

1. Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Последовательность дочерний субъект множества.

1. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

$$\begin{aligned}
 &\forall y \in [0; 1] : \text{sgn}(y) = 1 - \text{False} \\
 &\exists y \in [0; 1] : \text{sgn}(y) \neq 1 - \text{True} \\
 &\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n - \text{False} \\
 &\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n - \text{True} \\
 &\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x - \text{True} \\
 &\exists x \in \mathbb{R} \forall X \in \mathbb{R} : X \leq x - \text{False} \\
 &\forall x \in \mathbb{C} \neg \exists y \in \mathbb{C} : x > y \parallel x < y - \text{False} \\
 &\exists x \in \mathbb{C} \exists y \in \mathbb{C} : x \leq y, x \geq y - \text{True} \\
 &\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}] \exists \epsilon > 0 : \sin(y) < \sin(y + \epsilon) - \text{False} \\
 &\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall \epsilon \leq 0 : \sin(y) \geq \sin(y + \epsilon) - \text{True} \\
 &\forall y \in [0; \pi) \exists \epsilon > 0 : \cos(y) > \cos(y + \epsilon) - \text{False} \\
 &\exists y \in [0; \pi) \forall \epsilon \leq 0 : \cos(y) \leq \cos(y + \epsilon) - \text{True} \\
 &\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{E}, \mathbb{C}\} - \text{False} \\
 &\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{E}, \mathbb{C}\} - \text{True}
 \end{aligned}$$

### Тема "Множество"

1. Даны три множества a, b и c. Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

$$\begin{aligned}
 a &= \{2, 8, 12\} \\
 b &= \{8, 9, 10, 11\} \\
 c &= \{1, 10, 11\} \\
 u &= \{x | x \in \mathbb{N}, x > 13\} \\
 a \cup b &= \{2, 8, 9, 10, 11, 12\} \\
 a \cup b \cup c &= \{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\} \\
 a \cup c &= \{1, 2, 8, 10, 11, 12\} \\
 b \cup c &= \{1, 8, 9, 10, 11\} \\
 a \cap b &= \{8\} \\
 a \cap c &= \{\} \\
 b \cap c &= \{10, 11\} \\
 a \cup b \cap c &= \{2, 8, 10, 11, 12\} \\
 a \cap b \cup c &= \{1, 8, 10, 11\} \\
 a \cap c \cup b &= \{8, 9, 10, 11\} \\
 a \setminus b &= \{2, 12\} \\
 b \setminus a &= \{9, 10, 11\} \\
 b \setminus a \setminus c &= \{9\} \\
 a \Delta b &= \{2, 9, 10, 11, 12\} \\
 a \Delta b \Delta c &= \{1, 2, 9, 12\} \\
 a \times b &= \{(2; 8), (2; 9), (2; 10), (2; 11), (8; 8), (8; 9), (8; 10), (8; 11), (12; 8), (12; 9), (12; 10), (12; 11)\} \\
 \bar{a} &= u \setminus a = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\} \\
 Pa &= \{\{\}, \{2\}, \{8\}, \{12\}, \{2, 8\}, \{2, 12\}, \{8, 12\}, \{2, 8, 12\}\}
 \end{aligned}$$

1. \*Выполнить задание 1 на языке Python

```

In [24]: from itertools import combinations, product

a={2,8,12}
b={8,9,10,11}
c={1,10,11}
u = set([x for x in range(1, 13)])

def bulean(x):
    Pa = []
    for i in range(len(x)+1):
        Pa.extend([j for j in combinations(x,i)])
    return set(Pa)

def dec_mul(a, b):
    return set(product(a, b))

```

```
In [26]: print(a|b)
         print(a|c)
         print(b|c)
         print(a|b|c)
```

```
{2, 8, 9, 10, 11, 12}
{1, 2, 8, 10, 11, 12}
{1, 8, 9, 10, 11}
{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12}
```

```
In [40]: print(a&b)
         print(a&c)
         print(b&c)
         print(a&b&c)
```

```
{8}
set()
{10, 11}
set()
```

```
In [43]: print(a&b|c)
         print(a|b&c)
         print(a|c&b)
         print(a&c|b)
```

```
{8, 1, 10, 11}
{2, 8, 10, 11, 12}
{2, 8, 10, 11, 12}
{8, 9, 10, 11}
```

```
In [31]: print(a^b)
         print(a^c)
         print(b^c)
         print(a^b^c)
```

```
{2, 9, 10, 11, 12}
{1, 2, 8, 10, 11, 12}
{1, 8, 9}
{1, 2, 9, 12}
```

```
In [39]: print(a-b)
print(b-a)
print(a-c)
print(c-a)
print(b-c)
print(c-b)
print(a-b-c)
print(b-c-a)
print(c-a-b)
```

```
{2, 12}
{9, 10, 11}
{8, 2, 12}
{1, 10, 11}
{8, 9}
{1}
{2, 12}
{9}
{1}
```

```
In [45]: print(f'bulean(a) = {bulean(a)}')
print(f'bulean(b) = {bulean(b)}')
print(f'bulean(c) = {bulean(c)}')
print(f'aXb = {dec_mul(a, b)}')
```

```
bulean(a) = {(8, 2), (8, 12), (2,), (8,), (8, 2, 12), (), (2, 12), (12,)}
bulean(b) = {(8, 9, 10), (8, 10, 11), (10, 11), (8, 9, 11), (9, 10, 11), (8, 11), (8,), (8, 10), (9,), (8, 9, 10, 11), (8, 9), (10,), (9, 10), (), (11,), (9, 11)}
bulean(c) = {(10, 11), (1,), (1, 10, 11), (10,), (), (11,), (1, 10), (1, 11)}
aXb = {(2, 9), (2, 8), (8, 11), (2, 11), (8, 10), (2, 10), (8, 9), (8, 8), (1 2, 11), (12, 10), (12, 9), (12, 8)}
```

### Тема "Последовательность"

1. Даны 4 последовательности. Необходимо: а. исследовать их на монотонность; б. исследовать на ограниченность; с. найти пятый по счету член.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$(2^n - n) - (2^{n+1} - (n + 1)) = 2^n - n - 2^{n+1} + n + 1 = 2^n - 2^{n+1} + 1$$

т. к.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (2^n - 2^{n+1} + 1) < 0 \Rightarrow$  последовательность монотонно возрастает.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n) = \infty$$

Последовательность ограничена снизу, т.к. для любых  $n$

$$2^n - n \geq 1$$

$$a_5 = 27$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1-(n+1)} = \frac{1}{1-n} - \frac{1}{-n} = \frac{-n}{-n * (1-n)} - \frac{1-n}{-n * (1-n)} = \frac{1}{n * (1-n)} = \frac{1}{n-n^2}$$

т. к.  $n \in \mathbb{N} > 1 \Rightarrow (n - n^2) < 0 \Rightarrow$  последовательность монотонно возрастает.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1-n} \right) = 0$$

Последовательность ограничена сверху и снизу, т.к. для любых  $n$

$$-1 \leq \frac{1}{1-n} < 0$$

$$b_5 = -0.2$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$-1^n + \sqrt{2n} + 1^{n+1} - \sqrt{2(n+1)} = \sqrt{2n} - \sqrt{2(n+1)}$$

т. к.  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\sqrt{n} - \sqrt{(n+1)}) < 0 \Rightarrow$  последовательность монотонно возрастает.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1^n + \sqrt{2n}) = \infty$$

Последовательность ограничена снизу, т.к. для любых  $n$

$$-1^n + \sqrt{2n} \geq \sqrt{2} - 1$$

$$c_5 = \sqrt{10} - 1 \approx 2.16$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

$$d_1 = 2$$

$$d_2 = -0.25$$

$$d_3 = 0.1$$

$$d_4 = -0.0625$$

$$d_5 = 0.04$$

т. к.  $\exists n < n+1$  и  $\exists n > n+1 \Rightarrow$  последовательность не монотонная.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0$$

Последовательность ограничена сверху и снизу, т.к. для любых  $n$

$$-0.25 \leq (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

$$d_5 = 0.04$$

1. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 128, a_{n+1} - a_n = 6 \\
 a_{n+1} &= 6 + a_n \\
 a_2 &= 6 + a_1 \\
 a_3 &= 6 + (6 + a_1) = 6 + 6 + a_1 = 2 * 6 + a_1 \\
 a_4 &= 6 + (6 + (6 + a_1)) = 3 * 6 + a_1 \\
 a_n &= (n - 1) * 6 + a_1 \\
 a_{12} &= 11 * 6 + a_1 = 66 + 128 = 194
 \end{aligned}$$

1. \*На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью

$$\epsilon = 10^{-7}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

```

In [115]: from mpmath import fac
e = 10**(-7)
n = 1
def x(n):
    return float(n/(fac(n)**(1/n)))

while (x(n+1) - x(n)) > e:
    n += 1

print (f'элемент последовательности {n+1}, lim = {x(n+1):.08}, {x(n+1)-x(n)}'
)
```

элемент последовательности 11779, lim = 2.7169884, погрешность 9.999675842919  
942e-08

1. \*Предложить оптимизацию алгоритма, полученного в задании 3, ускоряющую его сходимость.

```
In [121]: from mpmath import fac
e = 10**(-7)
n = 1
def x(n):
    return float(n/(fac(n)**(1/n)))

while (x(n+1) - x(n)) > e:
    n += 1000
print(n)
while (x(n) - x(n-1)) < e:
    n -= 100
print(n)
while (x(n+1) - x(n)) > e:
    n += 10
print(n)
while (x(n) - x(n-1)) < e:
    n -= 1
print (f'элемент последовательности {n+1}, lim = {x(n+1):.08}, {x(n+1)-x(n)}')
```

12001  
11701  
11781  
элемент последовательности 11779, lim = 2.7169884, погрешность 9.999675842919  
942e-08