ミクロ経済学B/現代経済学II
第５回「戦略形ゲーム④」

法政大学　経済学部　平井俊行

混合戦略

- コイン合わせゲームではナッシュ均衡が存在しなかった。
- ナッシュ均衡が存在しないということは、どの解釈を採用する場合でも何かしらの示唆を与えてくれるものではあるが、一定の条件の下で存在が保証されていると便利。
- 混合戦略を考える。
  - これまで戦略と呼んでいたものを確率に混ぜ合わせたもの。
  - これまで戦略と呼んでいたものを区別するために純粋戦略と呼ぶこともある。
- 各プレイヤーの戦略の数が有限個ずつの場合、混合戦略まで考えればナッシュ均衡は必ず存在することが知られている。

混合戦略

純粋戦略を確率的に混ぜ合わせるとはどういうことか。

- 各プレイヤーは私的な確率機構を持っている。
  - 例えばさいころ。
- コイン合わせゲームにおける混合戦略の具体例はHを確率$\frac{1}{3}$で、Tを確率$\frac{2}{3}$で出すというもの。
  - 戦略とは「行動の予定表」だったことに注意。
  - このような混合戦略を$(H,T;\frac{1}{3},\frac{2}{3})$と書くことにする。
- これは例えば、さいころを振って1,2がでたらHを、3,4,5,6がでたらTをだす、という予定表。

混合戦略

- 純粋戦略は特別な混合戦略とみなすことができる。
- $(H, T; 1,0)$は確率1でHを選び、確率0でTを選ぶので純粋戦略$\boxed{H}$と同じ。
- $(H, T; 0,1)$は確率0でHを選び、確率1でTを選ぶので純粋戦略$\boxed{T}$と同じ。

期待利得

- プレイヤーたちが混合戦略を用いると、ゲームの結果(戦略の組)も確率的におこることになる。
- 例えばコイン合わせゲームにおいて、プレイヤー1が$(H, T; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, プレイヤー2が$(H, T; \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$を選んだとすると…

期待利得

		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	1 \ 2	H	T
$\frac{1}{3}$	H	1, -1	-1, 1
$\frac{2}{3}$	T	-1, 1	1, -1

- (H,H)は確率$\boxed{\frac{3}{15}}$で、
- (H,T)は確率$\boxed{\frac{2}{15}}$で、
- (T,H)は確率$\boxed{\frac{6}{15}}$で、
- (T,T)は確率$\boxed{\frac{4}{15}}$で、起こる。

期待利得

- 期待利得とは、それぞれの戦略の組で獲得できる利得をそれぞれの戦略の組が起こる確率で評価した期待値。

今の例では

- プレイヤー1の$((H,T;\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(H,T;\frac{3}{5},\frac{2}{5}))$における期待利得は、

$$\boxed{\frac{3}{15}\times 1+\frac{2}{15}\times(-1)+\frac{6}{15}\times(-1)+\frac{4}{15}\times 1=-\frac{1}{15}}$$

- プレイヤー2の$((H,T;\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(H,T;\frac{3}{5},\frac{2}{5}))$における期待利得は、

$$\boxed{\frac{3}{15}\times(-1)+\frac{2}{15}\times 1+\frac{6}{15}\times 1+\frac{4}{15}\times(-1)=\frac{1}{15}}$$

期待利得

- vNM効用を用いているので、期待利得を考えることに意味がある。
- また、期待利得を考えても先に説明した正アフィン変換をしても同じものとみなせるという性質が保存される。
  - むしろ、期待利得を考えたとしてもこの性質が満たされることが重要。

混合戦略ナッシュ均衡

- プレイヤーの目的は$\boxed{\text{利潤最大化}}$
- 混合戦略を考えたときは、$\boxed{\text{期待利得の最大化}}$が目的に。
- 自分以外のプレイヤーたちの混合戦略を一旦固定したときに、自身の期待利得を最大にする混合戦略が$\boxed{\text{最適反応戦略}}$になる。

混合戦略ナッシュ均衡

		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
	1 \ 2	H	T
p	H	$1,\ -1$ $\frac{3}{5}p$	$-1,\ 1$ $\frac{2}{5}p$
$1-p$	T	$-1,\ 1$ $\frac{3}{5}(1-p)$	$1,\ -1$ $\frac{2}{5}(1-p)$

- プレイヤー2が$(H, T, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$を選んだとき,プレイヤー1が$(H, T, p, 1-p)$を選んだ場合の期待利得は、
- $\boxed{\frac{3}{5}p \times 1 + \frac{2}{5}p \times (-1) + \frac{3}{5}(1-p) \times (-1) + \frac{2}{5}(1-p) \times 1}$

$= \boxed{\frac{2}{5}p - \frac{1}{5}}$

- $(H, T, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$に対するプレイヤー1の最適反応戦略は、$\boxed{(H, T) = (1, 0)}$

混合戦略ナッシュ均衡

1 \ 2		H (q)	T ($1-q$)
$\frac{1}{3}$	H	1, -1	-1, 1
$\frac{2}{3}$	T	-1, 1	1, -1

- プレイヤー1が$(H, T, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$を選んだとき,プレイヤー2が$(H, T, q, 1-q)$を選んだ場合の期待利得は、
- $\boxed{\frac{1}{3}q \times (-1) + \frac{1}{3}(1-q) \times 1 + \frac{2}{3}q \times 1 + \frac{2}{3}(1-q) \times (-1)}$

$= \boxed{\frac{2}{3}q - \frac{1}{3}}$

- $(H, T, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$に対するプレイヤー2の最適反応戦略は、$\boxed{(H, T) = (1, 0)}$

混合戦略ナッシュ均衡

- 以上の議論から$\left(\left(H,T,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(H,T,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)\right)$は混合戦略ナッシュ均衡に ならない
- 混合戦略ナッシュ均衡を求めてみよう！
- プレイヤー1の混合戦略を$(H,T,p,1-p\,)$、プレイヤー2の混合戦略を$(H,T,q,1-q\,)$として、それぞれの最適反応戦略を考えてみる。

混合戦略ナッシュ均衡

		q	$1-q$
	1＼2	H	T
p	H	$1,\ -1$	$-1,\ 1$
$1-p$	T	$-1,\ 1$	$1,\ -1$

このとき、プレイヤー1の期待利得は、

$$pq\times 1+p(1-q)\times(-1)+(1-p)q\times(-1)+(1-p)(1-q)\times 1$$

$$=\boxed{4pq-2p-2q+1}$$

また、プレイヤー2の期待利得は、

$$=\boxed{-4pq+2p+2q-1}$$

プレイヤー1の最適反応戦略

- プレイヤー2の混合戦略を$(H, T, q, 1-q)$としたとき、プレイヤー1の期待利得を最大にするプレイヤー1の混合戦略を求める。
  - p(Hを選ぶ確率)を求めれば十分。
- $\boxed{4pq-2p-2q+1} = \boxed{(4q-2)p-2q+1}$
- $\boxed{4q-2}$の値に応じてプレイヤー1はpを決定。
  - $\boxed{4q-2>0}$ならば、pを$\boxed{\text{大きくする}}$ ⇒ $\boxed{(H,T)=(1,0)}$が最適反応戦略
  - $\boxed{4q-2<0}$ならば、pを$\boxed{\text{小さくする}}$ ⇒ $\boxed{(H,T)=(0,1)}$が最適反応戦略
  - $\boxed{4q-2=0}$ならば、pは$\boxed{\text{なんでも同じ}}$ ⇒ $\boxed{\text{すべて}}$最適反応戦略。

プレイヤー2の最適反応戦略

- プレイヤー1の混合戦略を$(H,T,p,1-p)$としたとき、プレイヤー2の期待利得を最大にするプレイヤー2の混合戦略を求める。
  - q(Hを選ぶ確率)を求めれば十分。
- $-4pq+2p+2q-1$ = $(-4p+2)q+2p-1$

- $-4q+2$の値に応じてプレイヤー2はqを決定。
  - $-4q+2>0$ならば、qを大きくする → $(H,T)=(1,0)$が最適反応戦略
  - $-4q+2<0$ならば、qを小さくする → $(H,T)=(0,1)$が最適反応戦略
  - $-4q+2=0$ならば、qはどれも同じ。 → すべて最適反応戦略。

最適反応戦略

プレイヤー2の$(H, T, q, 1-q)$に対するプレイヤー1の最適反応戦略

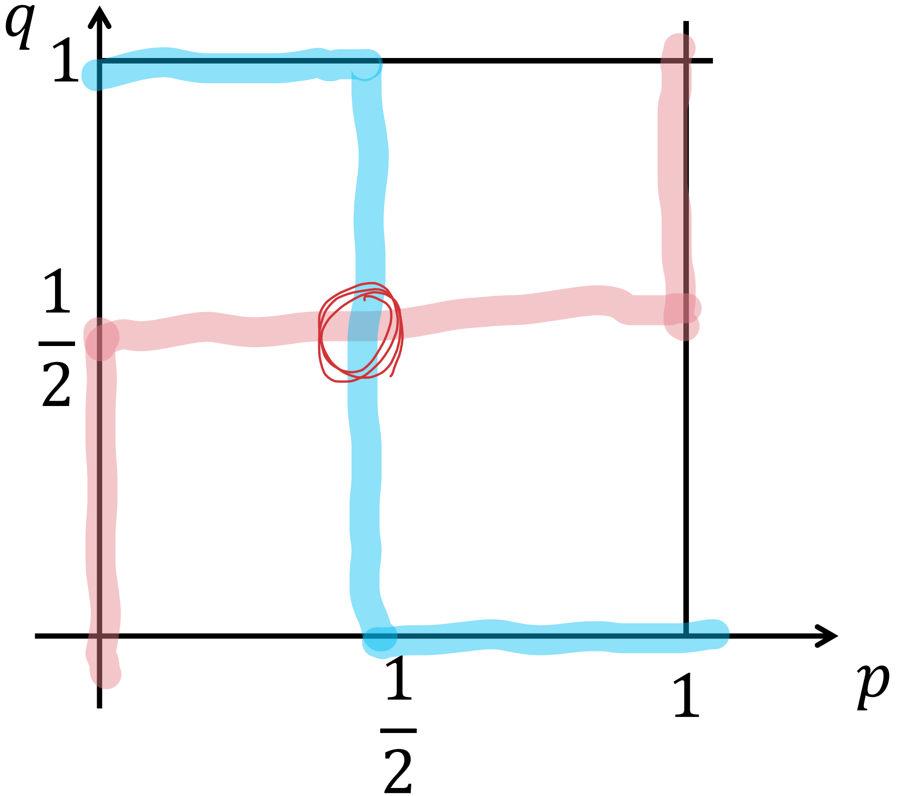
- $q > \frac{1}{2}$ のとき、$(H, T) = (1, 0)$ が最適反応戦略
- $q < \frac{1}{2}$ のとき、$(H, T) = (0, 1)$ が最適反応戦略
- $q = \frac{1}{2}$ のとき、すべての混合戦略 が最適反応戦略。

プレイヤー1の$(H, T, p, 1-p)$に対するプレイヤー2の最適反応戦略

- $p < \frac{1}{2}$ のとき、い が最適反応戦略
- $p > \frac{1}{2}$ のとき、い が最適反応戦略
- $p = \frac{1}{2}$ のとき、い が最適反応戦略。

混合戦略ナッシュ均衡

- 各プレイヤーの最適反応戦略をグラフで書いてみる。
  - 最適反応曲線とよぶ。



(混合戦略)ナッシュ均衡は

$\left(\left(H, T, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \left(H, T, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$

混合戦略ナッシュ均衡の特徴

- ２プレイヤー、２戦略の場合。（もうちょっと拡張可能。）
- 混合戦略ナッシュ均衡は、プレイヤー1の最適反応曲線が 水平 になっていて、プレイヤー2の最適反応曲線が 垂直 になっているところで交わる。
  - プレイヤー1がどの戦略を選んでも期待利得が 変わらない
  - プレイヤー2がどの戦略を選んでも期待利得が 変わらない 。
- 混合戦略ナッシュ均衡では、
  - プレイヤー2はプレイヤー1がどの純粋戦略を選んでもプレイヤー1の期待利得が 変わらない ように自身の混合戦略を選んでいて、
  - プレイヤー1はプレイヤー2がどの純粋戦略を選んでもプレイヤー2の期待利得が 変わらない ように自身の混合戦略を選んでいる。

混合戦略ナッシュ均衡の特徴

- ２プレイヤー、２戦略ゲームの混合戦略ナッシュ均衡では、
- 各プレイヤーは、相手のプレイヤーが純粋戦略を　　　　　　できないような混合戦略を選んでいる。
- 戦略の数が増えても同様のことが言える。

混合戦略ナッシュ均衡

拡張した状況(戦略の数が2より多い)の話だが、

- じゃんけんではみんな(意識せずとも)相手に「予想されないように」手を出している。
- また、サッカーのPKやテニスのサービスについて、プロの選手たちは混合戦略ナッシュ均衡と整合的なプレイをしていることが確かめられている。(他にも探せば出てくるはず)
  - Walker, Wooders (2001) “Minimax Play at Wimbledon” American Economic Review, Vol. 91, pp. 1521-1538.
  - Chiappori, Levitt, Groseclose (2002) “Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer” American Economic Review, Vol. 92, pp. 1138-1151.

練習問題

- 問題1: 次の戦略形ゲームのナッシュ均衡を(混合戦略も含めて)すべて求めなさい。

1 ＼ 2	P	M
P	2 1	0 0
M	0 0	1 2

問題1

- ちなみにこれは男女の争いと呼ばれるゲーム。

		q	$1-q$
	2＼1	P	M
p	P	2 1	0 0
$1-p$	M	0 0	1 2

プレイヤー1の混合戦略を$(P, M, p, 1-p)$
プレイヤー2の混合戦略を$(P, M, q, 1-q)$
とあらわすと、各々の期待利得は、

プレイヤー1:

プレイヤー2:

問題1

- プレイヤー1の期待利得をpでまとめると、

$$\boxed{} = \boxed{}$$

プレイヤー2の$(H, T, q, 1-q)$に対して、プレイヤー1は、

- $\boxed{}$、つまり$\boxed{}$のとき、$\boxed{}$とするのが最適反応戦略
- $\boxed{}$、つまり$\boxed{}$のとき、$\boxed{}$とするのが最適反応戦略
- $\boxed{}$、つまり$\boxed{}$のとき、$\boxed{}$が最適反応戦略

問題1

- プレイヤー2の期待利得をqでまとめると、

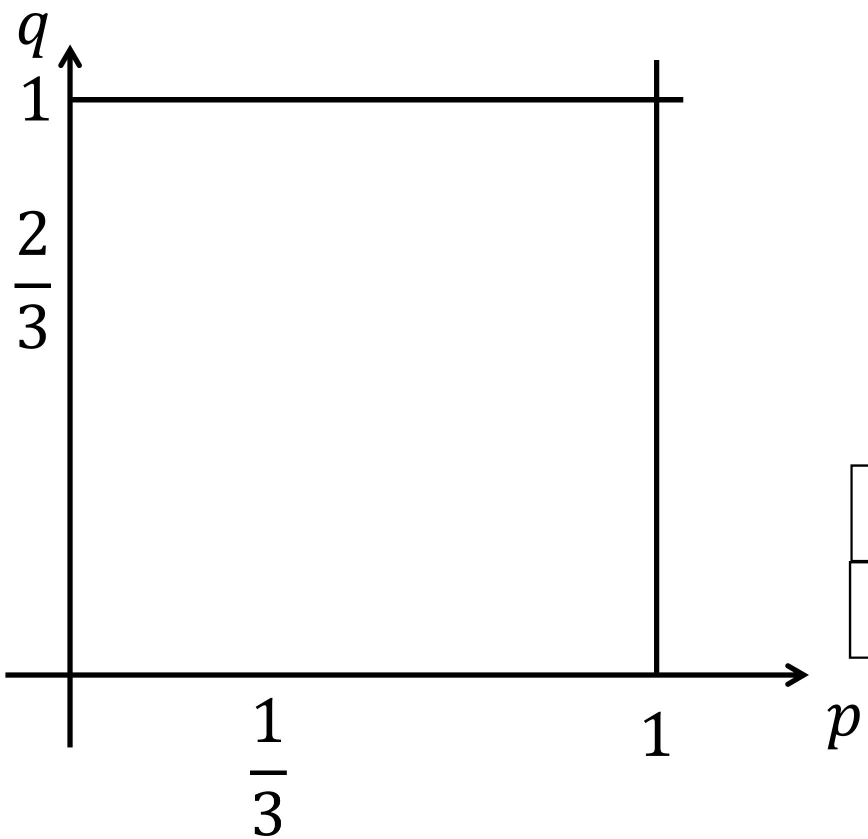
=

プレイヤー1の$(H, T, p, 1-p)$に対して、プレイヤー2は、

- 、つまり のとき、 とするのが最適反応戦略
- 、つまり のとき、 とするのが最適反応戦略
- 、つまり のとき、 が最適反応戦略

問題1

- 最適反応曲線を描くと、



ナッシュ均衡は、(左下から)

なお、

は

は

より複雑な戦略形ゲーム

- 今後の講義で分析するのはより複雑なゲームも多い。
- 特に戦略の数が無限の場合。
  - 各プレイヤーが０以上の実数を選べたり、ある範囲にある実数を選べたり。
- 慣れてしまえば、(当然ものによるが)そちらの方が解きやすい。
  - 手順通りにやれば解ける。
  - 「　　　　　を求める」→「　　　　　を求める」
- ナッシュ均衡はあくまで互いの戦略が他のプレイヤーの戦略に対する　　　　　となっているような　　　　　