集 合 论

第三章　　集合与关系

学习目标

（1）理解集合、序偶与关系的概念和性质。

（2）掌握关系闭包的求法。★

（3）理解等价关系，等价类的概念，会验证等价关系，掌握等价关系与划分的相互转化。

（4）理解相容关系，最大相容类的概念，会验证相容关系，掌握相容关系与覆盖的相互转化。

（5）理解偏序关系，盖住关系的概念，会验证偏序关系，掌握特殊元素的求法。★

§1集合的概念和表示法

1、集合与元素

（1）集合：具有某种特殊性质的客体的聚合。

（2）元素（成员）：属于任何集合的任何客体。

（3）符号：用大写英文字母表示集合，用小写英文字母或其它符号表示元素。

集合：A，B….

元素：a，b….

§1集合的概念和表示法

2.集合的表示方法:

(a)枚举法 (列举法)

把集合的元素列于花括号内。

例:

命题的真假值组成的集合：$S=\{T,F\}$

自然数0,1,2,3,4五个元素的集合：$P=\{0,1,2,3,4\}$

(b)谓词公式描述法

所有集合均可用谓词公式来表示：$S=\{x \mid p(x)\}$

§1集合的概念和表示法

3、幂集

《定义》 设A是集合，A的所有子集（作为元素）的集合称为A的幂集。

记作 $\varphi(A)$ 且有：$|\varphi(A)|=2^{|A|}$

例：若$A1=\varnothing$，　则$\varphi(A1)=\{\varnothing\}$

若$A2=\{a\}$，则$\varphi(A2)=\{\varnothing, \{a\}\}$

若$A3=\{1, 2\}$，

则$\varphi(A3)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

§2 集合的运算

1.交集：　　　《定义》即：$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$。

2.并集：　　　《定义》即：$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$。

3.相对补集：《定义》即：

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x \mid x\in A\wedge \neg x\in B\}$$

4、绝对补集：《定义》即：

$$\sim A=E-A=\{x \mid x\in E\wedge x\notin A\}=\{x \mid x\notin A\}$$

5、对称差补集：《定义》即：

$$A\oplus B=\{x \mid x\in A\nabla x\in B\}$$

§4 序偶与笛卡尔乘积

1.序偶:

《**定义**》由二个具有给定次序的客体所组成的序列称为序偶。

记作 $\langle x, y\rangle$

定义多元序偶推广:

三元序偶 $\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$

n元序偶 $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$

§4 序偶与笛卡尔乘积

2.笛卡尔乘积

《定义》记作：$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$

例：设$A=\{1, 2\}$ $B=\{a, b\}$

则$A\times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$\therefore A\times B\neq B\times A$

即“×”是不满足交换律。

§4 序偶与笛卡尔乘积

例：设$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2\}$，$C=\{z\}$

则$(A\times B)\times C=\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle\}\times\{z\}$

$=\{\langle a,1,z\rangle, \langle a,2,z\rangle, \langle b,1,z\rangle, \langle b,2,z\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{a,b\}\times\{\langle 1,z\rangle, \langle 2,z\rangle\}$

$=\{\langle a,\langle 1,z\rangle\rangle, \langle a,\langle 2,z\rangle\rangle,$

$\langle b,\langle 1,z\rangle\rangle, \langle b,\langle 2,z\rangle\rangle\}$

∴ $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ “×”不满足结合律。

重点回顾

1.幂集

《定义》 设A是集合，A的所有子集（作为元素）的集合称为A的幂集。

记作　　且有：$|\quad| = 2^{|A|}$

2.笛卡尔乘积

《定义》记作：$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$

例：设$A=\{1, 2\}$ $B=\{a, b\}$

则$A\times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$\therefore A\times B\neq B\times A$

即“×”是不满足交换律。

§5.关系及其表示

1. 关系《定义》:任一序偶的集合确定了一个二元关系R 。

$<x,y>$在R中，记作$<x,y>\in R$，或xRy。

$<x,y>$不在R中，记作$<x,y>\notin R$，或$x\not R y$。

前域：domR＝{x|(∃y)(<x,y>∈R)}。

值域：ranR ＝{y|(∃x)(<x,y>∈R)}。

§5.关系及其表示

2. 集合X到Y的关系《定义》:直积X×Y的子集R 。

特别的，恒等关系$I_X=\{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$。

3. 关系的表示方法:

（1）关系矩阵: $M_r=[rij]=\begin{cases} 1, & <xi, yj> \in R; \\ 0, & <xi, yj> \notin R。\end{cases}$

（2）关系图: 用小圆圈表示结点元素;

$\langle x, y\rangle \in R$, 则从x到y化有向弧线。

§5关系及其表示

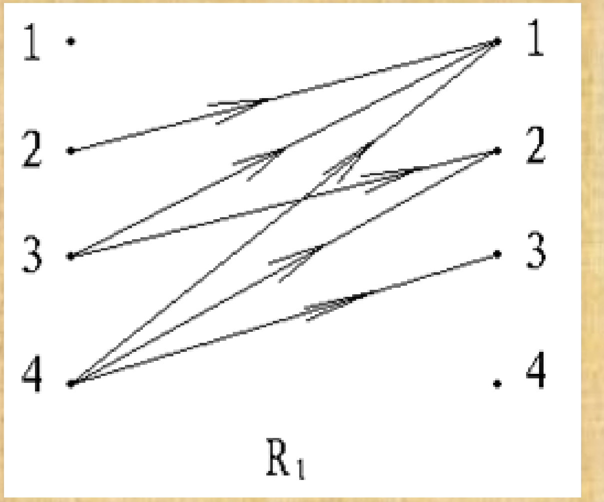
例1：设$X=\{1,2,3,4\}$, R是$X\rightarrow X$的关系

并定义为 $R_1=\{<2,1><3,1><3,2><4,1><4,2><4,3>\}$

列出关系矩阵：

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0000\\1000\\1100\\1110\end{bmatrix}$$

画出关系图：



§6关系的性质

1．自反性：

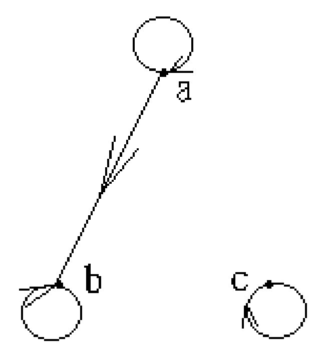
《定义》：设R是X集合中的二元关系，对于每一个（所有的）$x \in X$，有 xRx，则称R是自反关系，X中R是自反的

$\Leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow xRx)$

例：设 $X = \{a, b, c\}$

$R = \{<a,a><b,b><c,c><a,b>\}$ 是自反的关系。

R的关系矩阵 $M_R = \begin{bmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix}$



§6关系的性质

2.反自反关系《定义》： 设R是X中的二元关系，对于每一个x ∈X，有x$\not R$x。

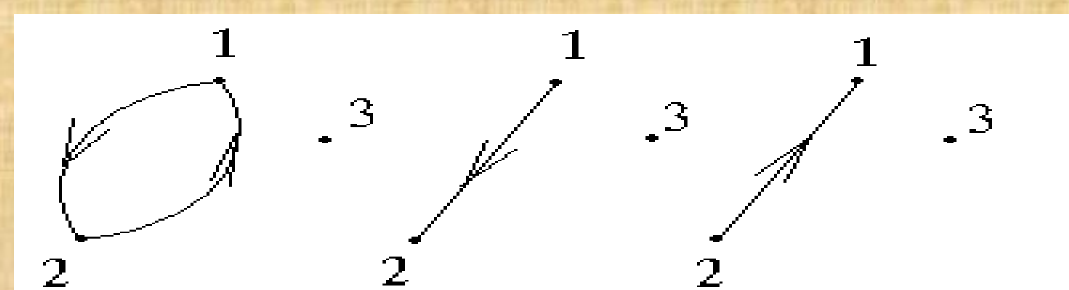
例：设X={1,2,3},

$S_1=\{<1,2><2,1>\}$

$S_2=\{<1,2>\}$

$S_3=\{<2,1>\}$

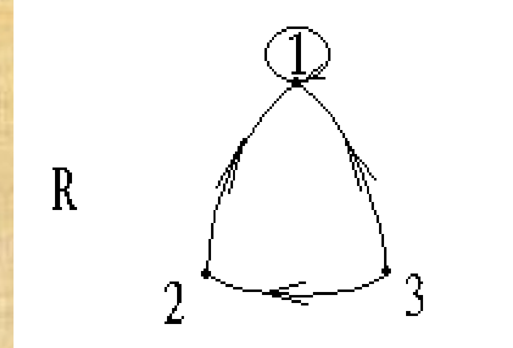
$$M_{S_1}=\begin{bmatrix}010\\100\\000\end{bmatrix},M_{S_2}=\begin{bmatrix}010\\000\\000\end{bmatrix},M_{S_3}=\begin{bmatrix}000\\100\\000\end{bmatrix}$$



§6关系的性质

$$S_4 = \{<1,1><2,1><3,1><3,2>\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 110 \end{bmatrix}$$



S4既不是自反的，又不是反自反的

§6关系的性质

3. 对称性

《定义》：设R是X中的二元关系，对于 每一个

$x, y \in X$ 来讲，如果每当有xRy，则必有yRx，则称R是X中的对称关系，并表示成：R是X中的对称关系

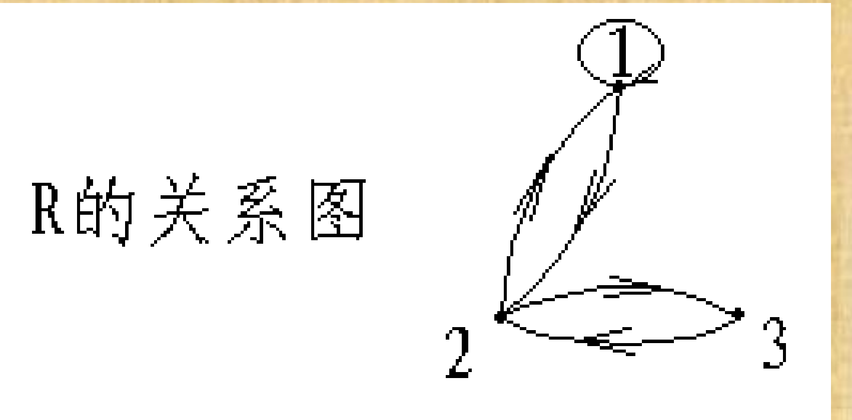
$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$$

§6关系的性质

例：设$X=\{1,2,3\}$,$R=\{<1,1><2,1><1,2><3,2><2,3>\}$

则R是对称的关系

$$M_R=\begin{bmatrix}110\\101\\010\end{bmatrix}$$



§6关系的性质

4.反对称关系

《定义》：设R是X集合中的二元关系，对于每一个

$x, y \in X$ 来讲，如果每当xRy和yRx就必有x=y，则称R是反对称的关系。

§6关系的性质

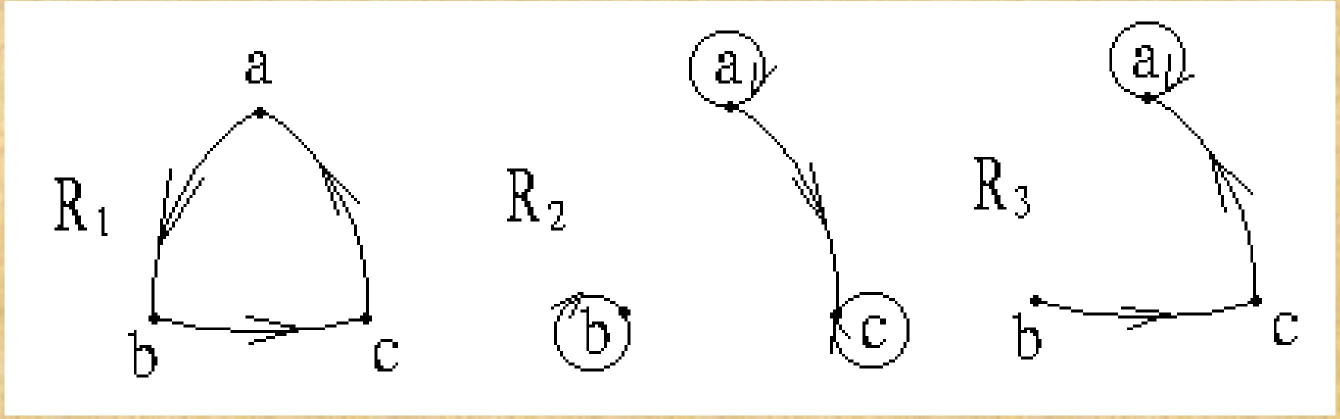
例： 设X={a,b,c}

$$R_1=\{<a,b><b,c><c,a>\}$$
$$R_2=\{<a,c><a,a><b,b><c,c>\}$$
$$R_3=\{<a,a><b,c><c,a>\}$$

均是反对称的

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}010\\001\\100\end{bmatrix},M_{R_2}=\begin{bmatrix}101\\010\\001\end{bmatrix},M_{R_3}=\begin{bmatrix}100\\001\\100\end{bmatrix}$$

§6关系的性质



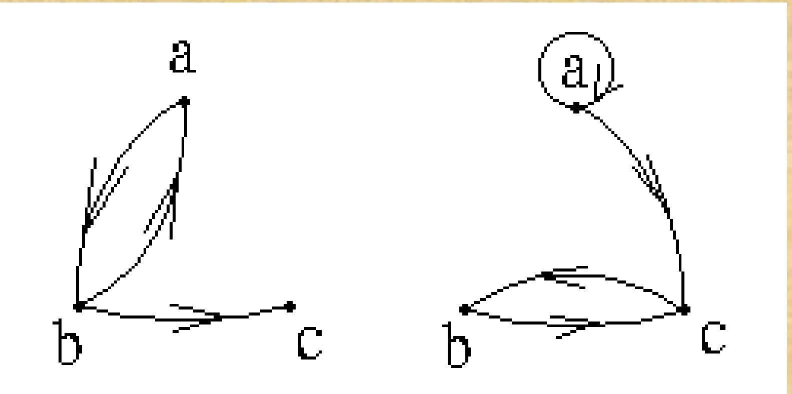
例：X={a,b,c},下列关系不是对称的，也不是反对称的

$$R_1 = \{<a,b><b,a><b,c>\}$$

$$R_2 = \{<a,a><b,c><c,b><a,c>\}$$

§6关系的性质

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}010\\101\\000\end{bmatrix}, M_{R_2}=\begin{bmatrix}101\\001\\010\end{bmatrix}$$

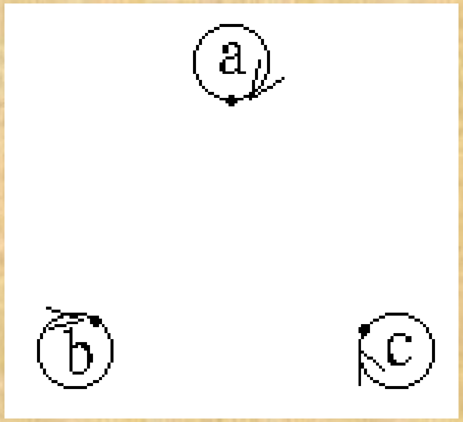


X上的恒等关系 $R_3=\{<a,a><b,b><c,c>\}$

是自反、对称、反对称的。

§6关系的性质

$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix}$$



X上的全域关系：

$$R_4 = \{<a,a><b,b><c,c><a,b><a,c>$$
$$<b,a><b,c><c,a><c,b>\}$$

是自反的，对称的

X上的空关系是反自反、对称、反对称的。

§6关系的性质

5. 传递性：

《定义》：设R是X中的二元关系，对于每一个$x, y, z \in X$来说，如果每当$xRy \wedge yRz$，就必有xRz则称R是可传递的，并表示成：X中R可传递

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

讨论定义：（1）前件$xRy \wedge yRz$ 为“T”，则xRz也为“T”，R是可传递的；

（2）前件为“F”，有三种情况

§6关系的性质

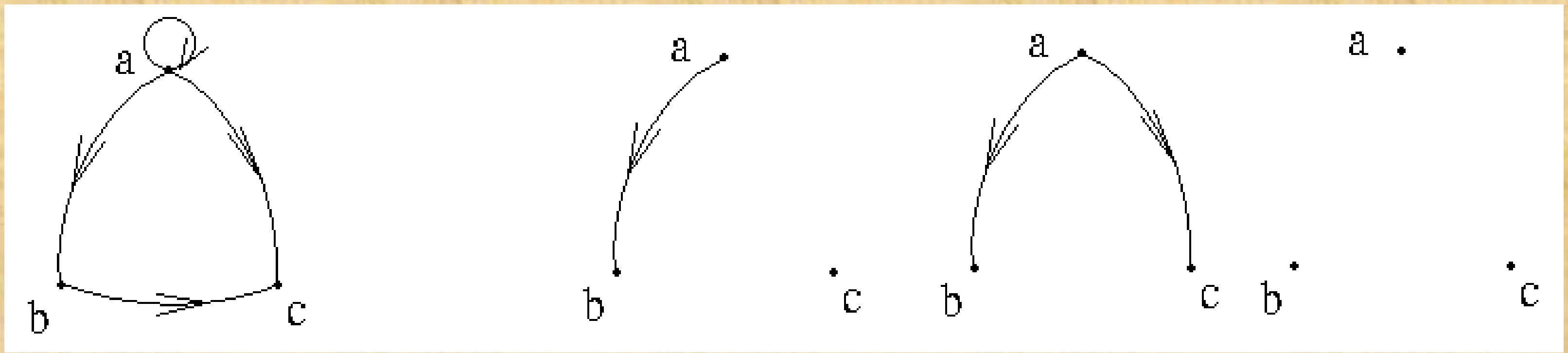
例：设X={a,b,c}，则下列关系均是可传递的

$R_1=\{<a,a><a,b><a,c><b,c>\}$

$R_2=\{<a,b>\}$

$R_3=\{<a,b><a,c>\}$

$R_4=\Phi$

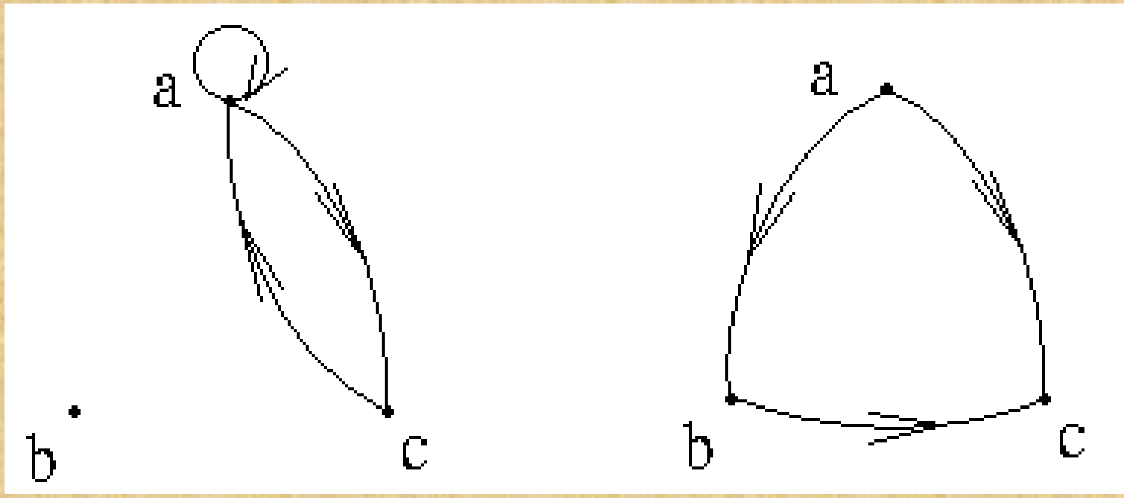


§6关系的性质

例下列关系是不可传递的：

$$R_4 = \{<a,a><a,c><c,a>\}$$

$$R_5 = \{<a,b><b,c><c,a>\}$$



§7复合关系和逆关系

1．关系的复合

《定义》：设 $X \to Y$ （R关系），$Y \to Z$ （S关系），

于是可用 $X \to Z$ （R∘S）的关系，称 R∘S

为R和S的复合关系，并规定为：

$$R \circ S = \{< x, z >| x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y(y \in Y \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S)\}$$

例：设A={1,2,3,4,5}，R,S均为A→A的关系，且 R={<1,2><3,4><2,2>},S={<4,2><2,5><3,1><1,3>}

则R∘S={<1,5><3,2><2,5>}， S∘R={<4,2><3,2><1,4>}

§7复合关系和逆关系

例：设A={1,2,3,4,5}，R,S均为A→A的关系，

R={<1,2><3,4><2,2>},

S={<4,2><2,5><3,1><1,3>}

则$R\circ S$=

{<1,5><3,2><2,5>}

$S\circ R$=

{<4,2><3,2><1,4>}

§ 7复合关系和逆关系

2． 复合关系的矩阵表示

设有三个集合：$X=\{x_1,x_2\cdots x_m\}$,

$Y=\{y_1,y_2\cdots y_n\}$,

$Z=\{z_1,z_2\cdots z_p\}$, $X\xrightarrow{R}Y\xrightarrow{S}Z$

$M_R=[a_{ik}]_{m\times n}$ $\quad$ $M_S=[b_{kj}]_{n\times p}$

$M_{R\circ S}=M_R\circ M_S$ $\quad$ $M_{R\circ S}=[c_{ij}]_{m\times p}$ $\quad$ $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$

§7复合关系和逆关系

例：设X={1,2,3,4,5},R,S均是X中的二元关系，

R={<1,2><3,4><2,2>},

S={<4,2><2,5><3,1><1,3>}

$$M_R=\begin{bmatrix}01000\\01000\\00010\\00000\\00000\end{bmatrix},M_S=\begin{bmatrix}00100\\00001\\10000\\01000\\00000\end{bmatrix},M_{R\circ S}=\begin{bmatrix}00001\\00001\\01000\\00000\\00000\end{bmatrix}$$

§7复合关系和逆关系

3．逆关系

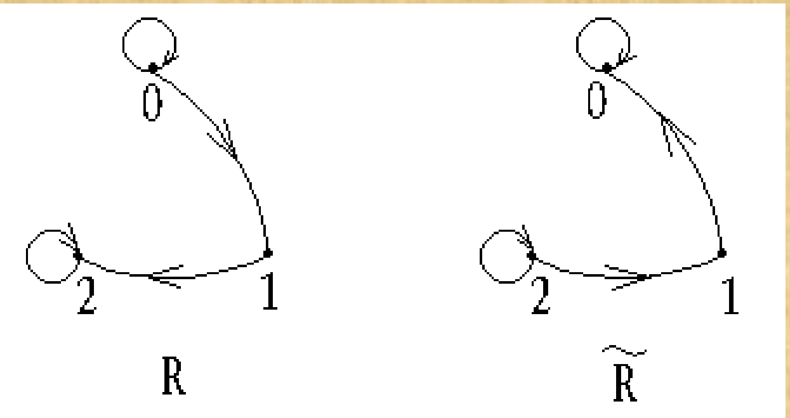
《定义》：设X,Y是二个集合，
若R是X→Y的关系，从Y→X的关系，
称为R的逆关系，用 R^c 表示。

§ 7复合关系和逆关系

例： X＝{0,1,2}， R＝{<0,0><0,1><1,2><2,2>},

$\tilde{R}$ ={<0,0><1,0><2,1><2,2>},

$$M_R=\begin{bmatrix}110\\001\\001\end{bmatrix},M_{R^c}=\begin{bmatrix}100\\100\\011\end{bmatrix},$$



重点回顾

1.关系及其表示

任一序偶的集合确定了一个二元关系R 。

集合X到Y的关系:直积X×Y的子集R。

2.关系的性质

自反、对称、传递性、反自反、反对称

3.复合关系和逆关系

R: $X \to Y$,S: $Y \to Z$,复合关系R∘S: $X \to Z$

若R是X→Y的关系，R的逆关系R^c：Y→X的关系。

§8关系的闭包运算

1.关系闭包《定义》：给定集合X，R是X中的二元关系，若有另一R'满足下列条件：

（1）R'是自反的（对称，可传递的）；

（2）$R' \supseteq R$

（3）对于任一自反（对称，传递的）关系R''，若

$R'' \supseteq R$，则 $R'' \supseteq R'$

则称R'是R的自反（对称，传递的）闭包，并依次用r(R),s(R),t(R)来表示之。

§8关系的闭包运算

讨论定义：

（1）已知一个集合中的二元关系R，r(R),s(R),t(R)是唯一的，它是包含R的最小的自反（对称，传递）关系；

（2）若R是自反（对称，传递）的，则

r(R),s(R),t(R)就是R本身。

（3）若R不是自反（对称，传递）的，则可以补上最少序偶，使之变为自反、对称、传递关系，从而得到r(R),s(R),t(R)；

§8关系的闭包运算

2.《定理1》：给定集合X，R是X中的二元关系，于是可有：

（1）当且仅当r(R)=R，则R是自反的；

（2）当且仅当s(R)=R，则R是对称的；

（3）当且仅当t(R)=R，则R是可传递的。

《定理2》：R是X中的二元关系 I_x 是X中的恒等关系，

则有 $r(R)=R\cup I_x$

§8关系的闭包运算

《定理3》：给定集合X，R是X中的二元关系，则有

$$S(R)=R\bigcup R^{c}$$

《定理4》：设X是一集合，R是X中的二元关系，则：

$$t(R)=R\bigcup R^{2}\bigcup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^{i},(i\in I_{+})$$

《定理5》：设|X|=n，R是X中的二元关系，则

$$t(R)=R\bigcup R^{2}\bigcup\cdots\bigcup R^{k}\qquad(0\le K\le n)$$

§8关系的闭包运算

例：X={a,b,c},R={<a,b><b,c><c,a>}， |X|=3,

则

$$R^2 = R \circ R = \{<a,c><b,a><c,b>\},$$

$$R^3 = \{<a,a><b,b><c,c>\}$$

$$R^4 = R,$$

$$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$$

$$= \{<a,b><b,c><c,a><a,c><b,a>$$

$$<c,b><a,a><b,b><c,c>\}$$

§8关系的闭包运算

例： X={a,b,c,d},R={<a,b><b,c><c,d>},

则

$$R^2=\{<a,c><b,d>\}, R^3=\{<a,d>\}, R^4=\Phi$$

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=$$

$$\{<a,b><b,c><c,d><a,c><b,d><a,d>\}$$

重点回顾

自反闭包 $r(R) = R \cup I_x$

对称闭包 $S(R) = R \cup R^c$

传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i, (i \in I_+)$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$$

§8传递闭包的求法

方法一：由定理 $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k$

方法二：$M_{t(R)} = M_R \cup M_R{}^2 \cup \cdots \cup M_R{}^k$

方法三：*warshall*算法

1.逐i列扫描1。

2. 1所在行加上第 i。

3.扫完为止，不变为止。

§9集合的划分和覆盖

1.覆盖《定义》：给定一非空集合S，又设

$$A = \{A_1, A_2 \cdots A_m\}$$

若（1）$A_i \subseteq S, (i = 1,2 \cdots, m)$

（2）$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$

则称A为S的覆盖。

例：S={a,b,c}，A={{a,b},{b,c}}，B={{a},{a,b},{c}}，
C={{a},{b},{c}}，D={{a},{b},{a,c}}

均为S的覆盖。

§9集合的划分和覆盖

2.《定义》： 给定一非空集合S，设非空集合

$A=\{A_1, A_2 \cdots A_m\}$

如果有：(1) $A_i \subseteq S, (i=1,2\cdots,m)$

(2) $A_i \cap A_j = \Phi$ 或 $A_i = A_j$ （i,j=1,2…,m）

(3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$

则称集合A是集合S的一个划分。

§10等价关系与等价类

1.等价关系《**定义**》：设X是一个集合，R是X中的二元关系，若R是自反的，对称的和可传递的，则称R是等价关系。

2.等价类《**定义**》：设R是X集合中的等价关系，对于任何的 $x \in X$ 来讲，可把集合

$[x]_R = \{y \mid y \in X \wedge yRx\}$ 称是由 $x \in X$ 生成的R等价类。

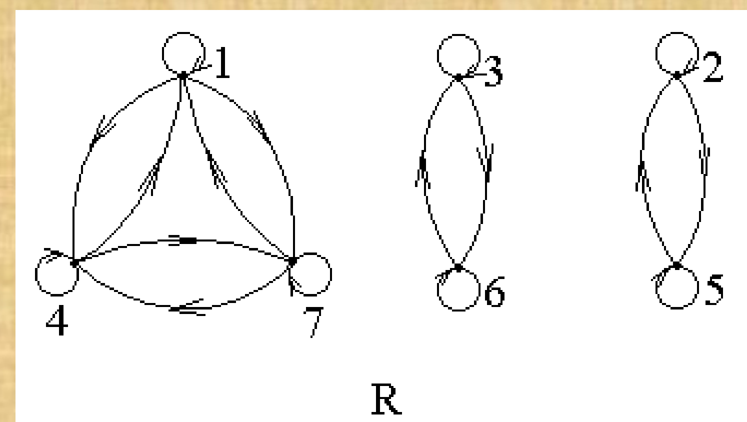
§ 10 等价关系与等价类

例题：试验证R是等价关系，R={<1,1><1,4><1,7><2,2><2,5><3,3><3,6><4,1><4,4><4,7><5,5>5,2><6,6><6,3><7,7><7,4><7,1>}

解：（1）R的关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1001001 \\ 0100100 \\ 0010010 \\ 1001001 \\ 0100100 \\ 0010010 \\ 1001001 \end{bmatrix}$$

（2）R的关系图



R满足自反、对称和可传递的，

∴R是一等价关系

§10等价关系与等价类

3.《定理》：设X是一非空集合，R是X中的等价关系，R等价类的集合$\{[x]_R \mid x\in X\}$是X的一个划分，且此集合称为X按R的商集，表示为: X/R

4.《定理》：X是一非空集合，A为X的一个划分，且$A=\{A_1,A_2,\ldots.A_n\}$，则由A导出的X中的一个等价关系

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times A_i)$$

§10等价关系与等价类

例1：X＝{a,b,c,d}， X上的等价关系R

R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<c,d>,<d,c>,<d,d>},

$X/R=\{\{a,b\},\{\mathrm{c},\mathrm{d}\}\}$， 显然为X的一个划分。

例2：X＝{a,b,c,d}，A={{a,b},{c,d}}，A为X的一个划分

则 R＝({a,b} ×{a,b})∪({c,d} ×{c,d})

={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<c,d>,<d,c>,<d,d>}

显然为X上的一个等价关系。

重点回顾

1.集合的划分和覆盖

覆盖

划分

交叉划分

2.等价关系与等价类

等价关系R自反、对称、传递

等价类 $[x]_R = \{y \mid y \in X \wedge yRx\}$

等价关系与划分

$$R = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times A_i) \qquad X/R$$

§11相容关系

1.《定义》：给定一个集合X，R是X中的二元关系，如果R是自反、对称的，则称R是相容关系。

例：设X={ball,bed,dog,let,egg},5个英文单词

定义X中一个二元关系：
R={ $< x, y >| x, y \in X \wedge x, y$有相同的字母}

则R是自反的，对称的。

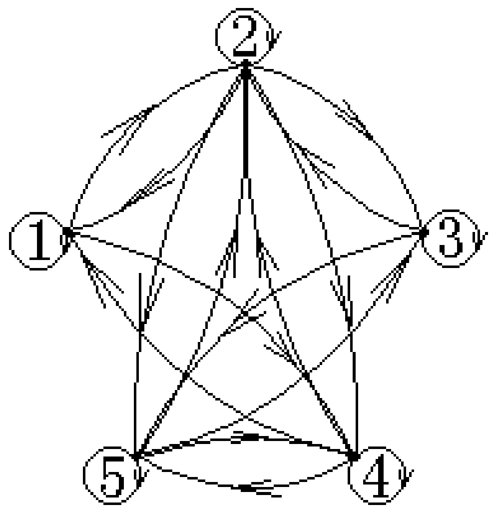
则R={<1,1><1,2><2,1><1,4><4,1><2,2><2,3><3,2> <2,4><4,2><2,5><5,2><3,3><3,5><5,3><4,4><4,5><5,4><5,5>}是相容关系。(简记：X=｛1，2，3，4，5｝)。

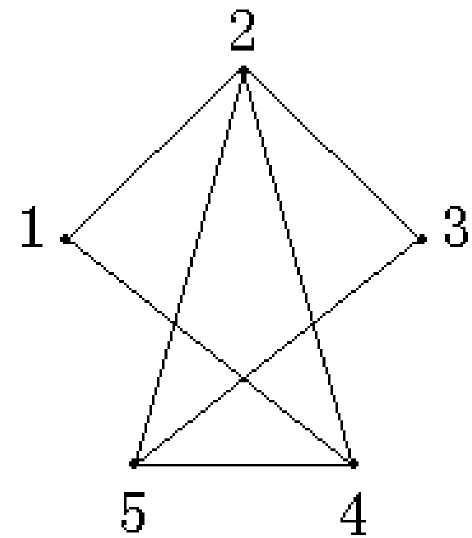
§11相容关系

R的关系矩阵

$$
\begin{array}{c}
 & 12345 \\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \left[\begin{array}{c}11010\\11111\\01101\\11011\\01111\end{array}\right] \\
 & 12345
\end{array}
$$

简化矩阵





简化相容关系图

§11相容关系

2.最大相容类**《定义》**：设X是一个集合，
R是X中的相容关系，
假定$A\subseteq X$，若任一$x\in A$都与A中的其它所有元素有相容关系，
而（X-A）中没有一个元素与A中的所有元素有相容关系，
则称子集A为相容关系R的一个最大相容类。
并且A可以构成X的一个覆盖。

§11相容关系

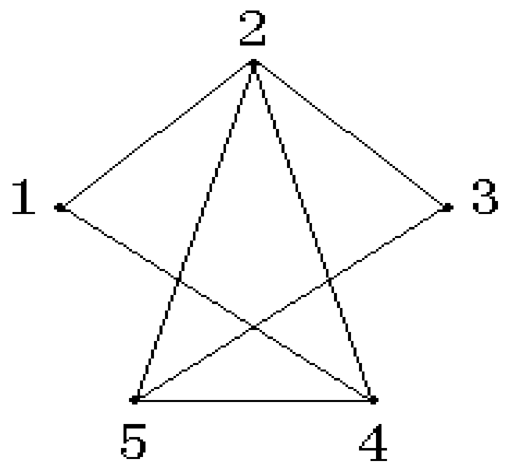
例：设X=｛1，2，3，4，5｝上的相容关系R
R={<1,1><1,2><2,1><1,4><4,1><2,2>
<2,3><3,2> <2,4><4,2><2,5><5,2><3,3>
<3,5><5,3><4,4><4,5><5,4><5,5>}

$$A_1=\{1,2,4\}, A_2=\{2,3,5\}, A_3=\{2,4,5\}$$

均是X中的最大相容类,且$X=A_1\cup A_2\cup A_3$

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

定义了X的一个覆盖。



简化相容关系图

§11相容关系

2.《定理》已知X集合的一个覆盖 $\{A_1, A_2, A_3\}$

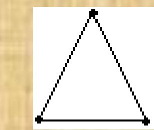
则一定可以求出相对应的相容关系来：

$$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup A_3 \times A_3$$

相反的，集合X上的相容关系R的所有最大相容类集合 $\{A_1,A_2,....A_m\}$构成集合X的一个覆盖。即：

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

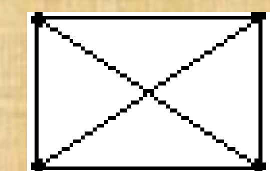
§ 11相容关系



3.求最大相容类的方法：

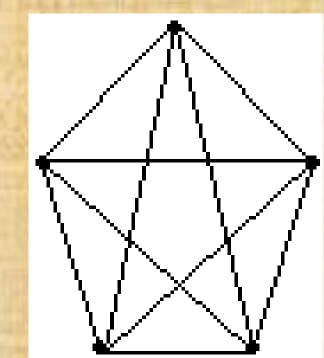
关系图法：确定最大完全多边形

每个顶点都与其他所有顶点相联结的多边形。



(1)孤立结点是最大的完全多边形；

(2)二个相互联结的结点是最大完全多边形；



(3)三角形是三个结点的最大完全多边形；

(4)四个结点；　(5)五个结点;

重点回顾

1.相容关系

R自反、对称

最大相容类

2.相容关系与覆盖

相容关系R $R = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times A_i)$

完全覆盖 最大相容类的集合

§ 12序关系

1.偏序关系《定义》：设R是P中的二元关系，如果R是自反的，反对称和可传递的，则称R是P中的偏序关系，并用符号“≤”表示，而序偶〈P，≤〉则称为偏序集合。 讨论定义：

（1）“≤”不单纯意味着在实数中的≤关系，而是代表更为普遍的关系（具有自反，反对称和可传递性的关系）；

（2）若 $x, y \in P$， “x≤y”读作："x偏序于y"；

主要是指x权重、优先级“小于” y；

§12序关系

2． 盖住集与哈斯图

《定义》：在偏序集合〈P，≤〉中，若有 $x, y \in P$ 且x≤y和 $x \neq y$，又不存在其它元素z能使 $x \leq z \wedge z \leq y$ 则称元素y盖住x，盖住集记为COV(P)=

$\{< x, y >| x, y \in P;$ Y盖住x}

盖住集的关系图，称为〈P，≤〉的哈斯图。

§ 12 序关系

画〈P，≤〉的哈斯图的方法：

（1）用“∘”表示P中的结点（具有自反性）；

（2）若 $x, y \in P$ ，且x≤y和 $x \neq y$ ，则把x画在y的下面；

（3）若y盖住x，则在x和y之间画一条联线，并箭头向上，

若y不盖住x，但又存在“≤”关系，则必定通过x和y之间的其它中间结点把x和y联结起来；

（4）所有边的方向均是向上的，箭头均省去。

§ 12 序关系

例：(a)设A＝{1,2,3,4,6,12}

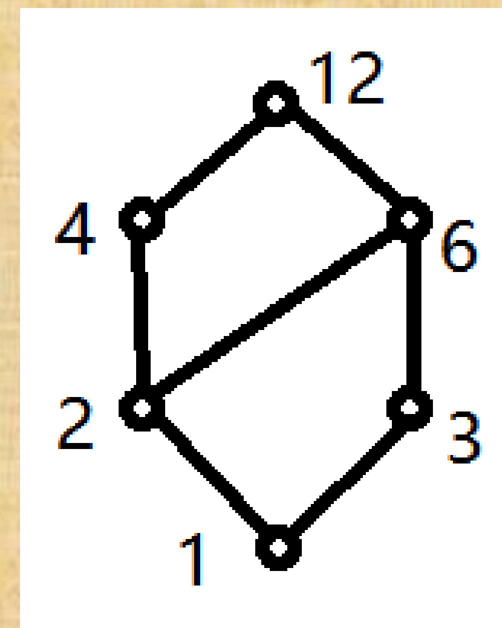
“≤”表示A中元素的整除关系，

则可以验证〈A，≤〉是一偏序集合其盖住集COVA=

{<1,2,><1,3><2,4><2,6>

<3,6><4,12><6,12>}

其哈斯图为：



§12序关系

3. 特殊元素

(1) 最小元素，所有元素都比其“大”　。

(2) 最大元素，所有元素都比其“小”　　。

(3) 极小元素，没有比其再“小”的　。

(4) 极大元素，没有比其在“大”的　。

(5) 上界，比其“大”的元素的集合。

(6) 上确界，上界当中最“小”的　。

(7) 下界，比其“小”的元素的集合。

(8) 下确界，下界当中最“大”的　。

§12序关系

例：在哈斯图1中，

最小元素，为1；最大元素，为12；

极小元素，为1；极大元素，为12；

{1，2}的上界，为{2，4，6，12}；

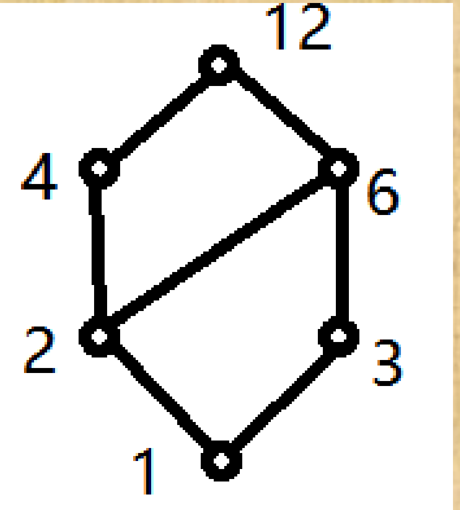
{1，2}的上确界，为2；

{1，2}的下界，为{1}；

{1，2}的下确界，为1。

思考：

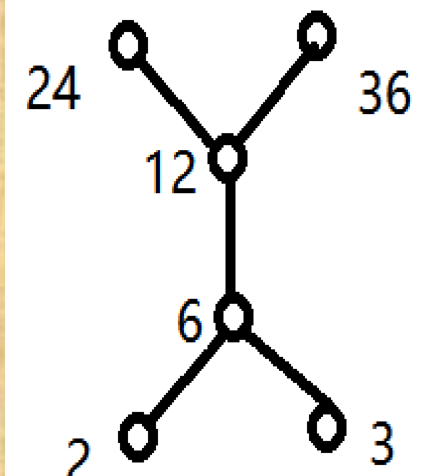
如果是{2，3}呢？



哈斯图1

§12序关系

例：在哈斯图2中，
最小元素，无；最大元素，无；
极小元素，为2，3；
极大元素，为24，36；
{2，3}的上界，为{6，12，24，36}；
{2，3}的上确界，为6；
{2，3}的下界，为无；
{2，3}的下确界，为无。
思考：
如果是{3，6}呢？



哈斯图2

§ 12序关系

4.全序关系**《定义》**：设〈A，≤〉是一个偏序集合，若对于每一个$x, y \in P$，或者x≤y，或者y≤x，即 $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$，则“≤”称为全序关系，而〈A，≤〉称为全序集合。

5.良序关系**《定义》**：若集合X上的任意一个偏序集的每一个非空子集，都有一个最小元素，则称R为良序关系，并称<X,R>为良序集合。

6.《定理》每一个良序集，一定是一个全序集。

重点回顾

1.偏序关系

R自反、反对称、传递

2.盖住集与哈斯图

盖住集：直接领导

哈斯图：结点圆圈盖住连线

3. 特殊元素

(1) 最小/大元素，所有元素都比其“大”/ “小” 。
(2) 极小/大元素，没有比其再“小” / “大”的 。
(3) 上/下界，比其“大”/ “小”的元素的集合。
(4) 上确界，上界当中最“小”的 。
(5) 下确界，下界当中最“大”的 。

第三章小 结

（1）理解集合、序偶与关系的概念和性质。

（2）掌握关系闭包的求法。

（3）理解等价关系，等价类的概念，会验证等价关系，掌握等价关系与划分的相互转化。

（4）理解相容关系，最大相容类的概念，会验证相容关系，掌握相容关系与覆盖的相互转化。

（5）理解偏序关系，盖住关系的概念，会验证偏序关系，掌握特殊元素的求法。

第三章　作　业

P86　　(6) a) (9) a)

P94　　(1) (2)

P109　　(1) (2)

P110　(7)

P113　(1) (2)

P127　(1) (2)

P130　(1)

P134　(2) (3)

P139　(1) (2)

P145　(1) (6) (7)