

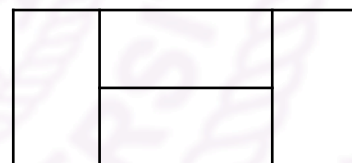
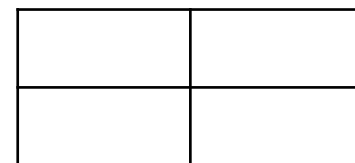
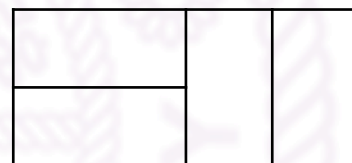
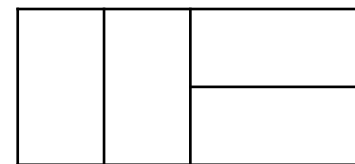
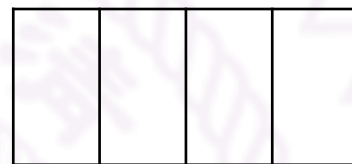
Dynamic Programming

日月卦長



骨牌覆蓋

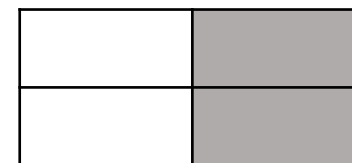
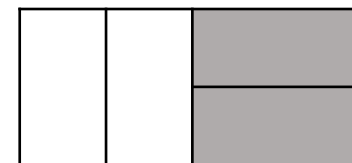
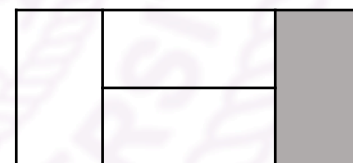
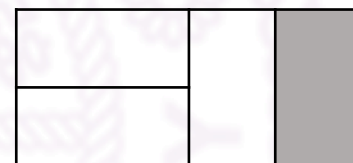
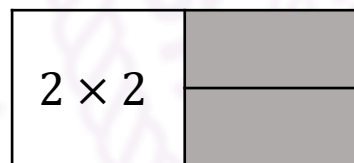
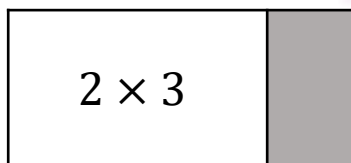
- 給你 $2 \times n$ 的地板
- 你要用 2×1 的磁磚將其鋪滿
- 請問有幾種方法?



$n = 4$ 的所有方法

骨牌覆蓋

- 觀察這些方法

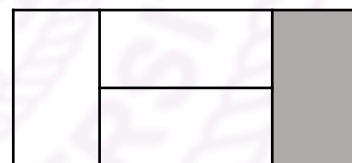
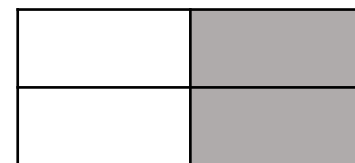
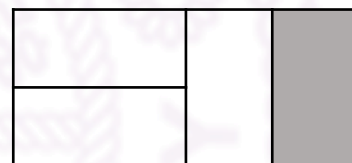
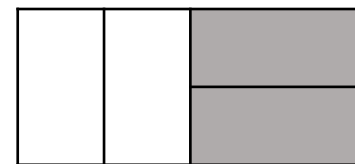
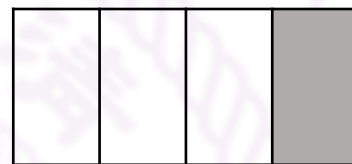


$n = 4$ 的所有方法

骨牌覆蓋

- 得到關係式

- $$f_n = \begin{cases} 1 & , n \leq 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n > 1 \end{cases}$$



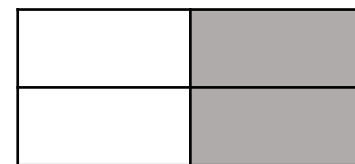
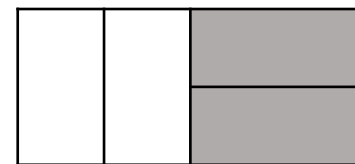
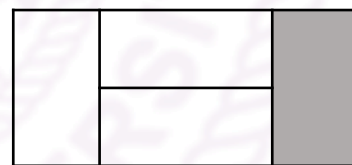
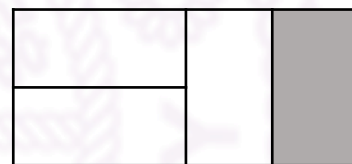
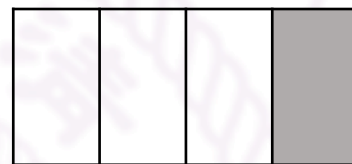
$n = 4$ 的所有方法

骨牌覆蓋

- 得到關係式

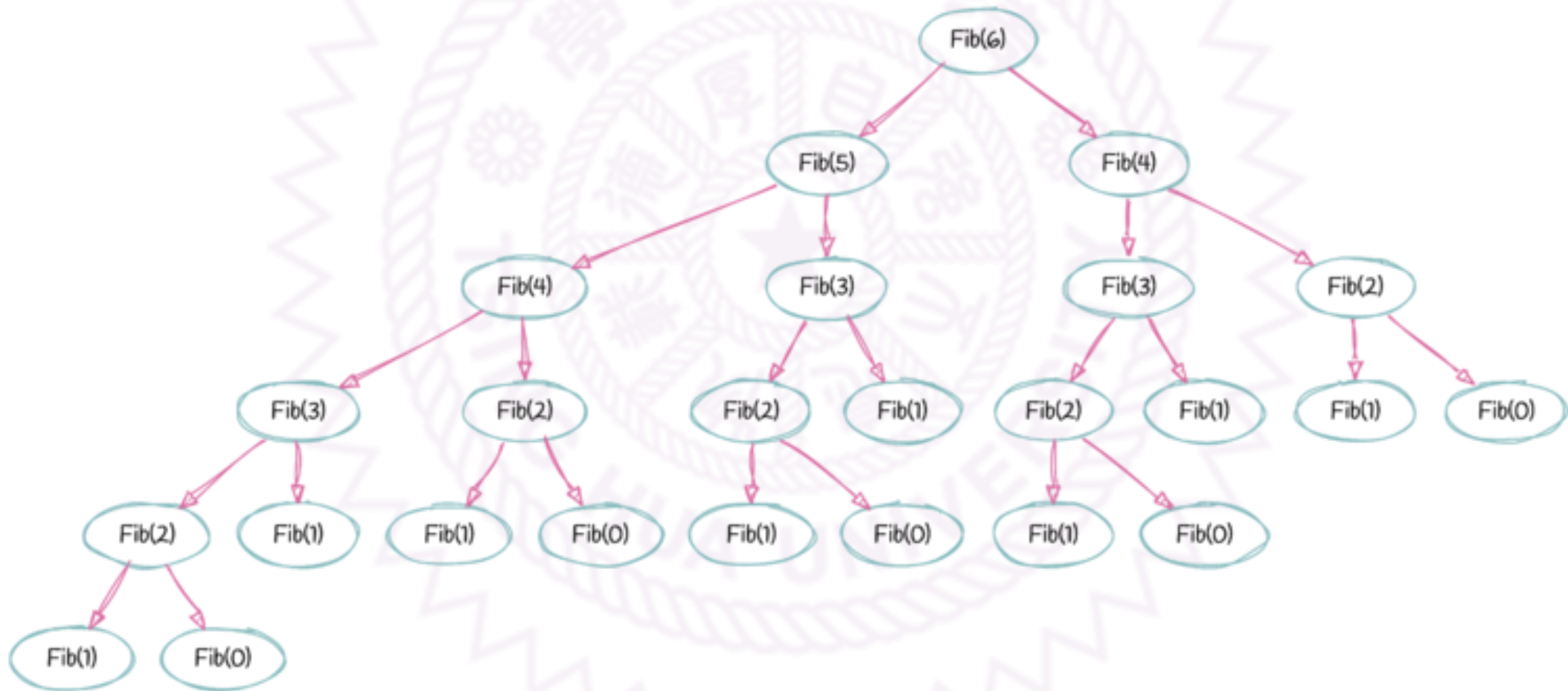
$$f_n = \begin{cases} 1 & , n \leq 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n > 1 \end{cases}$$

```
long long f(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    return f(n - 1) + f(n - 2);  
}
```



$n = 4$ 的所有方法

很慢 $O(2^n)$



DP的本質：避免重覆計算

```
long long f(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    return f(n - 1) + f(n - 2);  
}
```



```
map<int, long long> DP;  
long long f(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    if (DP.count(n)) return DP[n];  
    return DP[n] = f(n - 1) + f(n - 2);  
}
```


Dynamic Programming

- 無後效性：
相同的參數會得到相同的答案
- 重複子問題：
過程中相同的參數會重複出現
- 最佳子結構：
原問題的最佳解其子問題的解也是最佳的

Longest Increasing Subsequence

- <https://leetcode.com/problems/longest-increasing-subsequence/>
- 輸出最長遞增子序列長度
- Input: S = [0,3,1,6,2,2,7,-1]
- Output: 4
其中一個最長遞增子序列為：[0,1,2,7]

dfs(i) 計算 S[i] 為結尾的 LIS

```
vector<int> S;  
int dfs(int i) {  
    int ans = 0;  
    for (int j = 0; j < i; ++j) {  
        if (S[i] > S[j])  
            ans = max(ans, dfs(j));  
    }  
    return ans + 1;  
}  
int solve() {  
    int ans = 0;  
    for (int i = 0; i < S.size(); ++i)  
        ans = max(ans, dfs(i));  
    return ans;  
}
```

避免重複計算

```
vector<int> S;  
vector<int> DP;  
int dfs(int i) {  
    if(DP[i]) return DP[i];  
    int ans = 0;  
    for (int j = 0; j < i; ++j) {  
        if (S[i] > S[j])  
            ans = max(ans, dfs(j));  
    }  
    return DP[i] = ans + 1;  
}  
int solve() {  
    DP.assign(S.size(), 0);  
    int ans = 0;  
    for (int i = 0; i < S.size(); ++i)  
        ans = max(ans, dfs(i));  
    return ans;  
}
```

時間複雜度

- 遞迴通常都不太好算時間複雜度
- 但因為我們避免重複計算
 $dfs(0) \sim dfs(n-1)$ 只會各被計算一次
- 每次計算 dfs 的過程都是 $O(n)$
- 所以總共 $n \times O(n) = O(n^2)$

知道計算的順序就能用迴圈做

```
vector<int> S;

int solve() {
    vector<int> DP(S.size());
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < S.size(); ++i) {
        DP[i] = 0;
        for (int j = 0; j < i; ++j) {
            if (S[i] > S[j])
                DP[i] = max(DP[i], DP[j]);
        }
        DP[i] += 1;
        ans = max(ans, DP[i]);
    }
    return ans;
}
```

狀態、狀態轉移式 state transition equation

- 設 DP_i 表示以 $S[i]$ 為結尾時的 LIS 長度

狀態

$$DP_i = \max_{j < i, S[j] < S[i]} \{DP_j\} + 1$$

狀態轉移式

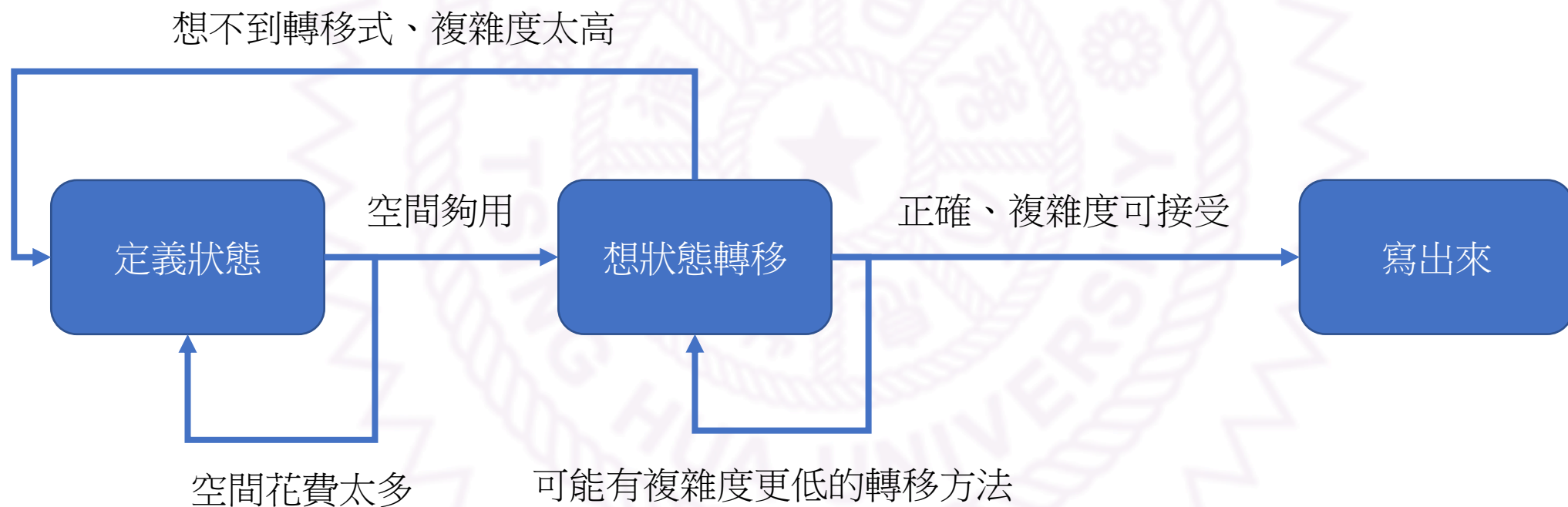
xD/yD 表示法

- 表示該 DP 的時間複雜度為 $O(n^{x+y})$
- 大多數 DP 時間複雜度 = 狀態數 \times 狀態轉移時間
 - 狀態數有 $O(n^x)$
 - 狀態轉移時間 $O(n^y)$
- EX: 剛剛的 LIS 是 $1D/1D$ 的 DP，複雜度 $O(n^{1+1}) = O(n^2)$

作法分類

- **Top Down:**
用遞迴，記錄所有狀態的計算結果避免重複計算
- **Bottom Up:**
知道每個狀態的計算順序，按造順序推出目標狀態
通常用迴圈就能搞定

一般思考流程



Longest Common Subsequence

- <https://leetcode.com/problems/longest-common-subsequence/>
- 輸出兩字串的最長共同子序列長度
- Input: A = "abcde", B = "aceb"
- Output: 3
最長共同子序列為："ace"

Step 1: 定義狀態

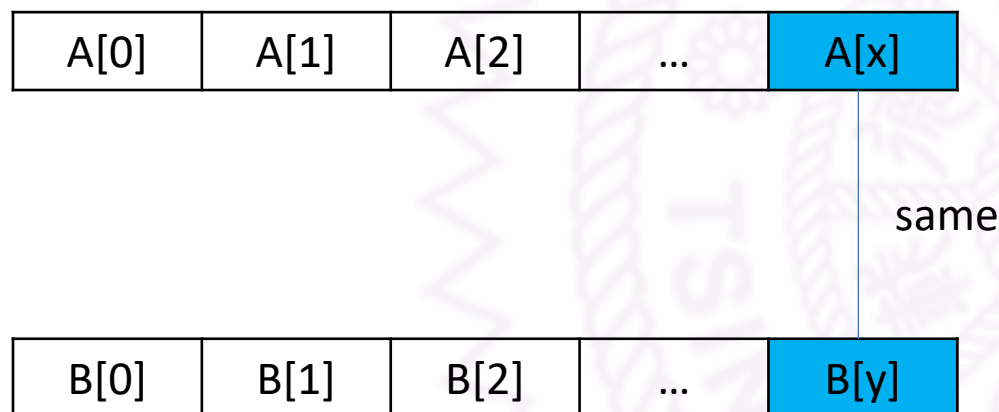
- 設 $DP_{x,y}$ 表示 $A[0 \sim x], B[0 \sim y]$ 的 LCS 長度

Step 2: 想狀態轉移式

A[0]	A[1]	A[2]	...	A[x]
------	------	------	-----	------

B[0]	B[1]	B[2]	...	B[y]
------	------	------	-----	------

Step 2: 想狀態轉移式

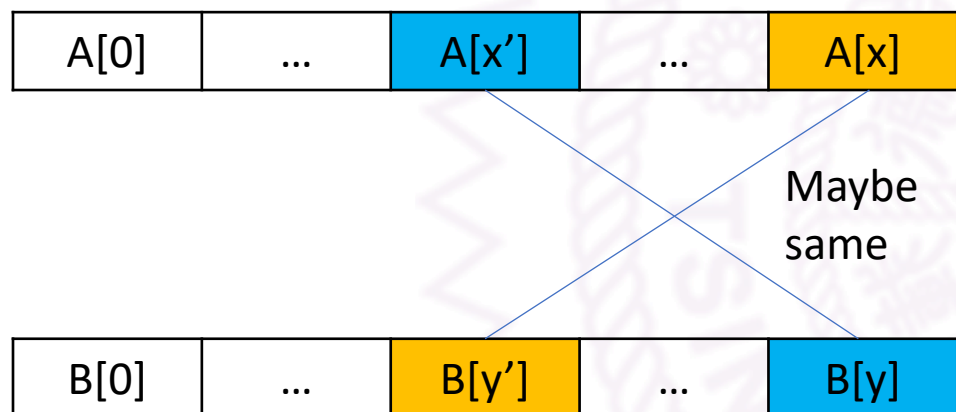


Case $A[x] == B[y]$

這個例子中 x, y 必然是LCS的一部分
所以

$$DP_{x,y} = DP_{x-1,y-1} + 1$$

Step 2: 想狀態轉移式



Case $A[x] \neq B[y]$

這個例子中 x, y 都各自可能是LCS的一部分
所以

$$DP_{x,y} = \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x,y-1}\}$$

Step 2: 想狀態轉移式

$$DP_{x,y} = \begin{cases} 0 & , x < 0, y < 0 \\ DP_{x-1,y-1} + 1 & , A[x] = B[y] \\ \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x,y-1}\} & , A[x] \neq B[y] \end{cases}$$

時間複雜度

- $2D/0D$
- 狀態數 \times 轉移時間
- $|A| \times |B| \times O(1) = O(|A||B|)$

Longest Palindromic Subsequence

- <https://leetcode.com/problems/longest-palindromic-subsequence/>
- 輸出最長迴文子序列長度
- Input: S = "bbbab"
- Output: 4
最長迴文子序列為："bbbb"

Step 1: 定義狀態

- 設 $DP_{l,r}$ 表示 $S[l \sim r]$ 的最長迴文子序列長度

Step 2: 想狀態轉移式

$S[l]$	$S[l+1]$	$S[l+2]$...	$S[r]$
--------	----------	----------	-----	--------

Step 2: 想狀態轉移式

S[l]	S[l+1]	S[l+2]	...	S[r]
------	--------	--------	-----	------

Case $S[l] == S[r]$

這個例子中 x, y 必然是最長迴文的一部分
所以

$$DP_{l,r} = DP_{l+1,r-1} + 2$$

Step 2: 想狀態轉移式

S[l]	S[l+1]	S[l+2]	...	S[r]
------	--------	--------	-----	------

Case $S[l] \neq S[r]$

這個例子中 x, y 都各自可能最長迴文的一部分
所以

$$DP_{l,r} = \max\{DP_{l+1,r}, DP_{l,r-1}\}$$

Step 2: 想狀態轉移式

$$DP_{l,r} = \begin{cases} r - l + 1 & , r - l + 1 \leq 1 \\ DP_{l+1,r-1} + 2 & , S[l] = S[r] \\ \max\{DP_{l+1,r}, DP_{l,r-1}\} & , S[l] \neq S[r] \end{cases}$$

Bottom Up: 由小到大枚舉區間

```
int solve(string S) {  
    int n = S.size();  
    vector<vector<int>> DP(n, vector<int>(n));  
    for (int i = 0; i < n; ++i) DP[i][i] = 1;  
    for (int len = 2; len <= n; ++len) {  
        for (int l = 0; l + len <= n; ++l) {  
            int r = l + len - 1;  
            if (S[l] == S[r]) DP[l][r] = DP[l + 1][r - 1] + 2;  
            else DP[l][r] = max(DP[l + 1][r], DP[l][r - 1]);  
        }  
    }  
    return DP[0][n - 1];  
}
```

時間複雜度

- $2D/0D$
- 狀態數 \times 轉移時間
- $|S|^2 \times O(1) = O(|S|^2)$



特殊優化

資料結構優化

矩陣快速冪

Longest Increasing Subsequence

- <https://leetcode.com/problems/longest-increasing-subsequence/>

- 輸出最長遞增子序列長度

- Input: S = [0,3,1,6,2,2,7,-1]

$$O(n \log n)$$

- Output: 4

其中一個最長遞增子序列為：[0,1,2,7]

這裡計算太慢了

```
vector<int> S;

int solve() {
    vector<int> DP(S.size());
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < S.size(); ++i) {
        DP[i] = 0;
        for (int j = 0; j < i; ++j) {
            if (S[i] > S[j])
                DP[i] = max(DP[i], DP[j]);
        }
        DP[i] += 1;
        ans = max(ans, DP[i]);
    }
    return ans;
}
```


$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7

V	1	2	3	4	5

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1							

V	1	2	3	4	5
	-7				

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2						

V	1	2	3	4	5
	-7	10			

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2					

V	1	2	3	4	5
	-7	9			

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2	2				

V	1	2	3	4	5
	-7	2			

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2	2	3			

V	1	2	3	4	5
	-7	2	3		

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2	2	3	4		

V	1	2	3	4	5
	-7	2	3	8	

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2	2	3	4	4	

V	1	2	3	4	5
	-7	2	3	8	

$V[i]$: 紀錄滿足 $DP[x] = i$ 的最小值

S	0	1	2	3	4	5	6	7
	-7	10	9	2	3	8	8	1

DP	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	2	2	3	4	4	2

V	1	2	3	4	5
	-7	1	3	8	

V 陣列永遠遞增，利用二分搜！

LIS 資料結構優化

```
vector<int> S;

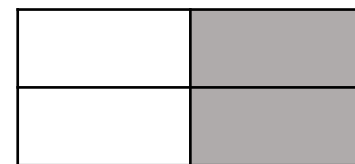
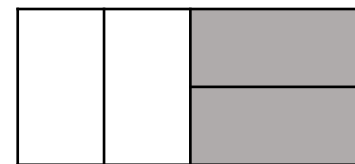
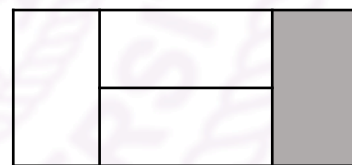
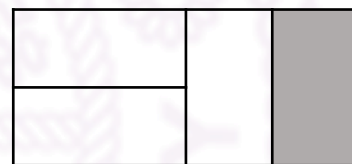
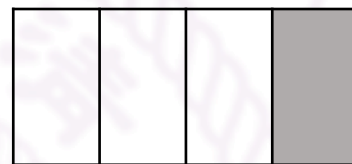
int solve() {
    if (S.size() == 0) return 0;
    vector<int> V;
    V.emplace_back(S[0]);
    for (size_t i = 1; i < S.size(); ++i) {
        if (S[i] > V.back())
            V.emplace_back(S[i]);
        else
            *lower_bound(V.begin(), V.end(), S[i]) = S[i];
    }
    return V.size(); // V 陣列的長度等同於答案
}
```

骨牌覆蓋

- 得到關係式

$$f_n = \begin{cases} 1 & , n \leq 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n > 1 \end{cases}$$

```
long long f(int n) {  
    if (n <= 1) return 1;  
    return f(n - 1) + f(n - 2);  
}
```



$n = 4$ 的所有方法

$O(\log n)$

矩陣乘法

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg \\ ce + dg \end{bmatrix}$$

觀察 – 使用矩陣快速幂

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

a^b 我們有教過 $O(\log b)$ 的快速幂

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$$



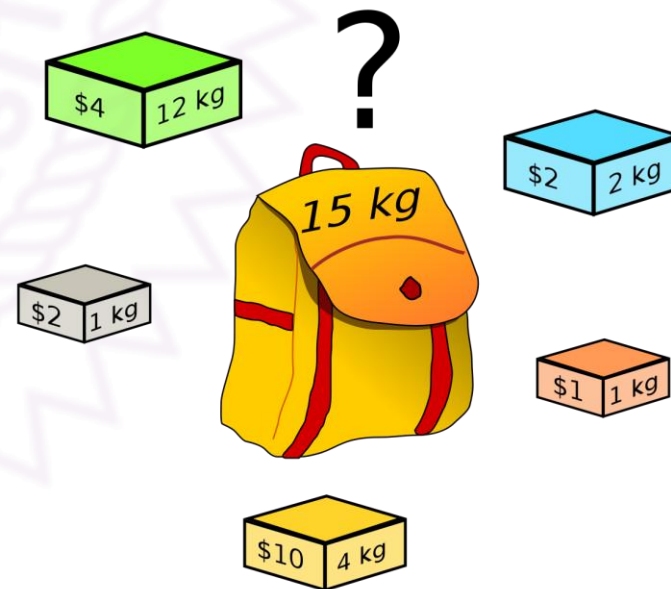
Knapsack Problem

背包問題

0-1 背包問題

- 你有一個限重為 W 的背包
- 有 n 個物品，第 i 個物品的重量和價格分別為 w_i, c_i
- 每個物品你可以選擇放或不放
請問在不超過背包限重的情況下，能拿到的價格總和最多為多少

- $n \leq 1000, 0 \leq W \leq 1000, \sum c_i \leq 1000$



枚舉法

- 每個物品只有選或不選兩種
- 有 2^n 種可能性 $\rightarrow O(2^n)$ 枚舉所有可能
- 太慢

Step 1: 定義狀態 1

- 設 $DP_{x,y}$ 表示：
只考慮編號 $1 \sim x$ 的物品
總價值是 y 時最少要花費的重量

- 目標答案就是

$$\max_{0 \leq y \leq \sum c_i} \{y: DP_{n,y} \leq W\}$$

Step 1: 定義狀態 2

- 設 $DP_{x,y}$ 表示：
只考慮編號 $1 \sim x$ 的物品
且背包中物品總重量剛好是 y 時的最佳總價值
- 目標答案就是

$$\max_{0 \leq y \leq W} \{DP_{n,y}\}$$

Step 1: 定義狀態 3

- 設 $DP_{x,y}$ 表示：
只考慮編號 $1 \sim x$ 的物品
且背包限重是 y 時的最佳總價值

- 目標答案就是

$$DP_{n,W}$$

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮要不要放第 x 物品

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮要不要放第 x 物品
- 不放第 x 物品
- $DP_{x,y} = DP_{x-1,y}$

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮要不要放第 x 物品
- 放第 x 物品
- $DP_{x,y} = DP_{x-1,y-w_x} + c_x$

Step 2: 想狀態轉移式

$$\bullet DP_{x,y} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x-1,y-w_x} + c_x\} & , x > 0 \end{cases}$$

```
int DP[MAXN][MAXW] = {};  
  
int solve() {  
    for (int x = 1; x <= n; ++x)  
        for (int y = 0; y <= W; ++y) {  
            DP[x][y] = DP[x - 1][y];  
            if (y >= w[x])  
                DP[x][y] = max(DP[x][y], DP[x - 1][y - w[x]] + c[x]);  
        }  
    return DP[n][W];  
}
```

時間複雜度

- 狀態數 \times 轉移時間
- $nW \times O(1) = O(nW)$

觀察狀態轉移式

- $DP_{x,y} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x-1,y-w_x} + c_x\} & , x > 0 \end{cases}$

- 計算 DP_x 時只會用到 DP_{x-1} 的資訊

DP_{x-1}			
DP_x			

省略沒用到的空間

```
int DP[2][MAXW] = {};  
int solve() {  
    for (int x = 1; x <= n; ++x)  
        for (int y = 0; y <= W; ++y) {  
            DP[x & 1][y] = DP[(x & 1) ^ 1][y];  
            if (y >= w[x])  
                DP[x & 1][y] = max(DP[x & 1][y], DP[(x & 1) ^ 1][y - w[x]] + c[x]);  
        }  
    return DP[n & 1][W];  
}
```

更加細緻的觀察

- $DP_{x,\mathbf{y}} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \max\{DP_{x-1,\mathbf{y}}, DP_{x-1,\mathbf{y}-w_x} + c_x\} & , x > 0 \end{cases}$

- 計算 $DP_{x,y}$ 時只會用到 $DP_{x-1,i}, i \leq y$ 的資訊

$$DP_{x-1}$$

			$y - w_x$			y	
						y	

$$DP_x$$

滾動陣列 – 只用一個維度記錄答案

- $DP_{x,y} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x-1,y-w_x} + c_x\} & , x > 0 \end{cases}$

- 計算 $DP_{x,y}$ 時只會用到 $DP_{x-1,i}, i \leq y$ 的資訊
- 讓 y 由大到小計算可以把陣列壓成一維

DP

			$y - w_x$			y	
--	--	--	-----------	--	--	-----	--

滾動陣列 – 只用一個維度記錄答案

DP_{x-1} 的資料:



DP_x 的資料:



DP_{x-1}

			$y - w_x$			y	
						y	

DP_x

DP

			$y - w_x$			y	
--	--	--	-----------	--	--	-----	--

滾動陣列 – 只用一個維度記錄答案

DP_{x-1} 的資料:



DP_x 的資料:



DP_{x-1}

		$y - w_x$			y		
					y		

DP_x

DP

		$y - w_x$			y		
--	--	-----------	--	--	-----	--	--

滾動陣列 – 只用一個維度記錄答案

DP_{x-1} 的資料:



DP_x 的資料:



DP_{x-1}

	$y - w_x$			y			
--	-----------	--	--	-----	--	--	--

DP_x

				y			
--	--	--	--	-----	--	--	--

DP

	$y - w_x$			y			
--	-----------	--	--	-----	--	--	--

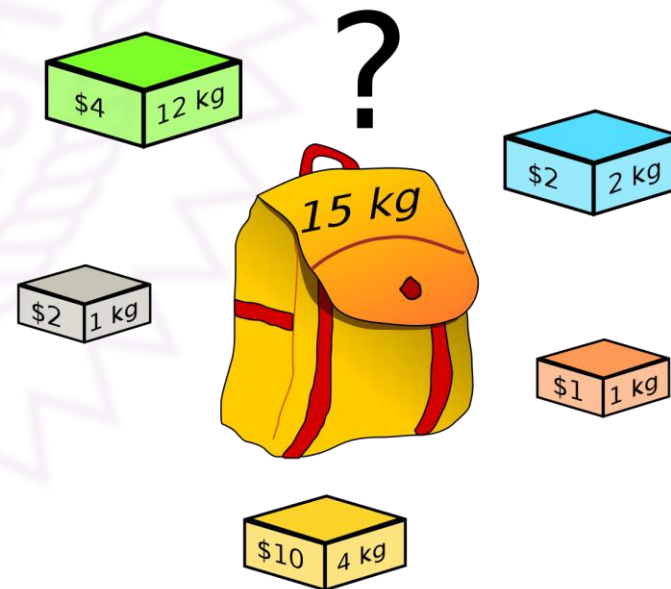
滾動陣列 – 只用一個維度記錄答案

```
int DP[MAXW] = {};  
int solve() {  
    for (int x = 1; x <= n; ++x)  
        for (int y = W; y >= w[x]; --y)  
            DP[y] = max(DP[y], DP[y - w[x]] + c[x]);  
    return DP[W];  
}
```

完全背包問題

- 你有一個限重為 W 的背包
- 有 n 種物品，第 i 個物品的重量和價格分別為 w_i, c_i
- 每種物品你可以選擇放任意多個或不放
請問在不超過背包限重的情況下，能拿到的價格總和最多為多少

- $n \leq 1000, 0 \leq W \leq 1000, \sum c_i \leq 1000$



Step 1: 定義狀態

- 設 $DP_{x,y}$ 表示：
只考慮編號 $1 \sim x$ 種類的物品(無論每個物品選多少個)
且背包限重是 y 時的最佳總價值
- 目標答案就是

$$DP_{n,w}$$

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮放第 x 物品的方法

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮放第 x 物品的方法
- 不放第 x 物品
- $DP_{x,y} = DP_{x-1,y}$

Step 2: 想狀態轉移式

- 考慮放第 x 物品的方法
- 放第 x 物品(不論放多少個)
- $DP_{x,y} = DP_{x,y-w_x} + c_x$

比較：只能放一個的方法

$$DP_{x,y} = DP_{x-1,y-w_x} + c_x$$

Step 2: 想狀態轉移式

- $DP_{x,y} = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \max\{DP_{x-1,y}, DP_{x,y-w_x} + c_x\} & , x > 0 \end{cases}$

時間複雜度

- 狀態數 \times 轉移時間
- $nW \times O(1) = O(nW)$

必讀參考書籍

- [背包九講](#)



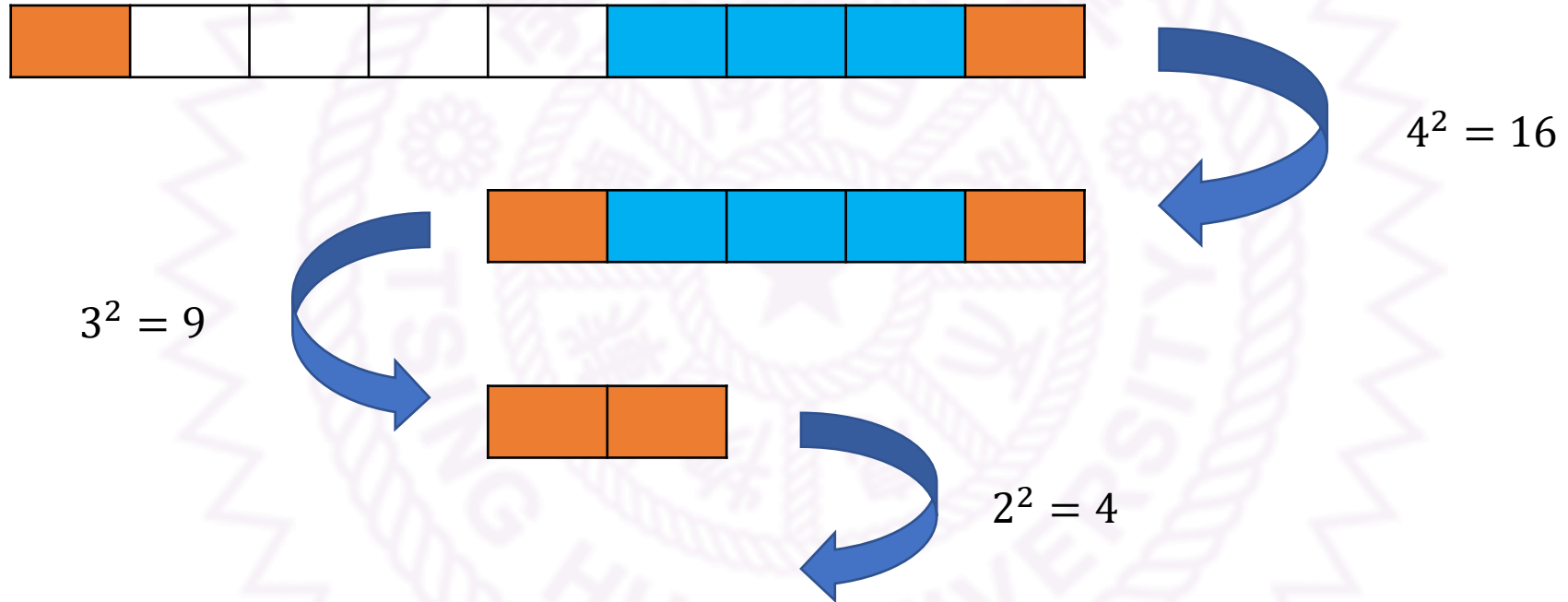


不直觀的狀態

UVA 10559 Blocks

- 有 $N (1 \leq N \leq 200)$ 個方塊排成一列，每個方塊有自己的顏色
每個顏色有不同的編號，第 i 個方塊的顏色編號是 $c_i (1 \leq c_i \leq n)$
- 同一個顏色的區間可以消除
若消除的區間長度為 k ，則可以得到 k^2 的分數，初始分數為 0
- 連續一段區間被消除後，剩餘左右兩端會合併起來
- 問最多能得到多少分數

UVA 10559 Blocks

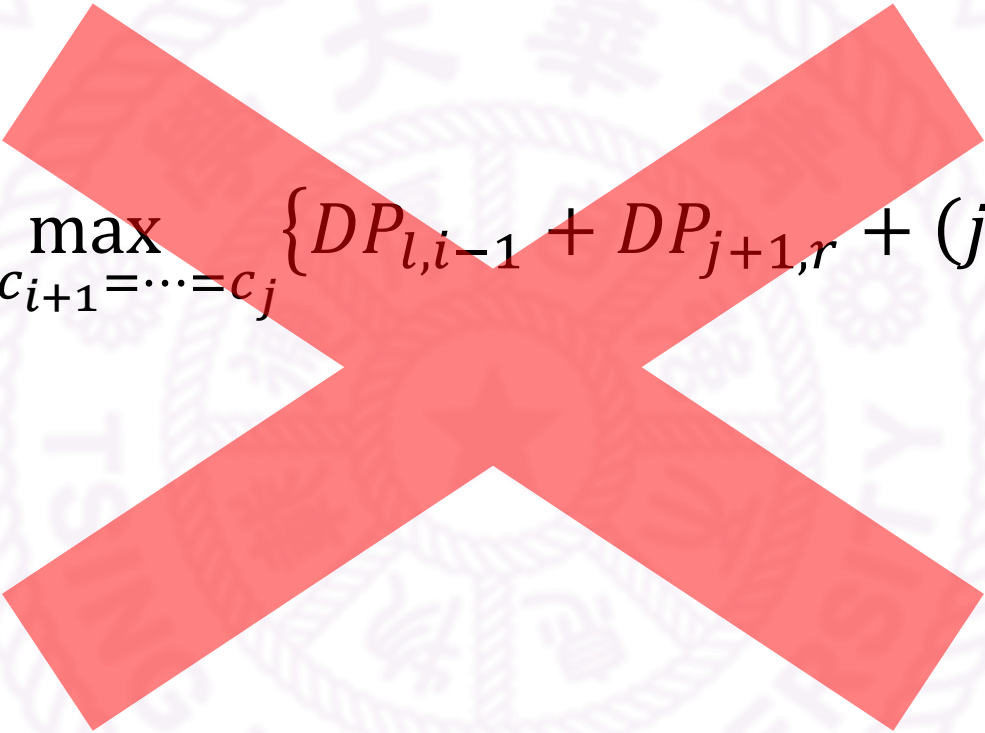


$$\text{Score} = 16 + 9 + 4 = 29$$

Step 1: 定義狀態

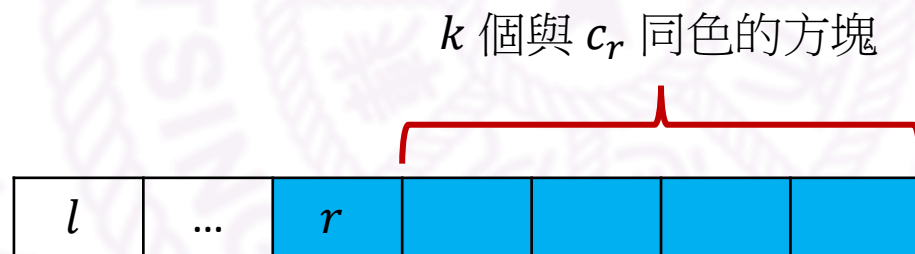
- 設 $DP_{l,r}$ 表示消除 $c_l \sim c_r$ 得到的最佳分數

Step 2: 想狀態轉移式

$$DP_{l,r} = \max_{c_i=c_{i+1}=\dots=c_j} \{DP_{l,i-1} + DP_{j+1,r} + (j-i+1)^2\}$$


Step 1: 定義狀態

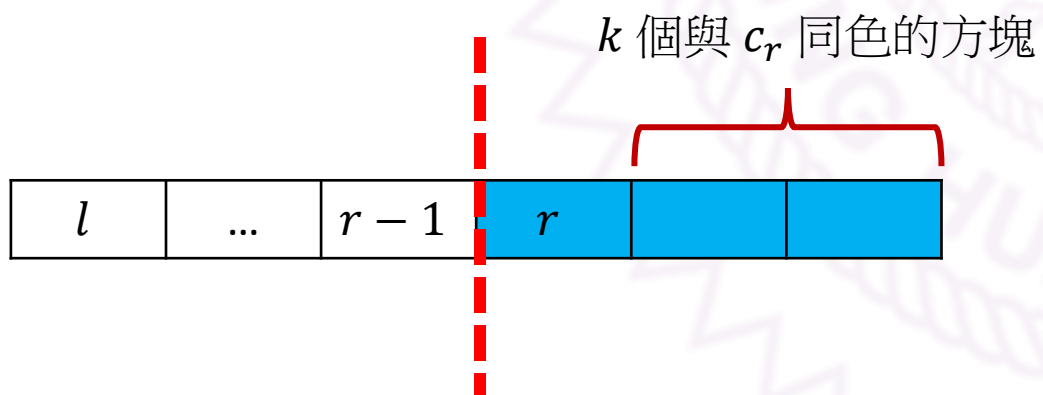
- 設 $DP_{l,r,k}$ 表示：
消除 $c_l \sim c_r$ 以及在 r 後面接上的 k 個與 c_r 同色的方塊的最佳分數



Step 2: 想狀態轉移式

切法1: 把 r 切出來處理

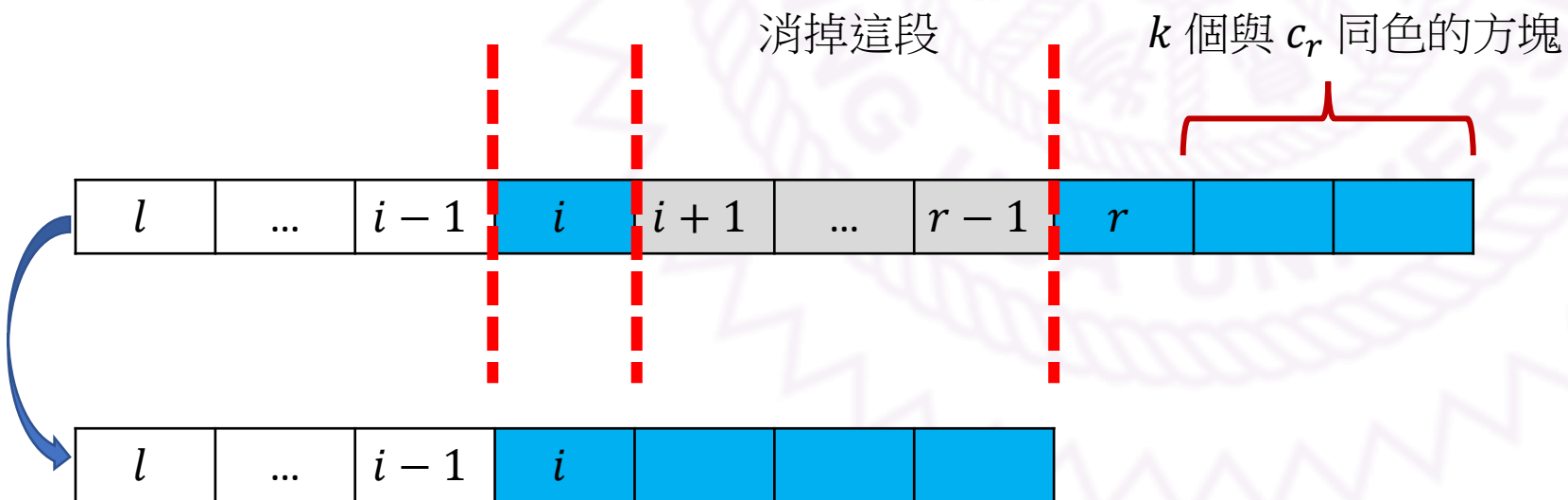
$$DP_{l,r,k} = DP_{l,r-1,0} + (k + 1)^2$$



Step 2: 想狀態轉移式

切法2: 若 $c_i = c_r$ ，可以先消去 $[i + 1, r - 1]$

$$DP_{l,r,k} = \max_{c_i = c_r} \{ DP_{l,i,k+1} + DP_{i+1,r-1,0} \}$$



程式碼

```
const int MAXN = 201;
int c[MAXN], n; // input
int dp[MAXN][MAXN][MAXN];

int dfs(int l, int r, int k) {
    if (l > r) return 0;
    if (dp[l][r][k]) return dp[l][r][k];
    int ans = dfs(l, r - 1, 0) + (1 + k) * (1 + k);
    for (int i = r - 1; i >= l; --i)
        if (c[i] == c[r])
            ans = max(ans, dfs(l, i, k + 1) + dfs(i + 1, r - 1, 0));
    return dp[l][r][k] = ans;
}
```

時間複雜度

- $3D/1D$
- 狀態數 \times 轉移時間
- $n^3 \times O(n) = O(n^4)$