ミクロ経済学B/現代経済学II
第１１回「展開形ゲーム③」

法政大学　経済学部　平井俊行

繰返しゲーム

- 不完全情報ゲーム の典型例。
- 同じ戦略形ゲームを複数回繰り返す。
  - この講義では 囚人のジレンマ を扱う。
- 1回限りおこなわれる囚人のジレンマでは (D, D) が唯一ナッシュ均衡だった。
  - パレート効率的 ではない。
- 複数回繰返しおこなわれることで、どのように変わるだろうか？

囚人のジレンマとカルテル

- 市場需要関数を$D = a - p$、それぞれの企業$i = 1{,}2$の費用関数を$c_i(x_i) = cx_i$としたときの複占市場を考える。
- このときのクールノーナッシュ均衡は$\boxed{\left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)}$となり、そのときの各企業の利潤は$\boxed{\frac{(a-c)^2}{9}}$ずつ.
- これらの企業がカルテルを形成し、生産量の合計を独占市場において利潤が最大になるように調整するとする。
- 生産量の合計は$\boxed{\frac{a-c}{2}}$なので、半分ずつ生産すると$\boxed{\frac{a-c}{4}}$ずつ生産することになる。
- そのときの利潤は$\boxed{\frac{(a-c)^2}{8}}$ずつ。

囚人のジレンマとカルテル

- カルテルを結ぶ約束をしたが、一方の企業のみが裏切って $\boxed{\frac{a-c}{3}}$ を生産すると(もう一方の企業は $\boxed{\frac{a-c}{4}}$ 生産)、利潤は、前者が $\boxed{\frac{5(a-c)^2}{36}}$、後者が $\boxed{\frac{5(a-c)^2}{48}}$ $A=(a-c)^2$ とすると、、、

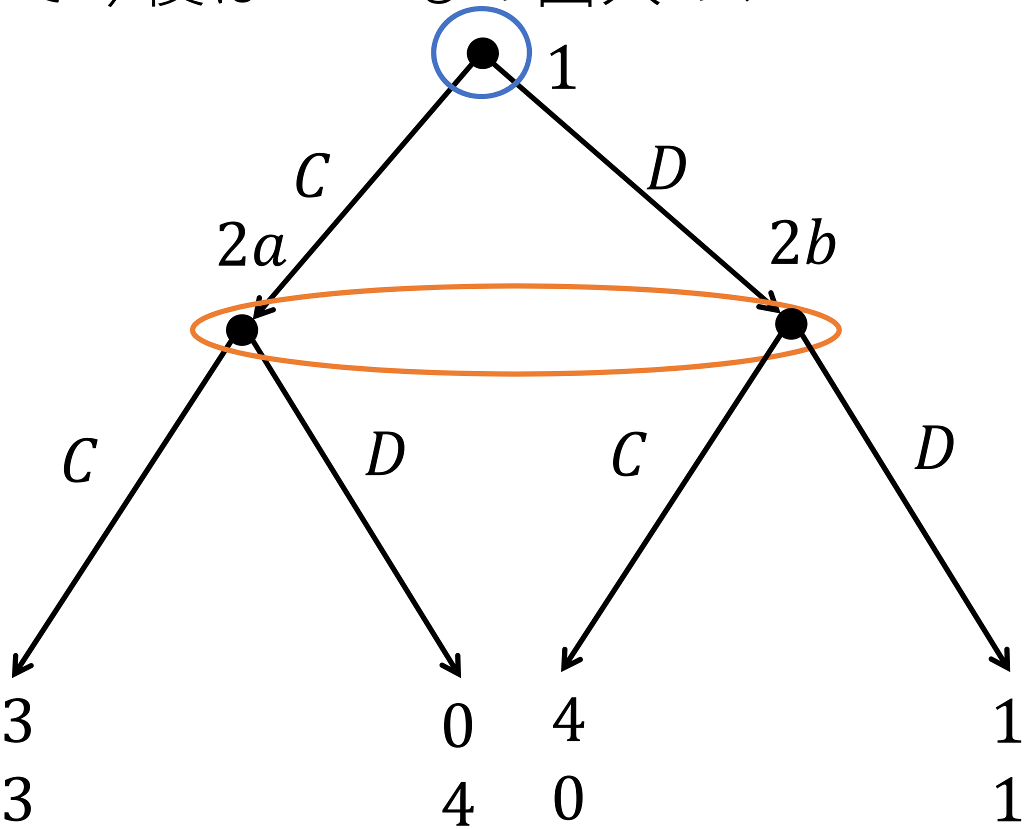
1 \ 2	C(協調)	D(裏切)
C(協調)	$\frac{A}{8}$, $\frac{A}{8}$	$\frac{5A}{48}$, $\frac{5A}{36}$
D(裏切)	$\frac{5A}{36}$, $\frac{5A}{48}$	$\frac{A}{9}$, $\frac{A}{9}$

囚人のジレンマと事実上同じ

囚人のジレンマ

- 数字はシンプルなほうが良いので今後はいつもの囚人のジレンマを使う。

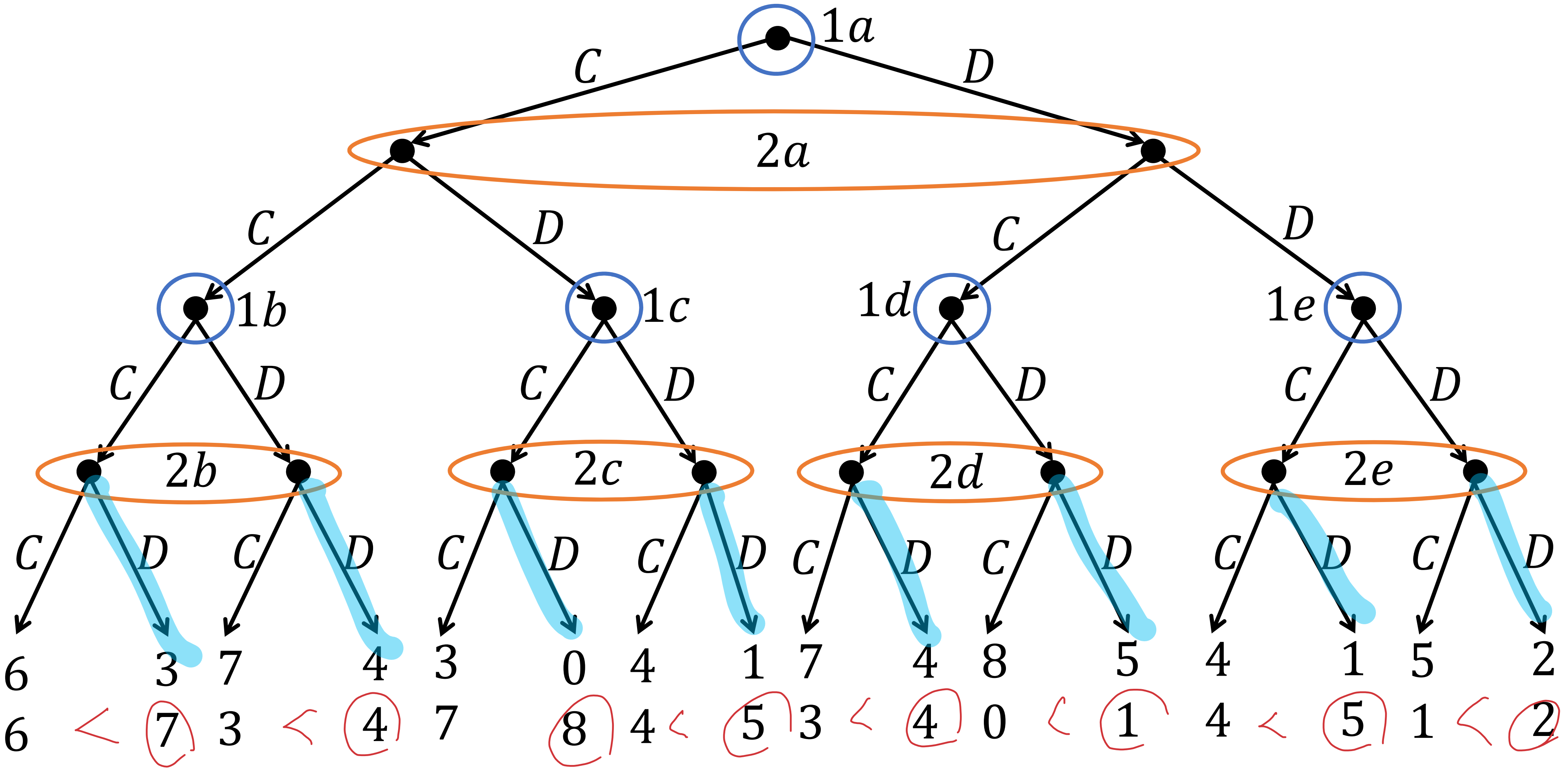
1 \ 2	C	D
C	3 3	4 0
D	0 4	1 1



2回繰返し囚人のジレンマ

- 囚人のジレンマを二回繰り返した場合を考える。
- 両プレイヤーとも1回目の結果を知ったうえで2回目をプレイする。
- 利得は各回の利得の合計とする。
  - 1回目が(C, C)、2回目が(C, D)だったとするとプレイヤー1の利得は $\boxed{3+0=3}$ プレイヤー2の利得は $\boxed{3+4=7}$

2回繰返し囚人のジレンマ



2回繰返し囚人のジレンマ

- 各プレイヤーの戦略とも、どの情報集合でも$\boxed{\text{Dを選ぶ (All D)}}$であるような戦略の組が唯一の部分ゲーム完全均衡。
- 繰返し回数が$\boxed{\text{有限回}}$である限り、この結論は変わらない。
- 無限に繰返す場合を考えるとどのように変化するだろうか？

無限回繰返し囚人のジレンマ

無限回繰返し囚人のジレンマを考えるときの問題点

- 情報集合の数も無限になるので、情報集合ごとに選択肢を列挙するという戦略の書き方ができなくなる。
- 利得を単純に合計していくと $\boxed{\text{無限大}}$ に発散してしまう。
- $\boxed{\text{「最後」}}$ がないので後向き帰納法が使えない。

無限回繰返し囚人のジレンマの戦略

- それぞれのプレイヤーは過去のゲームでおこったこと(戦略の組)はすべて知ることができる。
- 今回CとDのどちらを選ぶかを、以前のゲームで起こったこと (履歴)に依存して決定するような 行動表を戦略とする を戦略とする。

例

- $All\ C$・・・どのような履歴でも常に C を選ぶ。
- $All\ D$・・・どのような履歴でも常に D を選ぶ。
- TFT (Tit for Tat)・・・1回目では C を選び、2回目以降は前回相手が選んだ行動をまねする。
- $Trigger$・・・1回目では C を選び、2回目以降は過去に一度でも(C,C)以外が起きたことがあるなら D を、そうでなければ C を選ぶ。

無限回繰返し囚人のジレンマの戦略

- それぞれのプレイヤーは過去のゲームでおこったこと(戦略の組)はすべて知ることができる。
- 今回CとDのどちらを選ぶかを、以前のゲームで起こったこと(履歴)に依存して決定するような行動の計画表を戦略とする。

例

- $All\ C$・・・どのような履歴でも常にCを選ぶ。
- $All\ D$・・・どのような履歴でも常にDを選ぶ。
- TFT (Tit for Tat)・・・1回目ではCを選び、2回目以降は前回相手が選んだ行動をまねする。
- $Trigger$・・・1回目ではCを選び、2回目以降は過去に一度でも(C, C)以外が起きたことがあるならDを、そうでなければCを選ぶ。

無限回繰返し囚人のジレンマの利得

- $\boxed{\text{割引率 } \delta (0<\delta<1)}$を用いる。
- 1回目のゲームの利得はそのまま、2回目のゲームの利得には$\boxed{\delta}$をかけて、3回目のゲームの利得には$\boxed{\delta^2}$をかけて、・・・$\boldsymbol{k}$回目のゲームの利得には$\boxed{\delta^{k-1}}$をかけて足し合わせる。
- 例えば両プレイヤーとも$\boldsymbol{TFT}$をとると$\boxed{(C,C)}$が出続けることになるがこの場合の各プレイヤーの利得は

$$\boxed{3+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\cdots+3\delta^{k-1}+\cdots =}\boxed{\frac{3}{1-\delta}}$$

無限級数の計算

Sとおく。このSがわかれば十分。

- $3+3\delta+3\delta^2+\cdots+3\delta^{k-1}+\cdots=3\overbrace{(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{k-1}+\cdots)}$
- 一旦k乗のところで止めて、その合計をS_kと置くと、

$\times\delta$ $\times\delta$

左辺同士・右辺同士を引き算

$$
\begin{aligned}
S_k &= 1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^k \\
\delta S_k &= \quad\ \ \delta+\delta^2+\cdots+\delta^k+\delta^{k+1} \\
\hline
(1-\delta)S_k &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad -\delta^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$S_k=\frac{1-\delta^{k+1}}{1-\delta}.$$

Sはkを無限大に発散させたときのS_kの値なので、

$$S=\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1-\delta^{k+1}}{1-\delta}=\frac{1}{1-\delta}.$$

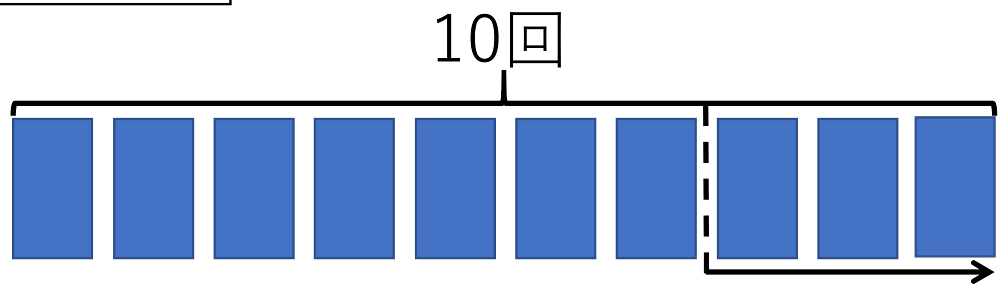
割引率

- 簡単化のため、利得をお金として考えると大体の人は同じ金額なら1年後にもらうより今もらうことを好むはず。
  - 純粋に金額の多寡で考えても今もらっておけば、預金することで1年後には金額が増えている。
- 割引率はゲームが続く確率ととらえることもできる。
  - 実際に無限に続くことはありえない。(人生は有限)
  - ゲームが終わるとその後得られる利得は0とすると、割引率を用いて計算した無限回繰返しゲームの利得は期待利得とみなすことができる。

無限回繰返しゲーム

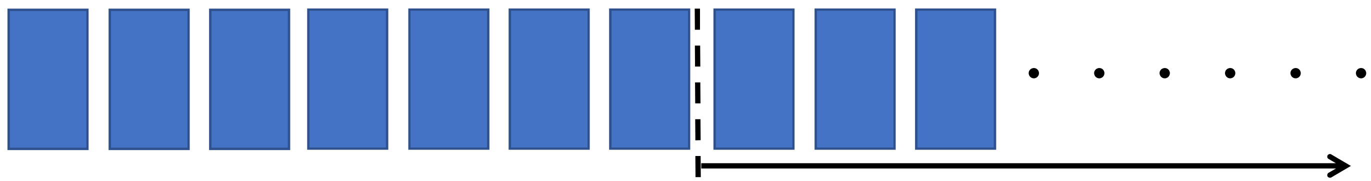
- 無限回繰返しゲームでは、$\boxed{\text{部分ゲーム}}$も無限回繰り返される。
  - $\boxed{\text{元のゲーム}}$と$\boxed{\text{部分ゲーム}}$で構造が変わらない。

有限回(例：10回)



ある7回目以降の部分ゲームは
3回しか繰返されないので元のゲームとは違う。

無限回



7回目以降も無限に続くので元のゲームと同じ。

無限回繰返しゲーム

- すべての部分ゲームが無限回繰り返されるという同じ性質を持っていることを利用して部分ゲーム完全均衡を求める。
  - 元のゲーム（当然無限回繰返し）のナッシュ均衡を考え、それを組み合わせることで部分ゲーム完全均衡を求める。

- 有限回繰返しゲームでは常にDを選ぶような戦略の組を部分ゲーム完全均衡、つまりナッシュ均衡だった。
- これは無限回繰返しゲームでも成立するか？
  - (allD, allD)はナッシュ均衡になるか？

無限回繰返しゲーム

- $(all\ D, all\ D)$について考える。
- 対称的なゲームなので、プレイヤー2が戦略を変えても利得を増やせないことを示せばよい。
- プレイヤー1が$all\ D$を選んでいるので、
  - プレイヤー2はどのような戦略を選んでも、各回の利得は 0か1
  - プレイヤー2は$all\ D$を選べば各回の利得は 1
  - プレイヤー2の利得は戦略を$all\ D$から他に変更して 大きくなる ことはない。

無限回繰返しゲーム

- 無限回繰返しゲームでも「裏切り続ける」という結果がナッシュ均衡としてでてしまう。
  - $all\ D$はどの部分ゲームでもall Dをとることになるので、実際は部分ゲーム完全均衡になる。
- 一方で、無限回繰返しにすると有限回の繰返しではおこらなかった「協力し続ける」という結果も起こりうる。
  - 割引率が十分に1に近いという条件は必要。

無限回繰返しゲーム

- $\boxed{(trigger,\ trigger)}$を考える。
  - $trigger$戦略とは1回目では$\boxed{C}$を選び、それ以降は過去に(C,C)以外の戦略の組が起こったことがあるなら$\boxed{D}$を、そうでないなら$\boxed{C}$を選ぶような戦略。
- このときの各プレイヤーの利得は$\boxed{\frac{3}{1-\delta}}$
- ここでもゲームの対称性からプレイヤー2が戦略を変更したときにより大きな利得を得ることができるかを考えればよい。
- 結果的にCを選び続けるような戦略($all\ C$やTFT)に変更しても(C,C)が起き続けるだけなので利得は$\boxed{\frac{3}{1-\delta}}$のまま。

無限回繰返しゲーム

- $\boxed{(\text{trigger}, \text{trigger})}$ のとき

利得 3 3 ・・・・ 3 3 3 3 3 ・・・・・・

プレイヤー1 C C ・・・・ C C C C C ・・・・・・

プレイヤー2 C C ・・・・ C C C C C ・・・・・・

利得 3 3 ・・・・ 3 3 3 3 3 ・・・・・・

無限回繰返しゲーム

- プレイヤー2が途中でDを選ぶ戦略にかえたとき

利得	3	3	・・・・	3	0	・・・・・・
プレイヤー1	C	C	・・・・	C	C	・・・・・・
			・・・・			・・・・・・
プレイヤー2	C	C	・・・・	C	D	・・・・・・
利得	3	3	・・・・	3	4	・・・・・・

トリガーを引いたので次回以降

プレイヤー1はずっとD

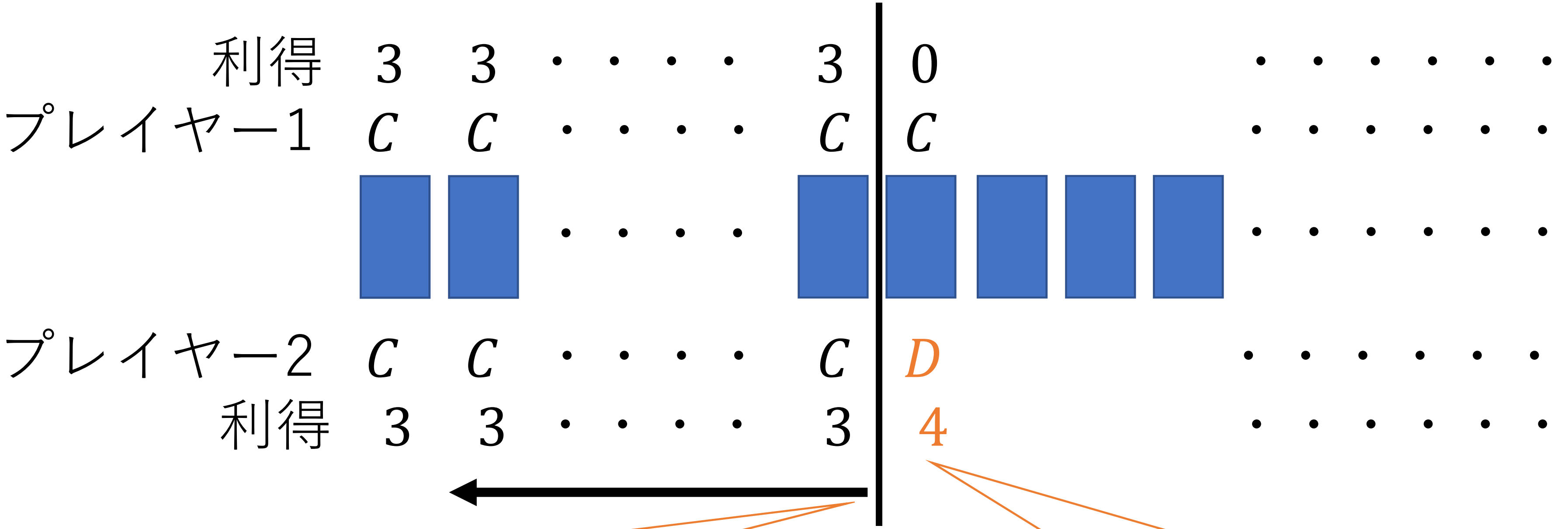
プレイヤー1が D を選ぶので

プレイヤー2の利得は 1以下

0 or 1

無限回繰返しゲーム

- プレイヤー2が途中でDを選ぶ戦略にかえたとき



ここまではプレイヤー2の利得は
戦略変更前後で変わらないので、

ここを1回目とみなして
比較すればOK

無限回繰返しゲーム

プレイヤー2の利得の比較

- $trigger$を選び続けたとき

$$\boxed{3+3\delta+3\delta^2+\cdots=\frac{3}{1-\delta}}$$

- 途中でDを選ぶ戦略に変更したとき、

$$\boxed{4+\delta+\delta^2+\cdots=4+\frac{\delta}{1-\delta}\ (\text{以下})}$$ （以下）

1の場合で勝ている

上の利得が下の利得以上なら、$trigger$は$trigger$に対する最適反応戦略。

無限回繰返しゲーム

$$\boxed{\frac{3}{1-\delta} \geqq 4 + \frac{\delta}{1-\delta}}$$

となるのは、

$3 \geqq 4(1-\delta) + \delta$
$\delta \geqq \frac{1}{3}$

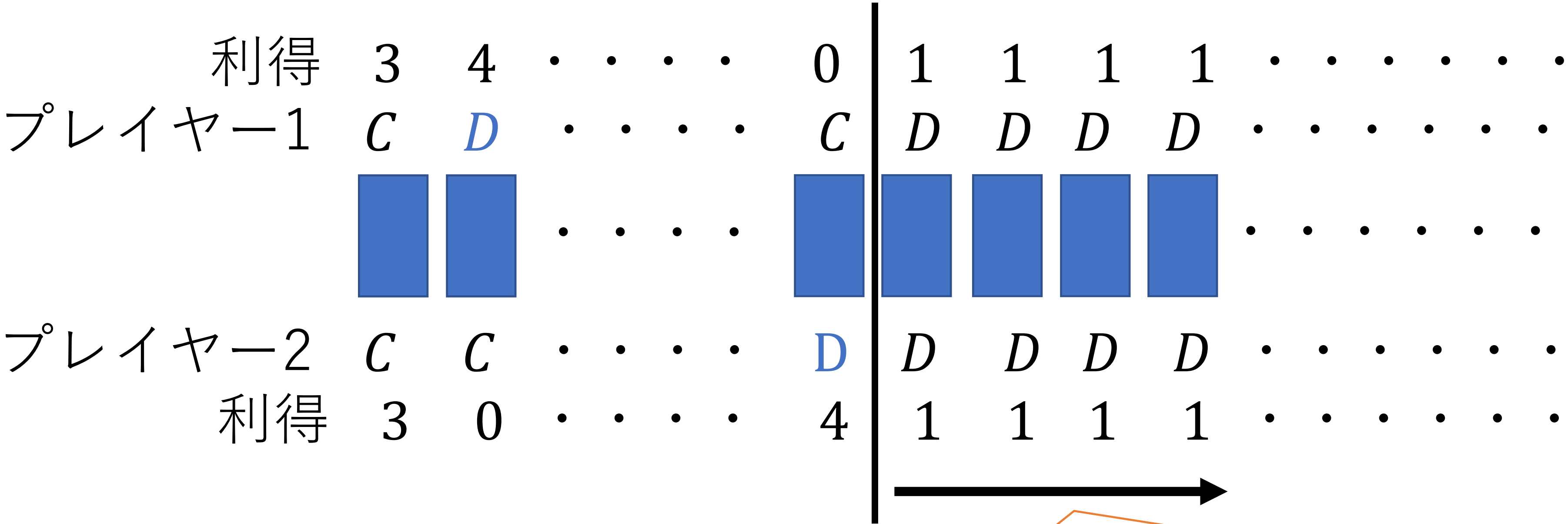
割引率δが十分大きければ (trigger, trigger) はナッシュ均衡.

無限回繰返しゲーム

- $(trigger, trigger)$のときに、自分だけDを選択すると
  - 1度だけ大きな利得(4)を獲得できるが、
  - その後はずっと小さな利得(1以下)で我慢しなければならない。
- 割引率δが十分大きい、つまり将来のことを重要視するプレイヤーは戦略を変更する動機がない。
- 逆に割引率δが小さい、つまり将来のことはどうでもいいプレイヤーにとってはすぐに大きな利得を得られることは戦略を変更する動機になる。
- $(trigger, trigger)$は部分ゲーム完全均衡にもなっているか？

無限回繰返しゲーム

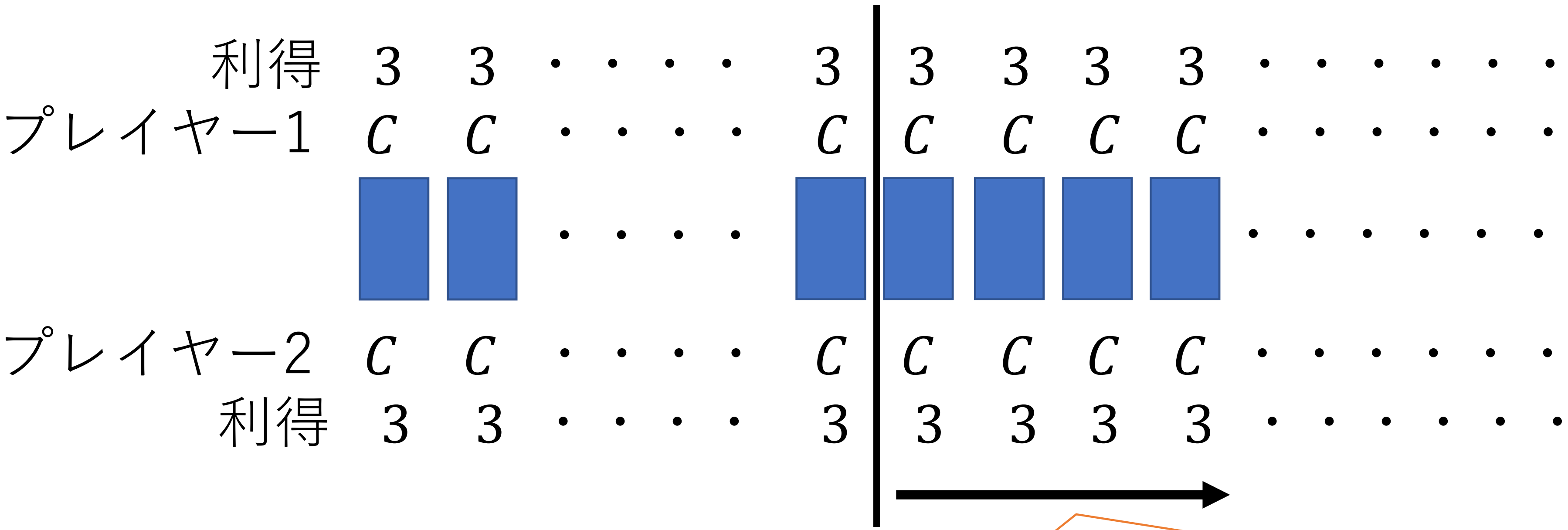
- 過去に(C,C)以外が起こったことがある部分ゲーム。



ここから先は$\boxed{\text{(allD, allD)}}$をとっているのと同じなので
ナッシュ均衡になっている。

無限回繰返しゲーム

- 過去に(C, C)以外が起こったことがない部分ゲーム。



ここから先も (trigger, trigger) をとっているのと同じなので
ナッシュ均衡になっている。

無限回繰返しゲーム

- 部分ゲームは
  - 「過去に(C, C)以外が起こったことがある部分ゲーム」か
  - 「過去に(C, C)以外が起こったことがない部分ゲーム」のいずれか
- 以上の議論から $\boxed{\text{(trigger, trigger)}}$ はすべての部分ゲームでナッシュ均衡となるような戦略を導出することがわかる。

(trigger, trigger) は部分ゲーム完全均衡

フォーク定理

- 無限回繰返しゲームにすると 「互いに協力しつづける」 という有限回繰返しでは観察されなかった部分ゲーム完全均衡が存在。
  - これだけじゃない。
- 無限回繰返しゲームでは多くの利得の組が部分ゲーム完全均衡として達成されることが知られている。
  - フォーク定理
- (厳密さを欠くが)次のスライドの
  - 青い部分かつ
  - オレンジの点線より右上にある にある

利得組(を$1-\delta$で割ったもの)はδを十分大きくすれば部分ゲーム完全均衡で達成される。

フォーク定理