

# Mandelbrot Set 的生成和探索

吴泓鹰

数学与应用数学 (强基计划) 3210101890

2022 年 7 月 1 日

## 摘要

本文通过分析 Mandelbrot Set 的数学理论, 使用 Python 程序实现生成不同条件下的 Mandelbrot Set 图像的程序, 探索得到 Mandelbrot Set 在数学中的奇特与美丽之处。

**关键词:**Mandelbrot Set, Python

Mandelbrot Set 是什么东西呢? Mandelbrot Set 相信大家都很 (并不) 熟悉, 但是 Mandelbrot Set 到底是什么东西呢, 下面就让小编带大家一起了解吧。<sup>1</sup>

## 1 问题背景

Mandelbrot Set 是一个几何图形, 曾被称为“上帝的指纹”。这个点集均出自公式  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , 对于非线性迭代公式  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , 所有使得无限迭代后的结果能保持有限数值的复数  $z$  的集合 (也称该迭代函数的 Julia 集) 连通的  $c$ , 构成 Mandelbrot Set。它是 Mandelbrot 教授在二十世纪七十年代发现的。<sup>[2]</sup>

迭代函数理论源于现实问题。种群增长的建模就是个例子。种群的当前规模决定了一个繁殖周期之后的规模。因此, 种群增长的数学模型可以用一个包含自变量  $x$  的函数进行描述。 $x$  代表当前种群规模,  $f(x)$  代表一个繁殖周期后的期望种群规模。要想算出多个繁殖周期后的种群规模, 就需要迭代该函数。由此, 生活实践引发了人们对迭代理论的研究。

这引出了迭代理论涉及的重要问题之一: 典型迭代轨迹的运动趋势如何? 收敛还是发散? 周期循环还是毫无规律可言? Mandelbrot Set 对此问题做了图形式的解答。<sup>[3]</sup>

---

<sup>1</sup>使用 [灰太废话生成器](#) 生成

## 2 生成与探索

在本节我们将介绍 Mandelbrot Set 生成的数学理论，并且使用迭代算法对 Mandelbrot Set 进行绘制，得到其在不同条件下的.png 图片。具体而言，我将使用 Python 进行编程以实现以上要求（源代码见[文件夹](#) [4]）。

### 2.1 数学理论

Mandelbrot Set 的简略定义如下：

我们将 Mandelbrot Set 记为集合  $M$ ，其复元素  $c \in \mathbb{C}$  满足：多项式  $P(z) = z^2 + c$  从初值 (critical point)  $z = 0$  迭代产生的轨迹 (orbit) 不趋于无穷大。[1]

这样的定义是有效的 (significant)，这是因为：

- $P$  的 Julia 集是连通的当且仅当  $c \in M$ 。
- 当且仅当  $c \in \partial M$  时，动力系统  $z \mapsto P(z)$  在  $P$  的扰动下是稳定的，其中  $\partial$  是拓扑边界的符号。

### 2.2 基本算法

我们将从  $z_0$  出发由  $z \mapsto P(z)$  迭代产生的轨迹趋于无穷定义为其与  $z_0$  的差的模长大于某个收敛半径  $R$ ，这里的一般取  $R = 2$ 。

关于迭代过程的伪代码如下所示：

---

```
1 选择迭代次数N，迭代半径R，初值z0
2 选择生成的图片的系数：
3     坐标系的长宽ab，原点位置默认为坐标系中心
4     图片中每个像素所占据的坐标系的长宽step
5 对于图中的每一个像素p：
6     令p对应复平面上的复数c
7     令z为一复变量
8     设置z为给定的初值z0
9     将以下过程执行N次：
10        若|z-z0|>R则对z返回某个值f(i, z)
11        否则用z*z+c代替z
12    若该过程自然结束，对z返回某个值f(N, z)
13    根据每个像素p的值产生相应的颜色
14 选择dpi，生成.png图片
```

---

通过插入 Python 库 `numpy` 与 `matplotlib`，即可使用 Python 语言写出如上所示的伪代码，再添加一些细节，就能得到我们所需的图片。

### 2.3 数值算例

以下的所有数值算例均为使用`matplotlib`库中`imshow`函数生成。设置的部分参数为:

表 1: 部分代码参数

$a$	$b$	$step$	$R$	$z_0$	$dpi$
3.0	3.0	0.005	2	$0.75 + 0i$	300

1. 令  $f(N, z) = 1, f(n, z) = 0 (n < N)$ , 再分别取  $N = 10, 20, 50, 100$ :

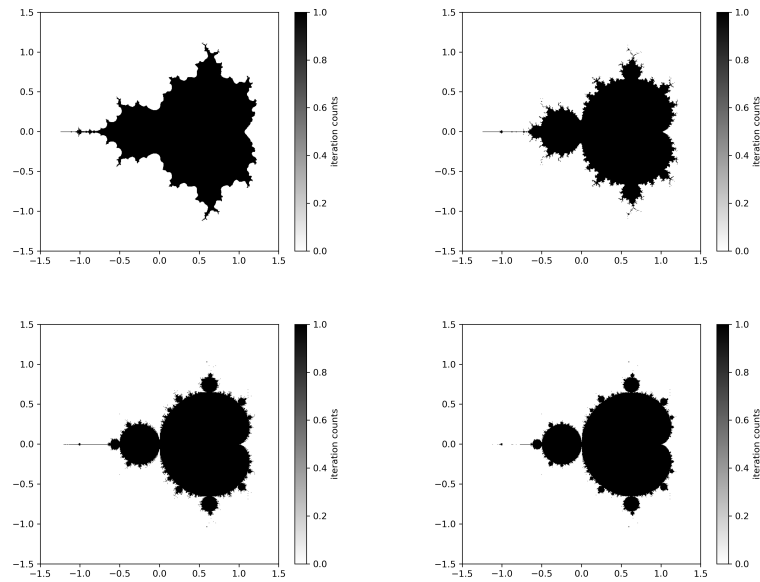
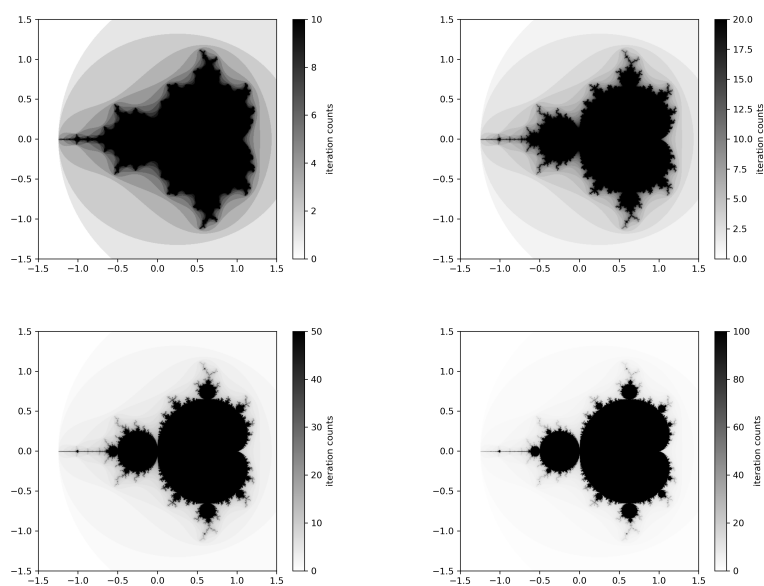


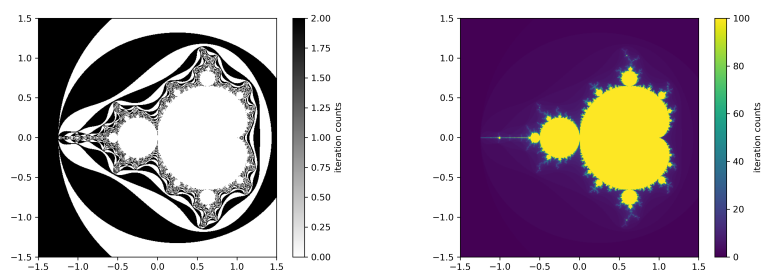
图 1:  $N = 10, 20, 50, 100$ , 只对最后一次迭代上色

开始使  $f$  的值与  $n$  产生联系。

2. 令  $f(n, z) = n$ , 再分别取  $N = 10, 20, 50, 100$ :

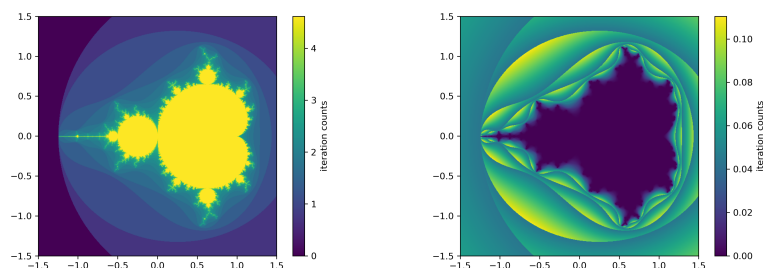
图 2:  $N = 10, 20, 50, 100$ , 每迭代一次颜色加深一点

3. 在类似2的情形下把灰度图改为黑白相间图 ( $f(n, z) = (-1)^i$ ) 和彩图:

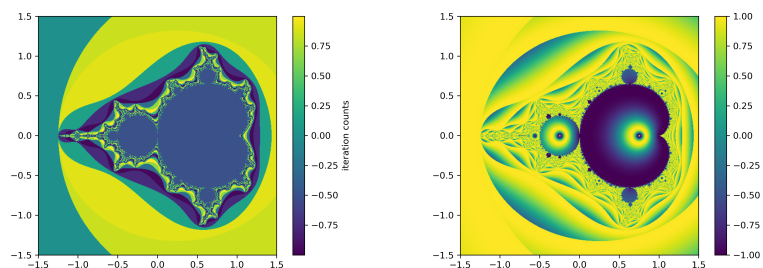
图 3:  $N = 100$ , 每迭代一次颜色反转或变化一点 (线性)

在以下的情形 4, 5 中将会使  $f$  的值还与  $z$  产生关联, 使得生成的图片具有更为特别的样式。

4. 令  $f(n, z) = \ln(n+1)$  与  $f(n, z) = \frac{\ln(|z|^2)}{2^n}$ :

图 4:  $N = 100$ , 每迭代一次颜色变化一点 (对数)

5. 令  $f(n, z) = \sin(n)$  与  $f(n, z) = \sin(\ln(|z|^2))$ :

图 5:  $N = 100$ , 每迭代一次颜色变化一点 (三角函数)

### 3 结论与思考

通过以上的图像生成与探索的过程，我认识到了 Mandelbrot Set 的奇特与美妙之处。也使得我更为深入的思考，再继续改变函数  $f(n, z)$ ，又会生成什么样的图形呢？我相信这件事值得我更进一步地查找资料与深入探索，并从中探索出更为美丽的数学世界。

## 参考文献

- [1] Mandelbrot set. [EB/OL]. [http://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/wiki-draw/index.php/Mandelbrot\\_set#The\\_idea](http://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/wiki-draw/index.php/Mandelbrot_set#The_idea).
- [2] 百度学术. 曼德勃罗集. [EB/OL]. <https://baike.baidu.com/item/%E6%9B%BC%E5%BE%B7%E5%8B%83%E7%BD%97%E9%9B%86/4888291>.
- [3] 遇见数学. “上帝的指纹” - 走进无限美妙的曼德博集合. [EB/OL]. <https://https://zhuanlan.zhihu.com/p/52303089>.
- [4] 陈少文. Mandelbrot set. [EB/OL]. <https://www.chenshaowen.com/blog/drawing-2d-fractal-graph-using-python.html>.