

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 6/1/2022

Άσκηση 1: Δώρο Χριστουγέννων

Η κυβέρνηση της επαρχίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, στη χώρα των Αλγορίθμων, θέλει να πείσει τους πάντες ότι το Δώρο των Χριστουγέννων, που λαμβάνουν ως επιμίσθιο οι εργαζόμενοι για τις γιορτές, αυξάνεται σχεδόν κάθε χρόνο τα τελευταία N χρόνια. Η στατιστική υπηρεσία συνέλεξε τα δεδομένα και άρχισε να τα επεξεργάζεται. Εκτίμησαν το μέσο ύψος p_i του Δώρου, για κάθε έτος $i=1,\ldots,N$, και υπολόγισαν τη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία της ακολουθίας (p_1,p_2,\ldots,p_N) .

Δυστυχώς, τα αποτελέσματα δεν ήταν ακριβώς αυτά που περίμεναν. Σας ανέθεσαν λοιπόν να "πειραματιστείτε" με τα δεδομένα, με στόχο να υπολογίσετε μια ελαφρώς τροποποιημένη ακολουθία, που όμως θα περιέχει σημαντικά μεγαλύτερη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία. Θεωρούν ότι αν για το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων, διαμορφωθεί μια ακολουθία (q_1,q_2,\ldots,q_N) που προκύπτει από την αρχική (p_1,p_2,\ldots,p_N) προσθέτοντας την ίδια τιμή $x,-K\leq x\leq K$, στις τιμές ενός διαστήματος (p_l,\ldots,p_r) της αρχικής, η τροποποίηση δύσκολα θα γίνει αντιληπτή, και η κυβέρνηση δεν θα αναγκαστεί να αναιρέσει τον ισχυρισμό της.

Έχετε λοιπόν στη διάθεσή σας την πραγματική ακολουθία (p_1,p_2,\ldots,p_N) του Δώρου των Χριστουγέννων για τα τελευταία N χρόνια και έναν μη αρνητικό ακέραιο K. Ζητείται να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία (q_1,q_2,\ldots,q_N) , για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών [l,r] και μια τιμή $x,-K\leq x\leq K$, έτσι ώστε $q_i=p_i+x$, για κάθε έτος i στο διάστημα [l,r], και $q_i=p_i$ για κάθε έτος i εκτός του διαστήματος [l,r].

Δεδομένα Εισόδου: Η πρώτη γραμμή της εισόδου θα αποτελείται από δύο ακέραιους N και K που εκφράζουν το πλήθος των ετών (το N) και τη μέγιστη δυνατή απόκλιση από τις πραγματικές τιμές (το K). Προσέξτε ότι το K μπορεί να είναι 0. Η δεύτερη γραμμή της εισόδου θα περιέχει N μη αρνητικούς ακέραιους p_1, p_2, \ldots, p_N που εκφράζουν το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων για καθένα από τα τελευταία N χρόνια.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει έναν μη αρνητικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο μέγιστο μήκος της Μέγιστης Αύξουσας Υπακολουθίας που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία (q_1,q_2,\ldots,q_N) , για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών [l,r] και μια τιμή $x,-K\leq x\leq K$, έτσι ώστε $q_i=p_i+x$, για κάθε $i\in [l,r]$, και $q_i=p_i$ για κάθε $i\notin [l,r]$.

Περιορισμοί:

Παράδειγμα Εισόδου:

Παράδειγμα Εξόδου:

5

 $3 \le N \le 2 \cdot 10^5$ $0 \le K \le 10^9$ $0 \le p_i \le 10^9$ 8 10 7 3 5 12 2 7 3 4

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 ΜΒ.

Άσκηση 2: Αγορές στο Φαράγγι

Την ερχόμενη εβδομάδα γίνεται το μεγάλο Χριστουγεννιάτικο παζάρι του φαραγγιού, και δεν θέλετε να χάσετε την ευκαιρία να αγοράσετε στρατιωτικό εξοπλισμό, ώστε να εμφανιστείτε απόλυτα έτοιμοι στην μάχη του Ιανουαρίου. Ο εξοπλισμός αποτελείται από μια πανοπλία, ένα ξίφος και μια ασπίδα. Συμβολίζουμε αυτά τα αντικείμενα με A για την πανοπλία, B για το ξίφος και C για την ασπίδα. Υπάρχουν 3 έμποροι που πουλάνε

στρατιωτικό εξοπλισμό (τους οποίους, για ευκολία, συμβολίζουμε με 1, 2 και 3 αντίστοιχα). Κάθε έμπορος μπορεί να πουλάει ένα ή περισσότερα αντικείμενα οποιουδήποτε τύπου.

Για να είστε σίγουροι ότι θα μπορείτε να πολεμήσετε κάθε μέρα, έχετε υπολογίσει ότι χρειάζεστε τουλάχιστον N πλήρη σετ εξοπλισμού (δηλαδή τουλάχιστον N αντικείμενα από καθέναν από τους τύπους A, B και C). Όμως τα αντικείμενα που πωλούνται από διαφορετικούς έμπορους μπορεί να μην είναι συμβατά μεταξύ τους. Οπότε ως πλήρες σετ εξοπλισμού λογίζεται κάθε τριάδα αντικειμένων A, B και C που έχει αγοραστεί από τον ίδιο έμπορο (δηλ. δεν μπορείτε να συμπληρώσετε ένα σετ εξοπλισμού αγοράζοντας πανοπλία από τον έμπορο 1, και ξίφος και ασπίδα από τον έμπορο 2).

Κάθε έμπορος ανακοινώνει στην αρχή του παζαριού τις προσφορές του, δηλαδή πόσα αντικείμενα κάθε είδους πουλάει και σε ποια τιμή. Συνήθως ο ίδιος έμπορος πουλάει πολλά διαφορετικά (ξένα μεταξύ τους) σύνολα του ίδιου αντικειμένου σε διαφορετική τιμή (π.χ., μπορεί ο έμπορος 1 να πουλάει 3 πανοπλίες, βλ. αντικείμενα τύπου 1A, σε τιμή 100 και άλλες 4 πανοπλίες σε τιμή 800. Τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι προσφορές πωλούνται αναγκαστικά όλα μαζί, ως ενιαία σύνολα (δηλ. αν χρειάζεται να αγοράσετε μία ή περισσότερες πανοπλίες από τον έμπορο 1, πρέπει να αγοράσετε είτε και τις 3 πανοπλίες 1A στην τιμή 100, είτε και τις 4 πανοπλίες 1A στην τιμή 800, είτε και τις 7 πανοπλίες μαζί στην τιμή 900).

Θέλετε λοιπόν να υπολογίσετε το ελάχιστο ποσό που χρειάζεται να διαθέσετε για την αγορά πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού που θέλετε να αγοράστε και το πλήθος των προσφορών των εμπόρων, αντίστοιχα. Καθεμία από τις επόμενες M γραμμές θα περιέχει περιλαμβάνει μια έκφραση της μορφής: $xy \ A \ P$, όπου το $x \in \{1,2,3\}$ δηλώνει τον έμπορο που πουλάει το αντικείμενο $y \in \{A,B,C\}$, ενώ το A δηλώνει το πλήθος των αντικειμένων τύπου xy και το P τη συνολική τιμή των A αντικειμένων (που πωλούνται ως ενιαίο σύνολο).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό που χρειάζεται να διαθέσετε για την αγορά πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού. Σε περίπτωση που η αγορά N πλήρων σετ εξοπλισμού δεν είναι εφικτή, η έξοδος πρέπει να είναι -1^1 .

Περιορισμοί: Παράδειγμα Εισόδου: Παράδειγμα Εξόδου: 0 < N < 500010 8 3200 $1 \le M \le 1500$ 1A 3 100 $1 \le P \le 10^6$ 1A 4 800 $1 \le A \le 10$ 1B 5 125 Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. 1C 7 375 Όριο μνήμης: 64 ΜΒ. 2A 5 500 2B 6 900 2C 5 400 3C 7 60

¹ Εξήγηση 1ου παραδείγματος: Αγοράζουμε 5 πλήρη σετ εξοπλισμού από τον έμπορο 1 με συνολικό κόστος 100+800+125+375=1400 και άλλα 5 πλήρη σετ εξοπλισμού από τον έμπορο 2 με συνολικό κόστος 500+900+400=1800.