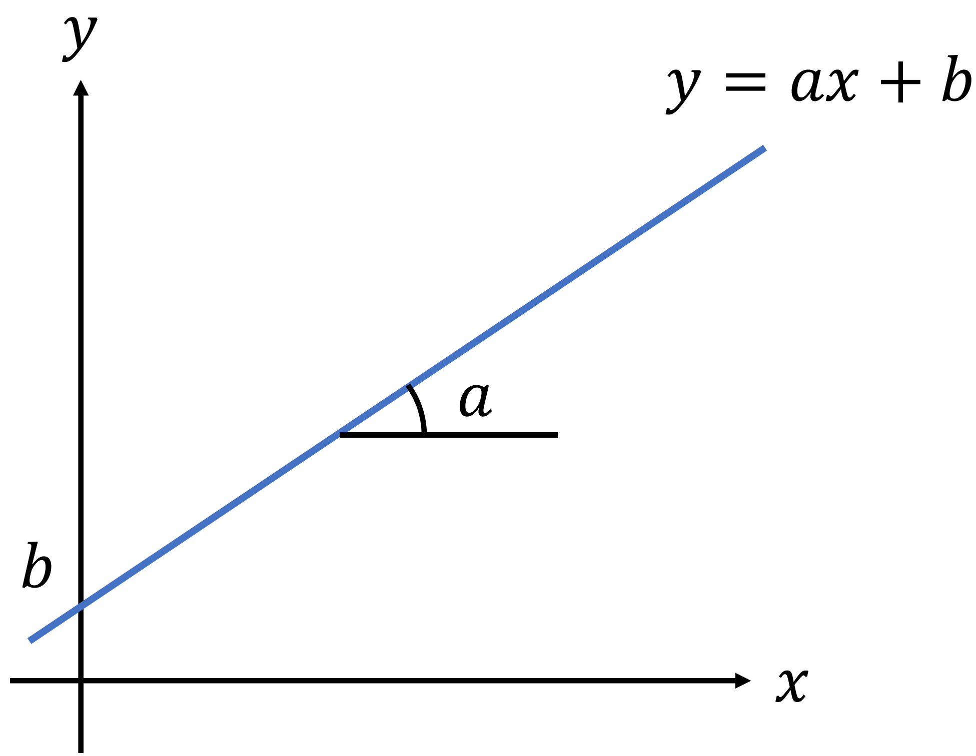
ミクロ経済学A/現代経済学I
第２回「微分の考え方・計算」

法政大学　経済学部　平井俊行

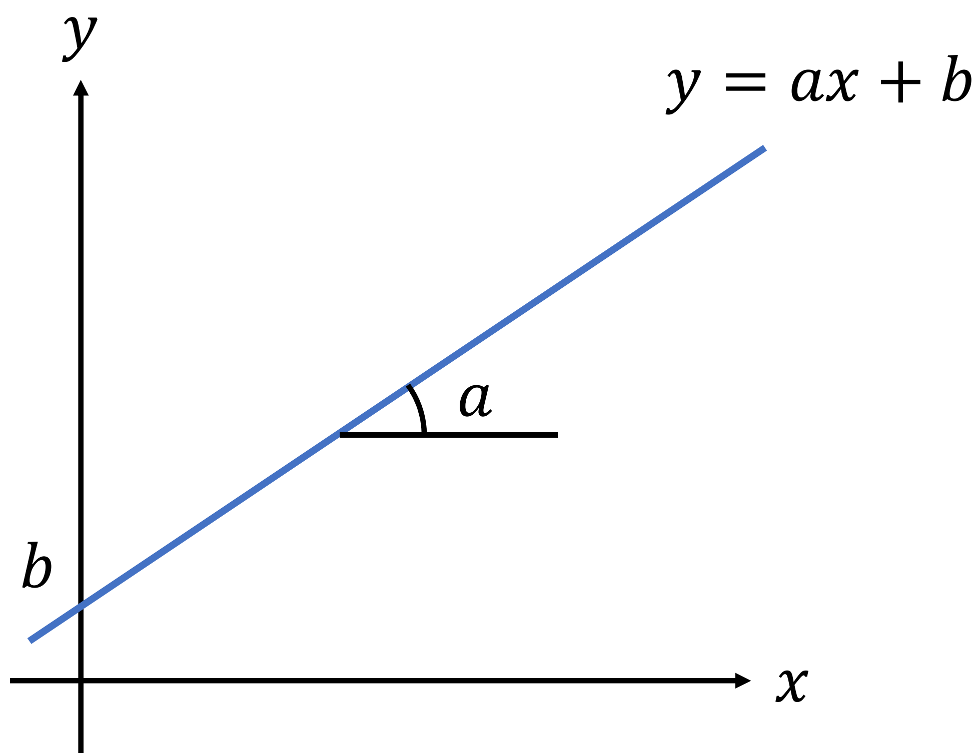
一次関数

- $y = ax + b$の形であらわされる関数。
  - xは 独立変数 、yは 従属変数
- このとき、
  - aは 傾き
  - bは 切片 もしくは y切片



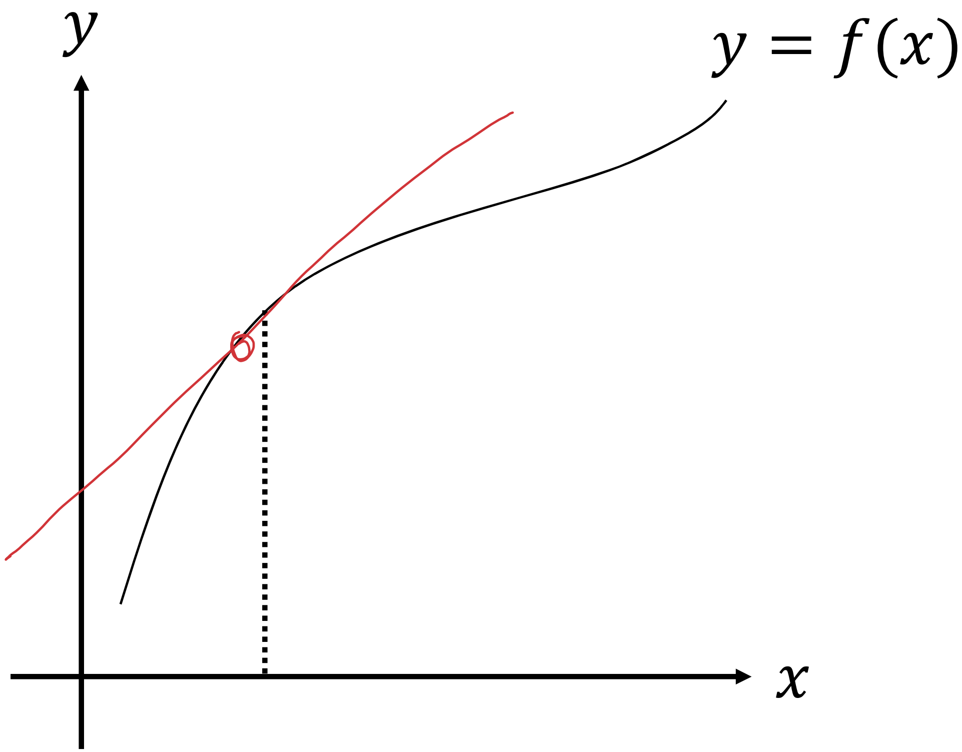
一次関数

- 一次関数のグラフは直線。
- 傾きとは、xが1増加したときにyが どれだけ増加するか をあらわしたもの。
  - 傾きがマイナスであればxが1増加したときにyはその傾きからマイナスを除いたものだけ減少
- 傾きはxの変化に応じてyがどの程度変化するかをあらわすパラメータ。



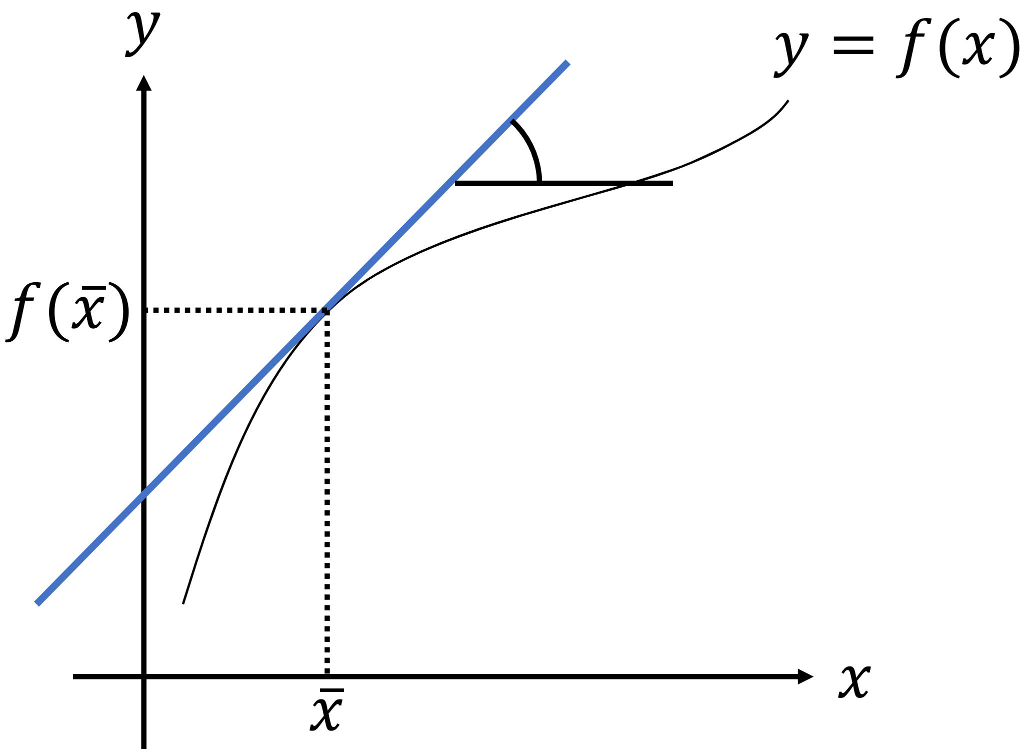
微分

- 微分は関数に行う操作。
- 関数のグラフの 接線の傾き を求める操作。
  - 接線は直線なので一次関数のグラフとしてとらえられる。
- 接線は 「局所的」 には元の関数のグラフを近似している。
- 接線の傾きは、接点付近での元の関数の「xの変化に応じたyの変化」をとらえている。



用語と記号の整理

- $y=f(x)$のグラフの$(\bar{x}, f(\bar{x}))$における接線の傾きを関数$f(x)$の$\bar{x}$における$\boxed{\text{微分係数}}$といい、$f'(\bar{x})$であらわす。
- 各xに対して関数$f(x)$のxにおける微分係数を割り当てる関数を$f(x)$の$\boxed{\text{導関数}}$といい$f'(x)$であらわす。
  - 導関数は他にも$y', f', \frac{df(x)}{dx}$などとあらわす場合もある。

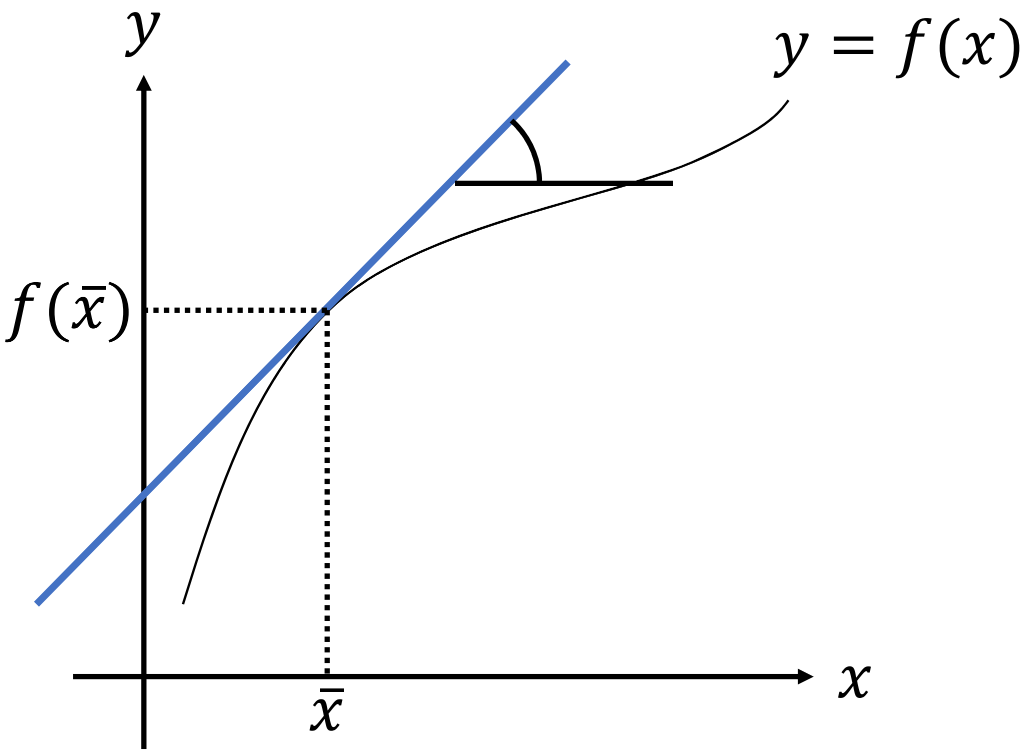


用語と記号の整理

- 「微分する」≈「導関数を求める」
- 「xで微分する」≈「xにおける微分係数を求める」

の場合がほとんど。

(少なくともこの講義では上のように使う)

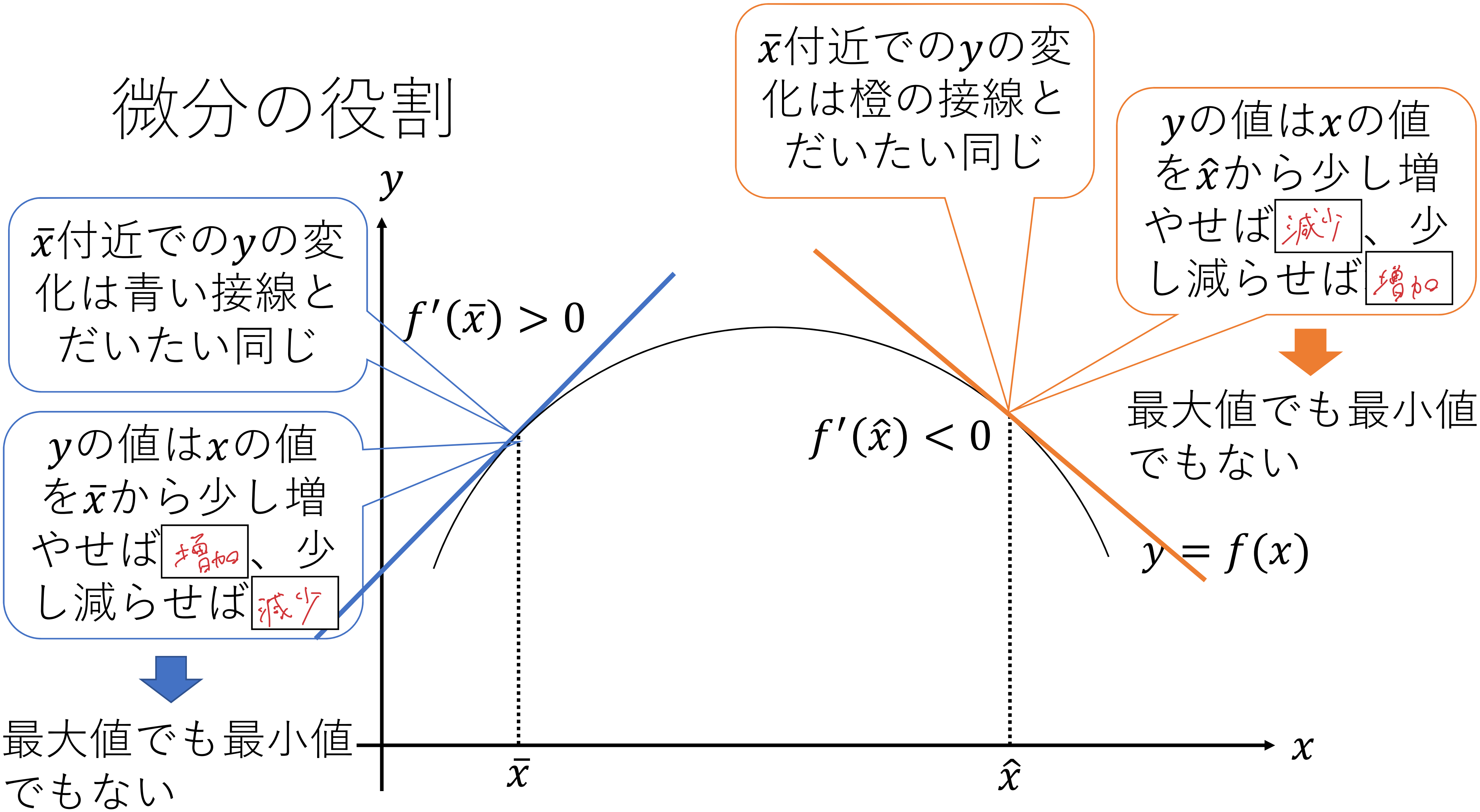


微分の役割

なぜ関数の近似をおこなう必要があるのか。

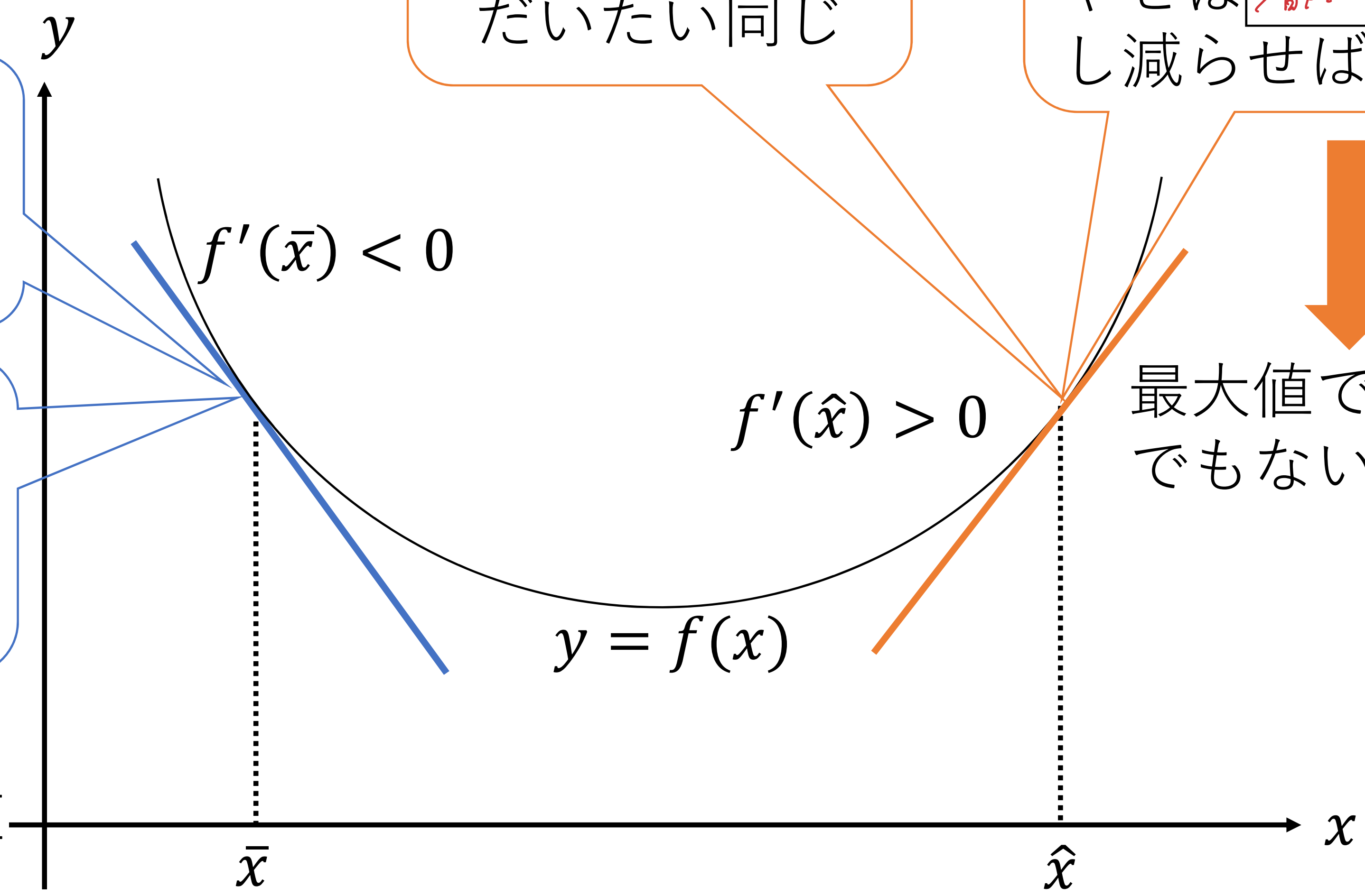
- 経済学では、関数の最大値や最小値を求めることが多い。
- それをおこなうための便利な道具。

微分の役割



$\bar{x}$付近でのyの変化は橙の接線とだいたい同じ
yの値はxの値を$\hat{x}$から少し増やせば 減少 、少し減らせば 増加
最大値でも最小値でもない
$\bar{x}$付近でのyの変化は青い接線とだいたい同じ
yの値はxの値を$\bar{x}$から少し増やせば 増加 、少し減らせば 減少
最大値でも最小値でもない
y
$f'(\bar{x}) > 0$
$f'(\hat{x}) < 0$
$y = f(x)$
x
$\bar{x}$
$\hat{x}$

微分の役割



$\bar{x}$付近でのyの変化は青い接線とだいたい同じ
yの値はxの値を$\bar{x}$から少し増やせば$\boxed{\text{減少}}$、少し減らせば$\boxed{\text{増加}}$
最大値でも最小値でもない
$\hat{x}$付近でのyの変化は橙の接線とだいたい同じ
yの値はxの値を$\hat{x}$から少し増やせば$\boxed{\text{増加}}$、少し減らせば$\boxed{\text{減少}}$
最大値でも最小値でもない
y
$f'(\bar{x}) < 0$
$f'(\hat{x}) > 0$
$y = f(x)$
x
$\bar{x}$
$\hat{x}$

微分の役割

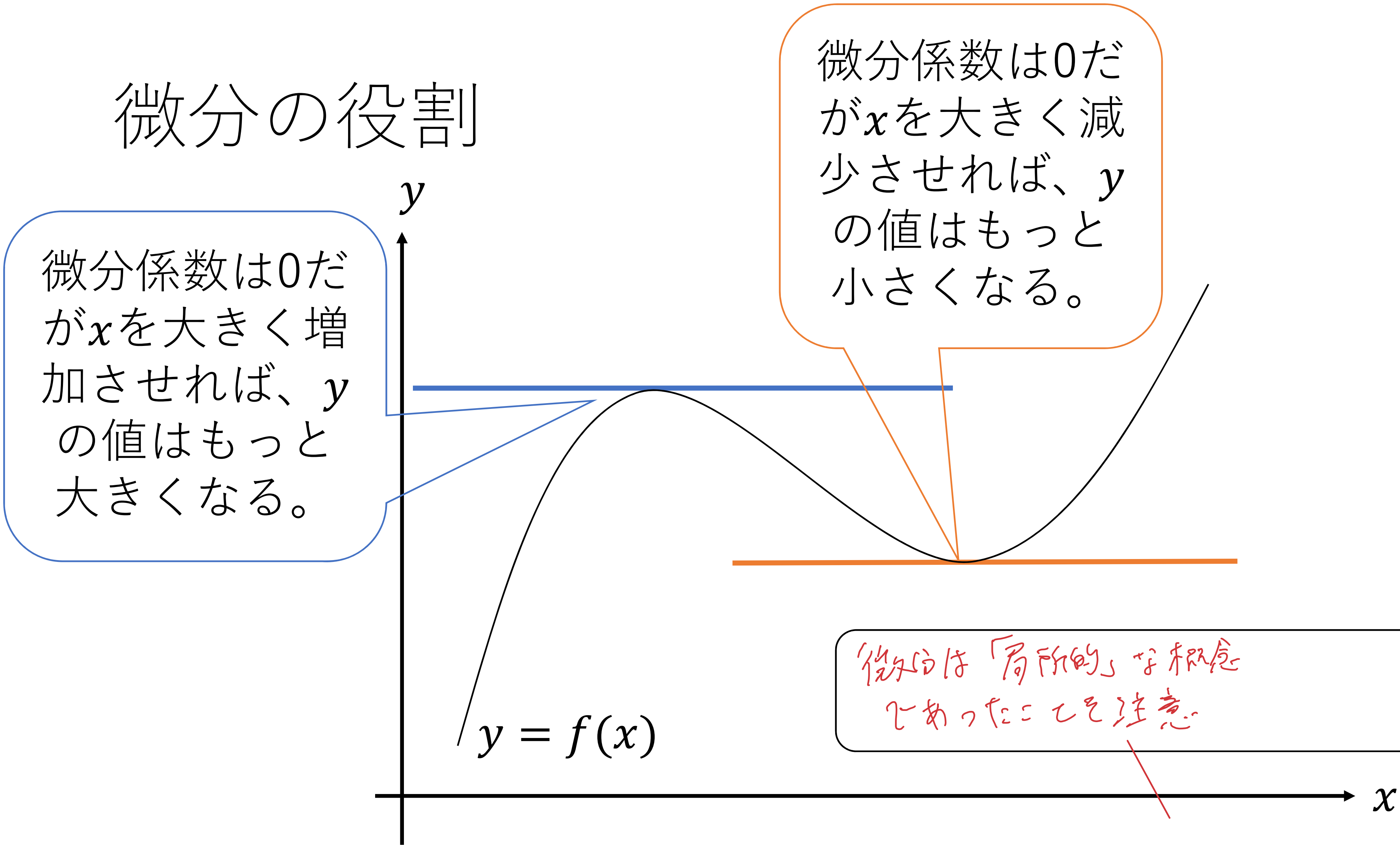
関数$y = f(x)$が

- $x = x^*$で最大値をとるならば、$f'(x^*)\boxed{0}$
- $x = x^*$で最小値をとるならば、$f'(x^*)\boxed{0}$

これらは必要条件であって十分条件ではない。

- 微分係数が0であっても最大値・最小値をとっているとは限らない。
- そもそも最大値・最小値のどちらか判別できない。

微分の役割



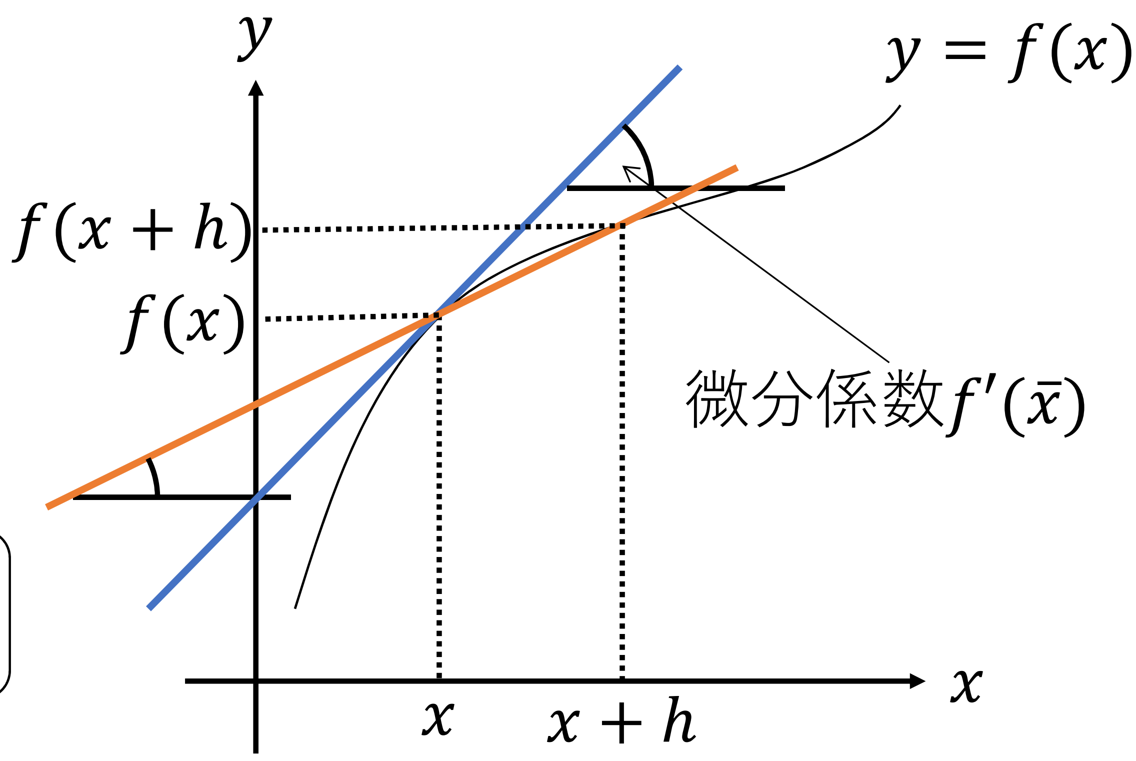
微分係数は0だがxを大きく減少させれば、yの値はもっと小さくなる。
y
微分係数は0だがxを大きく増加させれば、yの値はもっと大きくなる。
$y = f(x)$
微分は「局所的」な概念であったことを注意
x

微分の役割

- 微分係数が0になっているところで関数の値が最大になっている、もしくは最小になっていることを判定するためには追加的な条件が必要。
- 学部で習うミクロ経済学の大部分では微分係数が0となるところが最大値・最小値の求めたい方になるように問題が設定されている場合がほとんど。
  - すくなくとも本講義ではそのようにする。
- 本講義では、関数が最大・最小になるところを探すためには、微分係数が0になるところを見つければよいということで議論を進める。
  - 一階条件という。

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



接線に極限まで近づいていく。
(同じものとみなせる)。

微分の計算

- $f(x) = c$ (cは定数)のとき、$f'(x)$ $\boxed{0}$
- $f(x) = x^n$ のとき、$f'(x) = \boxed{nx^{n-1}}$
  - これを用いると、
  - $f(x) = \sqrt{x}$のとき、$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$なので、$f'(x)$ $\boxed{= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$ $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
  - $f(x) = \frac{1}{x}$のとき、$f(x) = x^{-1}$なので、

$$f'(x) \boxed{= (-1) \times x^{-1-1}} \boxed{= -x^{-2}} \boxed{= -\frac{1}{x^2}}$$

微分の計算

- $f(x) + g(x)$の導関数は $\boxed{f'(x) + g'(x)}$
- $\alpha f(x)$ (αは定数)の導関数は $\boxed{\alpha f'(x)}$
- $f(x)g(x)$ の導関数は、$\boxed{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$の導関数は、$\boxed{\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$

微分の計算

- $f(x) = -x^2 + 3x + 2$の導関数.

  バラバラにして微分してから加えなおせばよい。

- $-x^2$の導関数は、$\boxed{}$
- $3x$ の導関数は、$\boxed{}$
- 2の導関数は、$\boxed{}$

- $f'(x) =$ $\boxed{}$