天津科技大学概率与统计B检测题1答案

一.

1. $AB\overline{C}$， $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$(A\cup B)\overline{C}$； 2. 0.6 ； 3. 0.54；4. 0.2 ； 5. 0.3,0.7.

二. **1**. ④； **2**. ①； **3**. ②.

三.

1. 由 $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{AB}\right)=1-P\left(AB\right)=0.8$， 得 $P\left(AB\right)=1-0.8=0.2$；

$$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-\left[P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)\right]$$

$$=1-\left[0.45+0.3-0.2\right]=0.45；$$

$$P\left(B-A\right)=P\left(B\right)-P\left(AB\right)=0.3-0.2=0.1；$$

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=1-P\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right)=1-P\left(\overline{A}B\right)=1-P\left(B-A\right)=1-0.1=0.9。$$

2. 由 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$

天津科技大学概率与统计B检测题2答案

一. 1． $\frac{1}{9}$； 2． 0.504； 3． $\frac{10}{21}$； 4． 0.82 ．

二. 1．①； 2．③； 3．①.

三.

1. 由 $P\left(AB\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cup B\right)=0.5+0.4-0.6=0.3$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75$$

由 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.3=0.2$

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.2}{1-P(B)}=\frac{0.2}{1-0.4}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

2. 设 $A=\{$先由甲组抽取一男生$\}$， $B=\{$再由乙组抽取一男生$\}$.

（1） $P(AB+\overline{A}\overline{B})=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{10}{20}=0.5$

（2） $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}=0.05$

3. 设事件 $A=\{$第一次抽到的是白球$\}$， $B=\{$第二次抽到的是白球$\}$.

$$P=P(AB)+P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})$$

$$=\frac{5}{5+10}\cdot\frac{5-1}{5+10-1}+\frac{10}{5+10}\cdot\frac{10-1}{5+10-1}=\frac{11}{21}\approx 0.5238$$

4. 设 A_1，A_2，A_3 表示抽到的产品分别为甲、乙、丙车间生产的事件，记 $B=\{$抽到是优质品$\}$。

由全概率公式 $P\left(B\right)=\sum_{i=1}^{3}P\left(A_i\right)P\left(B|A_i\right)=0.6\times0.7+0.25\times0.8+0.15\times0.9$

$$=0.42+0.2+0.135=0.755$$

天津科技大学概率与统计B检测题　3　答案

一.

1．0.98；　2．0.92；　3．$\dfrac{3}{7}$；　4．$\dfrac{125}{324}$；　5.（1）0．64，（2）0．96.

二．1．③；　2．④；　3．④.

三.

1. 用 A, B 分别表示从甲、乙两个流水线上的产品中抽取的灯泡寿命大于 2500 小时，则它们相互独立.

(1) $P(AB) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.9 = 0.72$,

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8 + 0.9 - 0.72 = 0.98$,

(3) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\overline{B}) = 0.2 + 0.1 - 0.2 \times 0.1 = 0.28.$

2. 由 $P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$ 得 $P(A - AB) = P(B - AB)$

即 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$，从而 $P(A) = P(B)$

由独立性，$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{B}) = P(\overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{A}) = \dfrac{1}{9}$,

从而 $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{3}$，故 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{2}{3}$.

天津科技大学概率与统计B检测题4答案

一.

1．0.6,　0.1,　0.9；　　2．$1-5e^{-2}\approx 0.3233$；　　3．1；

4．

X	0	1	2
p	0.833	0.152	0.015

二．1．③；　2．①；　3．①.

三.

1. 随机变量X可以取值0，1，2，3. $P(X=k)=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k}$　　$k=0,1,2,3.$

所以，X的概率函数为

X	0	1	2	3
p	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

2.　X的所有可能取值为3，4，5.

$X=3$：取出的3个球，号码分别只能为1，2，3，所以$P(X=3)=\frac{1}{C_5^3}=0.1$；

$X=4$：取出的3个球中，1只球号码是4，另外两个号码可在1,2,3中任取2只，共有C_3^2种，所以$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3$；

$X=5$：取出3只球中，1只球的号码是5，另外两个号码可在1,2,3,4中任取2只，共有C_4^2种，所以$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6$.（或

$P(X=5)=1-P(X=4)-P(X=3)=0.6$）

从而X的概率函数为

X	3	4	5
p	0.1	0.3	0.6

天津科技大学概率与统计B检测题5答案

一．　1．1，　0；　　2．2，　0.3，　$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1\le x\le 1\\ 0,\quad 其他\end{cases}$ ；

3．$1-e^{-1}\approx 0.6321$，　　$e^{-1}-e^{-2}\approx 0.2325$ 。

二．1．①；　　2．③.

三.

1.　(1) 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}ae^{x}dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}dx=ae^{x}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}=a+\frac{1}{2}$，得$a=\frac{1}{2}$。

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 。

当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$，

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$，

当$x\ge 2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}dt=1$。

所以，随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$ 。

（3）$P(X>-1)=1-F(-1)=1-\frac{1}{2e}\approx 0.8161$。

2.　（1）由连续型随机变量的分布函数的性质，有

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=A-\frac{\pi}{2}B=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A+\frac{\pi}{2}B=1\end{cases}$ 解得$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$，于是$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$。

（2）由于在 $F(x)$ 的可导点 $F'(x)=f(x)$，得随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x\in\mathbb{R}$$

（3）$P(|X|<1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

3. （1）$P(X\geq 1500)=\int_{1500}^{+\infty}f(x)dx=1000\int_{1500}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1000}{x}\right]_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}$

(2) 各元件工作相互独立，寿命大于 1500 小时的元件数 $Y\sim B(4,\frac{2}{3})$。

所求概率为

P（4 只中至少有 1 只寿命大于 1500 小时）$=P(Y\geq 1)$

＝$1-P$（4 只寿命都小于 1500 小时）

＝$1-P_4(0)=1-(1-\frac{2}{3})^4=\frac{80}{81}$

（或＝$P_4(1)\ P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=\frac{80}{81}$）

天津科技大学概率与统计B检测题6答案

一． 1．$\alpha=\dfrac{2}{9},\beta=\dfrac{1}{9}$；

2． $f(x)=\begin{cases}1/4, & 0<x<2,\ 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ， $\dfrac{3}{4}$；

3．$(1-e^{-4})e^{-3}\approx 0.0489$.

4． $f(x)=\begin{cases}e^{-y},0\le x\le 1,y>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

二.

1. 由 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ ； $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ 及

随机变量 X 与 Y 相互独立，得

$$f(x,\ y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<2,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

所以

$$P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y}f(x,\ y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{y}{2}}dy=-\frac{1}{2}\int_0^2e^{-\frac{y}{2}}\Big|_x^{+\infty}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2e^{-\frac{x}{2}})dx=[-e^{-\frac{x}{2}}]\Big|_0^2=1-e^{-1}\approx 0.6321.$$

2. （1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=k\int_0^1dx\int_0^1xydy=\dfrac{k}{4}$，得 $k=4$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$； $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当$0 \le x \le 1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$

当$y<0$或$y>1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$，

当$0 \le y \le 1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 4xydx=2\mathrm{y}$.

所以，$f_X(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$；　　$f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（**3**）由于$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$，所以随机变量X与Y相互独立。

（**4**）　$P(Y \le 0.5)=\int_0^{0.5} 2ydy=\frac{1}{4}$；

$P(X \ge 0.5, Y \le 0.2)=\int_0^{0.2} dy\int_{0.5}^{1} 4xydx=0.03$

天津科技大学概率与统计 B 检测题 7 答案

一．1．

Y	0	1	2	3	7
P	0.3	0.2	0.1	0.2	0.2

，

Z	-4	0	1	2	3
P	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3

W	0	1	4	25
P	0.1	0.4	0.3	0.2

；

2．

$2X-1$	-3	-1	1	3	5
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

；

X^2+1	1	2	5	10
P	0.1	0.3	0.3	0.3

二．1．① 　　2．②

三．1. 解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-\sqrt[3]{X}\le y)=P(\sqrt[3]{X}\ge 1-y)=P(X\ge (1-y)^3)$

$$=1-P(X<(1-y)^3)=1-F_X\left((1-y)^3\right),\ \ x\in \square$$

$$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\left[1-F_X\left((1-y)^3\right)\right]'=f_X\left((1-y)^3\right)\cdot 3(1-y)^2$$

$$=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]},\quad x\in \square$$

2. 解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(6-4X\le y)=P(X\ge \frac{6-y}{4})$

$$=1-P(X<\frac{6-y}{4})=1-F_X(\frac{6-y}{4})$$

由于 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0\le x\le \pi\\ 0，& 其他\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\left[1-F_X(\frac{6-y}{4})\right]'=f_X(\frac{6-y}{4})\cdot\frac{1}{4}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & 6-4\pi\le y\le 6\\ 0, & 其他\end{cases}$

3. 解 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X+8 \le y) = P(X \le \frac{y-8}{2}) = F_X(\frac{y-8}{2})$$

于是 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\frac{y-8}{2}).\frac{1}{2}$

注意到 $0 < x < 4$ 时，$f_X(x) \ne 0$，即 $8 < y < 16$ 时，$f_Y(y) = f_X(\frac{y-8}{2}).\frac{1}{2} \ne 0$.

所以 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

天津科技大学概率与统计B检测题8答案

一． 1．2.1，5.7， 1.29，22.1； 2． 4，20； 3．8，0.3； 4． 3， 2；5．0， 8；

二． 1．②； 2．①； 3．④.

三．1．解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{1}x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\text{。}$$

2．解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}x\cdot xdx+\int_{1}^{2}x\cdot(2-x)dx=1$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{1}x^2\cdot xdx+\int_{1}^{2}x^2\cdot(2-x)dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}\text{。}$$

天津科技大学概率与统计B检测题9答案

一. 1．$\nu_k(X)=\dfrac{1}{k+1}$；2．3，7； 3．不相关。

二. 1．②； 2．②。

三.

1.

解：（1）根据 $p_X(x_i)=\sum_j p(x_i,y_j)$ 与 $p_Y(y_j)=\sum_i p(x_iy_j)$ 得 X 与 Y 的边缘分布分别为

X	0	1
$p_X(x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

Y	0	1
$p_Y(y_j)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$$E(X)=E(Y)=\frac{5}{8},\quad D(X)=D(Y)=\frac{5}{8}-\left[\frac{5}{8}\right]^2=\frac{15}{64},$$

$$E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jP(x_i,y_j)$$

$$=0\times0\times\frac{1}{4}+0\times1\times\frac{1}{8}+1\times0\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{64}$,

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{7}{64}}{\sqrt{\frac{15}{64}}\cdot\sqrt{\frac{15}{64}}}=\frac{7}{15}.$$

2 解：由题意得 $0=E(rX-s)=rEX-s=4r-s$,

$$1=D(rX-s)=r^2DX=25r^2,$$

解方程组

$$\begin{cases} 4r - s = 0 \\ 25r^2 = 1 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{5} \\ s_1 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$，$\begin{cases} r_1 = -\dfrac{1}{5} \\ s_1 = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$.

3. 解： $EX = 2$ $EY = 2$ $DX = 1.8$ $DY = 1.8$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} \cdot \rho_{XY} = \sqrt{1.8} \cdot \sqrt{1.8} \cdot \frac{1}{2} = 0.9$$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X,Y) = 1.8 + 1.8 + 2 \times 0.9 = 5.4$$

$$\operatorname{cov}(X, 2Y - X) = \operatorname{cov}(X, 2Y) - \operatorname{cov}(X, X)$$

$$= 2\operatorname{cov}(X,Y) - D(X) = 2 \times 0.9 - 1.8 = 0.$$

4. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 4x^2 y dy)dx = \dfrac{2}{3}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 4xy^2 dy = \dfrac{2}{3}$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 4x^2 y^2 dy = \dfrac{4}{9}$

于是，协方差 $\operatorname{cov}(X，Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = 0$

随机变量 X 与 Y 的相关系数

$$R(X，Y) = \frac{\operatorname{cov}(X，Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

天津科技大学概率与统计B检测题10答案

一. 1．$\dfrac{1}{16}$ ；　2．$\dfrac{3}{4}$；　3．$\dfrac{3}{4}$。

二. 1．④；　2．③；　3．②.

天津科技大学概率与统计B检测题11答案

一. 1. 46。　2. 0.5；0.8413；0.1587；0.9750；1.96；1.645。

3. 0.2858；0.7745。　4. 3。　5. 0.2。

二. 1. ③。2. ②。3. ④。

三. 1. 解 由已知有 $E(X)=-3$，$D(X)=1$，$E(Y)=2$，$D(Y)=1$，依独立性及性质可得 $E(Z)=E(X)-2E(Y)+7=-3-2\times2+7=0, D(Z)=D(X)+4D(Y)=1+4\times1=5$

再由 X,Y 都是正态随机变量，且相互独立，则 Z 也服从正态分布，因此 Z 的概率密度为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{z^2}{10}},\quad z\in\square$$

2. 解 $P\{|X-10|<a\}=P\{-a<X-10<a\}=P\{-\frac{a}{2}<\frac{X-10}{2}<\frac{a}{2}\}$

$$=\Phi(\frac{a}{2})-\Phi(-\frac{a}{2})=2\Phi(\frac{a}{2})-1=0.9$$

于是，有 $\Phi(\frac{a}{2})=0.95$，查标准正态分布表得 $\frac{a}{2}=1.645$，所以 $a=3.290$.

3.

解

$$P\{120<X\le200\}=\phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right)$$

$$=\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right)=2\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1$$

于是，要使 $P\{120 < X \le 200\} \ge 0.80$，即 $2\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.80$，或 $\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \ge 0.90$ 则

由 $\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \ge 0.90$，反查标准正态分布表得 $\phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \ge \phi(1.28)$。因为 $\phi(x)$ 是单调非降函数，所以由 $\frac{40}{\sigma} \ge 1.28$，得 $\sigma \le 31.25$，故允许 σ 最大为 31. 25。

4. 解 由 $X \sim N(0,\ 1)$，有 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty < x < +\infty)$

当 $y \le 0$ 时，由 $(Y \le y) = (e^{-X} \le y)$ 是不可能事件，得 $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$，

$f_Y(y) = 0$.

当 $y > 0$ 时，由 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{-X} \le y) = P(X \ge -\ln y) = 1 - F_X(-\ln y)$

两边对 y 求导，得 $f_Y(y) = f_X(-\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\ (y > 0)$

所以 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

天津科技大学概率与统计B检测题12答案

一． 1．$f(u,v)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\ (-\infty<u,v<+\infty)$。 2. $1-\Phi(\dfrac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$。

二．1. ③。

三．1. 解 易知$E(V_k)=3,\ D(V_k)=36/12=3\ (k=1,2,\cdots,300)$． 由林德柏格-列维中心极限定理，随机变量$Z=\dfrac{\sum_{k=1}^{300}V_k-300\times 3}{\sqrt{300\times 3}}=\dfrac{V-900}{30}$近似服从标准正态分布$N(0,1)$，于是

$$P\{V>930\}=P\{\frac{V-900}{30}>\frac{930-900}{30}\}=1-P\{\frac{V-900}{30}\le 1\}\approx 1-\Phi(1)=0.1587.$$

2. 解（1）$X\sim B(100,0.2)$，概率函数为

$P\{X=k\}=C_{100}^k(0.2)^k(0.8)^{100-k}$, k=0,1,2,...,100。

⑵ $E(X)=100\times 0.2=20$, $D(X)=100\times 0.2\times 0.8=16$，由$D-L$中心极限定理得

$$P\{14\le X\le 30\}=P\{\frac{14-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{30-20}{4}\}=P\{-1.5\le\frac{X-20}{4}\le 2.5\}$$

$$\approx\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.9938+0.9332-1=0.927$$

3. 解 用X表示工作的机床台数，则$X\sim B(100,0.8)$，$E(X)=80$，$D(X)=16$。

设向该车间供电功率为m（kw），求m使

$$P\{0<X\le m\}=\sum_{k=0}^{m}C_{100}^k(0.8)^k(0.2)^{100-k}\ge 0.999$$

由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理得

$$P\{0<X\le m\}=P\{\frac{0-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\}\approx\Phi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(-\frac{np}{\sqrt{npq}})$$

$$=\Phi(\frac{m-80}{\sqrt{16}})-\Phi(-\frac{80}{\sqrt{16}})\approx\Phi(\frac{m-80}{\sqrt{16}})\geq 0.999$$

即 $\dfrac{m-80}{\sqrt{16}}\geq 3.1$，$m\geq 80+3.1\times 4=92.4$ (kw)

因此，若向该车间供电功率为92.4kw，那么由于供电不足而影响生产的可能性小于0.001。

天津科技大学概率与统计B检测题13答案

一． 1. $F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}F\left(x_i\right)$ 2. $\lambda,\dfrac{\lambda}{n}$

二． 1.（ ①③④⑥ ）. 2 .（ ②⑤ ）.

三.

1. 证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right),$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-2n\overline{X}^2+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}^2$$

2. 解：样本联合密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta)=\begin{cases}\theta^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\theta-1}, & 0<x_i<1,\ i=1,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3. 解：$E\left(\overline{X}\right)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\mu$

$$D\left(\overline{X}\right)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E\left(S^2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{\ 2}\right)-n\overline{X}^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{\ 2}\right)-nE\left(\overline{X}^2\right)\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right)-n\left(\sigma^2/n+\mu^2\right)\right]=\sigma^2$$

即　$E\left(S^2\right)=\sigma^2$.

天津科技大学概率与统计B检测题14答案

一． 1．$F\left(18,6\right)$；2.$\sqrt{3/2}$；3. $F\left(1,n\right)$.

二． 1．④．2.④.

三．1.解：

$$X_1+X_2+X_3\sim N\left(0,\ 3\right)\Rightarrow\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N\left(0,\ 1\right)$$

$$X_4+X_5+X_6\sim N\left(0,\ 3\right)\Rightarrow\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N\left(0,\ 1\right)$$

$$\text{故有}CY=C\left(X_1+X_2+X_3\right)^2+C\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$$

$$=C\times 3\left[\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\sim\chi^2\left(2\right)$$

$$\therefore C=\frac{1}{3}$$

2.解：（1）由于$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$，故

$$P\left(-\frac{1}{2}<\left|\bar{X}-\mu\right|<\frac{3}{4}\right)=P\left(-\frac{1}{2}\Big/2/4<\frac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{2/4}<\frac{3}{4}\Big/2/4\right)=P\left(-1<\frac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{2/4}<1.5\right)$$

$$=\Phi\left(1.5\right)-\Phi\left(-1\right)=\Phi\left(1.5\right)-1+\Phi\left(1\right)=0.9332-1+0.8413=0.7745$$

（2）由于$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\sigma=2,n=16$，故

$$P\left(S^2<6.6656\right)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\frac{15\times 6.6656}{4}\right)=P\left(\chi^2<24.996\right)$$

$$=1-P\left(\chi^2\geq 24.996\right)\approx 1-0.5=0.95$$

3. 解：（1）由于$\chi_1^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)$，可得

$$P\left(0.256\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 \le 2.321\sigma^2\right) = P\left(2.56 \le \sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 \Big/ \sigma^2 \le 23.21\right)$$

$$= P\left(\chi_1^2 \le 23.21\right) - P\left(\chi_1^2 \le 2.56\right)$$

$$= 1 - P\left(\chi_1^2 \ge 23.21\right) - \left[1 - P\left(\chi_1^2 \ge 2.56\right)\right]$$

$$= P\left(\chi_1^2 \ge 2.56\right) - P\left(\chi_1^2 \ge 23.21\right) = 0.99 - 0.01 = 0.98$$

（2）由于 $\chi_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(9)$，可得

$$P\left(0.27\sigma^2 \le \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \le 2.36\sigma^2\right) = P\left(2.7 \le \sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \Big/ \sigma^2 \le 23.6\right)$$

$$= P\left(\chi_2^2 \le 23.6\right) - P\left(\chi_2^2 \le 2.7\right)$$

$$= 1 - P\left(\chi_2^2 \ge 23.6\right) - \left[1 - P\left(\chi_2^2 \ge 2.7\right)\right]$$

$$= P\left(\chi_2^2 \ge 2.7\right) - P\left(\chi_2^2 \ge 23.6\right) = 0.975 - 0.005 = 0.97$$

天津科技大学概率与统计 B 检测题 15 答案

一．填空题

1． $\hat{p}=\frac{1}{6}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{6}\overline{X}$ 。

二．解答与证明题

1. **解** 似然函数

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}p^n,\quad \ln[L(p)]=(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)+n\ln(p)$$

由 $\frac{d\ln[L(p)]}{dp}=-(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\frac{1}{1-p}+n\frac{1}{p}=0$ 得 p 的最大似然估计值

$$\hat{p}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}。$$

2. **解** 矩估计：因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x;\theta)xdx=\int_{0}^{1}\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$，所以 θ 的矩估计量

$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 。

最大似然估计：设样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1},\quad \ln[L(\theta)]=n\ln(\theta)+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

由 $\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$ 得 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)}$ 。

3. 解：$x_1,x_2,...,x_n$ 的似然函数为：

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$Ln(L) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dLn(L)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解之有极最大似然估计量：$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}$.