作业一: L'Hopital 法则的叙述与证明

吴泓鹰
数学与应用数学 (强基计划) 3210101890

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自分析学领域的问题，众所周知，两个无穷小之比或两个无穷大之比的极限可能存在，也可能不存在。因此，求这类极限时往往需要适当的变形，转化成可利用极限运算法则或重要极限的形式进行计算。洛必达法则便是应用于这类极限计算的通用方法。

1 问题描述

问题叙述如下: 函数比值的极限等于其导数比值的极限，只要导数的比值的极限存在。

用数学语言则表示为:

(a) 如果函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在去心邻域 $\tilde{B}_\delta(x)$ 内可导且 $g(x) \neq 0$ 恒成立，满足:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0; \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l; \tag{1}$$

则必有:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \tag{2}$$

(b) 如果函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 在去心邻域 $\tilde{B}_\delta(x)$ 内可导且 $g(x) \neq 0$ 恒成立，满足:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty; \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l; \tag{3}$$

则必有:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \tag{4}$$

注：这里的 a, l 可为有限的或者 ∞。

2 证明

证明. 对于完整的证明而言，我们需要考虑 4 种极限过程：分别是 $x \to a^-, x \to a^+, x \to -\infty, x \to +\infty$，这看上去十分复杂，但实际上，对于这 4 种极限过程，定理的证明是完全类似的，我们只需要对其中 $x \to a^+$ 的情形详细地写出证明，并简要的叙述出其他 3 种情形下证明应作出的改动。

我们将只对 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ 为有限的情形进行证明，因为当 $l = +\infty$ 或者 $l = -\infty$ 时，证明同样是完全类似的。

首先我们对 (a) 进行证明, 由式 1与极限定义可知: 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (a, a+\delta)$ 时，有：

$$l - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \epsilon;$$

因此对于任意子区间 $(x, x_0) \subset (a, a+\delta)$, 由 Cauchy 中值定理，必然 $\exists \xi \in (x, x_0)$，使得：

$$l - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < l + \epsilon; \tag{5}$$

通过恒等变形可以得到：

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}};$$

在上式中令 $x_0 \to a$，有 $1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)} \to 1$, 从而我们得到：$\overline{\lim\limits_{x\to a^+}} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq l + \epsilon$. 由 ϵ 的任意性，我们得到 $\overline{\lim\limits_{x\to a^+}} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq l$，同理有 $\underline{\lim\limits_{x\to a^+}} \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq l$. 故由上述两式有式 2成立。

接下来我们证明情形 (b)，由恒等变形我们有:(这里 x 与 x_0 的定义与上述证明中的一致)

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} \\
&= \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} \\
&= \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x)}
\end{aligned}$$

于是, 我们有:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right| &= \left|\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-l\right| \\ &\leq \left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|+\left|\frac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}\right|\end{aligned} \tag{6}$$

其中由 Cauchy 中值定理可得:(这里 ξ 的定义与上述证明中的一致)

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-l\right| < \epsilon$$

结合式 3可知当 x 趋于 a 时, 有 $\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|$ 小于常数, 且 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|$ 趋于 0, 又 $\left|\frac{f(x_0)-lg(x_0)}{g(x)}\right|$ 的分母趋于 ∞, 分子是固定的, 所以也趋于 0。综上所述有:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

即式 4成立。

注: 在其余的 3 种情形中, 只需要更改 x, x_0 的取值范围即可完成类似的完成证明。 $\square$