Τμήμα Οργάνωσης & Διοίκησης επιχειρήσεων
Μαθηματικά για Διοίκηση Επιχειρήσεων Ι
Δεύτερη εργασία στο LaTeX

Κοκοβίδης Συμεών 61/13

7 Ιανουαρίου 2013

1 Ασκήσεις πάνω στα οικονομικά

Άσκηση 10

Η συνάρτηση ζήτησης και προσφοράς ενός αγαθού δίνονται από τους τύπους $Q_d = 150 - 50lnP$ και $Q_s = 50 + 50lnP$, όπου P, Q η τιμή και η ποσότητα του προϊόντος.

1. Να προσδιοριστεί το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων δεδομένου οτι η συνάρτηση ζήτησης πρέπει να είναι φθίνουσα και η συνάρτηση προσφοράς αύξουσα.

2. Να υπολογιστει το σημείο ισορροπίας της αγοράς.

3. Με βάση τη συνάρτηση ζήτησης να υπολογιστει η συνάρτηση εσόδων και να εξετάσετε αν τα έσοδα μεγιστοποιούνται στο σημείο ισορροπίας της αγοράς.

4. Να υπολογιστεί το πλεόνασμα του παραγωγού.

5. Να υπολογιστεί το πλεόνασμα ενός καταναλωτή που είναι διατεθιμένος να πληρώσει έως €e^2

Λύση

1. Θα πρέπει να είναι $Q_d > 0, Q_s > 0$, $Q'_d < 0$, $Q'_s > 0$ και $P > 0$ (I)
   Η παράγωγος συνάρτηση της Q_d είναι η $Q'_d = -\dfrac{50}{P}$ και της Q_s είναι η $Q'_s = \dfrac{50}{P}$
   Επομένως θα είναι $-\dfrac{50}{P} < 0 \Leftrightarrow -50 < P \Leftrightarrow P > -50$ (II),
   και $\dfrac{50}{R} > 0 \Leftrightarrow 50 > P \Leftrightarrow P < 50$ (III)

Επίσης πρέπει $150 - 50lnP > 0 \Leftrightarrow 150 > 50lnP \Leftrightarrow 3 > lnP \Leftrightarrow e^3 > P \Leftrightarrow P < e^3$ (IV) οπως και $50 + 50lnP > 0 \Leftrightarrow 50lnP > -50 \Leftrightarrow lnP > -1 \Leftrightarrow P > e^{-1}$ (VI)

Το κοινό πεδίο ορισμού προκύπτει απο τους περιορισμούς I, II, III, IV , VI και επομένως θα είναι:
$P \in (e^{-1}, e^3)$

2. Το σημείο ισορροπίας βρισκέται με την εξίσωση των συναρτήσεων ζήτησης και προσφοράς δηλαδή: $Q_d = Q_s \Leftrightarrow 150 - 50lnP = 50 + 50lnP \Leftrightarrow 100 = 100lnP \Leftrightarrow lnP = 1 \Leftrightarrow P = e$

   Αντικαθιστώντας σε μία απο τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε οτι $Q_d| = Q_s| = 100$ οπου $Q_d|, Q_s|$ η ποσότητα ζήτησης και προσφοράς στην ισορροπία.

3. Η συνάρτηση εσόδων, στη γενική της μορφή είναι: $TR = P \cdot Q$

   Με δεδομένη την συνάρτηση ζήτησης , τότε η συνάρτηση ζήτησης θα είναι: $TR = P \cdot Q_d \Rightarrow (150 - 50lnP)P \Rightarrow 150P - 50PlnP$

   Για να βρούμε που μεγιστοποιούνται τα έσοδα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου και επομένως,

   $$TR' = (150P - 50PlnP)' = 150 - 50P\frac{1}{P} + 50lnP = 150 - 50 + 50lnP = 100 + 50lnP \ ,$$

   $$TR' = 0 \Rightarrow 100 + 50lnP = O \Rightarrow lnP = -2 \Rightarrow P = e^{-2}$$

   Που σήμαινει οτι μοναδικό και πιθανό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι η τιμή $P = e^{-2}$ και επομένως η τιμή ισορροπίας δεν μεγιστοποιεί τα κέρδη.

4. Το πλεόνασμα του παραγωγού δίνεται απο τον τύπο :

   $PS = \int_0^{p|} q^S(p)dp(q)$ όταν ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η τιμή,
   με $p|$ την τιμή στην ισορροπία της αγοράς.

   Στη προκειμένη περίπτωση αντικαθιστώντας προκύπτει:

   $$PS = \int_0^e (50 + 50\text{lnp})dp = \int_0^e 50dp + \int_0^e 50\text{lnpdp} = [50\text{p}]_0^e + 50\int_0^e \text{lnpdp} = [50\text{p}]_0^e + 50\int_0^e (\text{p})'\text{lnpdp} = [50\text{p}]_0^e + 50[\text{plnp} - \int_0^e \text{p}(\text{lnp})'\text{dp}] = [50\text{p}]_0^e + 50[\text{plnp} - p]_0^e = 50e - 0 + 50(e - e) - 50(0 - 0) = 50e$$

5. Το πλεόνασμα του ενός καταναλωτή ανάλογα με το εφικτό ποσό που μπορει να διαθέσει προκύπτει απο τον τύπο: $CS = \int\limits_{p|}^{(\varepsilon\varphi\iota\kappa\tau o)} q^D(p)dp$

   Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$CS = \int\limits_{e}^{e^2} (150 - 50\ln p)dp = [150p]_e^{e^2} - 50\int\limits_{e}^{e^2} \ln p dp = [150p]_e^{e^2} - 50([p\ln p]_e^{e^2} - \int\limits_{e}^{e^2} p(\ln p)'dp]) =$$

$$[150p]_e^{e^2} - [50p\ln p]_e^{e^2} + [50p]_e^{e^2} = 150e^2 - 150e - 50e^2\ln e^2 + 50e\ln e + 50e^2 - 50e = 200e^2 - 50e^2\ln e^2 - 150e = 200e^2 - 100e^2\ln e - 150e = 100e^2 - 150e$$

Άσκηση 19

Η συνάρτηση των εσόδων μιας επιχείρησης που παράγει 2 προϊόντα, A και B, είναι η:

$$TR(q_A, q_B) = -4q_A^2 - 3q_B^2 + 6q_Aq_B + 20q_A - 120$$

Όπου q_A, q_B οι εβδομαδιαίες ποσότητες παραγωγής των 2 προϊόντων σε τόνους και R τα εβδομαδιαία έσοδα σε χιλιάδες €.

1. Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα έσοδα της επιχείρησης, καθώς και τα μέγιστα κέρδη.

2. Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα έσοδα αν οι εβδομαδιαίες ποσότητες παραγωγής πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό: $10q_A - 6q_B + 200 = 0$

Λύση

1. Θα βρούμε τις μερικές παραγώγους:

$$TRq_A = \frac{\partial TR}{\partial q_A} = -8q_A + 6q_B + 20\ , \quad TRq_B = \frac{\partial TR}{\partial q_B} = -6q_B + 6q_A$$

   Άρα το ανάδελτα της TR είναι

$$\nabla TR = \left\{ \begin{array}{c} -8q_A + 6q_B + 20 \\ -6q_B + 6q_A \end{array} \right\}$$

   Βρίσκοντας και τις δεύτερες μερικές παραγώγους αλλα και παραγωγίζοντας την μερική παράγωγο της μιας ως προς την άλλη μεταβλήτη.

$$TRq_Aq_A = \frac{\partial^2 TR}{\partial {q_A}^2} = -8,\ TRq_Bq_B = \frac{\partial^2 TR}{\partial {q_B}^2} = -6,\ TRq_Aq_B = \frac{\partial^2 TR}{\partial q_A \partial q_B} = 6$$

Προκείπτει και η εσσιανή:

$$HTR = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 TR}{\partial {q_A}^2} & \dfrac{\partial^2 TR}{\partial q_A \partial q_B} \\ \dfrac{\partial^2 TR}{\partial q_A \partial q_B} & \dfrac{\partial^2 TR}{\partial {q_B}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Εξισώνοντας το ανάδελτα της TR με μηδέν (Συνθήκες Πρώτης Τάξης)

$$\nabla TR = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -8q_A + 6q_B + 20 = 0 \\ -6q_B + 6q_A = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -8q_A + 6q_B + 20 = 0 \\ 6q_A = 6q_B \end{array} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2q_A = -20 \\ 6q_A = 6q_B \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2q_A = 10 \\ 6q_A = 6q_B \end{array} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} q_A = 10 \\ q_B = 10 \end{array} \right|$$

Και βρίσκοντας εάν η εσσιάνη ειναι αρνητική μέσω των ηγετικών κύριων ελάσσονων:
$|H_1| = -8$ και $|H_2| = [(-8) \cdot (-6)] - 6 \cdot 6 = 12$, που όντως είναι.

Καταλήγουμε πώς ο συνδιασμός απο 10 τόνους του προϊοντος A και 10 τόνους του B, οδηγει στα μέγιστα έσοδα για την επιχείρηση. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην αρχική συνάρτηρη εσόδων TR, $TR(10, 10) = -4 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 - 120 = -20$, καταλήγουμε πως ποτέ δεν έχει έσοδα αρα και ποτέ δεν εχει κέρδη.

2. Αφού έχουμε περιορισμό, θα δημιουργήσουμε την συνάρτηση Lagrange:

$$L(q_A, q_{B,}\lambda) = -4q_A^2 - 3q_B^2 + 6q_Aq_B + 20q_A - 120 - \lambda(10q_A - 6q_B + 200)$$

θα βρούμε το ανάδελτα της L , των συνδιασμό λύσεων του συστηματος: $\nabla L = 0$ και έπειτα μέσω της εσσιανής της L για το ποιος συνδιασμός λύσεων αποτελεί και τοπικό μέγιστο. Όταν έχω δύο μεταβλητές και έναν περιορισμό στη συνάρτηση Lagrange, αν η ορίζουσα της HL $(x_{o,}y_o, \lambda)$ είναι θετική τότε έχω τοπικό μέγιστο.

2 Γενικές ασκήσεις

Άσκηση 5

Δίνεται ο πίνακας:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Να υπολογιστει ο πίνακας A^2
2. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
3. Να λυθεί το σύστημα $Ax = \mathbf{0}$ όπου $\mathbf{0} = (\ 0\ 0\ 0\ )'$

Λύση

1.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) & 3\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 2\cdot 7 \\ 1\cdot 3 + 4\cdot 1 + (-3)\cdot 5 & 1\cdot 1 + 4\cdot 4 + (-3)\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 4\cdot(-3) + (-3)\cdot 7 \\ 5\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 7\cdot 5 & 5\cdot 1 + (-2)\cdot 4 + 7\cdot(-2) & 5\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) + 7\cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9+1+10 & 3+4-4 & 6-3+14 \\ 3+4-15 & 1+16+6 & 2-12-21 \\ 15-2+35 & 5-8-14 & 10+6+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 17 \\ -8 & 23 & -31 \\ 48 & -17 & 65 \end{pmatrix}$$

2. Για να είναι τα διανύσματα στήλες του πίνακα, γραμμικά ανεξάρτητα θα πρέπει οι στήλες του πίνακα ως διανύσματα:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

να δίνουν ως μοναδικη λύση το $\mathbf{0}$, στο παρακάτω σύστημα: $\kappa A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0$

Άρα έχουμε

$$\kappa\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}3\kappa+\lambda+2\mu\\\kappa+4\lambda-3\mu\\5\kappa-2\lambda+7\mu\end{pmatrix}=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}3\kappa+\lambda+2\mu=0\\\kappa+4\lambda-3\mu=0\\5\kappa-2\lambda+7\mu=0\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda=-3\kappa-2\mu\\\kappa+4\lambda-3\mu=0\\5\kappa-2\lambda+7\mu=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lambda=-3\kappa-2\mu\\\kappa-12\kappa-8\mu-3\mu=0\\5\kappa+6\kappa+4\mu+7\mu=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lambda=-3\kappa-2\mu\\-11\kappa-11\mu=0\\11\kappa+11\mu=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lambda=-3\kappa-2\mu\\-11\kappa=11\mu\\11\kappa=-11\mu\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda=-3\kappa-2\mu\\\kappa=\mu\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lambda=-3\mu-2\mu\\\kappa=\mu\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lambda=-5\mu\\\kappa=\mu\end{matrix}\right\}(\kappa,\lambda,\mu)=(\mu,-5\mu,\mu)$$

Επομένως τα διανύσματα, δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

3.

$$\mathrm{Ax}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&-3\\5&-2&7\end{pmatrix}x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}3x_1&1x_2&2x_3\\1x_1&4x_2&-3x_3\\5x_1&-2x_2&7x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3x_1&1x_2&2x_3\\1x_1&4x_2&-3x_3\\5x_1&-2x_2&7x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3x_1+x_2+2x_3=0\\x_1+4x_2-3x_3=0\\5x_1-2x_2+7x_3=0\end{matrix}\right\}$$

Επομένως το σύστημα αυτό θα μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Cramer μιας και ενδεικνύετε για την επίλυση τετραγωνικών συστηματων (3X3) αλλα και με άλλους τρόπους, όπως τη μέθοδο Gauss-Jordan