Julia 集的分析和探索

吴泓鹰

数学与应用数学(强基计划)
3210101890

2022年7月4日

目录

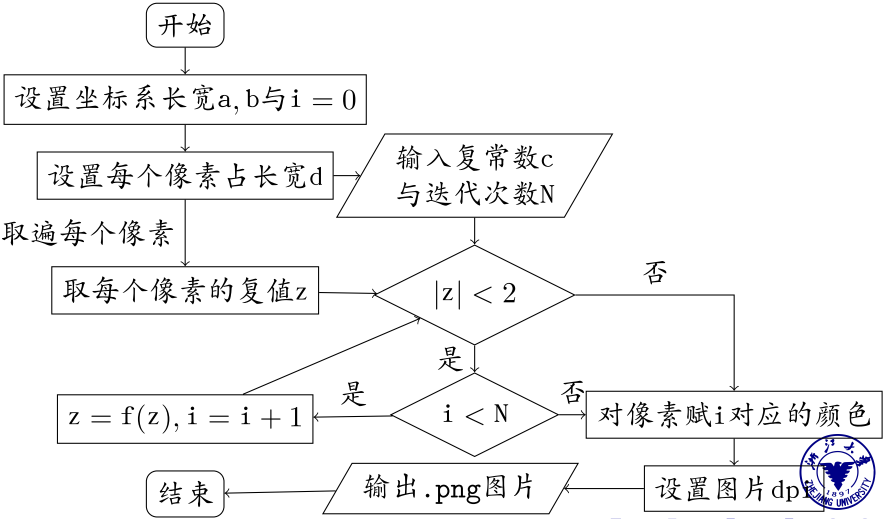
引入：问题背景

Julia集由法国数学家Gaston Julia发现并命名，其是在复平面上构成分形点的集合。在复动力系统的背景下，Julia集由使得任意小的扰动就会使迭代函数序列发生剧烈变化的值组成，这体现了Julia集行为上的混沌性。关于Julia集有很多有趣和美丽的地方，下面我们将对Julia集进行简单的分析和探索。

分析：生成Julia集/数学原理

- Julia集一般可以定义为使得复函数$f_c(z) = z^2 + c$经过无数次迭代后能够不发散的复数z的集合，其中$c \in \mathbb{C}$，我们一般取$|c| < 2$。
- 进一步的，令f(z)为有理函数，其定义为$f(z) := \dfrac{p(z)}{q(z)}$，其中$z \in \mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*$为黎曼球面$\mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$,p, q为没有公因式的多项式。则拓展后的Julia集J_R为在经过无数次f(z)迭代后不发散的z的集合，而真正的Julia集J为J_R的边界∂J_R。

分析：生成Julia集/算法实现(流程图)



探索：不同条件下的Julia集/改变迭代次数N

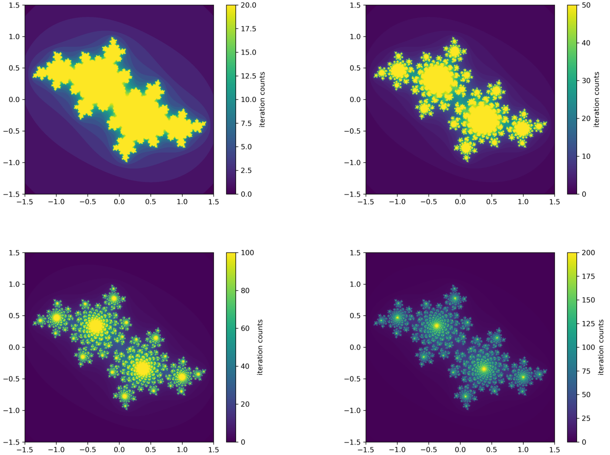


Figure: $c = -0.4 + 0.6i, N = 20, 50, 100, 200$

探索：不同条件下的Julia集/改变复常数c

$c_1 = -0.4 + 0.6i, c_2 = -0.8i,$
$c_3 = 0.285 + 0.01i, c_4 = -0.8 + 0.156i$

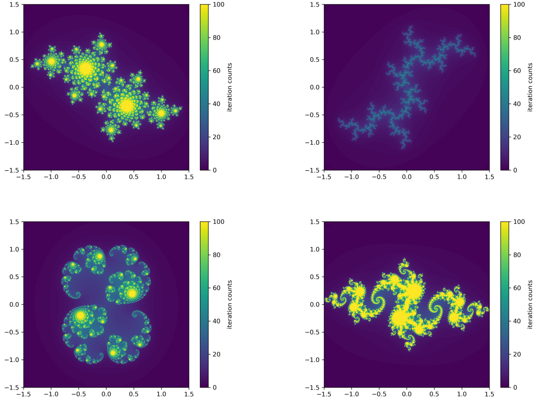


Figure: $N = 100, c = c_1, c_2, c_3, c_4$

探索：不同条件下的Julia集/改变迭代公式f(z)

$$f_1(z) = z^3 - 0.071 - 1.134i,$$

$$f_2(z) = \frac{(1 - \frac{z^3}{6})}{(z - \frac{z^2}{2})^2} - 0.616 + 0.45i$$

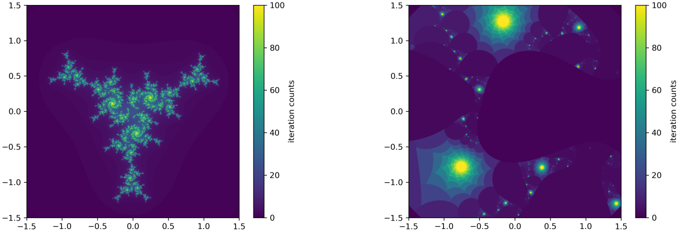


Figure: $N = 100, f(z) = f_1(z), f_2(z)$

拓展：Julia集和Mandelbrot集之间的关系

- 实际上Julia集和Mandelbrot集就是同一函数f(z)对不同参数的递归过程。
- Julia集是固定复常数c，取遍复数z进行递归。
- Mandelbrot集则是固定递归初值z_0取遍复数c进行递归。
- 更深入的来看，Mandelbrot集就是对Julia集的一个概括，这是因为在Mandelbrot集中所选取的c值对应到Julia集时，这个Julia集是连通的，反之亦然。

总结与思考

- 通过以上简单的分析与探索，我对Julia集的性质与特征有了更深入的了解，并且通过Python语言仿照编写了程序对分析和探索的过程进行了可视化，使得这一过程更为清晰自然。
- 同时还对Mandelbrot集与Julia集的关系进行了浅显的分析与观察，而这一联系方法想必能够适用于其他的f(z)，这将帮助我们寻找不同f(z)下更能凸显图像性质的c值。