第四篇 图论

第七章　　图论

学习目标

(1)理解简单图的概念。
(2)理解路与回路的概念。
(3)学会图的矩阵表示法。
(4)理解欧拉图和汉密尔顿图的概念。
(5) 能够判断平面图。
(6)理解树与生成树的概念
(7)理解二叉树、最小生成树、最优二叉树的概念。

§1图的基本概念

1. 图的**《定义》**：一个图G是一个三元组 $<V(G),E(G),\Phi_G>$,可简化成：$G=<V,E>$。其中V(G)为有限非空结点（或叫顶点）集合，

V (G)结点集合分类：邻接点/孤立点。

E(G)是边的集合，

有向边/无向边/ 邻接边/ 环/平行边

Φ_G是从边集E到结点偶对集合上的函数。

§1图的基本概念

图G分类：无向图：每一条边都是无向边的图。
有向图：每一条边都是有向边的图。
混合图：既有无向边又有有向边的图。
多重图：含有平行边的图。
简单图：不含平行边的图。
完全图：每对结点都有连线的图。
无向完全图：每对结点都有连线的无向图

其边数为：$|e| = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

§1图的基本概念

2.结点的度数：在图G=〈V， E〉 中结点关联的边数，记作deg（v）。

入度：在有向图中射入一结点的边数称为该结点的入度deg（v^-）。

出度：在有向图中由一结点射出的边数称为该结点的出度deg（v^+）。

有向图中deg（v）＝deg（v^-）+deg（v^+）。

结点的最大度数，$\Delta(G) = \max\{\deg v \mid v \in V(G)\}$.

结点的最小度数，$\delta(G) = min\{\deg v \mid v \in V(G)\}$.

§1图的基本概念

定理1)：对无向图讲，结点的度数之和等于边数的二倍。

定理2)：在任何图中，度数为奇数的结点为，必是偶数个。

定理3)：在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和。

§1图的基本概念

1)补图：给定一个图G，由图G中所有结点以及所有能使G成为完全图的添加边所组成的图，称为G相对于完全图的补图或简称为G 的补图记作 $\overline{G}$ 。

2）子图：给定一个图G＝＜V，E＞，如有图G'＝＜V'，E'＞，且V'⊆V，E'⊆E，则称图G'为G的子图。

3)生成子图：如果G的子图，包含G 的所有结点，则称该子图为G的生成子图。

4)图的同构：(略)两个图点和边的关联关系等结构对应相同。

§2路与回路

1.路

路：图G=<V,E>, 其中ei为关联于点vi-1， vi的边，则其交替序列v0e0v1e1e2……envn称为v0到vn的路。

路径长度： v0和vn分别称作起点和终点，

边数n称为长度。

回路：当v0=vn时，称作回路。

迹：若所有边e1,e2,……en均不相同，称之为迹。

通路：若所有点v0,v1,……vn均不相同，称之为通路。

圈：除v0=vn外，其余点均不相同的路，称为圈。

§2路与回路

2.连通图：

1）点之间的连通：无向图G中，结点u和v之间存在一条路，则称u和v连通。

2）连通分支：对于结点集V，其划分为V1,V2,……,Vm，使Vj和Vk连通当且仅当它们都同属于一个Vi,则把子图G(V1),G(V2),……G(Vm)称为G的连通分支。其分支数记作W(G)。

3）连通图：若图G只有一个连通分支，称G为连通图。

§2路与回路

3.点割集：

1）割点：无向图G=<V,E>为连通图，若$V1 \subseteq V$，使得图G删去V1后，所得子图不连通， 而删去V1的真子集后却连通，则称V1为点割集，特别的，当V1为一个点时，称为割点。

2）点连通度：若图G不是完全图

$k(G)=\min\{|v1|，v1是G的点割集\}$，

称为G的点连通度。

§2路与回路

4. 边割集:

1）割边：无向图G=<V,E>为连通图，

若E1⊆E，使得图G删去E1后，所得子图不连通，

而删去E1的真子集后却连通，则称E1为边割集，

特别的，当E1为一条边时，称为割边。

2）边连通度：若图G不是完全图

$\lambda(G) = \min\{E1 \mid E1是G的边边割\}$,

称为G的边连通度。

§2路与回路

5. 可达：无向图G=<V,E>中，
从u到v有一条路，
称u可达v。

6.可分图（略）：

重点回顾

1. 图G的定义：

三元组<V(G),E(G), Φ_G>,简化成： G＝< V， E >。

V(G)结点集， E(G)边集， Φ_G从E到V的函数。

2.路的定义

路：图G=<V,E>, 其中ei为关联于点vi-1，vi的边，

则其交替序列v0e0v1e1e2......envn称为v0到vn的路。

点连通度

边连通度

§3图的矩阵表示

1.图的矩阵表示：图G=<V,E>，简单图，有 n 个结点V={v1,v2,……,vn}，则称n阶方阵A(G)=(aij)为图G的邻接矩阵。其中，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 若\ \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0 & 若\ \langle v_i, v_j \rangle \notin E \end{cases}$$

§3图的矩阵表示

2.可达性矩阵：

图G=<V,E>，为简单图，$|V|=n$，

如果G的结点已经排序，即

V={v1,v2,……,vn}，定义n阶方阵P=(Pij)

为图G的可达性矩阵。其中，

$$P_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{存在路。}\\ 0 & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{不存在路。}\end{cases}$$

§ 3图的矩阵表示

2. 可达性矩阵：

图G=<V,E>，为简单图，$|V|=n$，

如果G的结点已经排序，即

V={v1,v2,……,vn}，定义n阶方阵P=(Pij)

为图G的可达性矩阵。其中，

$$P_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{存在路。}\\0 & \text{若}v_i\text{到}v_j\text{不存在路。}\end{cases}$$

求法：令$B_n=A+A^2+A^3+\ldots\ldots+A^n$，

再令B_n中不为零元素换为1，其余不变即可得P,

其求法可类似于传递闭包的传递矩阵的求法。

§3图的矩阵表示

3.完全关联矩阵:

给定无向图G=<V,E>,

令v1,v2,……,vp和e1,e2,……,eq

分别为G的结点和边则

M(G)=(mij)为图G的完全关联矩阵。其中,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & 若 v_i 关联 e_j。\\ 0 & 若 v_i 不关联 e_j。\end{cases}$$

§3图的矩阵表示

3.完全关联矩阵：给定有向图G=<V,E>，

令v1,v2,……,vp和1,e2,……,eq分别为G的结点和边

则M(G)=(mij)为图G的可达性矩阵。

其中，称为有向图G为完全关联矩阵。

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若}v_i\text{为}e_j\text{的起点。}\\ -1 & \text{若}v_i\text{为}e_j\text{的终点。}\\ 0 & \text{若}v_i\text{不关联}e_j\text{。}\end{cases}$$

称为有向图G为完全关联矩阵。

§4欧拉图与汉密尔顿图

1.欧拉图：

欧拉路：在无孤立结点的图G中，经过图G的每一条边一次且仅一次的路径。

欧拉回路：在无孤立结点的图G中，经过图G的每一条边一次且仅一次的回路。

欧拉图：具有欧拉回路的图。

定理：无向图G具有一条欧拉路径，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度数的结点。

推论：无向图G具有一条欧拉循环，当且仅当G是连通的，且所有结点度数全为偶数

§4欧拉图与汉密尔顿图

2.汉密尔顿图：

汉密尔顿路：在无孤立结点的图G中，

经过图G的每一个点一次且仅一次的路径。

汉密尔顿回路：在无孤立结点的图G中，

经过图G的每一个点一次且仅一次的回路。

汉密尔顿图：具有汉密尔顿路的图。

重点回顾

1.图的矩阵表示

邻接矩阵、

可达性矩阵、

完全关联矩阵

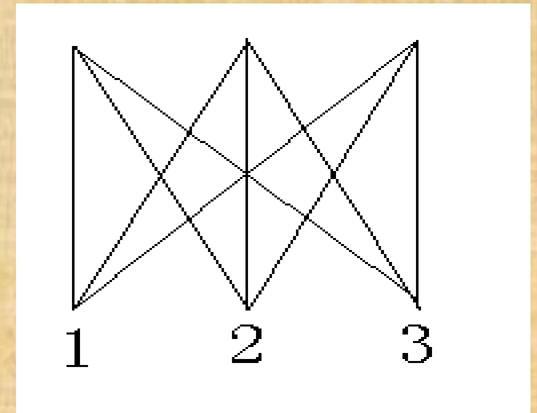
2.欧拉图与汉密尔顿图

欧拉图中有经过图中每个节点一次且仅一次的路

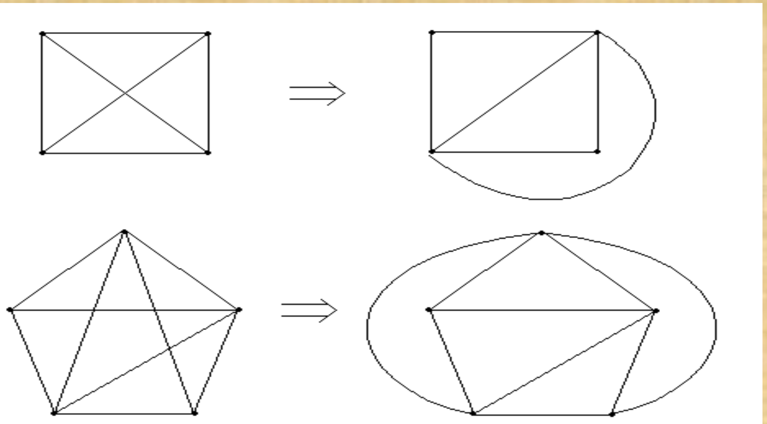
汉密尔顿图有经过图中每条边一次且仅一次的路

§5平面图

1.平面图：设G=<V,E>是一个无向图，如果能够把G的所有结点和边画在平面上，且使得任何两条边除了端点外没有其它的交点，就称G是一个平面图。



a)非平面图



b)平面图

§5平面图

2 .面：设G是一连通平面图，

由图中的边所包围的区域，

在区域内既不包含图的结点，

也不包含图的边，

这样的区域称为G的一个面。

包含面的诸边构成的回路，称为面的边界，

一个面的边界的回路长度称为该面的次数，

记作deg(r)。

§5平面图

3 .例题：分析图G的面的次数。

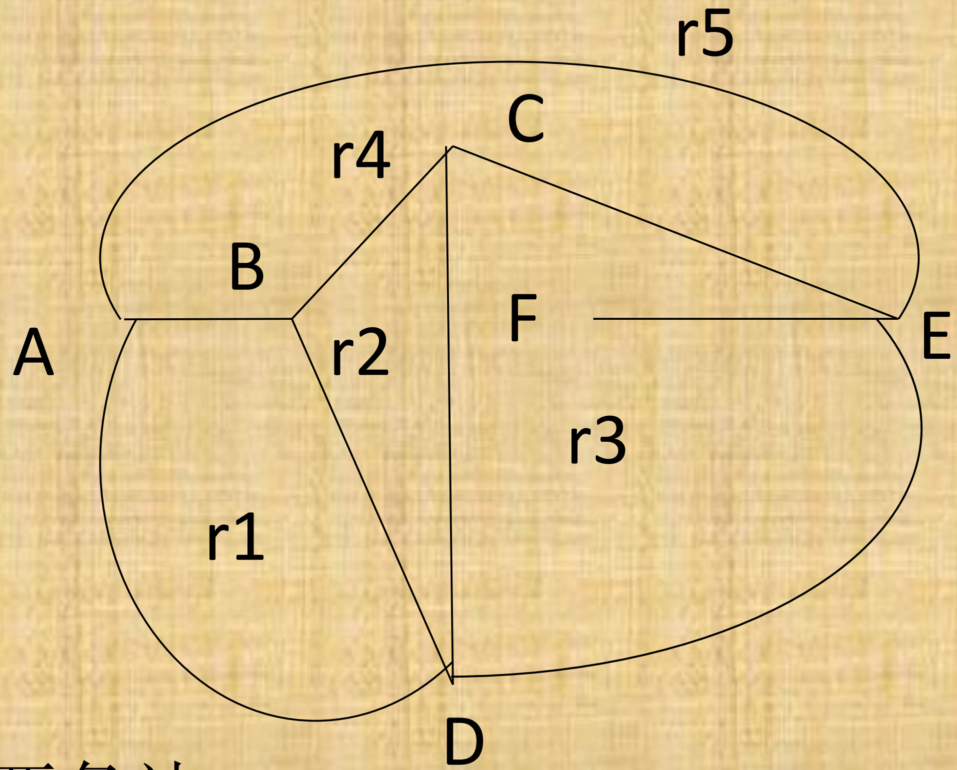
deg(r1)=3;

deg(r2)=3;

deg(r3)=5;

deg(r4)=4;

deg(r5)=3;



注意，EF和FE认为是两条边。

§5平面图

4 .定理7-5.1：一个有限平面图，

面的次数之和为边数的二倍。

定理7-5.2：(欧拉公式)设有一个连通的平面图G，

共有v个结点，e条边和r个面，

则有欧拉公式：

$v-e+r=2$。

定理7-5.3：设有一个连通的平面图G，

共有v个结点，若$v>=3$，则$e<=3v-6$。

重点回顾

1.平面图的定义

图G=<V,E>是一个无向图，所有结点和边画在平面上，且使得任何两条边除了端点外没有其它的交点。

2.定理

平面图面的次数之和为边数的二倍。

平面图面的欧拉公式：v-e+r=2。

§6*对偶图与着色

1．对偶图：给定平面图G=<V,E>，它具有面$F_1,F_2,\ldots,F_n$,若有图$G^*=<V^*,E^*>$满足下述条件：

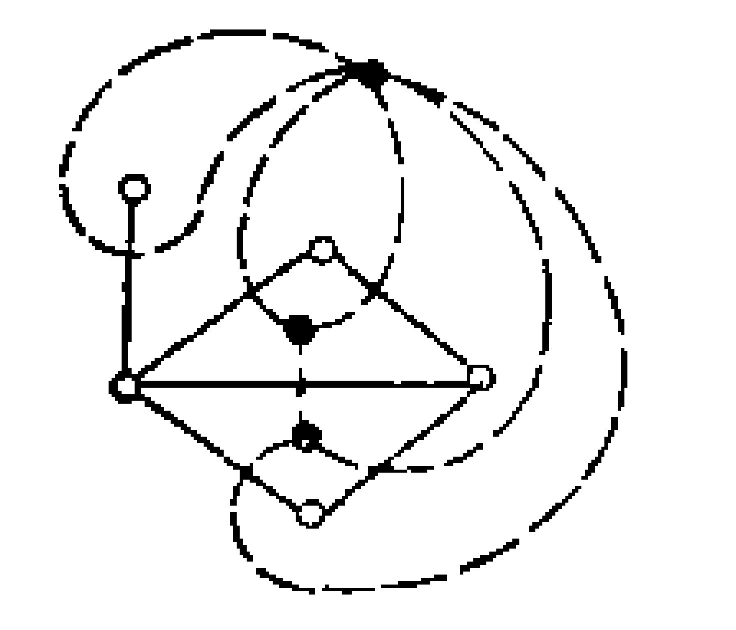
(a)对于图G的任一个面F_i，内部有且仅有一个结点$v_i^* \in V^*$。

(b)对于图G的面Fi,Fj的公共边界e_k，存在且仅存在一条边，$e_k^* \in E^*$。使$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$，且e_k^*与e_k相交。

(c)当且仅当e_k只是一个面Fi的边界时，v_i^*存在一个环e_k^*和e_k相交。则称图G*是图G的对偶图。

§6*对偶图与着色

对偶图示例：



§6*对偶图与着色

2．着色：图G的正常着色（或简称着色）是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个邻接的结点有同一种颜色。如果图G在着色时用了n种颜色，则称G为n色的。对于图G着色时，需要的最少颜色数称为G的着色数，记作x(G)。

3．定理：对于n个结点的完全图Kn，有x(Kn)=n。
定理：任意平面图G，最多是5色的。

§7树与生成树

1.无向树（树）：一个连通无回路的无向图称为树。

树的等价定义:

1）无回路的连通图。

2）无回路且e=v-1，其中e是边数，v是结点数。

3）连通且e=v-1。

4）无回路，但增加一条新边，

得到一个且仅有个回路。

5）连通，但删去任一边后便不连通。

6）每一对结点之间有一条且仅有一条路。

§7树与生成树

无向树（树）的专用名词：

树叶(终点)：树中度数为1的结点。

内点(分枝点)：树中度数大于1的结点。

森林：每个连通分支均为树的图。

定理：任意一颗数至少都有两片叶子。

§7树与生成树

2.生成树：一个无向图G的生成子图是树，
则该树称为图G的生成树(支撑树)。

3.最小生成树：假定G是具有 n 个结点的连通图，
对应于G的每一条边 e，指定一个正数C(e)，
把C(e)称为边e的权，
G的生成树T也有一个树权C(T)，
它是T的所有边权的和，在一个连通图中，
树的权最小的生成树称为最小生成树。

求解算法（略，有克鲁斯卡尔算法和普里姆算法）

§8根树及其应用

1.有向树：如果一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树，那么这个有向图称为有向树。

2.根树：一棵有向树，如果恰有一个入度为0的结点，其余所有结点的入度都为1，则称为根树。

入度为0的结点称为根，

出度为0的结点称为叶，

出度不为0的结点称为分枝点或内点。

§8根树及其应用

3.二叉树：

1)结点的出度小于或等于m的根数，称为m叉树。

特别，当m=2时，称为二叉树。

2)若每个结点的出度恰好等于m或零，

则称这棵树为完全m叉树，

3)若其所有树叶层次相同，称为正则m叉树。

4)定理：完全m叉数，其树的叶数为t，分支点数为i，
则有，(m-1)*i=t-1；

§8根树及其应用

4.最优二叉树：给定组权w1,w2,…,wt,

不妨设w1<=w2<=…<=wt.

设有一棵二叉树，共有t片树叶，

分别带权w1,w2,…,wt,该二叉树称为带权二叉树，

若带为wi的树叶，其通路长度为L(wi),则把

$$w(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i L(w_i)$$

称为带树二叉树的权。

而其中权值最小的那棵树，称为最优二叉树。

求解算法（略）。

重点回顾

1.无向树（树）：

一个连通无回路的无向图称为树。

树的等价定义：连通且$e=v-1$。

2.生成树：

无向图G的生成子图是树，则该树称为图G的生成树。

3.最小生成树：

连通图G生成树T，其树权C(T) 最小的生成树称为最小生成树。

4.二叉树：

结点的出度小于或等于2的树，称为二叉树。

第七章 小 结

(1)理解简单图的概念。

(2)理解路与回路的概念。

(3)学会图的矩阵表示法。

(4)理解欧拉图和汉密尔顿图的概念。

(5) 能够判断平面图。

(6)理解树与生成树的概念

(7)理解二叉树、最小生成树、最优二叉树的概念。

第七章 作业（略）

P311/ (1)