Datum: 30.10.2012.

PETA SEDMICA: RANG MATRICE

Rang matrice A je broj $r(A)$ koji je jednak redu maksimalnog minora različitog od nule determinante $\det A$.

Maksimalni broj linearno nezavisnih vrsta matrice je jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih kolona i rangu matrice.

Zadatak 1. Odrediti rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Kako matrica A nije kvadratna (a determinanta mora biti), za određivanje $\det A$ treba dodati jedan red sa nulama:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ova determinanta ima minore prvog reda (zeleno), drugog reda (plavo) i trećeg reda (crveno). U određivanju ranga treba među minorima i-tog reda pronaći barem jedan različit od nule, a rang matrice biće jednak redu najvećeg minora. Postupak se može odvijati kako slijedi[1]:

- Među minorima prvog reda postoji barem jedan različit od nule, npr. $|-3| \neq 0$.
- Među minorima drugog reda takođe postoji jedan različit od nule, npr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

- Postoji samo jedan minor trećeg reda i on glasi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

  i jednak je nuli zbog osobina determinanti (treći red sadrži nule, pa je determinanta jednaka nuli).

Jedini minor trećeg reda jednak je nuli, pa zaključujemo da nema nijednog minora trećeg reda različitog od nule. Prema tome, rang matrice jednak biće jednak redu najvećeg minora različitog od nule, a to je minor drugog reda, pa je $r(A) = 2$.

[1] Redoslijed određivanja minora može biti i obrnut, tj. da se prvo odrede minori najvećeg reda.

Ako su svi minori i-tog reda jednaki nuli, tada su i svi minori reda većeg od i takođe jednaki nuli.

Zadatak 2. Odrediti rang matrice:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Rješenje: Analogno prethodnom zadatku,

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

pa je $r(B)<4$.

Da ne bismo izračunavali sve minore reda tri, transformisaćemo ovu determinantu primjenom osobina determinante ne bismo li anulirali još neku vrstu ili kolonu (na primjer, dodati prvu vrstu drugoj, a zatim oduzeti tako izmijenjenu drugu vrstu trećoj):

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

Odavde se vidi da rang mora biti manji od tri, jer su i sve determinante reda tri jednake nuli. Ponovo, među minorima reda dva postoji barem jedan različit od nule, na primjer:,

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

odakle slijedi da je $r(B)=2$.

Zadatak 3: Odrediti rang matrice

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Jedan minor reda 3 je:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-8$$

a odavde je $r(A)=3$.

Kronecker-Capelli-jev stav

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

je **suglasan (rješiv)** ako i samo ako je $r(A) = r(A')$, gdje je A matrica sistema, a A' proširena matrica sistema[2].

Ako je $r(A) = r(A')$, tada je sistem ekvivalentan onom koju se iz njega dobija odabirom proizvoljnih r nezavisnih jednačina.

Zadatak 1. Da li je dati sistem jednačina suglasan (rješiv)?

$$\begin{aligned} 2x \quad -3y \quad +z &= -1 \\ x \quad +y \quad +z &= 6 \\ 3x \quad +y \quad -2z &= -1 \end{aligned}$$

Rješenje: Matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

i njena determinanta je $\det A = -23 \neq 0$, odakle slijedi da je $r(A) = 3$.

Proširena matrica ovoga sistema je

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

U $\det A'$ postoji minor reda 3 različit od nule (to je upravo $\det A$), pa je i $r(A') = 3$.

Kako je $r(A) = r(A') = 3$, može se zaključiti da je sistem **saglasan**.

[2] Vidjeti P5_Sistem_linearnih_jednacina__2012_3, str. 3.

Zadatak 2. Ispitati saglasnost sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 2x &- 3y &+ z &= 2 \\ 3x &- 5y &+ 5z &= 3 \\ 5x &- 8y &+ 6z &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje: Determinanta matrice sistema je

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 6 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

pa je $r(A) < 3$. Kako postoji minor reda 2 različit od nule, to je $r(A) = 2$.

U determinanti proširene matrice sistema može se oduzeti četvrta kolona od prve, a zatim od treće vrste oduzeti i prva i druga, pa se dobija:

$$\det A' = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Odavde se vidi da je i $r(A') = 2$. Kako je $r(A) = r(A') = 2$, sistem je **saglasan**.

Zadatak 3. Da li je saglasan dati sistem jednačina?

$$\begin{aligned} 3x &- y &+ 3z &= 4 \\ 6x &- 2y &+ 6z &= 1 \\ 5x &+ 4y & &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje: Determinanta matrice sistema je jednaka nuli nakon što se od druge vrste oduzme prva umnožena sa 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 6 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Postoji minor reda 2 različit od nule, pa je $r(A) = 2$.

Determinanta proširene matrice sistema je:

$$\det A' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Odavde se vidi da postoji minor reda 3 različit od nula (minor koji se dobija u presjeku redova 1, 2, 3 i kolona 1,2,4 jednak je 51), pa slijedi da je $r(A')=3$.

Kako je $r(A)\neq r(A')$, to ovaj sistem **nije saglasan** (protivrječan je).