Datum: 09.10.2012.

DRUGA SEDMICA: PRIMJENA PRINCIPA MATEMATIČKE INDUKCIJE

Zadatak 1. Ako je cijeli broj x_n definisan rekurzivno sa:

$$x_1 = 2 \qquad \text{i} \qquad x_n = x_{n-1} + 2n \ (n > 1)$$

pokazati da važi da je $x_n = n(n+1)$ za $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje:

1°) Indukcijska baza ($n = 1$):

Rezultat je tačan za $n = 1$, jer je $2 = 1 \cdot 2$.

2°) Indukcijska hipoteza ($n = k$):

Pretpostavimo da rezultat važi za $n = k$, dakle da je:

$$x_k = x_{k-1} + 2k$$

i istovremeno je $x_k = k(k+1)$.

3°) Dokaz ($n = k+1$). Dokažimo da rezultat važi za $n = k+1$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2(k+1) = \\ &= k(k+1) + 2(k+1) = \\ &= (k+1)(k+2). \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 2. Pomoću principa matematičke indukcije dokazati da važi:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n\in\mathbf{N}$$

Rješenje:

1°) Indukcijska baza ($n=1$):

Rezultat je tačan za $n=1$ jer je $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$.

2°) Indukcijska hipoteza ($n=k$):

Pretpostavimo da rezultat važi za neko $n=k$, $k\in\mathbf{N}$, dakle da je

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3°) Dokaz ($n=k+1$). Dokažimo da rezultat važi za sljedeći prirodan broj, $n=k+1$:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{{}^{*}k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{(k+1)(2k^2+7k+6))}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{(k+1)[2k(k+2)+3(k+2)]}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

* U dokazima matematičkom indukcijom se u ovom koraku uvijek mora iskoristiti indukcijska hipoteza; u ovom zadatku je koristimo tako što umjesto zbira $1^2+2^2+\ldots+k^2$ pišemo formulu $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Zadatak 3. Dokazati Moivrovu formulu: $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$, $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje

1°) Indukcijska baza ($\mathrm{n}=1$):

Rezultat je tačan za $\mathrm{n}=1$ jer je $(\cos x + i\sin x)^1 = \cos(1\cdot x) + i\sin(1\cdot x) = \cos x + i\sin x$

2°) Indukcijska hipoteza ($\mathrm{n}=\mathrm{k}$):

Pretpostavimo da rezultat važi za $\mathrm{n}=\mathrm{k}$, dakle da je

$$(\cos x + i\sin x)^k = \cos kx + i\sin kx$$

3°) Dokaz ($\mathrm{n}=\mathrm{k}+1$). Dokažimo da rezultat važi za $\mathrm{n}=\mathrm{k}+1$, odnosno da važi:

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = \cos(k+1)x + i\sin(k+1)x$$

Kako je $(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos x + i \sin x)^k * (\cos x + i \sin x)$, primjenjujemo indukcijsku hipotezu na obilježeni dio:

$$(\cos kx + i \sin kx)\cdot(\cos x + i \sin x) = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

$$\cos kx\cdot\cos x+\cos kx\cdot i\sin x+i\sin kx\cdot\cos x+i^2\sin kx\sin x = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

Pošto je $i^2=-1$ (po definiciji imaginarne jedinice u skupu **C**), dobijamo:

$$\cos kx\cos x - \sin kx\sin x + i(\sin x\cos kx+\cos x\sin kx) = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

Sada primjenjujemo adicione formule:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

pa imamo:

$$\cos(x+kx) + i\sin(x+kx) = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

$$\cos(k+1)x + i \sin(k+1)x = \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x$$

čime je dokazana polazna jednakost.

Zadatak 4. Dokazati da $3 | 5^n + 2^{n+1}, n \in \mathbf{N_0}$, tj. dokazati da je $5^n + 2^{n+1}$ djeljivo sa 3.

Rješenje

1°) Indukcijska baza ($\mathrm{n} = 0$):

Rezultat je tačan za $\mathrm{n} = 0$ jer važi $3 | 5^0 + 2^{0+1} = 1 + 2 = 3$.

2°) Indukcijska hipoteza ($\mathrm{n} = \mathrm{k}$). Pretpostavimo da rezultat važi za $\mathrm{n} = \mathrm{k}$, dakle da važi:

$$3 | 5^k + 2^{k+1}$$

3°) Dokaz ($\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$). Dokažimo da rezultat važi za $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$, odnosno da važi:

$$3 | 5^{k+1} + 2^{k+1+1} = 5^{k+1} + 2^{k+2}$$

Transformisaćemo izraz $5^{k+1} + 2^{k+2}$ do oblika na koji ćemo moći da primijenimo indukcijsku hipotezu:

$$3 | 5^{k+1} + 2^{k+2}$$

$$3 | 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$3 | (3+2) \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$3 | 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$3 | 3 \cdot 5^k + 2 \cdot (5^k + 2^{k+1})$$

U posljednjem redu $3 \cdot 5^k$ je djeljivo sa 3, $2 \cdot (5^k + 2^{k+1})$ je djeljivo sa 3 ($5^k + 2^{k+1}$ je djeljivo sa 3 po indukcijskoj hipotezi), a zbir dva broja djeljiva sa 3 je opet broj djeljiv sa 3.

Zadatak 5. Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja djeljiv sa 9.

Rješenje

Postavka zadatka:

$$9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

1°) Indukcijska baza ($n=1$):

Rezultat je tačan za $n=1$:

$$9 \mid 1^3 + 2^3 + 3^3$$

$$9 \mid 36$$

2°) Indukcijska hipoteza ($n=k$). Pretpostavimo da rezultat važi za $n=k$, dakle da je:

$$9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

3°) Dokaz ($n=k+1$). Dokažimo da rezultat važi za $n=k+1$:

$$9 \mid (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \, .$$

Kako u indukcijskoj hipotezi imamo zbir prva dva kuba iz gornjeg izraza, pomoću formule razvijemo samo treći sabirak:

$$9 \mid (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 3 \cdot k^2 \cdot 3 + 3 \cdot k \cdot 3^2 + 3^3$$

pa izraz zapišemo tako da možemo iskoristiti indukcijsku hipotezu

$$9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9\left(k^2 + 3 \cdot k + 3\right)$$

što očigledno važi za sve prirodne brojeve.