第二章 谓词逻辑

- §1 谓词的概念与表示法
- §2 命题函数与量词
- §3 谓词公式与翻译
- §4 变元的约束
- §5 谓词演算的等价式与蕴含式
- §6 前束范式
- §7 谓词演算的推理理论

学习目标

（1）理解谓词与命题函数的概念，会翻译。

（2）掌握谓词公式的等价式与蕴含式。

（3）掌握前束范式的求法。

（4）熟练掌握谓词公式的推理方法和规则。

§1 谓词的概念与表示法

1.谓词概念：

《**定义**》：用以刻划客体的性质或关系的即是**谓词**。

例：张华是学生，李明是学生。则可把它表示成：

H:表示“是学生”，

j:表示“张华”，m:表示“李明”，

则符号化上述命题为：$H(j)$，$H(m)$，

H 称为“谓词”，大写字母表示。

j,m称为“客体”，小写字母表示。

§1 谓词的概念与表示法

2. n元谓词

（1）**谓词填式**：谓词字母后填以客体所得的式子。

例：H(a, b)

（2）**一元谓词**，若谓词字母联系着一个客体；

二元谓词，若谓词字母联系着二个客体；

n元谓词，若谓词字母联系着n个客体。

（3）客体的次序必须是有规定的。

例：河南省北接河北省。

n　　L　　b

写成为：L(n,b)，但不能写成L(b,n) 。

§2 命题函数与量词

1. 命题函数

客体在谓词表达式中可以是任意的名词。

例：C—“总是要死的。”

j：张三；t：老虎；e：桌子。

则C(j), C(t), C(e)均表达了命题。

用变元x表示客体变元时，称C(x)为命题函数。

例如上面C(x)表示“x总是要死的”。

§2 命题函数与量词

2.量词

（1）全称量词，

符号"∀"，读作"对于所有的"，"对任一个"。

例："所有的都是苹果"，可写成 $(\forall x)A(x)$。

（2）存在量词

符号"∃"，读作"存在一个"，"对于一些"，"对于某些"，"至少存在一个"。

例："有一些的是苹果"，可写成 $(\exists x)A(x)$。

§2 命题函数与量词

3.命题函数的个体域

（1）全称量词$(\forall x)$，

例如，$(\forall x)A(x)$的取值范围。

$(\forall x)\,P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

（2）存在量词$(\exists x)A(x)$

例如，$(\exists x)A(x)$的取值范围。

$(\exists x)\,Q(x) \Leftrightarrow Q(a_1) \vee \ldots \vee Q(a_n)$ 。

重点回顾

1.谓词概念：

《定义》：用以刻划客体的性质或关系的即是**谓词**。

符号化：$H(j)$，$H(m)$， H 为“谓词” j为“客体”。

2. 命题函数

客体在谓词表达式中可以是任意的名词。
用变元x表示客体变元时，称$C(x)$为命题函数。
例如C表示“要参加考试”，

$C(x)$表示“x要参加考试”。

§ 3谓词公式与翻译

1.谓词公式《定义》

(1)原子谓词公式是谓词公式；

(2)若A是谓词公式，则$\neg A$也是谓词公式；

(3)若A, B都是谓词公式，则

$(A\wedge B),(A\vee B),(A\rightarrow B),(A\leftrightarrow B)$都是谓词公式；

(4)若A是谓词公式，x是任何变元，则$\forall xA$, $\exists xA$也都是谓词公式；

(5)只有按(1)-(4)所求得的那些公式才是谓词公式。（简称“公式”）。

§3谓词公式与翻译

2.翻译

例1：任何整数或是正的，或是负的。

解：设：$I(x)$: x是整数；$R_1(x)$：x是正数；

$R_2(x)$：x是负数。

此句可写成：$(\forall x)(I(x) \rightarrow (R_1(x) \vee R_2(x)))$。

例2：符号化：“所有的人总是要死的。

因为苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。”

解：设$M(x)$：x是人；$D(x)$：x是要死的；

s:苏格拉底。

写成符号形式：$\forall x(M(x) \rightarrow D(x))$，$M(s) \Rightarrow D(s)$

重点回顾

谓词公式《定义》

(1)原子谓词公式是谓词公式;

(2)若A是谓词公式，则$\neg A$也是谓词公式;

(3)若A, B都是谓词公式，则

$(A\wedge B),(A\vee B),(A\rightarrow B),(A\leftrightarrow B)$都是谓词公式;

(4)若A是谓词公式，x是任何变元，则$\forall xA$, $\exists xA$也都是谓词公式;

(5)只有按(1)-(4)所求得的那些公式才是谓词公式。（简称“公式”）。

§ 4变元的约束

1.辖域： 紧接在量词后面括号内的谓词公式。

例： $\forall xP(x)$ ，$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 。

2.自由变元与约束变元

约束变元：在量词的辖域内，且与量词下标相同的变元。

自由变元：当且仅当不受量词的约束。

例： $\forall xP(x,y)$ ，$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(P(x,y))$ 。

§ 4变元的约束

3.约束变元的改名规则

任何谓词公式对约束变元可以改名。

4.代入规则： 对公式中的自由变元的更改叫做代入。

(a)对公式中出现该自由变元的每一处进行代入，

(b)用以代入的变元与原公式中所有变元的名称不能相同。

5.个体域量化命题的真值：

$(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

$(\exists x)\ Q(x) \Leftrightarrow Q(a_1) \vee \ldots \vee Q(a_n)$

重点回顾

- 谓词公式与翻译

1.谓词公式

2.翻译

变元的约束

1.自由变元代入

2.约束变元换名

§5谓词演算的等价式与蕴含式

1.等价式：

（1）命题公式可推广；

（2）量词与联结词¬的联系；

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

$$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$$

（3）∨、∧，量词无关约束可移前；

$$(\forall x)A(x) \vee B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \vee B))$$

$$(\forall x)A(x) \wedge B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B))$$

$$(\exists x)A(x) \wedge B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B))$$

$$(\exists x)A(x) \vee B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \vee B))$$

§5谓词演算的等价式与蕴含式

（4） →，量词无关约束移前要转变；

$(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$

证明: $(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$

$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

证明: $(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

§5谓词演算的等价式与蕴含式

（5） 全称合取，存在吸取成等价

$(\forall x)(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)$

$(\exists x)(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \lor (\exists x)B(x)$

事实验证法：

A(x) :x在唱歌， B(x):x在跳舞；

翻译上述公式。

§5谓词演算的等价式与蕴含式

2.蕴含式：

（1） 全称吸取，存在合取成蕴含

$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

事实验证法：

A(x) :x在唱歌， B(x):x在跳舞；

翻译上述公式。

§5谓词演算的等价式与蕴含式

2.蕴含式：

（2） 全称条件成蕴含

$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$

事实验证法：

A(x) :x在唱歌， B(x):x在跳舞；

翻译上述公式

重点回顾

- 1.等价式：

（1）命题公式可推广

（2）量词与联结词¬的联系

（3）∨、∧，量词无关约束可移前

（4）→，量词无关约束移前要转变;

（5）全称合取，存在吸取成等价

- 2.蕴含式

（1）全称吸取，存在合取成蕴含

（2）全称条件成蕴含

§6 前束范式

1.《定义》

一个公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则称此公式叫前束范式。

例： $\forall x \exists y \forall z(\neg Q(x,y) \vee R(z))$ (前束范式)

2.《定理》

任何一个谓词公式均和一个前束范式等价。

§6 前束范式

3.求法:

（1）否定深入去条件;

（2）量词无关约束可移前;

（3） 换名代入可转变。

§6 前束范式

例： 把$(\forall x) P(x) \to (\exists x) Q(x)$ 变成前束范式。

$$(\forall x) P(x) \to (\exists x) Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x) P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x) \neg P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$$

例： 把$(\forall x) P(x) \vee R(x)$变成前束范式。

$$(\forall x) P(x) \vee R(x) \Leftrightarrow (\forall y) P(y) \vee R(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y)(P(y) \vee R(x))$$

前束范式求解示例（略）

前束范式求解示例（略）

重点回顾

前述范式求法：

（1）否定深入去条件；

（2）量词无关约束可移前；

（3） 换名代入可转变。

§7谓词演算的推理理论

1.推理方法

（一）直接推论法；

（二） CP规则法；

要证： $S \Rightarrow R \rightarrow C$

只要证： $S \wedge R \Rightarrow C$

（三）间接证明法。

要证： $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow C$

只要证： $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C \Leftrightarrow F$

§7 谓词演算的推理理论

2.推理规则

（1）全称指定规则（US规则）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$$

（2）全称推广规则（UG规则）

$$A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

（3）存在指定规则（ES规则）

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

（4）存在推广规则（EG规则）

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

§7谓词演算的推理理论

例：证明苏格拉底论证

$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))\wedge M(s) \Rightarrow D(s)$

(1) $M(s)$ P

(2) $\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$ P

(3) $M(s)\rightarrow D(s)$ US(2)

(4) $D(s)$ T(1)(3)i

§7谓词演算的推理理论

例： 证： $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$, $\exists xH(x) \Rightarrow \exists xM(x)$

(1)	$\exists xH(x)$	P
(2)	$H(c)$	ES(2)
(3)	$\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(4)	$H(c)\rightarrow M(c)$	US(3)
(5)	$M(c)$	T(2)(4)I
(6)	$\exists xM(x)$	EG(5)

§ 7谓词演算的推理理论

例： 证: $\exists x\,(P(x)\rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\,P(x)\rightarrow \exists x Q(x)$

(1) $\forall x\,P(x)$	P（附加）
(2) $\exists x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(c)\rightarrow Q(c)$	ES (2)
(4) $P(c)$	US (1)
(5) $Q(c)$	T (4) (3) I
(6) $\exists x Q(x)$	EG (5)
(7) $\forall x\,P(x)\rightarrow\exists x Q(x)$	CP

注意要先存在后全称量词转化。

§7谓词演算的推理理论

例：证明：$\neg\forall x(P(x)\wedge Q(x)), \forall xP(x) \Rightarrow \neg \forall xQ(x)$

(1) $\neg\neg \forall xQ(x)$	P（附加）
(2) $\forall xQ(x)$	T (1) E
(3) $Q(c)$	US (2)
(4) $\forall xP(x)$	P
(5) $P(c)$	US (4)
(6) $P(c)\wedge Q(c)$	T (3) (5) I
(7) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$	UG (6)
(8) $\neg\forall x(P(x)\wedge Q(x))$	P
(9) $\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \wedge \neg\forall x(P(x)\wedge Q(x))$	T (7) (8) I
(10) F	

§7谓词演算的推理理论

例：证明 $\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))\,,\ \neg Q(a) \Rightarrow \forall x\,\neg P(x)$

(1) $\neg Q(a)$	P
(2) $\forall x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(a)\rightarrow Q(a)$	US(2)
(4) $\neg P(a)$	T(1)(3)I
(5) $\forall x\,\neg P(x)$	UG(4)

重点回顾

谓词演算推理方法

（一）直接推论法；

（二） CP规则法；

要证： $S \Rightarrow R \rightarrow C$

只要证： $S \wedge R \Rightarrow C$

（三）间接证明法。

要证： $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow C$

只要证： $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C \Leftrightarrow F$

第二章小结

（1）理解谓词与命题函数的概念，会翻译。
（2）掌握谓词公式的等价式与蕴含式。
（3）掌握前束范式的求法。
（3）熟练掌握谓词公式的推理方法和规则。★

第二章作业

P60　(2)g),h),i),j),k),l)

P75　(1) c)

(2) d)

P79　(1)b),d)

(2)b)

(3)c)