

一元二次方程在实数域上的求解

吴泓鹰

数学与应用数学 (强基计划) 3210101890

2022 年 7 月 4 日

总所周之, 在实数上一元二次方程的求解是小学二年级就学会的内容, 甚至于对于小学生而言这太过幼稚, 相比之下, 对于大学生来是就刚刚好。因此我准备在这里介绍如何在实数域求解一元二次方程并且使用 TiKZ 绘制算法流程图、使用 Gnuplot 绘制方程解的三种情况情况示意图的。(绘图参考了 [3][1])

1 数学原理

求解一元二次方程也就是求满足 $ax^2 + bx + c = 0$ 的 x 的值, 这里 $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, 让我们采访一下不同人是怎么求 x 的吧: [2]

1. **小学生**: 作为一名优秀的小学生, 老师告诉过我, 解一元二次方程只需要配方, 移项, 开根号, 移项化简, 这样就能得到最终的解啦。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \quad (1)$$

2. **初中生**: 作为一名优秀的初中生, 我不知道什么配方法, 只知道一元二次方程 (可能) 有两个根 x_1, x_2 , 即 $x = x_1$ 和 x_2 , 因此有:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{2}$$

进而根据韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$, 就可以把上式化为1式中的结果啦。

3. **高中生**: 作为一名优秀的高中生, 什么配方、韦达定理我都不会, 只会求导、积分, 所以有:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f(x) = \int f'(x)dx = \frac{(2ax + b)^2}{4a} + C$$

$$\Rightarrow C = c - \frac{b^2}{4a}, \int f'(x)dx = 0 \Rightarrow \frac{(2ax+b)^2}{4a} = \frac{b^2}{4a} - c$$

就可以类似地得到1式中的结果啦。

4. **大学生：**作为一名优秀的大学生，配方、韦达、求导、积分什么的我听都没听说过，但我知道一元五次方程没有根式解，这说明群 S_5 不可解，即不存在链 $\{e\} \triangleleft \dots \triangleleft S_5$ 使得每一个群都是其后面一个群的正规子群，且相邻群做商群是一个 abel 群，这是因为 S_5 的正规子群 A_5 的正规子群恒为 A_5 。而对于一元二次方程，群 $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ ，而 \mathbb{Z}_2 是个 abel 群，故 S_2 是个 abel 群，又 $S_2/\{e\} \cong S_2$ ，这表明一元二次方程有求根公式，但怎么得到这个求根公式，这超出了我的能力范围。

2 用 TiKZ 绘制算法流程图

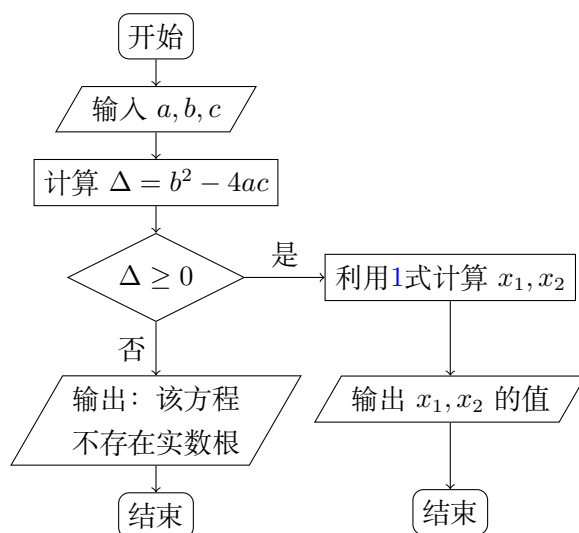


图 1: 一元二次方程求解算法流程图

3 用 Gnuplot 绘制方程解情况的示意图

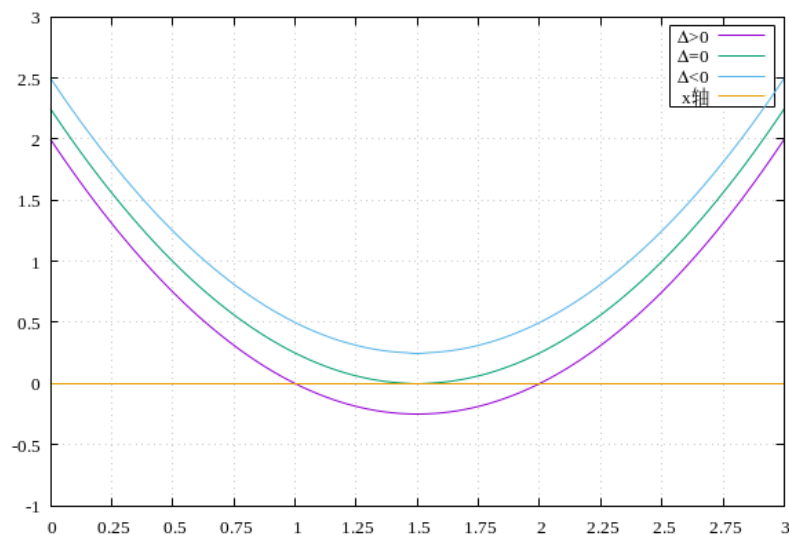


图 2: 一元二次方程三种接的情况示意图

参考文献

- [1] Demos for gnuplot version 5.4 (pngcairo terminal). [EB/OL]. http://gnuplot.sourceforge.net/demo_5.4/.
- [2] 仙童数学. 求根公式: 小学生 vs 研究生。谁更胜一筹? ? . [EB/OL]. https://www.bilibili.com/video/BV16B4y1S7Tb?spm_id_from=333.999.0.0&vd_source=1fe60a39940cc4ef5bde43e079a2ae6.
- [3] 慕子. [latex 绘图] tikz 绘制流程图, 概述和两个示例. [EB/OL]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/82435856>.