekt).

Nas zanima predvsem elastično sisanje, ker z njim določamo polarizacijo žarkov X. Ponazorimo si ga lahko s klasično teorijo sevanja, po kateri vektor električne poljske jakosti vpadnega valovanja s frekvenco vzbudi elektron k nihanju, pri tem pridobljeno energijo pa elektron vrne z izsevanjem valovanja iste frekvence. To valovanje se širi v prostor tako, kot je to značilno za nihajoč nabojo. Na ta način se jakost vpadnega snopa zmanjša. Pri elastičnem sisanju vzbujeni elektroni nihajo tako kot vektor \vec{E} vpadnega valovanja, tj. v ravnini, ki je pravokotna na smer razširjanja. Če valovanje ni polarizirano, so vse smeri nihanja v tej ravnini enakomerno zastopane, če je delno polarizirano, so nekatere smeri pravilnije, če pa je linearne polarizirano, vsi elektroni nihajo v isto smer.

Po prejšnji obravnavi polarizacije valovanja, ki izhaja iz nihajočega naboja, takoj sledi, da je elastično sisanje valovanje, ki se širi v ravnini pravokotno na smer prvotnega žarka, linearne polarizirano. Gostota energijskega toka, ki ga seva nihajoč naboje se spremeni kot $\sin^2 \theta$, kjer je θ kot med smerjo nihanja dipola in smerjo valovanja. Močno sevanje torej dobimo v ravnini, ki je pravokotna na smer nihanja naboja, v sami smeri nihanja pa sevanja ni.

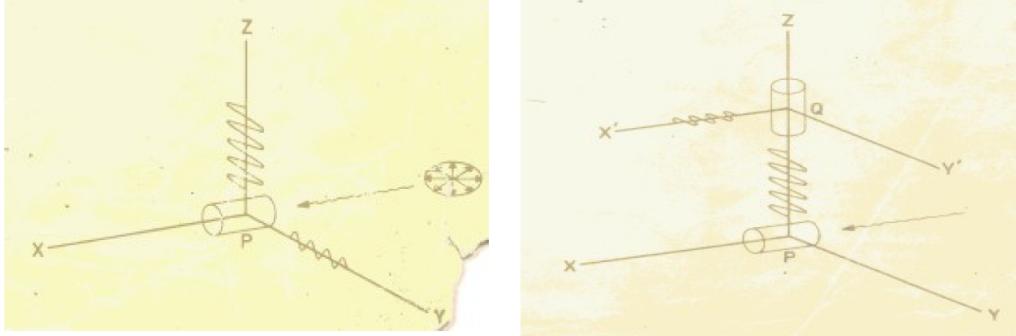
Iz gornjega sledi, da je kotna porazdelitev elastično sisanega valovanja odvisna od polariziranosti vpadnega valovanja. Če je npr. dano valovanje, ki se giblje v smeri osi Y, polarizirano v smeri osi Z, v tej smeri ni sisanega valovanja. Pri delno polariziranem vpadnem valovanju je jakost sisanega valovanja v smeri osi Z manjša kot v smeri osi X. Le pri elastičnem sisanju nepolariziranega valovanja je jakost v smeri osi X ista kot v smeri osi Z.

Z merjenjem jakosti elastično sisanega valovanja lahko določimo polariziranost rentgenske svetlobe. V snop, ki ima npr. smer osi Y postavimo sipalec, nato pa v ravnini XZ z nekim števcem

za ionizirajoče sevanje (npr. GeigerMullerjevim) izmerimo kotno porazdelitev sisanega valovanja. Dobljena porazdelitev je krog, če valovanje ni polarizirano in elipsa, če je polarizacija delna. V praksi navadno ne merimo celotne porazdelitve, ampak le vrednosti I_x in I_z , polariziranost pa definiramo z izrazom

$$\eta = \frac{I_z - I_x}{I_z + I_x}. \quad (7)$$

Polariziranost je $\eta = 0$, če je $I_x = I_z$ in $\eta \neq 0$, če je $I_x \neq I_z$.



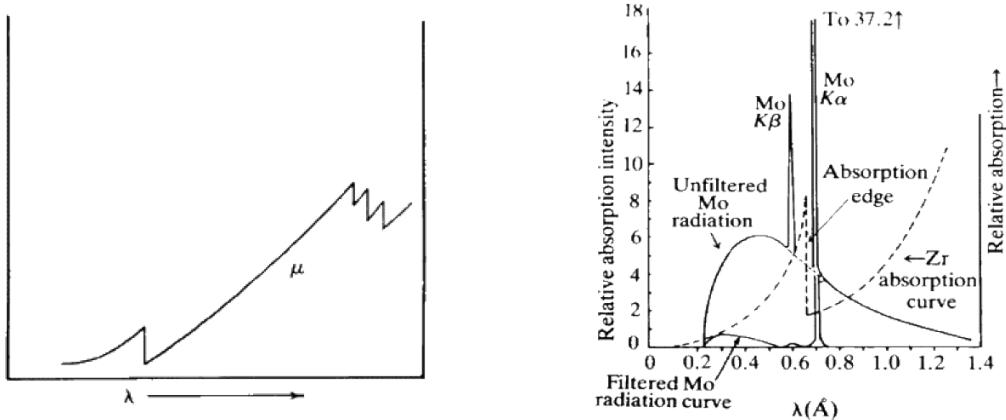
Slika 7: Meritev polariziranosti: primarnih žarkov X (levo) in sianih žarkov X (desno)

8.7 Presevno slikanje predmetov

Očitno je, da se X žarki absorbirajo v snovi, kar lahko opišemo z enostavno enačbo. Intenziteta I z globino d eksponentno pojema:

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \quad (8)$$

kjer je μ linearni absorpcijski koeficient in d dolžina poti X žarka v sredstvu. Vrednost absorpcijskega koeficiente narašča z atomskim številom elementa absorberja. Če narišemo μ kot funkcijo valovne dolžine X žarkov za katerikoli element, opazimo, da so gladki deli naraščanja absorpcije prekinjeni z ostrimi padci absorpcijski robovi, ki ustrezajo prehodom med elektronskimi stanji. Zanimiv efekt dobimo, če X žarke, ki jih dobimo iz molibdenove anode, pošljemo skozi cirkonijski filter, ki ima absorpcijski rob med K_α in K_β črtama molibdena, torej bo črta K_β dosti bolj absorbirana kot K_α (glej sliko 8).

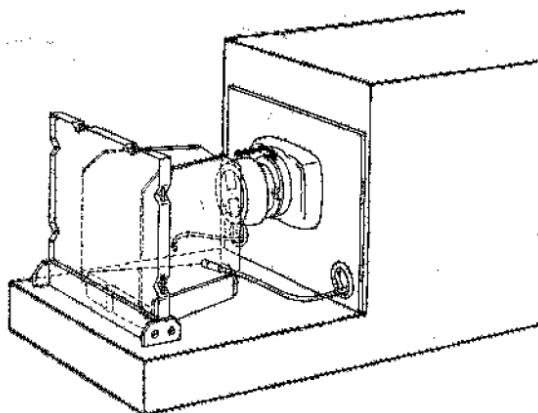


Slika 8: Absorpcija X-žarkov

Pri večini preiskav z X žarki potrebujejo žarke z eno energijo. Z uporabo filtra lahko tako relativno enostavno in najceneje dobimo monokromatske X žarke.

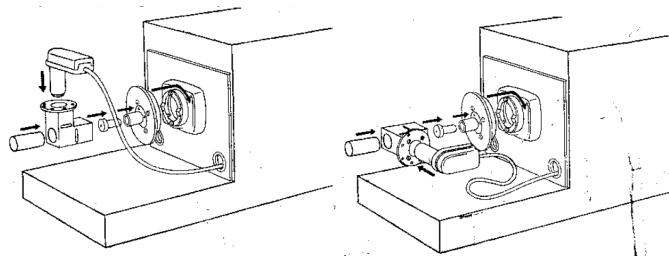
8.8 Navodila za delo

1. S pomočjo priloženih navodil se seznani z delovanjem rentgenske aparature
2. Ionizacijsko celico sestavi po sliki, ki je vaji priložena. Za nekaj vrednosti napetosti na rentgenski cevi izmeri odvisnost toka od napetosti na ionizacijski celici. V poročilu odvisnosti prikaži na grafu. Nariši tudi hitrost ekspozicijске doze v odvisnosti od anodne napetosti na rentgenski cevi.



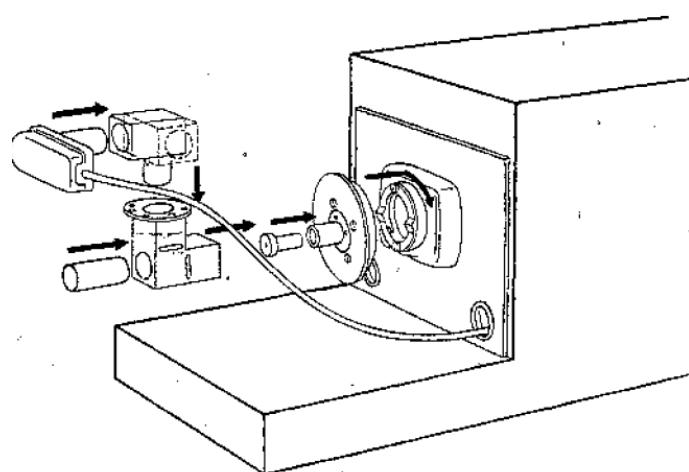
Slika 9: Ionizacijska celica

3. Meritev polariziranosti: Sipalec iz plastične mase izpostaviš kolimiranemu snopu žarkov X in v ravnini pravokotno na smer vpadnega valovanja izmeriš z GM števcem jakost sisanega valovanja v dveh pravokotnih smereh.



Slika 10: Enkratno sipanje

4. Namen meritve polariziranosti elastično sisanega valovanja je preveriti prejšnjo trditev, da je elastično siano valovanje v ravnini pravotni na smer vpadnega valovanja linearno polarizirano. Rabiš torej dva sipalca. Prvega vstaviš v vpadni snop, na drugega pa naj pada elastično siano valovanje, katerega polariziranost nato izmeriš tako, kot si to napravil za primarni snop pri prejšnji nalogi. Ker pri tej nalogi niti primarno niti sekundarno valovanje nista dobro kolimirana, dobljeni rezultat ni zanesljiv. Ker je sunkov dvakratnega sisanja malo, za nadzor rentgenske naprave uporabi PC in sunke akumuliraj dalj časa.
5. Na fosforescenčnem zaslonu si oglej slike različnih predmetov (tiskano vezje, biološki vzorci, denarnica). Z digitalnim fotoaparatom posnemi slike. Slike si oglej enkrat z, drugič pa brez cirkonijevega filtra.



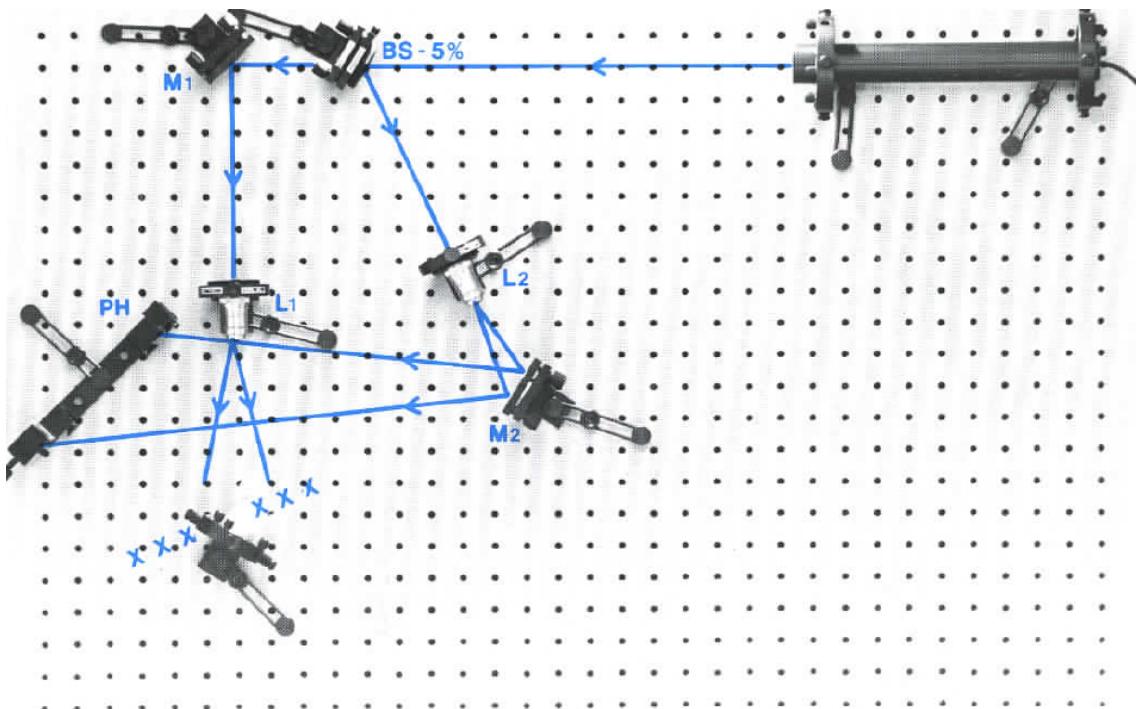
Slika 11: Dvakratno sisanje

9 Holografija

9.1 Uvod

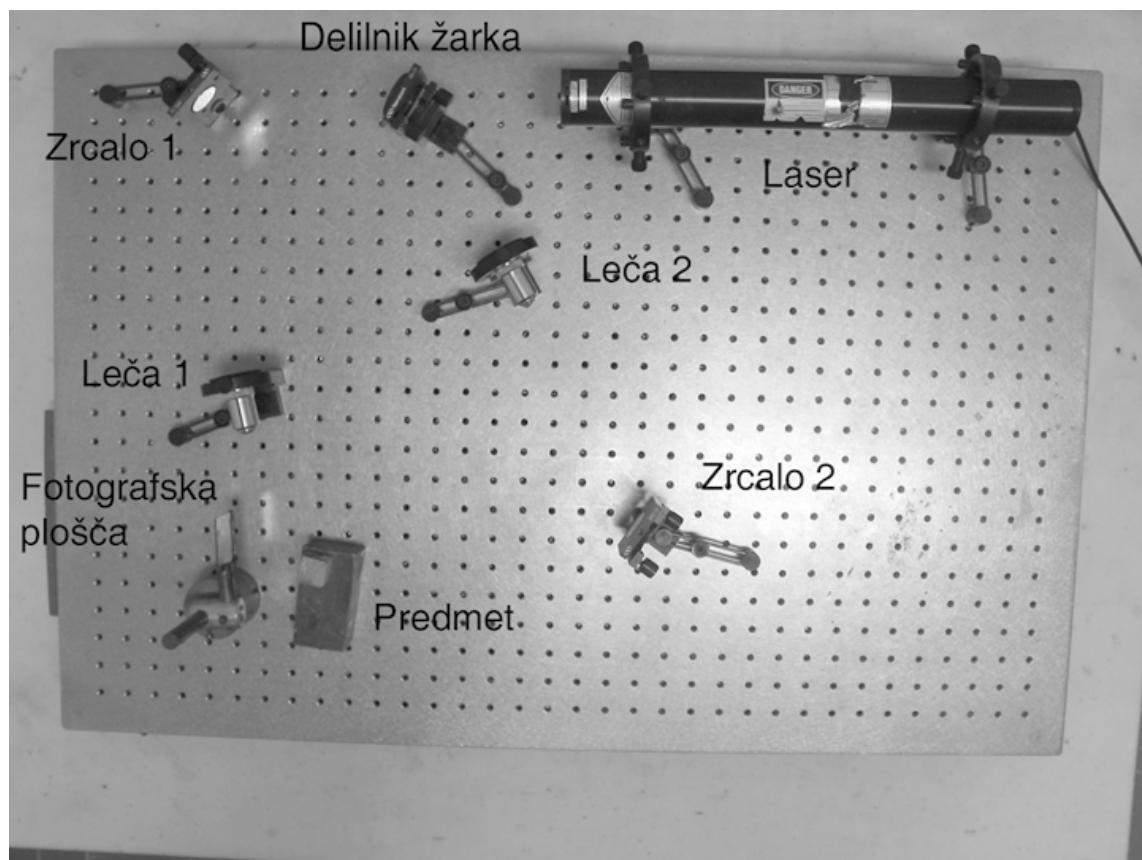
Holografija je posebna vrsta fotografije, ki omogoča tridimenzionalno ponazoritev predmeta. Pri navadni fotografiji zabeležimo na fotografski film ali ploščo projekcijo porazdelitve gostote svetlobnega toka, ki ga seva predmet. Projekcijo dosežemo s pomočjo optične leče. Slika je dvodimenzionalna, ker ob gledanju slike manjšega predmeta pred večjim ne moremo videti zastrte dele, četudi bi usmerili pogled na fotografijo pod različnimi koti.

Svetlobno valovanje (električna poljska jakost) nosi podatek o globinski porazdelitvi posameznih točk na površini predmeta v fazi valovanja. Pri običajni fotografiji je ta podatek izgubljen, saj je počrnitev filma sorazmerna povprečni vrednosti kvadrata električne poljske jakosti, ki je neodvisna od fazne razlike. Pri holografskem zapisu ohranimo podatke o fazah tako, da s fotografsko ploščo registriramo interferenčno sliko, ki nastane pri interferenci med svetlobo, ki jo siplje predmet in svetlobo, ki na poti do fotografске plošče predmet obide. Slika 2 kaže postavitev za snemanje holograma.



Slika 1: Shema postavitve za snemanje holograma.

Laserski snop s pomočjo delilnika žarka razcepimo na dva enako močna snopa. Prepuščeni snop, ki se odbije na ravnem zrcalu s pomočjo mikroskopskega objektiva razpršimo in z njim osvetlimo predmet (predmetni žarek). Odbiti žarek prav tako razpršimo z mikrosopskim objektivom in ga nato s pomočjo drugega zrcala usmerimo direktno na fotografsko ploščo (referenčni žarek). Oba



Slika 2: Fotografija postaviteve za snemanje holograma.

snopa interferirata in fotografkska plošča registrira njuno interferenčno sliko. Kot izvor svetlobe uporabimo laser, saj je za dosego interference potrebno, da je koherentna dolžina svetlobe dalša od razlike poti, ki jo opravita predmetni in referenčni snop.

Koordinatni sistem za opis valovanja na fotografkski plošči postavimo tako, da se njegova (x,y) ravnina ujema s fotografksko ploščo. Svetlobno polje opišemo s poljem električne poljske jakosti \mathbf{E} . Zaradi enostavnejše obravnave računamo, kot da ima električna poljska jakost po odboju na predmetu isto smer kot pred odbojem. Vzeli bomo, kot da ima \mathbf{E} ves čas eno samo komponento E , ki jo bomo obravnavali kot skalar. Zapišimo v točki (x,y) na fotografkski plošči električno poljsko jakost predmetnega snopa $E_p(x, y)$ in referenčnega snopa $E_r(x, y)$ kot

$$E_p(x, y) = E_{p_0}(x, y) \exp(-i\Phi(x, y)) \exp(i\omega t) \quad (1)$$

$$E_r(x, y) = E_{r_0}(x, y) \exp(-i\Psi(x, y)) \exp(i\omega t), \quad (2)$$

kjer sta $\Phi(x, y)$ in $\Psi(x, y)$ fazi valovanj. Ker sta valovanji koherentni, je rezultirajoča električna poljska jakost

$$E(x, y) = E_p(x, y) + E_r(x, y). \quad (3)$$

Ustrezna gostota svetlobnega toka je sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti, ki ga označimo z I .

$$I = (E_p + E_r)(E_p + E_r)^* = |E_p|^2 + |E_r|^2 + E_p E_r^* + E_r^* E_p. \quad (4)$$

Iz enačbe 4 vidimo, da se na fotografksko emulzijo poleg intenzitete predmetnega in referenčnega snopa (prvi in drugi člen) zapišeta tudi interferenčna člena (tretji in četrти člen), ki vsebujejo informacijo o relativnih fazah med predmetnim in referenčnim snopom. Počrnitev fotografkskega filma na določenem mestu je odvisna od ploskovne gostote energije, ki pada na emulzijo. Ploskovna gostota energije je enaka produktu gostote svetlobnega toka in časa osvetljevanja in jo bomo označili z W_{ex} (ekspozicijo).

Po osvetljevanju je transmitivnosti emulzije T v odvisnosti od ekspozicije W_{ex} podana z

$$T \propto W_{ex}^\gamma \propto I^\gamma. \quad (5)$$

Parameter γ je odvisen od lastnosti emulzije in načina razvijanja. Pri naši nadaljnji obravnavi bomo rabilni amplitudno prepustnost, ki je definirana kot

$$T_{ampl} = \sqrt{T}. \quad (6)$$

Če vstavimo enačbo (4) v izraz za amplitudno transmitivnost holograma (6) in upoštevamo, da je pri snemanju holograma običajno $E_p \ll E_r$ dobimo

$$T_{ampl} = C |E_r|^\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{2 |E_r|^2} (E_p E_r^* + E_p^* E_r) \right) = A + B E_p E_r^* + B E_p^* E_r, \quad (7)$$

kjer sta A in B konstanti.

Poglejmo kaj dobimo, če po razvijanju hologram postavimo na prejšnje mesto, ga osvetlimo z referenčnim žarkom, predmet pa odstranimo. V tem primeru je električna poljska jakost na izstopni strani fotografkske plošče E_{holo} enaka produktu

$$E_{holo} = T_{ampl} E_r = A E_r + B |E_r|^2 E_p + B E_r^2 E_p^*. \quad (8)$$

Prvi člen v enačbi (8) predstavlja prepuščeni referenčni snop, ki je delno oslabljen. Drugi člen opisuje divergenten snop žarkov, ki je tak kot bi izhajal od predmeta. Pri prehodu skozi očesno lečo se zbere na mrežnici, kjer nam da realno sliko. Ker so valovne fronte, ki izhajajo iz holograma enake tistim, ki so izhajale od predmeta, zaznamo sliko, ki jo vidimo pri gledanju holograma, kot tridimenzionalno.

Do pomena tretjega člena v enačbi (8) pridemo s sledečim razmislekom. Če enačbo za amplitudno prepustnost holograma (7) pomnožimo s kompleksno konjugiranim referenčnim valom (kar v realnost pomeni snop, ki se širi v obratni smeri), dobimo

$$E_{holo} = T_{ampl} E_r^* = AE_r^* + BE_r^{*2} E_p + B |E_r|^2 E_p^*. \quad (9)$$

Tretji člen v enačbi (9) je enak kompleksno konjugiranemu drugemu členu v enačbi (8) in torej predstavlja predmetni snop, ki se širi v obratni smeri tako, kot da bi izhajal iz predmeta, ki bi bil postavljen zrcalno glede na ravnino holograma. Ker so žarki v snopu, ki ga predstavlja tretji člen v enačbi (9) konvergentni nam dajo realno sliko, ki bi jo lahko videli, če bi bilo v zraku veliko drobnih delcev (npr. od cigaretnegra dima).

Ko torej z referenčnim žarkom osvetljujem hologram, dobimo na izhodni strani tri snope: oslabljeni referenčni snop, divergentni snop, ki je tak, kot bi izhajal od predmeta (torej v podaljšku nazaj daje virtualno sliko predmeta), ter konvergentni žarek, ki daje realno sliko predmeta (opazimo ga lahko na drobnih delcih cigaretnegra dima). Pri dovolj veliki razdalji so vsi trije snopi med seboj prostorsko ločeni.

9.2 Hologram ravnih valov

Poglejmo si hologram, ko sta predmetni in referenčni žarek ravna valova oblike $e^{i(kr - \omega t)}$, od katerih prvi pada na fotografsko ploščo pod kotom α glede na normalo, drugi pa v smeri normale. Izberimo koordinatni sistem, v katerem se valovna vektorja prvega in drugega žarka zapišeta kot $\vec{k}_p = (k \sin \alpha, 0, k \cos \alpha)$ in $\vec{k}_r = (0, 0, k)$. Vzemimo, da se fotografiska plošča nahaja v ravnini $z = 0$. Potem je intenziteta interferenčnega vzorca na njej enaka

$$I_{int} = C |1 + e^{ik \sin \alpha x}|^2 = C'(1 + \cos(k \sin \alpha x)). \quad (10)$$

Hologram je kosinusna uklonska mrežica s periodo

$$d = \frac{2\pi}{k \sin \alpha}. \quad (11)$$

Natančnejši račun s Fraunhoferjevim uklonskim integralom pokaže, da dobimo pri osvetlitvi kosinusne uklonske mrežice z ravnim valom poleg prepuščenega vala še dva uklonjena žarka prvega reda, ki sta razporejena simetrično levo in desno glede na prepuščeni val. Ustrezata drugemu in tretjemu členu v enačbi (8). Splošen tankoplastni hologram lahko torej razumemo kot superpozicijo kosinusnih uklonskih mrežic, ki nastanejo pri interferenci referenčnega žarka in žarkov, ki izvirajo iz posameznih točk objekta.

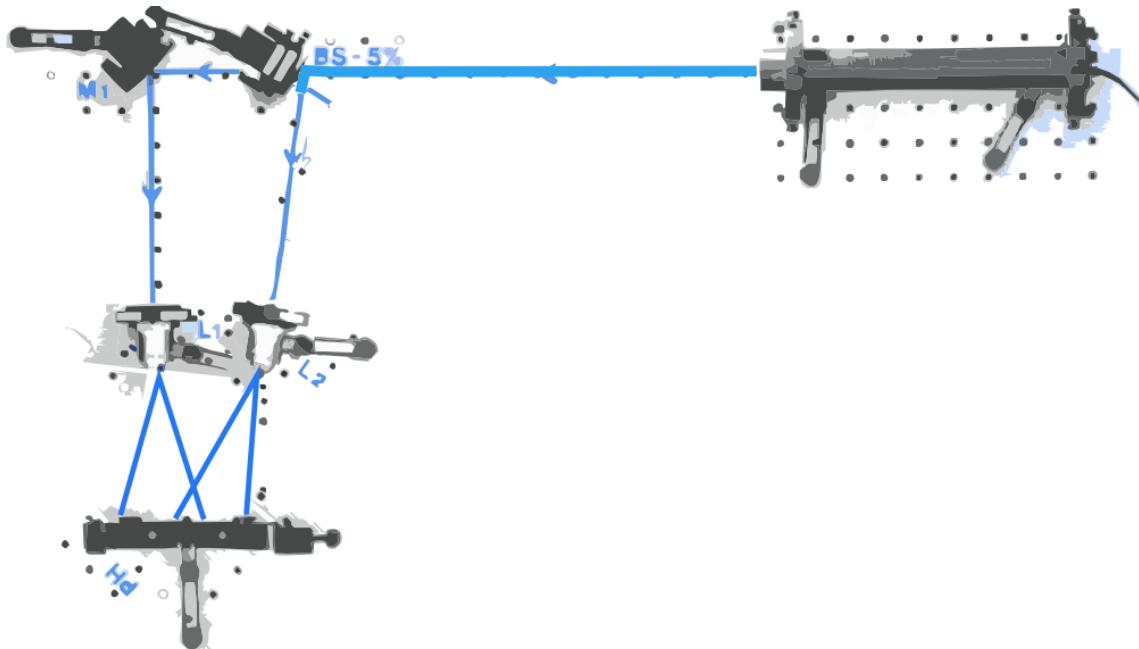
9.3 Naloga

1. Sestavi postavitev za snemanje holograma in ga posnemi!
2. Posnemi interferogram dveh ravnih valov!

9.4 Potelek dela

Sistem za snemanje hologramov sestavi po vzoru, kot kaže slika 2. Poskrbi, da bo razlika v dolžini optičnih poti referenčnega in predmetnega snopa manj kot 10 cm in da bo povprečni kot med predmetnim in referenčnim snopom čim manjši. S tem dosežeš, da razdalje med maksimumi osvetlitve na fotografiski plošči niso premajhne in se ni treba batiti, da zaradi tresenja holografike mize in zaradi končne ločilne sposobnosti fotografiske emulzije (okrog tisoč črt na mm) hologram ne bi uspel. Oceni velikost te razdalje!

V tri banjice si pripravi kemikalije za razvijanje: v prvo nalij razvijalec, v drugo vodo in v tretjo fiksir. V temi namesti fotografisko ploščo v nosilec z emulzijo obrnjeno proti predmetu. Fotografisko ploščo osvetli za 10 sekund!



Slika 3: Postavitev za snemanje interferograma dveh ravnih valov.

Ploščo razvijaj približno dve minuti v razvijalcu (pri čemer nagibaj banjico ali pa ploščo z roko vodi po tekočini), nato jo spiraj v banjici z vodo in daj še za dve minuti v fiksir. Meritve časa lahko izvajaš s štoparico na mobilnem telefonu, ki ga z zaslonom, nastavljenim na najmanjšo jakost, postaviš na tla pod mizo.

Ko se plošča posuši, jo namesti nazaj v nosilec, odstrani predmet, zablokiraj predmetni snop in poišči sliko predmeta!

Interferogram dveh ravnih valovanj posnemi tako, da usmeriš razpršeni predmetni in referenčni žarek naravnost na fotografjsko ploščo kot je prikazano na sliki 3. Tudi v tem primeru ne pozabi na opozorilo o kotu med žarkoma (ne pozabi ga zabeležiti)! Ker valovanji nista popolnoma ravni, bo mrežica nekoliko popačena. Ko hologram razviješ, ga daj v kolimiran laserski snop in izmeri kot prve ojačitve.

Ker nimaš merilca, pri snemanju holograma ne moreš določiti ekspozicije. Dobljeni hologram ne bo idealen. Ob rekonstrukciji poskusi za oba holograma ugotoviti prisotnost uklonov višjih redov. Ali je slika odvisna od velikosti holograma?

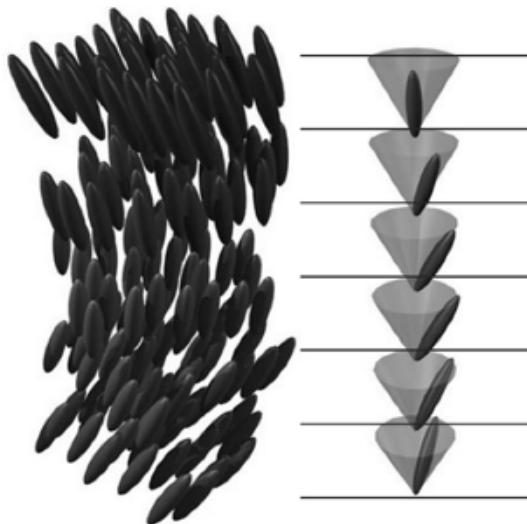
9.5 Literatura

E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, ISBN 0201304252.

10 Elektrooptični pojav v feroelektričnem tekočem kristalu

10.1 Uvod

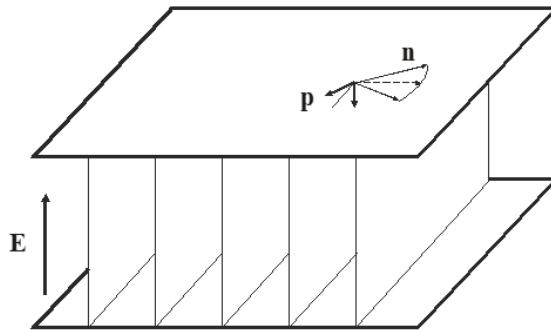
Tekoče kristale (TK) tvorijo podolgovate molekule, ki se pri ne previsokih temperaturah orientacijsko uredijo. Za smektične tekoče kristale je poleg orientacijskega reda značilna tudi plastovita struktura, torej enorazsežen pozicijski red. Molekule se uredijo v plasti, plasti same se vedejo kot dvorazsežna tekočina. V smektičnih A kaže odlikovana smer, ki ji pravimo direktor, vzdolž normale plasti, v smektičnih C pa ne: kot, ki ga oklepa direktor z normalo, znaša navadno med 10° in 30° . Feroelektrične smektične C* tvorijo molekule, ki imajo velik električni dipolni moment prečno na vzdolžno os molekul, zato se v teh snoveh pojavi električna polarizacija, ki leži v ravnini plasti in je pravokotna na direktor; električna polarizacija je približno sorazmerna s kotom nagiba. TK so posebej uporabni zaradi dvolomnosti, ki izhaja iz orientacijske urejenosti molekul, optična os je vzporedna z direktorjem (slika 1).



Slika 1: Struktura smektične C* faze: molekule ležijo v plasteh, povprečna smer molekul opiše vijačnico v smeri normale plasti

V debelem vzorcu feroelektričnega tekočega kristala se smer nagiba in s tem smer električne polarizacije v smektičnih ravninah zlagoma spreminja vzdolž normale plasti. Korak vijačnice, ki jo opisuje konica direktorja, je navadno na nekaj sto do nekaj tisoč debelin plasti. poln krog. Zaradi vijačne strukture je makroskopska električna polarizacija vzorca enaka 0. Polarizacijo plasti lahko uredimo v isto smer bodisi z zunanjim električnim poljem bodisi tako, da vzorec ogradiamo s ploščicama, ki predpisujeta orientacijo molekul, kar dosežemo s kemično ali mehansko obdelavo površin. Če je razmik med ploščicama dovolj majhen (navadno manj kot $5\mu\text{m}$), se direktor uredi v predpisani smeri po vsem vzorcu. V takem površinsko stabiliziranem feroelektričnem tekočem kristalu so

smekične ravnine pravokotne na ploščici, električna polarizacija pa leži v ravnini ploščic (slika 2).

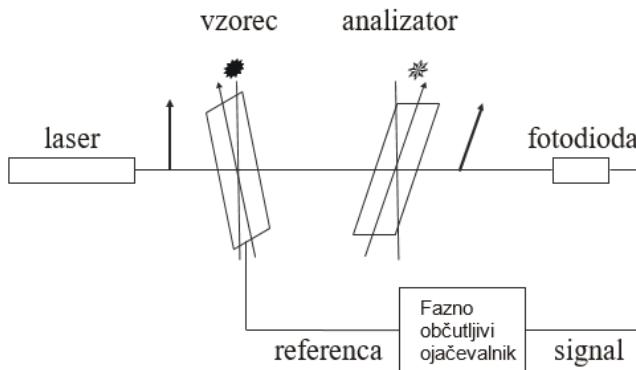


Slika 2: Shema površinsko stabilizirane feroelektrične tekočekristalne celice: smeikične plasti so pravokotne na ograjujoči ploščici; direktor (**n**) lahko leži v dveh smereh, ki ju s konusa možnih smeri odbere ravnina steklene ploščice; polarizacija (**p**) leži pravokotno na direktor v ravnini ploščic. Optična os kaže v smeri normale plasti.

Če postavimo tanek površinsko stabiliziran feroelektrični tekoči kristal v zunanje električno polje, pravokotno na ograjujoči ploščici, se električna polarizacija vzorca deloma zasuče v smeri polja. Ker je povezana z orientacijo direktorja, se tudi ta nekoliko zasuče na stožcu dovoljenih smeri, ki ga določa predpisani nagib direktorja glede na normalo plasti, značilen za Sm C fazo. Zato se spremeni smer optične osi vzorca, kot kaže slika 2. Zasuk električne polarizacije je linearne odvisen od električnega polja, zato je tudi zasuk optične osi sorazmeren s poljem. Linearnemu odzivu lomnega količnika snovi na zunanje električno polje pravimo elektrooptični pojav.¹ Zasuk polarizacije in s tem direktorja v izmeničnem električnem polju je odvisen tudi od frekvence. Če je previšoka, polarizacija ne more več slediti polju. Odvisnost spremembe polarizacije (δP) od frekvence lahko opišemo z Debyevim relaksacijskim modelom

$$\delta P = \delta P_0 \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (1)$$

Relaksacijski čas τ je odvisen od viskoznosti tekočega kristala in od debeline vzorca. Kot zasuka optične osi, ki je sorazmeren s spremembo polarizacije, ima enako frekvenčno odvisnost.



Slika 3: Shema eksperimenta; polarizacija svetlobe je nakazana z debelejšo puščico.

Spremembo smeri optične osi vzorca lahko zaznamo tako, da opazujemo, kako se spremeni polarizacija svetlobe pri prehodu skozi vzorec. Shemo meritve kaže slika 3. Na vzorec posvetimo s polarizirano svetlobo in merimo svetlobno moč, ki jo prepušča analizator za vzorcem. Kot med optično osjo in vpadno polarizacijo označimo z α , kot med optično osjo in analizatorjem z β .

¹Pojme kot so polarizacija, elektrooptični pojav, dvolomnost,... ste spoznali pri vajji Elektrooptični pojav pri Fizikalnem praktikumu 4. Če se jih ne spomnите, si poglejte navodila omenjene vaje oz. osvežite znanje s pomočjo Wikipedije.

Vpadno polarizacijo razstavimo na izredno komponento, ki je vzporedna z optično osjo, in na redno komponento, pravokotno na optično os. Po prehodu skozi vzorec debeline h znaša fazna razlika med izrednim in rednim žarkom $k\Delta nh$, kjer je k valovni vektor svetlobe, Δn razlika lomnih količnikov za oba žarka. Analizator prepusti le projekcijo polja na prepustno smer:

$$E_p = E_0 [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \exp(ik\Delta nh)] \quad (2)$$

$$I_p = I_0 [\cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2(k\Delta nh/2)]. \quad (3)$$

Zanima nas predvsem majhna sprememba prepuščene moči, ki je posledica majhne, periodične spremembe smeri optične osi. Zaradi te imata kota α in β majhni časovno odvisni komponenti:

$$\alpha = \alpha_0 + \psi \quad (4)$$

$$\beta = \beta_0 + \psi. \quad (5)$$

Z razvojem prepuščene moči do linearnega člena v ψ dobimo, da je izmenični del prepuščene svetlobne moči enak

$$I_p(\omega) = -2I_0 \sin 2(\alpha_0 + \beta_0) \sin^2(k\Delta nh/2)\psi(\omega). \quad (6)$$

Modulacija moči bo torej največja, če je $\alpha_0 + \beta_0 = \pi/4$.

Prepuščeno svetlobno moč merimo s pomočjo fotodiode. Nanjo zaporedno priklopimo delovni upor, napetost na njemu pa je sorazmerna vpadni moči svetlobe.

Odziv nekega sistema na majhne periodične zunanje motnje najlažje izmerimo s faznim občutljivim ojačevalnikom (FOO, angl. *lock-in amplifier*), ki vhodni izmenični signal iz fotodiode pomnoži z referenčnim izmeničnim signalom s frekvenco modulacije (v našem primeru zunanjega električnega polja, priklopljenega na tekočekristalni vzorec). Oba imata enaki frekvenci, saj se vzbujevani sistem vselej odziva s frekvenco vzbujanja. Zmnožek signalov vsebuje komponento z dvojno frekvenco in enosmerno komponento², ki jo izločimo z ustreznim nizkopasovnim filtrom. Časovna konstanta filtra določa efektivno širino frekvenčnega intervala, v katerem opazujemo signal. Čim ožji je ta interval, torej čim daljša je časovna konstanta izhodnega filtra, tem manj je v signalu šuma.

Referenčna napetost U_R , priklopljena na TK vzorec, ima obliko

$$U_R = U_0 \cos(\omega t). \quad (7)$$

Signal iz fotodiode ni nujno v fazi z motnjo, zato ga zapišemo kot

$$S = S_1 \cos \omega t + S_2 \sin \omega t. \quad (8)$$

S_1 je amplituda signala v fazi, S_2 pa amplituda signala iz faze (signal, zamaknjen za 90 stopinj glede na motnjo). Enosmerni del produkta signala in referenčne napetosti, ki ga dobimo na izhodu faznega detektorja, je

$$U_i = \frac{1}{2}U_0 (S_1 \cos \phi + S_2 \sin \phi). \quad (9)$$

Z izbiro faze reference lahko torej ločimo odziv sistema, ki je v fazi z vzbujanjem, in odziv, ki je za $\frac{\pi}{2}$ iz faze. Naš FOO dela to samodejno in tako hkrati prikazuje amplitudo signala v fazi (X, realni del signala) in amplitudo signala iz faze (Y, imaginarni del signala).

V tekočem kristalu je zasuk optične osi ψ zaradi viskoznosti snovi zakasnen glede na zunanje električno polje. Del, ki je v fazi, dobimo kot realni del izraza 1, del, ki je premaknjen za $\frac{\pi}{2}$, pa kot imaginarni del enačbe 1:

$$\psi_r = \frac{\psi_0}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (10)$$

$$\psi_i = -\frac{\psi_0 \omega \tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (11)$$

²Za matematične podrobnosti izračuna signala fazno občutljivega ojačevalca si poglejte navodila vaje Fazno občutljivi ojačevalnik ali Elektronska spinska resonanca.

Iz izmerjenih ψ_r in ψ_i lahko dobimo relaksacijski čas τ s prilagajanjem gornjih izrazov meritvam. Imamo pa še drugo zanimivo možnost. Če narišemo razmerje med (10) in (11) v odvisnosti od frekvence ω , dobimo premico, iz katere se z lahkoto določi τ .

10.2 Potelek dela

Najprej se s pomočjo navodil vaje *Fazno občutljivi ojačevalnik* in priročnikom **seznanite z delovanjem in uporabo fazno občutljivega ojačevalnika!**

Shemo meritve kaže slika 3. Navpično polarizirana svetloba iz laserja pada na vzorec, katerega optična os tvori s polarizacijo kot, ki je blizu 45° . Svetlubo, ki jo prepusti analizator, zaznamo s fotodiodo. Fotodioda daje tok, ki je sorazmeren vpadni svetlobni moči. Da ga je lažje opazovati, priključimo na izhod iz diode preko T člena še delovni upor velikosti $10\text{k}\Omega$.

1. Preverite delovanje FOO: referenčni signal iz FOO (npr. amplitudo 0.2 V in frekvence 20 Hz) priklopi na vhod A FOO. Če je vse pravilno nastavljen, bi moral biti signal v fazi (X) enak referenčni napetosti, signal iz faze (Y) pa okoli 0 mV. Če temu ni tako, I. fazo reference nastavite na 0, II. izberite "AC coupling"vhodnega signala, III. izklopite "Line filter".
2. Na vzorec priključite referenčni signal iz FOO. Napetost naj ne bo prevelika, sicer bo signal popačen.
3. Signal iz fotodiode si najprej oglejte na osciloskopu skupaj z napetostjo na vzorcu. Analizator zavrtite tako, da bo izmenični del signala čim večji. Spreminjajte tudi frekvenco in se prepričajte, da pri frekvencah nad nekaj 100 Hz izmenični del signala začne padati in zaostajati za napetostjo na vzorcu.
4. Napeljite signal na vhod FOO. Nastavite občutljivost tako, da bo signal znotraj območja (vodoravna črta iz LED-ic prikazuje nivo signala glede na nastavljen območje občutljivosti).
5. Izberite časovno konstantno izhodnega filtra blizu 1 s. Pri neki fiksni frekvenci, npr. 20 Hz, izmerite realni del elektrooptičnega tekočega odziva pri nekaj vrednostih napetosti iz signalnega generatorja in se prepričajte, da je odziv sorazmeren z modulacijo do neke napetosti. (Signal izmerite tudi pri večjih napetostih, kjer je vidna nelinearnost odziva.)
6. Pri konstantni napetosti spremojte frekvenco in pri vsaki frekvenci beležite komponenti signala v fazi in iz faze. Narišite obe komponenti signala kot funkciji frekvence in s prilagajanjem izrazov (10) in (11) določite relaksacijski čas. Narišite tudi razmerje med signalom iz faze in signalom v fazi v odvisnosti od frekvence in s prilagajanjem določite relaksacijski čas. (Namig: prilagajati se splača samo od frekvence 10 Hz naprej.)

11 Fazno občutljivi ojačevalnik

Uvod

Fazno občutljivi ojačevalnik (FOO) je merilni instrument, ki se uporablja za merjenje majhnih izmeničnih napetosti in njihove faze. S sodobnim FOO lahko merimo signale katerih amplituda je le nekaj nV in to celo v prisotnosti šuma, katerega amplituda je 100x ali 1000x večja od samega signala. Seveda FOO ni čarobna naprava, s katero bi lahko merili poljubne izmenične signale v prisotnosti poljubnega šuma. Tako signal kot šum morata izpolnjevati določene zahteve. Kot bomo videli mora biti frekvenčni spekter signala dovolj ozek, da je nivo šuma v tem delu spektra manjši od signala. Ta pogoj je v praksi velikokrat izpolnjen in takrat postane FOO nepogrešljiv merilni instrument.

Opis problema

Za začetek si na praktičnem primeru oglejmo, kje se pojavijo težave, kadar želimo meriti majhne izmenične signale. Vzemimo, da želimo izmeriti sinusni signal s frekvenco 10 kHz in amplitudo 10 μ V. Na prvi pogled je zadeva preprosta. Vzamemo ojačevalnik z ojačanjem 1000 in njegov izhod priklopimo na osciloskop. Na izhodu iz ojačevalnika bomo dobili sinusni signal z amplitudo 10 mV, kar z malo boljšim osciloskopom z lahkoto vidimo. V resnicu se takšna meritev ne “posreči”. Pozabili smo namreč upoštevati, da je v realnih pogojih merjenja vedno prisoten šum. Tudi če je signal na začetku merilne verige (v našem primeru na vhodu ojačevalnika) mnogo večji od šuma je lahko na koncu merilne verige (zaslon osciloskopa) situacija ravno obratna. Poskusimo oceniti, kolikšna bi bila amplituda šuma na izhodu ojačevalnika v našem primeru. Zelo dober nizkošumni napetostni ojačevalnik ima okoli $1 \mu\text{V}/\text{Hz}^{-1/2}$ vhodnega šuma. Privzemimo, da ima naš ojačevalnik pasovno širino okoli 20 kHz. Amplitudo šuma na izhodu ojačevalnika izračunamo kot produkt šuma na vhodu ojačevalnika, korena pasovne širine ojačevalnika in faktorja ojačanja:

$$U_N = 1 \frac{\mu\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \sqrt{20 \text{ kHz}} 1000 \approx 140 \text{ mV}$$

Izračunana amplituda šuma na izhodu je približno štirinajstkrat večja od velikosti signala. Očitno je, da bomo na osciloskopu videli le šum. Z analizo zgornjega primera lahko ugotovimo, kje se skriva možna rešitev problema. Zmanjšanje ojačanja nam ne pomaga, ker bi s tem zmanjšal tudi signal in bi razmerje signal/šum (S/N) ostalo nespremenjeno. Lahko bi izbrali ojačevalnik z manj vhodnega šuma vendar tudi tukaj prej ali slej naletimo na spodnjo mejo, ki jo postavlja narava in pod katero ne moremo (npr. termični šum na uporu). Ostane nam le še zmanjšanje pasovne širine. Kakšno pasovno širino naredimo in kakšnim pogojem morata zadoščati signal in šum bomo videli v naslednjem poglavju.

Princip delovanja FOO

Predstavljaj si, da smo na majhni ladji, ki nima posebnih navigacijskih pripomočkov in želimo ponoči pristati v pristanišču velikega mesta. Najprej poskušamo poiskati svetilnik na pomolu. Običajno ga hitro opazimo saj njegova luč utripa. Če svetilnik na pomolu ne bi utripal, bi ga bilo

zelo težko ločiti od ozadja mestnih luči in naloge bi postala precej težja. Pri meritvah se zelo pogosto srečujemo s podobno situacijo. Svetilnikovi luči ustrez signal, ki ga želimo meriti, ozadju mestnih luči pa šum, ki nam merjenje otežuje.

Iz zgoraj opisanega primera lahko sklepamo, da bomo signale bistveno lažje ločili od šuma, če so izmenični in poznamo njihovo frekvenco. Pri meritvah, kjer je signala malo v primerjavi s šumom zato najprej poskrbimo, da je signal izmeničen. To lahko dosežemo na različne načine odvisno od konkretno eksperimentalne postavitve. Kot primer vzemimo meritve z Weatstonovim mostičkom. Če mostiček priklopimo na izmenično napetost z izbrano frekvenco, bo tudi signal iz mostička nihal z isto frekvenco.

Naprava, ki je sposobna ločiti izmenični signal pri določeni frekvenci od šuma je FOO. Na sliki 11.1 je prikazana shema enokanalnega FOO, ki ima dva vhoda, prvega za signal $X_{\text{sig}} = V_{\text{sig}} \sin(\omega_{\text{sig}} t + \theta_{\text{sig}})$ in drugega za referenčni signal $X_{\text{ref}} = V_{\text{ref}} \sin(\omega_{\text{ref}} t + \theta_{\text{ref}})$. Referenca je praviloma signal z veliko amplitudo in malo šuma, ki niha z isto frekvenco kot signal, ki ga želimo meriti. Naloga reference je, da pove FOO pri kateri frekvenci se nahaja signal. Spektralna analiza izhoda iz množilnika bi pokazala, da sta v izhodu prisotni dve komponenti: prva pri frekvenci 0 torej DC, druga pa pri dvojni frekvenci. To lahko pokažemo s kratkim računom. Uporabimo formulo za produkt dveh sinusov

$$\begin{aligned} V_{\text{mult}} &= V_{\text{sig}} \sin(\omega_{\text{sig}} t + \theta_{\text{sig}}) V_{\text{ref}} \sin(\omega_{\text{ref}} t + \theta_{\text{ref}}) \\ &= \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_{\text{ref}} [\cos([\omega_{\text{sig}} - \omega_{\text{ref}}] t + \theta_{\text{sig}} - \theta_{\text{ref}}) - \cos([\omega_{\text{sig}} + \omega_{\text{ref}}] t + \theta_{\text{sig}} + \theta_{\text{ref}})] \end{aligned} \quad (11.1)$$

kjer sta V_{sig} , V_{ref} amplitudi in ω_{sig} , ω_{ref} frekvenci signala in reference. V primeru, ko sta frekvenci signala in reference enaki $\omega_{\text{sig}} = \omega_{\text{ref}}$ se (11.1) poenostavi v

$$V_{\text{mult}} = \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_{\text{ref}} [\cos(\theta_{\text{sig}} - \theta_{\text{ref}}) - \cos(2\omega_{\text{ref}} t + \theta_{\text{sig}} + \theta_{\text{ref}})] \quad (11.2)$$

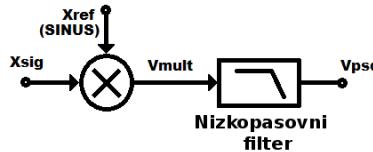
Ko signal iz množilnika vodimo skozi filter, ki prepusti nizke frekvence se komponenta pri dvojni frekvenci (drugi člen na desni strani enačbe (11.2)) zaduši in ostane le še istosmerna komponenta

$$V_{\text{psd}} = \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_{\text{ref}} \cos(\theta_{\text{sig}} - \theta_{\text{ref}}). \quad (11.3)$$

Če bi bila frekvence signala različna od referenčne frekvence, bi nizkopasovni filter zadušil obe komponenti. Izjema so le komponente, katerih frekvence se od referenčne razlikuje za manj kot je prepustna širina filtra. Šum si lahko predstavljamo kot signal (sicer nezaželen), katerega spekter vsebuje množico komponent z najrazličnejšimi frekvencami. Iz zgoraj povedanega sledi, da bo FOO odstranil večino šuma. Ostal bo le tisti del, katerega frekvenčno komponente so zelo blizu frekvence signala, katerega želimo meriti. Teoretično je učinek enak, kot če bi uporabili nizkopasovni prepustni filter. V praksi se izkaže, da klasičnega filtra, ki bi imel tako ozek prepustni pas in bi mu lahko za povrh še spremnjali centralno frekvenco, ni mogoče narediti zato je FOO v takšnih primerih nepogrešljiv.

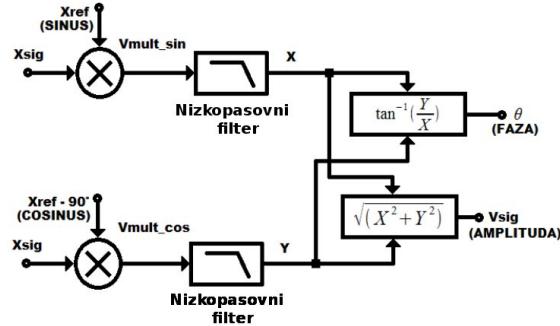
Kot vidimo je izbira referenčne frekvence za optimalno izvedbo meritve zelo pomembna. Vedno moramo paziti, da referenčno frekvenco izberemo tako, da leži v tistem predelu spektra, kjer je šuma najmanj. Klasična napaka, ki se pogosto pojavlja je, da si za delovno napetost izberemo 50 Hz ali katerega izmed njenih mnogokratnikov. Šum je pri teh frekvencah vedno zelo velik in se ga z uporabo FOO ne moremo znebiti!

Že ime samo pove, da je FOO občutljiv tudi na fazo. Če je fazni zamik signala θ_{sig} glede na referenco θ_{ref} enak 90°, bo izhod iz FOO enak nič, glej (11.3). Komercialni FOO imajo zato vgrajeno še



Slika 11.1: Shema enokanalnega FOO

dodatno vezje, s katerim lahko nastavljamo fazo referenčnega signala. To nam omogoča, da lahko pomerimo tudi komponento signala, ki je iz faze in s tem v celoti rekonstruiramo prvotni signal. Takšni FOO so znani kot enokanalni. Obstajajo tudi dvokanalni FOO, ki generirajo dve referenci, ki sta medsebojno zamaknjeni za 90°. Referenci vodijo vsako zase na dva ločena množilnika kjer se pomnožijo z vhodnimi signalom. Na izhodih množilnikov tako hkrati dobimo obe komponenti vhodnega signala. Shema takšnega FOO je prikazana na sliki 11.2.



Slika 11.2: Shema dvokanalnega FOO)

Opis opreme

Za izvedbo vaje bomo potrebovali sledečo opremo:

1. digitalni dvokanalni FOO SR830



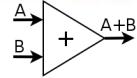
2. digitalni osciloskop Textronix



3. dvokanalni funkcijski generator Rigol DG1022



4. analogni seštevalnik



Dvokanalni FOO SR830 je moderen FOO, ki za razliko od analognih FOO opravlja večino funkcij digitalno. V njem se generiranje reference, množenje signalov in filtriranje izvaja s pomočjo vgrajenega računalnika. Zaradi tega je SR830 bistveno natančnejši od analognih FOO in lahko med signale v prisotnosti močnejšega šuma. V praktikumski vaji bomo preizkušali različne možnosti meritev, ki jih lahko izvajamo s tem instrumentom.

Digitalni osciloskop Textronix bomo uporabljali za opazovanje analognih signalov, ki jih bomo vodili na vhod FOO.

Funkcijski generator bomo uporabili kot izvor šuma. Z analognim seštevalnikom bomo signalu kontrolirano dodajali in odvzemali šum in s tem simulirali različne pogoje merjenja.

Funkcijski generator bomo uporabljali tudi za generiranje sinusnega, žagastega in pravokotnega signala.

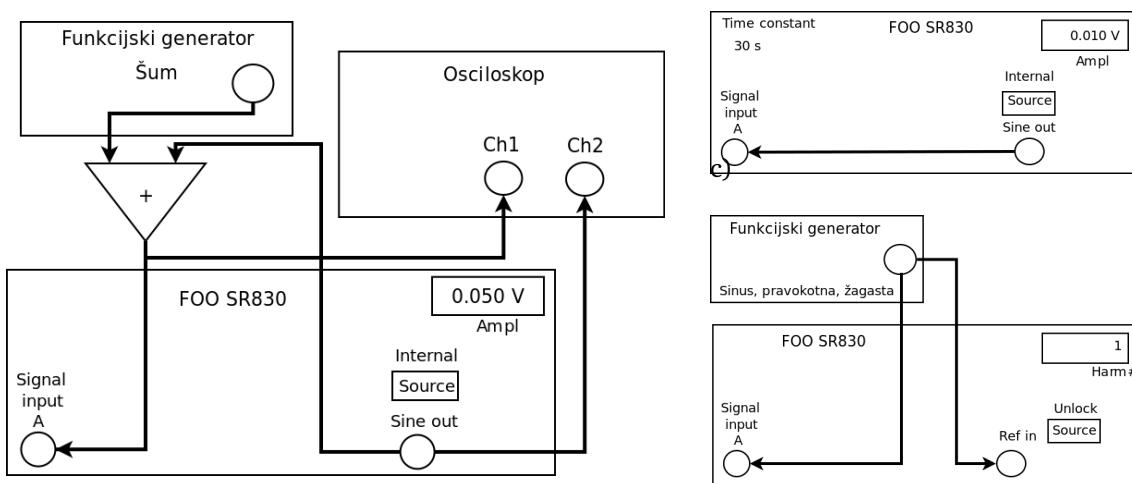
Naloge

1. Opazuj signal na osciloskopu in FOO pri različnih amplitudah šuma. Izmeri velikost šuma pri različnih nastavitevah časovne konstante in strmine nizkopasovnega filtra
2. Izmeri časovni odziv FOO.
3. Izmeri harmonsko strukturo različnih signalov

Potek dela

Ad 1. Sestavi eksperimentalno postavitev, kot je narisano na sliki 11.3a.

Nastavi amplitudo sinusnega signala iz FOO (referenca) na okoli 50 mV. Na funkcijskem generatorju izberi šum ("Noise"). Privzeti prikaz velikosti generiranega signala je V_{pp} (peak-to-peak vrednost). Za določitev razmerja med signalom in šumom bomo potrebovali RMS vrednost generiranega šuma. Na funkcijskem generatorju zato izberi prikaz RMS velikosti, kar narediš tako, da pri izbrani obliki signala na meniju, ki je v spodnji vrstici prikazovalnika, najprej izbereš "Amp", potem pa pritisneš piko na numerični tipkovnici – prikaže se nov meni, kjer izbereš V_{RMS} . Opazuj signal na osciloskopu in RMS vrednost signala na FOO (R na prikazovalniku prvega kanala) in povečuj amplitudo šuma. Ocenji jakost šuma, pri kateri na moreš več ločiti signala od šuma na osciloskopu. Določi še, pri katerem razmerju signal šum (S/N), ki ga izraziš v decibelih, postane odčitek na FOO nestabilen (se spreminja za več kot 10%). Izmeri, kako vpliva nastavitev časovne konstante in strmina nizkopasovnega filtra na stabilnost odčitka na FOO.



Slika 11.3: Sheme postavitev za a) 1., b) 2. in c) 3. nalogu.

Ad 2.) Na vhod FOO napelji čisti sinusni signal iz reference (Sine Out), glej sliko 11.3b. Amplituda signala naj bo 10 mV. Časovno konstanto nastavi na 30 s. Počakaj, da postaneta amplituda, ki jo kaže FOO in amplituda sinusnega signala enaki. Nato amplitudo sinusnega signala naglo povečaj na okoli 50 mV. Vsakih 10 s beleži amplitudo signala, ki jo kaže FOO. Meri tako dolgo, da signal doseže 50 mV. Ponovi meritev še v obratni smeri, ko amplitudo signala naglo zmanjšaš iz 50 mV na 10 mV.

Ad 3.) Na vhod FOO priklopi funkcijski generator. Izberi sinusni signal in nastavi V_{RMS} na okoli 200 mV. Hkrati napelji signal iz funkcijskoga generatorja na referenčni vhod FOO (REF IN) in preklopi s tipko "Source" iz INTERNAL na UNLOCK. S FOO izmeri amplitudo harmonikov (tipka Harm#) od 1 do 10. Enako meritev ponovi še za žagast in pravokoten signal. Primerjaj relativne vrednosti izmerjenih amplitud harmonikov z izračunanimi.

Definicije pojmov

Razmerje signal šum

Razmerje signal šum (angl. Signal to Noise ratio, oznaka S/N) je definirano z enačbo

$$S/N = 20 \log \frac{U_{sig}}{U_N},$$

kjer je U_{sig} RMS napetost signala in U_N RMS napetost šuma. Enota za razmerje S/N je decibel (dB). Pozitiven S/N pomeni, da je amplituda signala večja od amplitude šuma, negativen pa ravno obratno. Primer: $S/N = -40\text{dB}$ pomeni, daje šum 100x močnejši od signala.

Kvaliteta

Kvaliteta (angl. Quality, oznaka Q) ozkopasovnega filtra ali nihajnega kroga je razmerje med frekvenčno širino na polovični višini frekvenčne karakteristike filtra (nihajnega kroga) in centralno frekvenco.

Literatura

[1] MODEL SR830, DSP Lock-In Amplifier, Stanford Research Systems. (Priročnik priložen vaji.
NE ODNAŠAJ!)

12 Test znanja uporabe osciloskopa

Mnogo študentov po treh letih študija še vedno ni suverenih pri uporabi osciloskopa, osnovnega orodja pri večini meritev v fiziki. Pričajoča mini vaja je zato namenjena preverjanju praktičnega znanja njegove uporabe, dopolnitvi morebitnih vrzeli v znanju ter povečanju samostojnosti pri njegovi uporabi.

V testu s pomočjo osciloskopa preberi signale, ki jih generira 5 različnih programov v napravi *Osci-Test*. Programe se menja s pritiskom na tipko *Program*, številka trenutnega programa je napisana na zaslunu naprave. Pozor, naprava ima 2 izhoda, D in A.

Pri analizi signalov na osciloskopu si pomagaj s funkcijami nastavitev prožilnika (*trigger*), DC/AC skloplitve (*coupling*), uporabe kurzorjev... Meritve izvedi čim natančneje in ne pozabi napisati napak.

Program 0: Določi frekvenco f , amplitudo U_0 in odmik U_{offset} funkcije $U(t) = U_0 \sin(2\pi ft) + U_{offset}$ na izhodu A.

$$f = \quad U_0 = \quad U_{offset} =$$

Program 1: Določi frekvenco f , amplitudo U_0 in odmik U_{offset} funkcije $U(t) = U_0 \sin(2\pi ft) + U_{offset}$ na izhodu A.

$$f = \quad U_0 = \quad U_{offset} =$$

Program 2: Določi naklon dU/dt pri naraščanju žagaste napetosti na izhodu A in naklon dU/dt pri padcu. Oboje lahko pustiš kar v obliki ulomka.

$$dU/dt_{rise} = \quad dU/dt_{fall} =$$

Program 3: Določi dolžino sunka na izhodu D ter čas padanja od maksimalne do minimalne napetosti.

$$t_{sunka} = \quad t_{fall} =$$

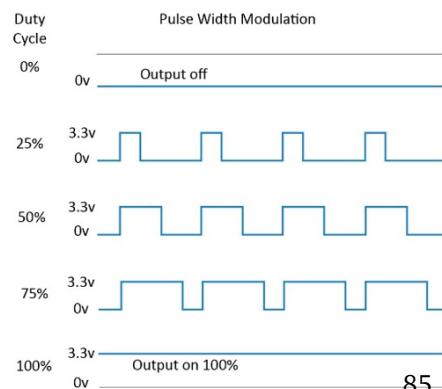
Program 4: Izmeri čas med začetkoma 1. in 2. ter začetkoma 1. in 3. sunka na izhodu D. Kolikšno je trajanje tretjega sunka?

$$\Delta t_{1-2} = \quad \Delta t_{1-3} = \quad t_3 =$$

Program 5 Na izhodu D opazuj modulacijo PWM (pulse-width-modulation), pri je kateri nivo signala (*duty cycle*) kodiran z dolžino sunkov (npr. če je ima signal 30% časa visoko logično vrednost, je DC=0.3).

Kolikšna je frekvence sunkov? Kolikšen je nivo obeh signalov, med katerima na sekundni časovni skali prekla- plja izhod D?

$$f_{PWM} = \quad DC_1 = \quad DC_2 =$$



Odgovori:

Program 0: $f = 15.19$ Hz, $U_0 = 1.52$ V, $U_{offset} = 1.64$ V.

Program 1: $f = 143.4$ Hz, $U_0 = 22$ mV, $U_{offset} = 2.67$ V.

Program 2: $\Delta U = 3.26$ V, $t_{rise} = 3.7$ ms, $t_{fall} = 4.8$ μ s, naraščanje: $dU/dt = 880$ V/s, padec: $dU/dt = -680$ kV/s.

Program 3: $t_{sunka} = 10$ ms, $t_{padec} = 10$ ns.

Program 4: $\Delta t_{1-2} = 131$ μ s, $\Delta t_{1-3} = 10.2$ ms, $t_3 = 32$ μ s.

Program 5: $f_{PWM} = 10$ kHz, $N_1 = 0.90$, $N_2 = 0.2$.