姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

简谐运动到混沌—研究线性与非线性情况下的运动

臧之昊 2013301020056 材料物理班

摘要：本文采用 Euler-Cromer 法模拟线性与非线性情况下物体的运动情况，包括理想摆、驱动摆以及物理摆。通过对改变不同参数的研究，比较了简谐摆、驱动摆和物理摆的物理结果，尤其是在驱动力大小不同时结果的变化。

关键词：单摆 驱动力 混沌效应

一、简介

一般用于研究物理问题的数学方法为 Euler 法，即简单地用前一步的状态通过递推关系得到现在的状态，然后再继续作用下去，直到得到所需要的数值为止。然而，当研究周期性变化的谐振模型时，会发现系统的能量明显不会守恒，反而会随时间的增加而增加，这并不是说仅仅只是在这种情况下 Euler 法失效，其实在其他的情况下也会有能量不守恒的情况发生，只是在相对量级上来说可以忽略罢了。

因此，我们改用其他方法来研究这种情况下的模型，即 Euler-Cromer 法，这种方法与 Euler 法唯一不同之处就是用现在时刻的角速度值代入递推公式得到现在时刻的角度值，这样就发现问题解决了，我们可以在这种方法背景下研究本文所讨论的问题了。

二、正文

1、理想摆

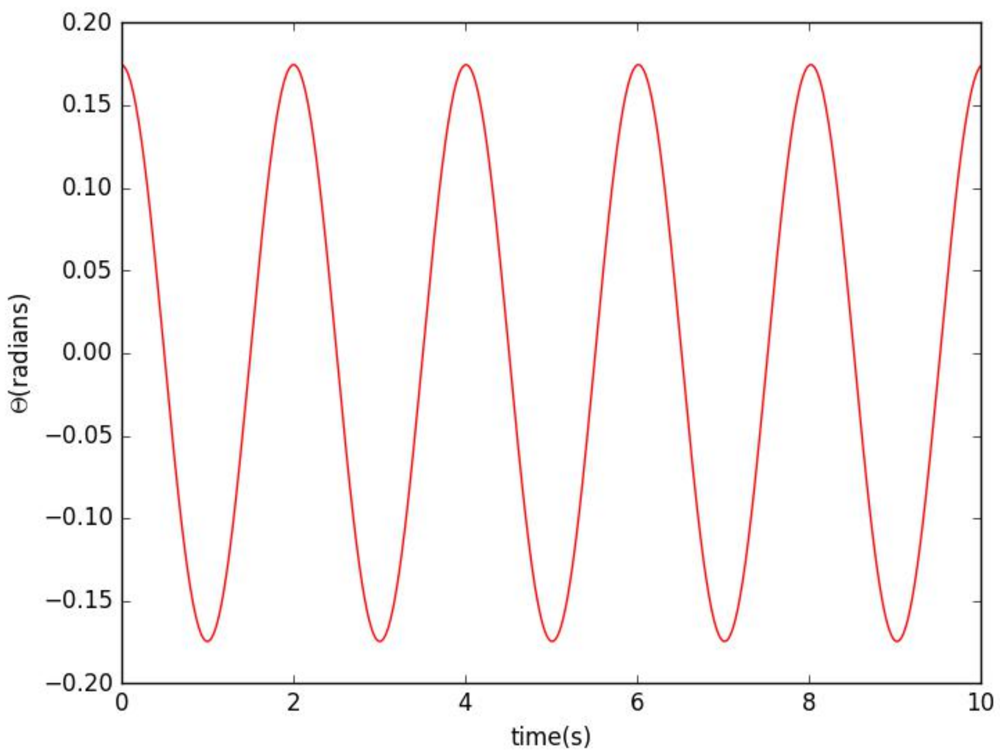
我们选取的对象为单摆，若其振幅角度很小，很容易就得到它的微分运动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

这是一个二阶的常微分方程，求得它的通解为：

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)$$

在这里,$\Omega = \sqrt{g/l}$， θ_0 和 ϕ 和分别是振幅和初始相位，取 $g = 9.8m/s^2, l = 1m$,得到如下模拟图像:



可以发现，物体运动确实为周期性运动，并不发生振幅大小的变化。

2、衰减摆

衰减摆是在考虑系统的摩擦之后所产生的运动现象。摩擦的来源可能来自绳子与结点的能量耗散，也可能来自于空气的阻力等等。大

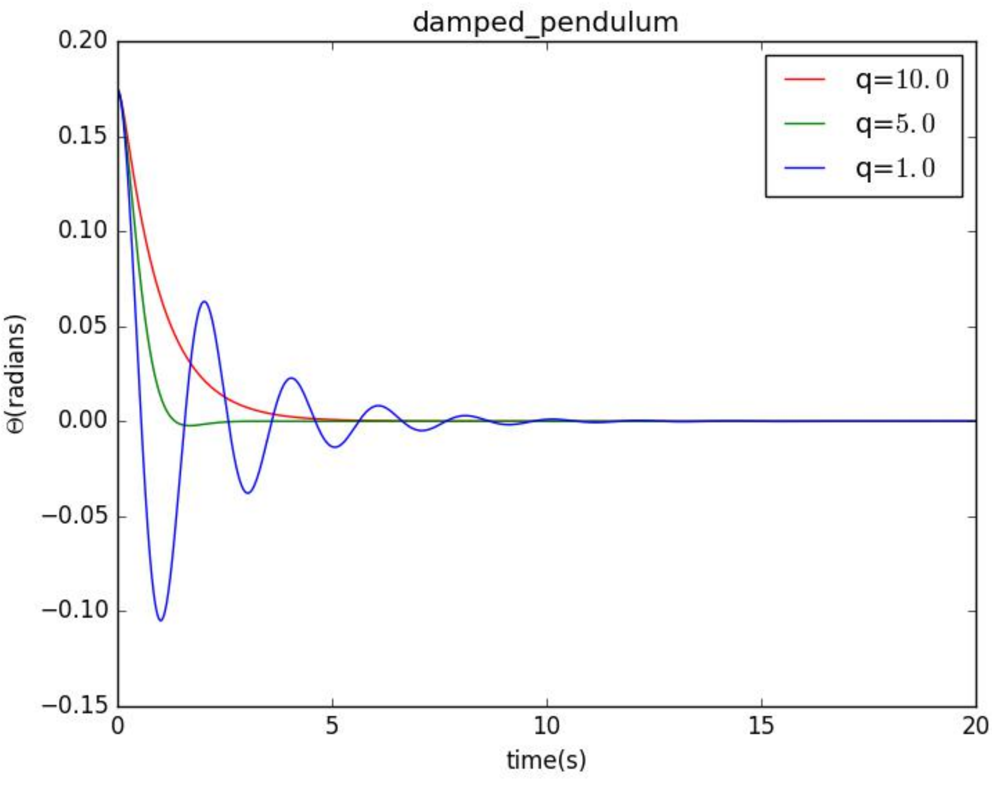
多数情况下，我们都认为衰减力的大小与速度成正比，因此我们有衰减项的表达式为$-q(d\theta/dt)$，q是描述衰减大小的参数，所以就有衰减摆的微分运动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta-q\frac{d\theta}{dt}$$

这是一个含有一次项的常微分方程，它的通解为：

$$\theta(t)=\theta_0 e^{-qt/2}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-q^2/4}t+\phi\right)$$

各参数取值如之前，改变q值，得到运动图像为：



从图中看出,q值比较小时，物体的振幅随时间增长慢慢衰减，最后为0；值较大时，衰减项作用比较大，在较短的时间里就衰减到0。

3、驱动摆

我们再考虑增加驱动力之后的运动形式，通常认为驱动力的大小

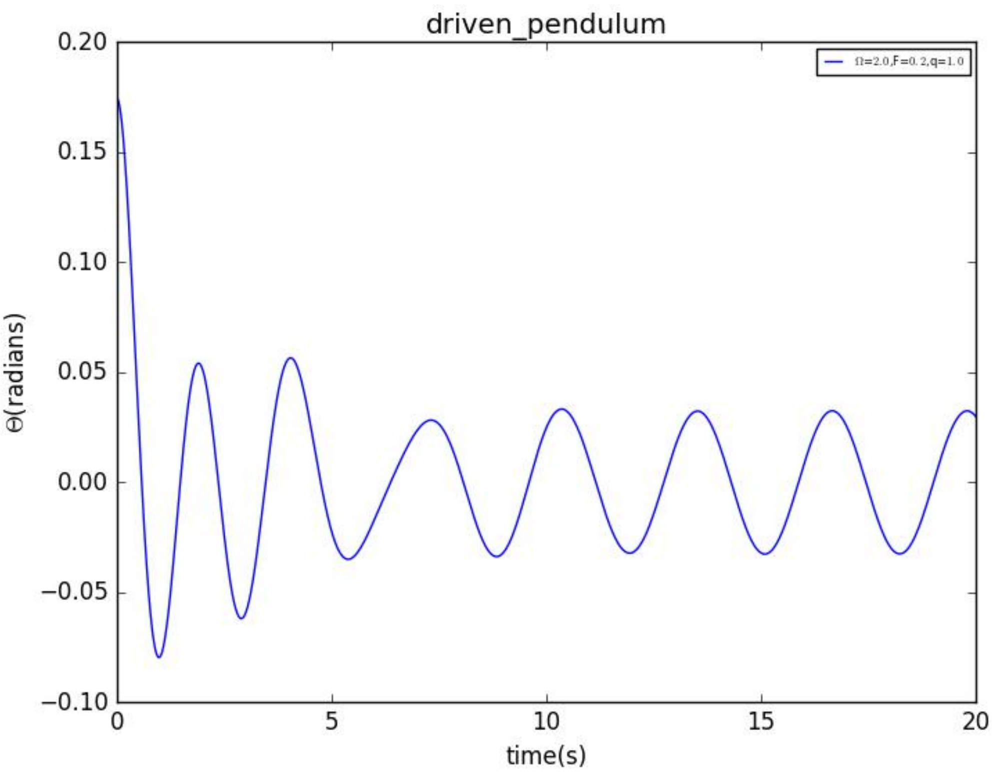
是与时间成正弦关系，得到微分运动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta-q\frac{d\theta}{dt}+F_D\sin(\Omega_D t)$$

驱动力可以为系统增加能量，保持物体能够长时间运动下去。我们能得到它的解析解：

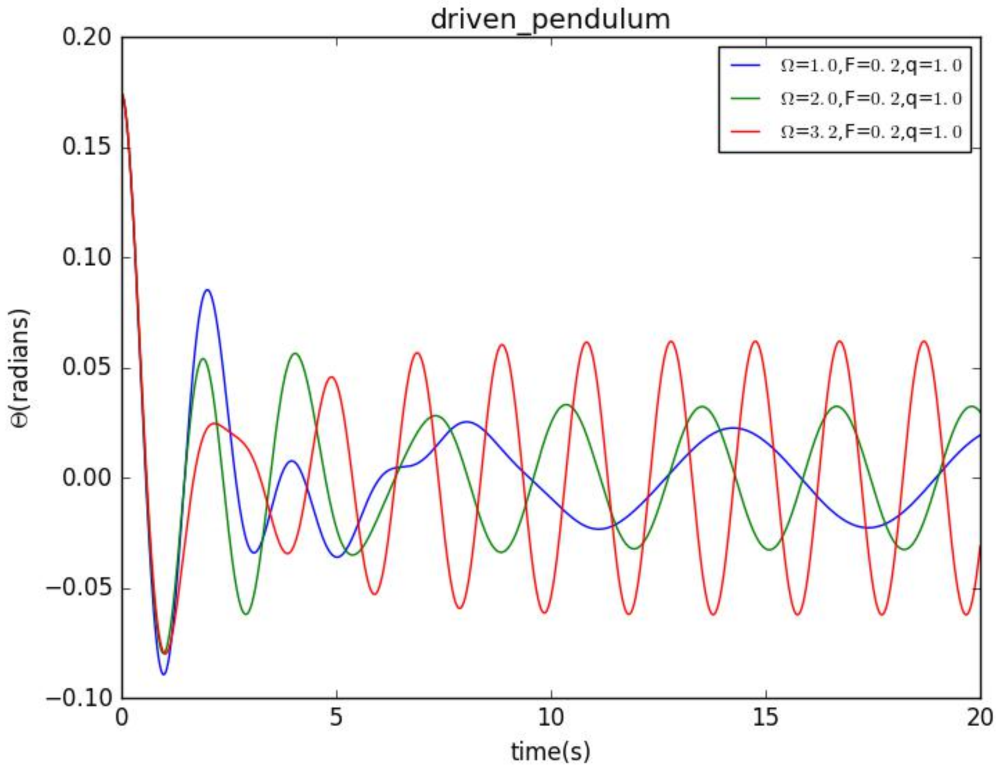
$$\theta(t)=\theta_0\sin(\Omega_D t+\phi) \qquad \theta_0=\frac{F_D}{\sqrt{(\Omega^2-\Omega_D^2)^2+(q\Omega_D)^2}}$$

取$\Omega_D=2.0, F=0.2, q=1.0$，得到如下图形：



图形在经历一开始的振幅减小摆动后，最后会有稳定的波形，从解析解中的表达式可以看出，若Ω与Ω_D的大小十分接近，则θ_0会变得很大，并且在Ω等于Ω_D时有一极大值，这也就是共振现象。

在我们选取的条件中,$\Omega^2=9.8$,我们选取几组值来看一下振幅的差别：



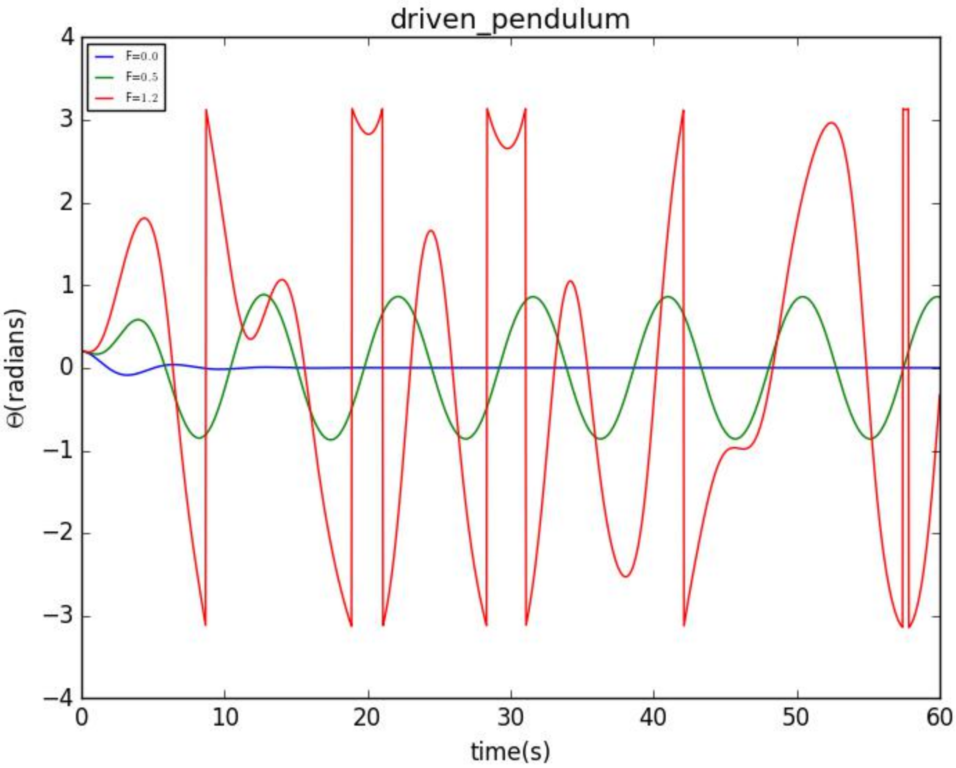
当$\Omega = 3.0$时，物体稳定振幅越大，发生共振。

4、物理摆中的混沌现象

初始角度较大时，我们将小角度近似，在仍然考虑驱动力及摩擦的情况下，我们有如下微分运动方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D\sin(\Omega_D t)$$

这是一个非线性常微分方程，求解它的解析解是非常困难的，我们只能用数值计算的方法模拟物体的运动，取$q = 1/2, l = g = 9.8$，$\Omega_D = 2/3, F_D$分别为$0, 0.5, 1.2$，有如下图像：

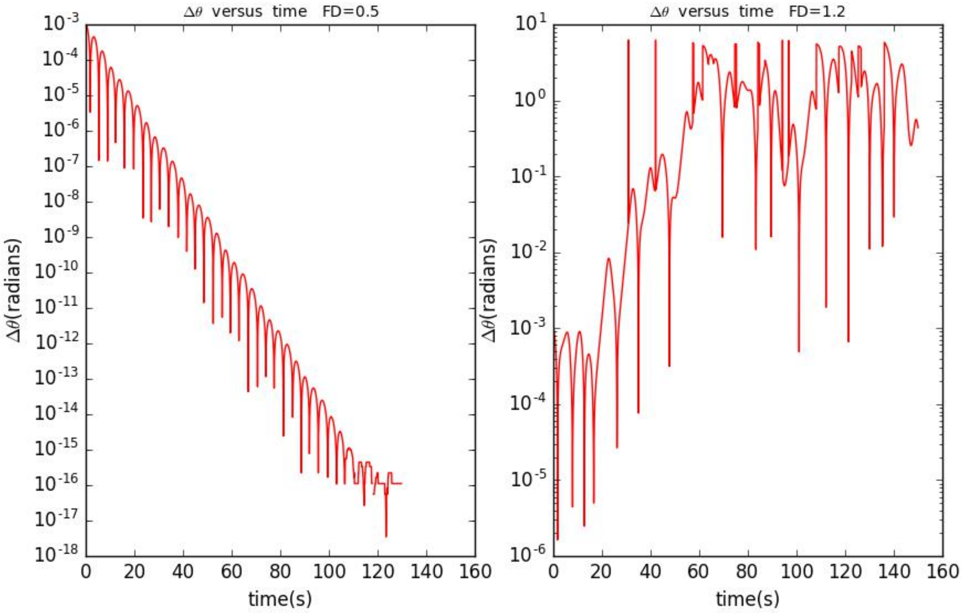


这里我们要做一个保证：即保证是在$-\pi \sim \pi$之间取值，如果跳出这个范围，则要相应地加上或者减去2π使其在这个范围之内。

当$F_D = 0$时，物体很快衰减到静止；当F_D比较小时，在经历一小段时间的衰减之后，便会做简谐运动；当F_D比较大时，如图中取1.2时，会有让我们感兴趣的情况发生：物体运动变得随机而且杂乱无章了，甚至是不可预测的，但是由我们之前的微分运动方程看来，它的运动方程应该是可以确定的，否则我们怎么由数值方法计算呢？我们只能做一个大胆的猜想：它的行为同时是可决定的也是不可预测的。

我们考虑那个微分方程解的稳定性，尽管我们没有将其解出来，我们可以模拟两个完全相同的摆，摆长及摩擦项完全相同，只有初始的角度稍微不同，各参数大小取值如前面的模拟条件，F_D分别取0.5和1.2，研究它们两个摆的角度差$\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2|$与时间的关系,得到如

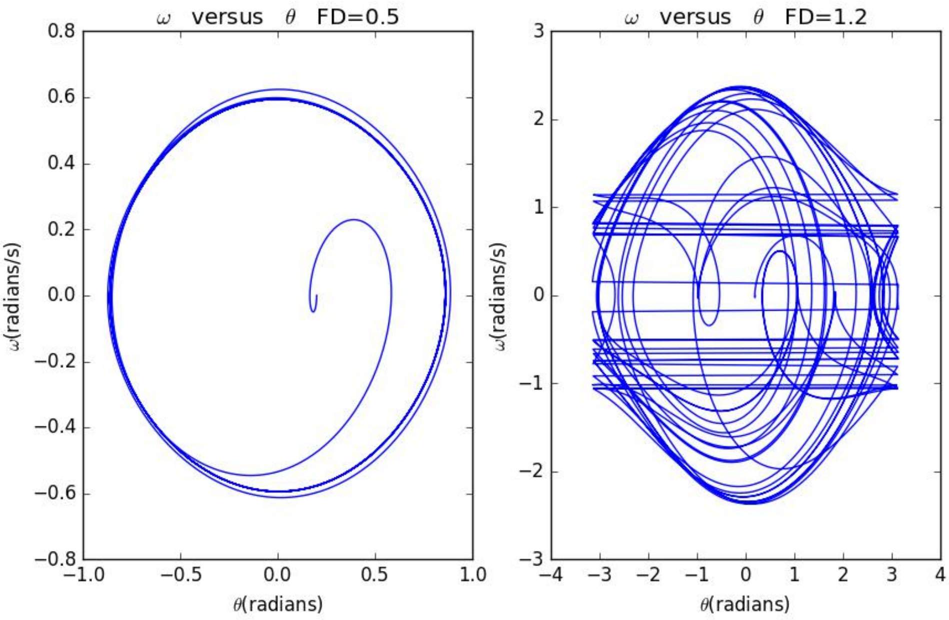
下图像：



我们看到F_D较小时，$\Delta\theta$随着时间增长是稳定而又快速减小的，到最后，这两个摆的运动就会完全一样，这也就是说这种运动是可以预测的，即使有些情况下你不知道其中一个的初始角度，你也可以通过另外一个的运动规律预测这个摆的运动规律；当F_D比较大时，$\Delta\theta$随着时间变化急剧增大，并且毫无规律可言，我们可以十分粗略地近似一下：$\Delta\theta \approx e^{\lambda t}$，当开始时，两摆非常接近，但是轨迹差异马上随指数变化。

由此，可以说，一个系统能够遵从一定的物理规律运动，但是一些运动表现表明由于系统对初始条件的敏感性又变得十分不可预测。

进一步研究混沌效应，我们可以把ω取成是θ的函数，可以直接得到如下图：



F_D较小时，摆在相空间中很快就进入一个标准的椭圆轨道，最后轨道与初始条件是无关的；F_D比较大时，相空间中的有许多不闭合轨道，尽管这个图案不那么简单，但也不是完全随机的。

三、结论

本文先从理想摆入手，慢慢深入研究复杂情况下的摆的运动规律，在抛弃小角度近似下，研究非线性条件下的摆的运动，得出简谐与混沌之间的差别由驱动力大小决定这一结论，并且在相空间中研究摆的运动规律，知道了混沌效应的确定性与不可预测性是同在的。

四、引用

1、Computational physics.Nicholas J.Giordano,Hisao Nakanishi.

2、Think Python.Allen B.Downey.