集合论

第四章　　函　数

§1 函数的概念

§2 逆函数和复合函数

§3 *特征函数与模糊子集

§4 *基数的概念

§5 *可数集与不可数集

§6 *基数的比较

学习目标

（1）　理解函数的概念与分类。
（2）　理解逆函数与复合函数的概念。

§1 函数的概念

1． 函数的定义:

《定义》 设X和Y是任意两个集合，

f是从X→Y的一种关系，

若对于每一个x∈X，

都存在一个唯一的y∈Y，

能使 $<x,y>\in f$，

则称关系f为函数（映射）,并记为:

f: X→Y。

§1 函数的概念

讨论函数定义：

（1）f：X→Y中，若$<x,y>\in f$，则称x为自变量，与x对应的y称作f作用下的象点（值）；

（2）对应于某一个 $x\in X$，其值f(x)是唯一的，

(3) 定义域：$dom_f = X$

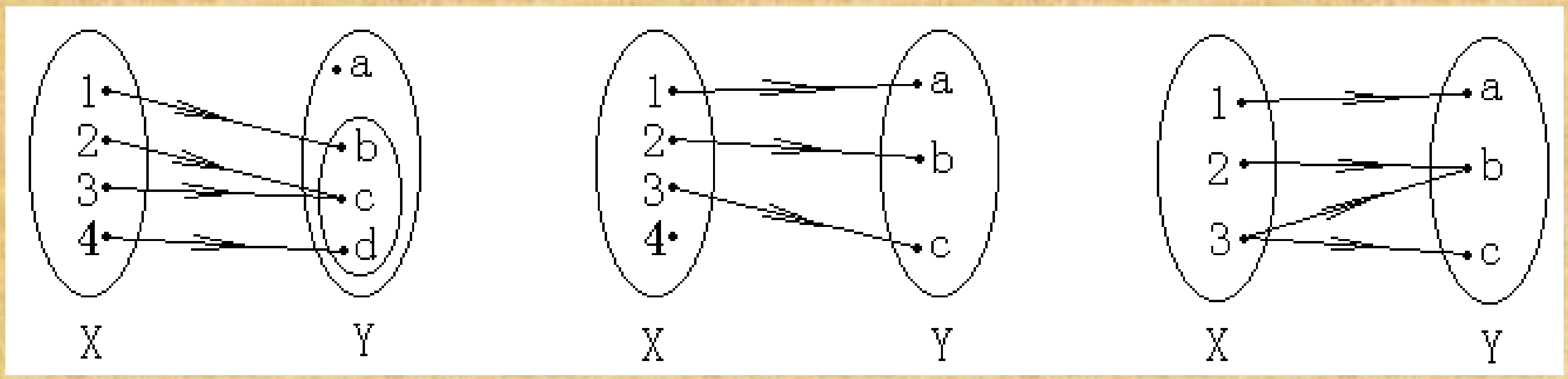
（4）f 值域 $ranf \subseteq Y$ 有时也记为R_f

$$R_f = \{y \mid \exists x(x\in X)\wedge(y=f(x))\}$$

集合 Y称为*f* 的共域

§ 1 函数的概念

例：判定下列关系是否为函数



$D_f = X$

$R_f \subseteq Y$

是函数

$D_f \neq X$

不是函数

值不是唯一的

不是函数

§1 函数的概念

2. 函数的构成

例：设X={a,b,c}，Y={0,1}，则 X × Y=
{<a,0><a,1><b,0><b,1><c,0><c,1>}

$X \times Y$ 中，有 $2^6 = 64$ 个子集，
符合函数的定义，这8个函数为：

$$f_0 = \{<a,0><b,0><c,0>\} = \begin{pmatrix} abc \\ 000 \end{pmatrix}$$ ……..

$$f_7 = \{<a,0><b,0><c,1>\} = \begin{pmatrix} abc \\ 111 \end{pmatrix}$$

§1 函数的概念

结论：

设|X|=m，|Y|=n，

从X-Y的所有函数个数

$$|Y^X| = n^m = |Y|^{|X|}$$

§1 函数的概念

3.几种特殊函数

《定义》：给定函数f: X→Y，如果值域 $R_f = Y$

则称f为满射函数。

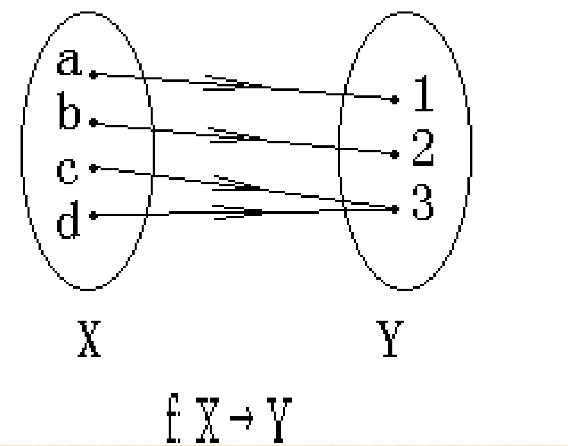
《定义》：给定f: X→Y，如果有 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 则称f是入射函数。

《定义》：给定函数f: X→Y，如果f既是满射函数，又是入射函数，则称f为双射函数。（或称“一一对应函数”，）

§1 函数的概念

例：

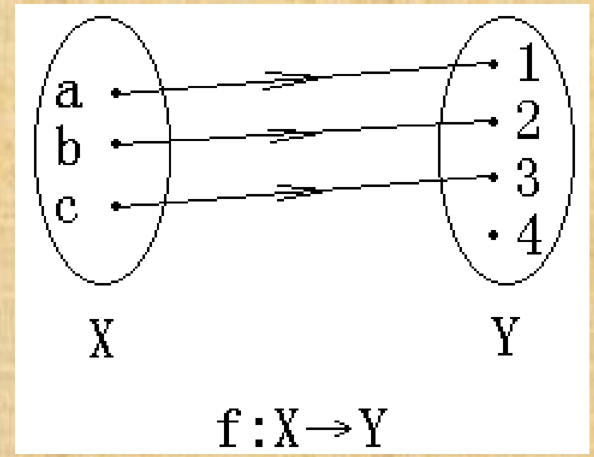


满射函数一定有：

(1)|X|≥|Y|

(2)$R_f = Y$

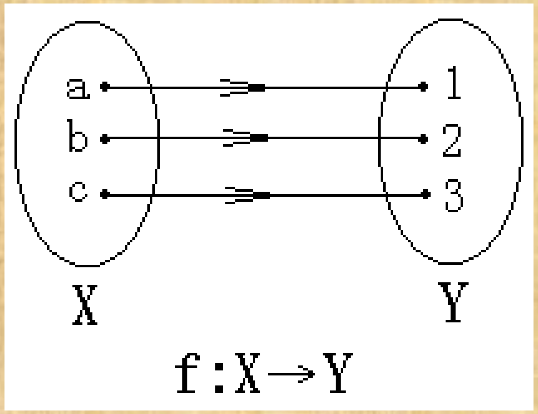
§1 函数的概念



入射函数有：

$$\begin{cases}(1) R_f \subseteq Y \\ (2) |X| \le |Y|\end{cases}$$

§1 函数的概念



双射函数一定有：

（1）（值域） $R_f = Y$

（2）（定义域）|X|=|Y|

例：在全班同学的集合中，

设：X={学号}，Y={姓名}

则：f: X→Y是一双射函数（学号和姓名的关系）

§2逆函数和复合函数

1.逆函数《定义》：

设$f : X \to Y$

f是一双射函数，称

$f^{-1} : Y \to X$

为f的逆函数。

§ 2逆函数和复合函数

2.复合函数《定义》： 设f: X→Y和g: W→Z是两个函数，若 $f(X)\subseteq W$，则：

$$g\circ f=\{<x,z>|\,x\in X\wedge z\in Z\wedge$$

$$\exists y(y\in Y\wedge y=f(x)\wedge z=g(y))\}$$

称g在函数f的左边可复合。

讨论定义：(1)两个函数的复合是一个函数。

(2)函数 $g\circ f$ 称为f和g的左复合，

(3)简记为g(f(x))

思考：复合关系与复合函数表达式的区别？

§2逆函数和复合函数

例： f: X→Y=ln (x)， g:Y→Z= siny，

则$g \circ f = \mathrm{g(f(x))} = \sin(\ln x)$

例： 设X={1,2,3}, Y={p,q}, Z={a,b}

f: X→Y={<1,p><2,p><3,q>}

g:Y→Z={<p,b><q,b>}

则$g \circ f = \{<1,b><2,b><3,b>\}$

$g \circ f$ 是X→Z的函数

重点回顾

（1） 函数的概念与分类

函数（映射）f,并记为：f： X→Y。

入射函数

满射函数

双射函数

（2） 逆函数与复合函数的概念

逆函数 $f^{-1}: Y \to X$

复合函数 f: X→Y和g:W→Z

$$g \circ f \ = \ g(f(x))$$

第四章小结

（1） 能够理解函数的概念与分类。
（2） 能够理解逆函数与复合函数的概念。

第四章作业

P151 （1）

P197 (1)只需要完成复合函数的表达式